ГЕНЕРАЦИЯ СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ С ДИЛАТОНОМ ИЗ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ВАКУУМЕ

О.В. Кечкин[1], И.П. Денисова[2], П.А. Мошарев[1]
[1] Физический факультет МГУ; [2] Московский авиационный институт
E-mail: kechkin@sinp.msu.ru

Калибровочные теории лежат в основе описания физики элементарных частиц. Калибровочный метод введения фундаментальных взаимодействий полностью оправдал себя при построении Стандартной Модели. Кроме того, все реалистические Теории Великого Объединения (включая теорию струн) являются, в обобщённом смысле, калибровочными и включают в себя в низкоэнергетическом пределе Стандартную Модель.

Конфайнмент как явление (то есть удержание кварков «внутри» адронов) установлен экспериментально. Его статус как математического феномена остаётся, при этом, одним из основных вызовов и проблем современной теоретической физики. Ожидается, что конфайнмент имеет место в калибровочных теориях элементарных частиц – прежде всего, в Стандартной Модели. Так ли это – то есть гарантируется ли динамикой данной калибровочной теории механизм захвата и удержания кварков – до сих пор открытый вопрос. Основные трудности в попытках на него ответить связаны с существенной нелинейностью любой сколько-нибудь содержательной калибровочной теории (например, Стандартной Модели), делающей крайне проблематичным как применение точных методов, так и приближённый анализ явлений, не являющихся малыми поправками к тем или иным тривиальным процессам. Разумеется, конфайнмент относится к числу таких «абсолютных» феноменов с очевидно непертурбативными свойствами.

Между тем, уже в эйнштейновской Общей Теории Относительности (ОТО) явление удержания – то есть своего рода конфайнмент – реализовано в рамках физики чёрных дыр. А именно, в спектре решений ОТО, которая также является нелинейной теорией, имеется, например, решение Шварцшильда – точное статическое и сферически-симметричное решение, обладающее горизонтом. Для пробных частиц горизонт оказывается «ловушечной» поверхностью, попав под которую такие частицы уже никогда не смогут вернуться обратно – во внешнюю область.

Наша основная идея состоит в том, чтобы использовать «напрямую» конфайнмент в ОТО в рамках построения калибровочной теории, обладающей общим с ОТО подпространством решений, включающим в себя и решения, описывающие чёрные дыры. Нас интересует ответ на вопрос о том, сохраняют ли «чернодырные» решения из ОТО свои «ловушечные» свойства в уже новой, калибровочной, теории.

Как оказалось, система взаимодействующих в соответствии с теорией струн максвелловского (U(1)-калибровочного) и скалярного (дилатонного) полей является теорией искомого типа [1], [2]. Она называется дилатон-максвелловской электродинамикой (ДМЭ); соответствующее ей действие имеет следующий вид:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} e^{-2\alpha\phi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right), \quad (1)$$

где ϕ – дилатон, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – напряжённость максвелловского поля, а α – постоянная дилатон-максвелловской связи. В теории струн $\alpha = 1$, пятимерная теория Калуцы-Клейна приводит к значению $\alpha = \sqrt{3}$. Мы рассматриваем ДМЭ с произвольной константой связи $\alpha \neq 0$; такая теория является нелинейной. Индексы поднимаются и опускаются при помощи метрики Минковского $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$. Мы начали изучение этой теории в работах [1]-[2], в которых были найдены скрытые симметрии статической ДМЭ и построены инвариантные по группе симметрий классы монопольных решений в этой теории.

Уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие действию (1), определяют «ДМЭ-вакуум», на фоне которого рассматривается динамика пробных частиц. Уравнение движения для них – записанный в четырёхмерной форме Второй закон Ньютона – определяется специальным образом модифицированной силой Лоренца:

$$\frac{du^\mu}{ds_0} = \frac{q}{m} e^{-\alpha\phi} F^{\mu\nu} u_\nu + \alpha(\eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)\partial_\nu\phi, \qquad (2)$$

где q и m – электрический заряд частицы и её масса, $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds_0}$ – четырёхмерная скорость, а $ds_0 = \sqrt{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$ – дифференциал интервала, вычисляемого вдоль мировой линии частицы. Важно отметить, что уравнение движения (2) согласовано с принципом наименьшего действия, его вывод дан в [3]. Именно подчинение теории принципу наименьшего действия определяет второй - дилатонный член в правой части (2), не исчезающий в случае тривиального электромагнитного поля.

