БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, СТОХАСТИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: НОВЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Тезисы и тексты докладов
Международной конференции 15-18 декабря 2014 года

Москва
Российский университет дружбы народов
2014

УДК 519.2:519.8(063)
ББК 22.17/18
Б53

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ)
по проекту № 14-01-20380_Г

Б53 **Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования** : Тезисы и тексты докладов международной конференции, Москва, РУДН, 15-18 декабря 2014 г. – Москва : РУДН, 2014. – 560 с. : ил.

ISBN 978-5-209-06250-9

В сборнике представлены тезисы и материалы докладов по широкому спектру научных результатов в области математики: бесконечномерный анализ, геометрические, топологические и комбинаторные структуры на многообразиях, нелокальные и некорректные задачи, уравнения математической физики, математическое моделирование, приложения математики и информатики.

Представлены результаты научных исследований в области истории математики и естествознания, педагогики, в том числе методики преподавания математики в школе и вузе, намечены пути повышения мотивации к изучению математики в современном обществе.

УДК 519.2:519.8(063)
ББК 22.17/18

ISBN 978-5-209-06250-9

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Председатель: В.М. Филиппов, ректор РУДН, академик РАО;

Сопредседатели: С.В. Емельянов, академик РАН, председатель Президиума НМС по математике; А.С. Сигов, президент МГТУ МИРЭА, академик РАН; А.Г. Ягола, заместитель председателя Президиума НМС по математике, профессор МГУ.

Заместители председателя: В.А. Лазарев, директор ЦСО; С.А. Розанова, учёный секретарь НМС по математике, профессор МГТУ МИРЭА; В.М. Савчин, профессор РУДН; Ю.И. Худак, профессор МГТУ МИРЭА;

Члены оргкомитета: М.Н. Андреева, генеральный директор издательства ФИЗМАТЛИТ; Р.М. Асланов, профессор МПГУ; В.В. Афанасьев, ректор ЯГПУ; П.С. Геворкян, профессор АТИСО; О.В. Зимина, профессор МЭИ; С.И. Кабанихин, профессор НГУ, член-корреспондент РАН; А.И. Кириллов, профессор РФФИ; Н.Н. Нефедов, профессор МГУ; Н.Х. Розов, декан МГУ, член-корреспондент РАО; П.В. Семенов, профессор МГПУ; Б.Ю. Стернин, профессор РУДН; В.Н. Чубариков, декан МГУ, профессор.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Б. Баймуханов, профессор (Казахстан); З. Каденова, зам. министра труда и миграции (Киргизия); Е.И. Казакова, профессор (Украина); А.И. Кириллов, профессор (Россия); М.В. Клибанов, профессор (США); М. Мкртчян, зам. министра образования и науки (Армения); Ни Минкан, профессор (Китай); А.Л. Скубачевский, профессор (Россия); В.Д. Степанов, член-корреспондент РАН, профессор (Россия); А. Хасаноглу, профессор (Турция); А.Г. Ягола, профессор (Россия).

В программе конференции запланированы лекции для молодых ученых, круглые столы и доклады по следующим темам:

1. Бесконечномерный анализ и стохастика – руководитель А.И.Кириллов.
2. Геометрические, топологические и комбинаторные структуры на многообразиях – руководители В.М.Бухштабер, П.С.Геворкян.
3. Нелокальные задачи – руководитель А.Л.Скубачевский.
4. Некорректные задачи – руководитель А.Г.Ягола.
5. Математическая физика – И.В.Волович.
6. Математическое моделирование – руководители А.И.Кириллов, Н.Н.Нефедов.
7. Приложения математики и информатики – руководители А.И.Кириллов, В.А.Соколов.
8. Пути повышения мотивации к изучению математики и естественных наук в современном обществе – руководители М.Мкртчян, С.А.Розанова.
9. Развитие математики и математического естествознания – руководитель С.С.Демидов.
10. Проблемы преподавания математики в школе и вузе – руководители С.А.Розанова, П.В.Семенов.

В Москве в Российском университете дружбы народов с 15 по 18 декабря 2014 года пройдет международная конференция «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования».