Наше первое утверждение состоит в том что, при определённых ограничениях, уравнения на ДМЭ-фон, определяемые действием (1), в точности совпадают с уравнениями ОТО в вакууме

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (3)$$

где $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, вычисленный по пространственно- временной метрике $g_{\mu\nu}$, являющейся теперь уже динамической функцией $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\lambda)$. Эти ограничения сводятся к следующему: ДМЭ нужно брать в её статическом (то есть электро- или магнитостатическом) сегменте, в то время как метрика из ОТО должна быть стационарной. Далее, обе теории нужно рассматривать в аксиально-симметричном случае, в результате поля ДМЭ и ОТО не будут зависеть от времени и полярного угла. Кроме того, или электрический потенциал A_0, или векторный потенциал $\vec{A}$ в ДМЭ должен быть тривиален.

Параметризуя квадрат интервала из ОТО согласно

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = f\left(dt + \omega_\phi d\phi\right)^2 - f^{-1}dl^2, \quad (4)$$

где квадрат трёхмерного элемента длины задан в форме Льюиса и Папапетру

$$dl^2 = e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2, \quad (5)$$
получаем общий вид стационарной и аксиально-симметричной метрики $g_{\mu\nu}$ в терминах функций f, ω_ϕ и γ пространственных переменных $x^1 = \rho$ и $x^2 = z$ (от $x^0 = t$ и $x^3 = \phi$ метрика, как мы считаем, не зависит). Утверждение состоит тогда в том, что если метрика (4)-(5) удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна (3), то поля
$$\phi = -\frac{1}{\alpha}\log f, \quad A_\phi = \frac{2}{\alpha}\omega_\phi, \quad A_0 = 0 \quad (6)$$
являются решениями уравнений ДМЭ, получаемым из действия (1) – то есть задают магнитостатический сектор теории. Для электростатического сектора получается следующий результат:
$$\phi = \frac{1}{\alpha}\log f, \qquad A_0 = \frac{2}{\alpha}\chi, \quad A_\phi = 0, \quad (7)$$
где потенциал χ определяется соотношениями $\partial_\rho \chi = -f^2 \rho \partial_z \omega_\phi$ и $\partial_z \chi = f^2 \rho \partial_\rho \omega_\phi$. При этом плоское пространство-время ДМЭ описывается координатами t, ρ, z, ϕ; соответствующий квадрат интервала есть
$$ds_0^2 = dt^2 - dl_0^2, \quad \text{где} \quad dl_0^2 = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\phi^2 \quad (8).$$
Таким образом, для перехода от ОТО к ДМЭ нужно, дополнительно к формулам (6)-(7), положить $\gamma = 0$ в метрике (5). Формулы (6)-(8) полностью определяют перевод стационарного решения ОТО в статическое решение ДМЭ.

В качестве примера рассмотрим наиболее известное из нетривиальных стационарных аксиально-симметричных вакуумных решений ОТО – метрику Керра, которая описывает массивную вращающуюся чёрную дыру. Она имеет вид (4)-(5) с
$$f = \frac{R^2 - M^2 + a^2 cos^2\theta}{(R+M)^2 + a^2\cos^2\theta}, \quad \omega_\phi = \frac{2aM(R+M)\sin^2\theta}{R^2 - M^2 + a^2\cos^2\theta} \qquad (9)$$
и
$$dl^2 = (R^2 - M^2 + a^2\cos^2\theta)\left(\frac{dR^2}{R^2 + a^2 - M^2} + d\theta^2\right) + (R^2 + a^2 - M^2)\sin^2\theta d\phi^2,$$
где константы M и a масса и параметр вращения чёрной дыры. Для этой метрики
$$e^{2\gamma} = \frac{R^2 - M^2 + a^2\cos^2\theta}{R^2 + (a^2 - M^2)\cos^2\theta}, \quad \chi = \frac{2aMcos\theta}{(R+M)^2 + a^2\cos^2\theta} \quad (10)$$
(координаты R, θ связаны с координатами ρ, z соотношениями $\rho = \sqrt{R^2 + a^2 - M^2} sin\theta, \quad z = Rcos\theta$).