Организаторы конференции: Российский университет дружбы народов (РУДН), Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) (МИРЭА), Научно-методический совет по математике Министерства образования и науки РФ (НМС), Центр современного образования (ЦСО)

Проведение конференции поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (Проект № 14-01-20380_Г).

Цель конференции – совместное выяснение новых задач бесконечномерного анализа, стохастики, математической физики и математического моделирования

Проведение конференции призвано способствовать решению следующих фундаментальных проблем:

- Математическое описание сложных систем:
- Классификация нелокальных уравнений, в том числе, стохастических;
- Существование и единственность решений нелокальных стохастических уравнений;
- Условия абсолютной непрерывности распределений на вероятностных бесконечномерных пространствах;
- Свойства плотностей стационарных распределений диффузий на многообразиях;
- Изучение обратных задач математической физики.

и других.

Для выступления с докладами и организации дискуссий приглашены И.Я. Арефьева (МИ РАН), В.И. Богачев (МГУ), Я.И. Белопольская (ПОМИ РАН), В.М. Бухштабер (МИ РАН), А.Ю. Веретенников (ИППИ РАН), И.В. Волович (МИ РАН), М.С., Ю.Е. Гликлих (ВорГУ), С.И. Кабанихин (НГУ), А.И. Кириллов (РФФИ), В.Д. Лахно (ИМПБ РАН), Р.А. Минлос (ИППИ РАН), И.Б. Петров (МФТИ), А.К. Погребков (МИ РАН), Е.С. Половинкин (МФТИ), И.Г. Поспелов (ВЦ РАН), А.А. Романюха (ИВМ РАН), В.М. Савчин (РУДН), А.Г. Сергеев (МИ РАН), А.Л. Скубачевский (РУДН), А.А. Славнов (МИ РАН), О.Г. Смолянов (МГУ), Н.В. Смородина (СПбГУ), В.Д. Степанов (РУДН), В.Ф. Тишкин (ИПМ РАН), В.Н. Чубариков (МГУ), А.Б. Шабат (ИТФ), Е.Т. Шавгулидзе (МГУ), С.В. Шапошников (МГУ), А.Н. Ширяев (МИ РАН), А.Г. Ягола (МГУ) и другие.

В ходе конференции будут сделаны и обсуждены пленарные доклады и доклады на следующих десяти секциях:

- Бесконечномерный анализ и стохастика
- Геометрические, топологические и комбинаторные структуры на многообразиях
- Нелокальные задачи.
- Некорректные задачи.
- Математическая физика.
- Математическое моделирование
- Приложения математики и информатики.

Параллельно и в связи с конференцией «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы» в РУДН пройдет международная конференция «Проблемы математического и естественнонаучного образования». Ее основная цель — способствовать решению фундаментальных проблем теории и методики преподавания для реализации Концепции развития математического образования в Российской Федерации, утвержденной Правительством Российской Федерации 24 декабря 2013 года.

Организаторы конференции: Российский университет дружбы народов (РУДН), Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) (МИРЭА), Научно-методический совет по математике Министерства образования и науки РФ (НМС), Центр современного образования (ЦСО)

Для выступления с докладами и организации дискуссий приглашены В.В. Афанасьев (ЯГПУ), И.И. Баврин (МПГУ), М.М.Мкртчан (Министерство образования и науки РА), Н.Х. Розов (МГУ), В.С. Сенашенко (РУДН), А.Л. Семёнов (МПГУ), В.М. Филиппов (РУДН), и др.

В ходе конференции будут сделаны и обсуждены пленарные доклады и доклады на следующих трех секциях:

- Пути повышения мотивации к изучению математики и естественных наук в современном обществе
- Развитие математики и математического естествознания
- Проблемы преподавания математики в школе и вузе

Итоги конференции будут способствовать дальнейшему развитию математики как науки, математических и педагогических научных школ, совершенствованию математического образования в средней школе и вузах.

Представленные в этом сборнике тезисы и тексты докладов обеих конференций печатаются в авторской редакции.

Оргкомитет

The international conference "Infinite dimensional analysis, stochastics, mathematical modeling: new problems and methods" takes place in Peoples' Friendship University of Russia (Moscow) on December 15-18, 2014.

The conference is organized by Peoples' Friendship University of Russia, Moscow State Institute of Radiotechnique, Electronics and Automatics (Technical University), Scientific and Methodic Council of the Russian Ministry of Science and Education and Centre of Modern Education. The conference is supported by the RFBR grant № 14-01-20380..

The conference is expected to help in solving the following fundamental [problems

- Mathematical description of complex systems:
- Classification of non-local equations including the stochastic ones;
- Existence and unity of solutions of non-local stochastic equations;
- Conditions of absolute continuity pf distributions on infinite-dimensional spaces.;
- Properties of stationary distributions of diffusions in manifolds;
- Solutions of the inverse problems of mathematical physics

and others..

Together with the conference takes place the conference on "The problems of mathematical natural science education" The conference is organized by Peoples' Friendship University of Russia, Moscow State Institute of Radiotechnique, Electronics and Automatics (Technical University), Scientific and Methodic Council of the Russian Ministry of Science and Education and Centre of Modern Education. The aim of the conference is to help in realization of the Conception of development of mathematical education in Russian Federation.

Organizing Committee

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ **15**

Богачев В.И., Кириллов А.И., Шапошников С.В. ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ КОЛМОГОРОВА И СВЯЗАННЫХ С НЕЙ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ МЕРЫ 17

Бухштабер В.М. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МНОГООБРАЗИЯ С ДЕЙСТВИЕМ ТОРА 20

Гайфуллин А.А. ПРОБЛЕМА РЕАЛИЗАЦИИ ЦИКЛОВ И ОТНОШЕНИЕ ДОМИНИРОВАНИЯ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ 21

Поспелов И.Г. СИЛЬНЫЙ МАГИСТРАЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ И ПРИЧИННОСТЬ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ 23

Секция 1. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ И СТАТИСТИКА **25**

Аджар Х., Лукашов А.Л. РАНДОМИЗИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ЛЕВНЕРА И ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ИТО 27

Белопольская Я.И. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КРОСС-ДИФФУЗИЕЙ 29

Бовкун В.А. О КОНСТРУКЦИИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ 30

Букин Д.Б. О ЗАДАЧЕ КОНТОРОВИЧА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ 32

Gliklikh Yu. E. STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS AND INCLUSIONS WITH MEAN DERIVATIVES: PROPERTIES. APPLICATION. SOPTIMAL CONTROL 34

Заев Д.А. ЗАДАЧА МОНЖА-КАНТОРОВИЧА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ 44

Залыгаева М.Е. ОПИСАНИЕ ВЯЗКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В ТЕРМИНАХ ПРОИЗВОДНЫХ В СРЕДНЕМ НА ГРУППАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПЛОСКОГО ТОРА 45

Заляпин В.И. ВЕРОЯТНОСТНАЯ СТРУКТУРА СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ 46

Кириллов А.И. О «НЕЛОКАЛЬНЫХ» МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ В МОДЕЛЯХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ 48

Малофеев И.И. КОНСТРУКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ МЕР В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ 49

Мифтахов А.Ф. О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ 52

Паршина С.В. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СЕМИОТИКЕ 54

Смородина Н.В. ВЕРОЯТНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ 56

Старкова О.С. О СРАВНЕНИИ РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОШИ 58

Юрова Е.В. ИЗМЕРИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ И ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ 60

Секция 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ, ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И КОМБИНАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ **63**

Геворкян П.С. О КАТЕГОРИИ БИНАРНЫХ G-ПРОСТРАНСТВ 65

Джукашев К.Р. ОБ *A*-СВОЙСТВАХ ТКАНЕЙ E_1^r И E_2^r 67

Игнаточкина Л.А. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЧТИ ЭРМИТОВОЙ СТРУКТУРЫ ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ ПОЧТИ КОНТАКТНОГО МЕТРИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ 69

Кабанова М.И. СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ 71

Краснов В.А. ОБ ОБЪЕМАХ НЕЕВКЛИДОВЫХ ОКТАЭДРОВ С mm2-СИММЕТРИЕЙ 73

Никифорова А.В. СВОЙСТВА ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ, ДОПУСКАЮЩЕЙ КОНТАКТНО ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 76