Применяя формулы (6)-(8), для соответствующих полей ДМЭ получаем:
$$A^0 = \frac{4aMcos\theta}{\alpha[(R+M)^2 + a^2\cos^2\theta]}, \quad A_\phi = \frac{4aM(R+M)\sin^2\theta}{\alpha[R^2 - M^2 + a^2\cos^2\theta]},$$

$$\phi = \pm\frac{1}{\alpha}\log\frac{R^2 - M^2 + a^2 cos^2\theta}{(R+M)^2 + a^2\cos^2\theta}, \qquad (11)$$
где +/- соответствует электро-/магнитостатическому секторам теории. При

этом плоская метрика ds_0^2 в ДМЭ задаётся, в контексте формул (8), квадратом трёхмерного плоского элемента длины

$$dl_0^2 = [R^2 + (a^2 - M^2)\cos^2\theta]\left(\frac{dR^2}{R^2 + a^2 - M^2} + d\theta^2\right) + (R^2 + a^2 - M^2)\sin^2\theta d\phi^2. \quad (12)$$

Асимптотики полученного решения при $R \to +\infty$ имеют вид

$$A^0 \to \frac{p cos\theta}{R^2}, \qquad A_\phi \to \frac{p sin^2\theta}{R}, \qquad \phi \to \frac{q_\phi}{R} \quad (13)$$

с $p = \frac{4aM}{\alpha}$ и $q_\phi = \mp\frac{2M}{\alpha}$. Таким образом, решение Керра из ОТО генерирует в ДМЭ электрический/магнитный диполь p с нетривиальным дилатонным зарядом q_ϕ.

Возвращаясь к теме конфайнмента, воспользуемся интегралом движения энергетического типа, установленным в [3] для динамики (2) пробной частицы на фоне стационарного ДМЭ-фона (1):

$$E = mu^0 e^{\alpha\phi} + qA^0. \ (14)$$

С его помощью легко устанавливается, что в электростатическом случае, который особенно интересен для приложений (например, в физике кварков – электрически заряженных частиц), поверхность

$$R = R_h = \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}, \ (15)$$

является «ловушечной» в традиционном для ОТО смысле. А именно, утверждается, что чем ближе оказывается пробная частица к этой поверхности в начальный момент времени, тем большей начальной скоростью она должна обладать для того, чтобы «уйти» на заданное расстояние – например, на пространственную бесконечность. Действительно, подставляя (11) в (15), в пределе $R \to R_h$ получаем:

$$u^0 \to \frac{M}{mR_h(R - R_h)}\left[E(M + R_h) - \frac{2aq\,cos\theta}{\alpha}\right] \to +\infty \ (16)$$

(для траекторий со значениями θ, которые обеспечивают положительную определённость u^0 в (16), когда данный предел и оказывается возможным). Тогда, в силу определения $u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, приходим к выводу, что $v \to 1$. По непрерывности, далее, заключаем, что для выхода из-под поверхности $R = R_h$ массивная частица должна преодолеть скорость света, что для неё невозможно. Это и означает наличие у электростатического решения Керра в ДМЭ свойств конфайнмента по отношению к пробным заряженным массивным частицам.

Можно показать, что в магнитостатичеком секторе ДМЭ поверхность $R = R_h$ также оказывается недостижимой для массивных пробных частиц.

1. O.V. Kechkin, P.A. Mosharev. Structures of General Relativity in dilaton-Maxwell electrodynamics, Mod. Phys. Lett. A31, № 23, p. 1650127, 2016.
2. O.V. Kechkin, P.A. Mosharev. Singularity-free interaction in dilaton-Maxwell electrodynamics, Mod. Phys. Lett. A31, № 31, p. 1650169, 2016.
3. I.P. Denisova, O.V. Kechkin. Least action principle for Lorentz force in dilaton-Maxwell electrodynamics, Phys. Part. Nucl. Lett. 15 №5, pp. 464-468.