Шелехов А.М. О МИНИМАЛЬНОМ УСЛОВИИ ПРОЕКТИВИЗАЦИИ ГЛАДКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЕ ГРОНВОЛА 78

Секция 3. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ 81

Андреева И.Ю., Сесекин А.Н. ВЫРОЖДЕННАЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ 83

Асхабов С.Н. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РИССОВЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ 85

Даровская К.А. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА 87

Денисов В.Н. О РОСТЕ (ДЕСТАБИЛИЗАЦИИ) РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 88

Загребина С.А., Шафранов Д.Е. НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОФФА НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ 90

Корпусов М.О. МГНОВЕННОЕ РАЗРУШЕНИЕ VS ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА 92

Лощенова Д.А. О ЗАДАЧЕ СОБОЛЕВА, АССОЦИИРОВАННОЙ С КОМПАКТНОЙ ГРУППОЙ ЛИ 94

Неверова Д.А. О ГЛАДКОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ 95

Панин А.А. О НЕПРОДОЛЖАЕМОМ РЕШЕНИИ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА 97

Прохоров Д.В., Степанов В.Д. ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СУБЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПОЛУОСИ 99

Россовский Л.Е. О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АРГУМЕНТОВ 100

Савин А.Ю., Стернин Б.Ю. УНИФОРМИЗАЦИЯ И ИНДЕКС ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ МНОГООБРАЗИЙ 101

Тасевич А.Л. НОВЫЙ КЛАСС СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 102

Филимоненкова Н.В. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ГЕССИАНОВСКИХ УРАВНЕНИЙ 104

Шамбилова Г.Э. КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ВЕСОВОМ КОНУСЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ 106

Секция 4. НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ 109

Баврин И.И. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ 111

Баев А.В. ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ 114

Бахтигареева Э.Г. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБФП, СОДЕРЖАЩЕЕ ЗАДАННЫЙ КОНУС ДВОЯКОМОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ 116

Замышляева А.А., Цыпленкова О.Н. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА 117

Кабанихин С.И., Криворотько О.И. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУДЫ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ 119

Кабанихин С.И., Шишленин М.А. МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГОВ УРАВНЕНИЙ И.М. ГЕЛЬФАНДА, Б.М. ЛЕВИТАНА И М.Г. КРЕЙНА 121

Каденова З.А. ОДИН КЛАСС ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСЫМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ 123

Каденова. З.А., Орозмаматова Ж.Ш. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ 130

Кадченко С.И. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ 135

Козлов В.Н. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРОВ УПРАВЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНО ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ 138

Криворотько О.И. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ КОЛЕБАНИЙ В ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ 140

Курамшина Г.М., Ягола А.Г. НОВЫЕ УСТОЙЧИВЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ СПЕКТРОСКОПИИ ДЛЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ 141

Леонов А.С. ЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ 144

Lukyanenko D. HOW TO TAKE INTO ACCOUNT THE ROUND-OFF ERRORS IN SOLVING MULTIDIMENSIONAL ILL-POSED PROBLEMS 146

Меньшиков Ю.Л. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА 147

Муфтахов И.Р. О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА 149

Раевский Д.Н. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ТРЕХСЛОЙНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ 151

Serov V.S. BORG-LEVINSON THEOREM FOR ELLIPTIC OPERATORS 153

Шаров А. РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛАСТОГРАФИИ 154

Секция 5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 157

Бадоян А.Д., Сагадеева М.А. ЗАДАЧА ЖЕСТКОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯМИ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА 159

Будочкина С.А. О БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМАХ С НЕ-B_u-ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ СИЛАМИ 161

Карачик В.В. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ 163

Козырев С.В. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ КВАНТОВЫХ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ 165

ПанинА.А., Быков А.А., Шарло А.С. О СУЩЕСТВОВАНИИ И ПОСТРОЕНИИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 166

Умаров Х.Г. ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА–ЖЕЛТОВА–КОЧИНОЙ 168

Шулепов А.Н., Сагадеева М.А. О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЫРОЖДЕННОЙ C_0-ГРУППЫ РАЗРЕШАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ОДНОЙ РАДИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА 170

Яременко Л.А. ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТЬЮ И ФИКСИРОВАННЫМ ВТОРЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ 171

Секция 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 173

Агранович Ю.Я., Концевая Н.В. СУБТАНГЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА-ХИКСА 175

Антонова А.О., Савелова Т.И. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕКСТУРЫ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ ПУТЁМ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ИЗМЕРЕНИЙ МЕТОДАМИ ЭЛЕКТРОННОЙ МИКРОСКОПИИ 177

Арчибасов А.А. СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В МОДЕЛИ ВИРУСНОЙ ЭВОЛЮЦИИ 178

Ахмедов И.А., Худак Ю.И. ОБ ОПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ПРОСВЕТЛЕНИЯ И АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ОСЛАБЛЕННОЙ ЗАДАЧИ В СМЫСЛЕ ЧЕБЫШЕВА 180

Балакин Д.А., Нагорный Ю.М., Пытьев Ю.П. ЭМПИРИЧЕСКАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ, ВОССТАНОВЛЕНИЕ И КОРРЕКЦИЯ СУБЪЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ 184

Бедринцев А.А., Чепыжов В.В. УДАЛЕНИЕ ЛИШНИХ НЕРАВЕНСТВ ИЗ СИСТЕМЫ 186

Боголюбов А.Н., Ерохин А.И., Шкитин А.В. РАСЧЕТ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ТРЕХЗАЗОРНОГО РЕЗОНАТОРА 188

Бодров А.Г., Никитин А.А. ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ РАЗЛИЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ 190

Булгаков Д.Н., Денисова Т.Е. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭРГОНОМИЧЕСКОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ СИСТЕМЫ ОТОБРАЖЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЕ 192

Буркин И.М., Нгуен Нгок Хиен. СКРЫТЫЕ АТТРАКТОРЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ 194

Бутузов В.Ф. ПОГРАНСЛОЙНЫЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ С КРАТНЫМ КОРНЕМ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ 196

Быков А.А. КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В СРЕДЕ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ ПЛОТНОСТИ ИСТОЧНИКОВ 197

Вельмисов П.А., Корнеев А.В. О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРУБОПРОВОДА 199

Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Шарова С.В. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ 201

Воронов Д.А. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАРМАКОКИНЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ 203

Гласко Ю.В., Скачков С.А. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ 3.5D КОНЦЕНТРАЦИИ МАСС В ГЕОФИЗИКЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА 204

Гурьянов М.А., Прокофьев А.А. АВТОПОДБОР ПАРАМЕТРОВ СИНТЕЗА РАДИОЛОКАЦИОННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ, ПОЛУЧЕННОГО С РАДИОЛОКАТОРА С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ 206

Давыдова М.А. РЕШЕНИЯ С ВНУТРЕННИМИ СЛОЯМИ В МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ 208

Дрегля А.И. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ В МИКРОТВЭЛАХ 210

Жээнтаева Ж.К. АЛГОРИТМ ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ ... 211

Замышляева А.А., Бычков Е.В. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ В МОЛЕКУЛЕ ДНК ... 213

Левашова Н.Т., Николаева О.А. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ВОДА-ВОЗДУХ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ КОНТРАСТНЫХ СТРУКТУР ... 215

Львович И.Я., Преображенский А.П., Чекмарев Р.С. ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПОЛЫХ СТРУКТУРАХ ... 217

Манакова Н.А, Богатырева Е.А. СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ... 219

Митин А.В., Худак Ю.И. ОСОБЕННОСТИ ПРОХОЖДЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ПРОСВЕТЛЯЮЩИЙ СЛОЙ ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ ... 221

Нефедов Н.Н. О РАЗВИТИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРИНЦИПА СРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ ... 223

Орлов А.О., Левашова Н.Т. ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ Si/SiGe ... 225

Покладова Ю.В., Серебрянникова Е.С. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ КОНТРОЛЯ НАД ИЗМЕНЕНИЕМ ДАВЛЕНИЯ ... 228

Приклонский В.И., Вершубский А.В., Тихонов А.Н. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПИ ФОТОСИНТЕТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО И ПРОТОННОГО ТРАНСПОРТА В ХЛОРОПЛАСТАХ ... 230

Пытьев Ю.П., Фаломкина О.В. СУБЪЕКТИВНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ... 231

Розов Н.Х. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЙРОНА ... 233

Хацкевич В.Л. О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНОГО РЫНКА ... 237

Секция 7. ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ ... 239

Белопольская Я.И., Немченко Е.И. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ... 241

Денежкина И. Е., Набатова Д.С. МЕТОДЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ СЛАБОСТРУКТУРИРОВАННЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТАРИФОВ НА ТРАНСПОРТЕ ... 243

Kramer Y.S., Semenovykh D.N., Lapteva N.A. PRIORITIES IN THE VALUE HIERARCHY AMONG YOUTH ... 246

Маругина Д.В., Семеновых Д.Н., Крамер Я.С. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЯ СОЦИАЛЬНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ. ДЕПРИВАЦИОННО-ФРУСТРАЦИОННЫЙ ПОДХОД ... 248

Матвеев Е.М. ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ... 251

Москалева Э.Ф. К ВОПРОСУ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «МОДЕЛИРОВАНИЕ» ... 253

Овакимян А.С., Саркисян С.Г., Зироян М.А. САМООРГАНИЗУЮЩИЕСЯ КАРТЫ В ЗАДАЧАХ БИОМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ... 255

Радионов С.А. ЭФФЕКТИВНОСТЬ В МОДЕЛЯХ МОНОПОЛИСТИЧЕСКОЙ КОНКУРЕНЦИИ ... 257

Свистова С.Ф. ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОМЕХ В СИСТЕМАХ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ВЕСОВУЮ ОБРАБОТКУ И АЛГОРИТМЫ БПФ 258

Фарков Ю.А. ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ НА ПОЛЕ $F_p((t))$ 259

Секция 8. ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК В СОВРЕМЕННОМ ОБЩЕСТВЕ 261

Афанасьев В.В. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MAPLE НА ОСНОВЕ НАГЛЯДНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ 263

Байгушева И.А. К ВОПРОСУ О ПОВЫШЕНИИ МОТИВАЦИИ БУДУЩИХ ЭКОНОМИСТОВ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ 269

Балыко И.А. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧИСЛОМ УРАВНЕНИЙ, ПРЕВОСХОДЯЩИМ ЧИСЛО НЕИЗВЕСТНЫХ 271

Белова А.Д. ОБ ОПЫТЕ СОЗДАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ УЧАЩИМСЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКИХ УЧИЛИЩ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ИНТЕРЕСА К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ 273

Битнер Г.Г. МОТИВАЦИЯ В ПОВЫШЕНИИ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ 276

Богун В.В. РАЗРАБОТКА МЕТОДИК ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КАК ЭФФЕКТИВНОГО МЕХАНИЗМА ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ В СРЕДНИХ И ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ 278

Богун В.В. ПОВЫШЕНИЕ МОТИВАЦИИ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛАХ И ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ 280

Боровик О.Г., Бочаров А.В., Колчанов А.В. ЦЕНТР ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ НА ФАКУЛЬТЕТЕ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК КУБГУ В КОНТЕКСТЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ ШКОЛЬНИКАМИ 284

Бычков С.Н. ЗАЧЕМ УЧИТЬ ФИЗИКУ И МАТЕМАТИКУ В ШКОЛЕ? 289

Геворкян П.С., Розанова С.А. СОЗДАНИЕ КОМПЛЕКСА УЧЕБНИКОВ И УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВУЗОВ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ КАК ВАЖНЕЙШЕЕ НАПРАВЛЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИПА ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ПРИКЛАДНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА ПО МАТЕМАТИКЕ 291

Дворяткина С.Н., Мельников Р.А. СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК ФАКТОР РАЗВИТИЯ МОТИВАЦИИ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ 293

Ершина А.К., Копенбаева А.С., Манатбаев Р.К. ПОДГОТОВКА ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ В ОБЛАСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВОЗОБНОВЛЯЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ МАГИСТРАТУРУ 295

Ефимова Е.А. СПЕЦИФИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ-ГУМАНИТАРИЕВ 305

Зимина О.В., Кириллов А.И. СОЦИАЛЬНАЯ РОЛЬ МАТЕМАТИКИ 307

Исмагилова Е.И. КРАТКИЙ ОБЗОР ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ЛОГИКИ КАК КОМПОНЕНТЫ ГУМАНИТАРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ОБУЧЕНИЯ ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ 311

Карапетян В. ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ ШАХМАТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ КАК ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ПЛАТФОРМА ДИНАМИЧЕСКИХ РАЗВИТИЙ СИСТЕМЫ МОТИВАЦИЙ ОСВОЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СФЕРЕ 319

Кузнецова Т.А., Розанова С.А. ПРИВЛЕЧЕНИЕ СТУДЕНТОВ К ВЫПОЛНЕНИЮ ТВОРЧЕСКИХ ЗАДАЧ – ОДИН ИЗ ПУТЕЙ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ 326

Лазарев В.А., Кузнецова Т.А. О ПРОГРАММЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАПРАВЛЕННОГО НА РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ 329

Лазарев В.А., Розанова С.А. К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕНЕНИИ ОТНОШЕНИЯ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОБРАЗОВАНИЮ В ОБЩЕСТВЕ 335

Мирзоев М.С. МОТИВАЦИЯ И СИТУАЦИЯ УСПЕХА КАК ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАЗВИТИЯ ИНФОРМАЦИОННО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БАКАЛАВРОВ-БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ ИНФОРМАТИКИ 342

Мкртчян М.А. НЕОБХОДИМОСТЬ И ПРОБЛЕМЫ ИНДИВИДУАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ 344

Посицельская Л.Н, Горбачева Н.А. ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ МОТИВАЦИИ УЧАЩИХСЯ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ 349

Пунтус А.А. ПРОБЛЕМЫ ПОСТАНОВКИ И ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ 351

Розанова С.А. ПРОБЛЕМА РАЗВИТИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ В СОВРЕМЕННОМ ОБЩЕСТВЕ И НЕКОТОРЫЕ ПУТИ ЕЕ РЕШЕНИЯ 353

Розанова С.А., Кузнецова Т.А. О ПОВЫШЕНИИ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМИ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ 364

Розанова С.А., Санина Е.И. МОТИВАЦИЯ КАК ЦЕЛЕВАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ПОВЫШЕНИЯ ИНТЕРЕСА К МАТЕМАТИКЕ В СОВРЕМЕННОМ ОБЩЕСТВЕ 368

Рябова Т.Ю. НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ МОТИВАЦИИ К УГЛУБЛЕННОМУ ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ В СОВРЕМЕННЫХ УСЛОВИЯХ 373

Саргсян А.Г. АНАЛИЗ СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕАМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВЕДУЩИХ СТРАНАХ МИРА 379

Сенашенко В.С. МАТЕМАТИКА КАК МЕРА ОБРАЗОВАННОСТИ, КАК МЕРА ИНТЕЛЛИГЕНТНОСТИ 385

Ситкин Е.Л. ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА «ШКОЛА-ВУЗ»: ПРОБЛЕМЫ И РЕШЕНИЯ 387

Смирнов Е.И. РОЛЬ МОТИВАЦИЙ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ СТАНОВЛЕНИИ ПЕДАГОГА 389

Трофимец Е.Н., Трофимец В.Я. ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ У СТУДЕНТОВ-ЭКОНОМИСТОВ НА ОСНОВЕ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ 392

Филимоненкова Н.В. НОВЫЕ ПОДХОДЫ К ИЗЛОЖЕНИЮ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ 394

Хаймина Л.Э., Хаймин Е.С. СЕТЕВОЕ СОТРУДНИЧЕСТВО ВУЗОВ И РАБОТОДАТЕЛЕЙ В ОБЛАСТИ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ 397

Шебашев В.Е., Шарафутдинова Л.Н. ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В ПОВОЛЖСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ 399

Щербатых В.Е. О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ 404

Секция 9. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ 407

Демидов С.С. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В XIX–XX СТОЛЕТИЯХ: ДИАЛЕКТИКА КОНЦЕПТУАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ 409

Ермолаева Н.С. О ПЕРЕВОДЕ КУРСА Ж.М.К. ДЮАМЕЛЯ НА РУССКИЙ ЯЗЫК 411

Зайцев Е.А. ПОЗДНЕСХОЛАСТИЧЕСКАЯ НАУКА О ДВИЖЕНИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ НОВОГО ВРЕМЕНИ 413

Исак И.В. НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ТВОРЧЕСТВА П.А. НЕКРАСОВА 415

Колесников С.Н. НАУЧНО-МИРОВОЗЗРЕНЧЕСКАЯ РЕВОЛЮЦИЯ 16-17 ВЕКА И ИЗМЕНЕНИЕ РОЛИ МАТЕМАТИКИ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ 417

Коновалова Л.В. ОБ ИСТОКАХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ТУРБИН 419

Кузичева З.А. АЛГЕБРА ОТНОШЕНИЙ А. ДЕ МОРГАНА 421

Кутеева Г.А. ОБ УЧЕБНО-ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ КАБИНЕТАХ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ В РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ XIX В. 423

Лютер И.О. ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ В АРАБСКИХ РЕДАКЦИЯХ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА 425

Мельников Р.А. ИЗ ИСТОРИИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ 427

Орлик Л.К., Лаптева Н.А. ИНДЕКС БОЛЯ, КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И «РИЖСКИЙ ВАРИАНТ ИСПАНСКОЙ ПАРТИИ» 431

Петрова С.С. ИЗ ИСТОРИИ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ В КОНЦЕ XIX – ПЕРВОЙ ТРЕТИ XX ВЕКА 433

Синкевич Г.И. РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ВЛИЯНИЕ ИДЕЙ БОЛЬЦАНО НА РАЗВИТИЕ АНАЛИЗА XIX ВЕКА 436

Харитонов А.С., Добрый В.В. ТРОЙНАЯ ЗОЛОТАЯ СПИРАЛЬ: РАЗВИТИЕ МОДЕЛИ ПРЕДУСТАНОВЛЕННОЙ ГАРМОНИИ МОСКОВСКОЙ ФИЛОСОФСКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ 439

Чиненова В.Н. АКАДЕМИК В.П. ГОРЯЧКИН – ОСНОВАТЕЛЬ ЗЕМЛЕДЕЛЬЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ 441

Секция 10. ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ 445

Антонов В.И. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КУРСЫ ДЛЯ МАГИСТРОВ: НОВЫЕ ВЫЗОВЫ ИЛИ ХОРОШО ЗАБЫТОЕ СТАРОЕ 447

Асланов Р.М., Игнатова О.Г. ПРИМЕНЕНИЕ РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ В ПРОЦЕССЕ ОЦЕНКИ ДОСТИЖЕНИЙ СТУДЕНТОВ В РАМКАХ КУРСА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» 449

Баймуханов Б.Б., Даулеткулова А.У. РАЗВИТИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ КАЗАХСТАНА 451

Битнер Г.Г. ИНВАРИАНТНЫЙ ПОДХОД К РАЗВИТИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ СТУДЕНТОВ - БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ 454

Брылевская Л.И. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ FLASH-ТЕХНОЛОГИЙ НА ЗАНЯТИЯХ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ 456

Виситаева М.Б. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СПОСОБНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ В КОНТЕКСТЕ ИХ РАЗВИТИЯ 459

Власов Д.А. ТЕХНОЛОГИИ WOLFRAMALPHA В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ БАКАЛАВРИАТА 461

Голубев О.Б. ОБЛАЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ 463

Громыко В.И., Будак А.Б., Васильев Н.С., Казарян В.П., Симакин А.Г., Аносов С.С. ПРИНУДИТЕЛЬНОСТЬ ДИДАКТИКИ СИСТЕМНО-ИНФОРМАЦИОННОЙ КУЛЬТУРЫ: ЕДИНСТВО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО И УНИВЕРСАЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ 465

Грушевский С.С. МОДЕЛЬ ТЕХНОЛОГИИ ЭКСПРЕСС ОБУЧЕНИЯ ПЕДАГОГОВ РАБОТЕ В СРЕДЕ ИННОВАЦИОННОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ДИДАКТИКИ 469

Грушевский С.П., Андрафанова Н.В., Добровольская Н.Ю. ДИСТАНЦИОННЫЙ КОМПОНЕНТ В МАТЕМАТИКО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ МАГИСТЕРСКИХ ПРОГРАММАХ 471

Дворяткина С.Н. ПУТИ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ СТОХАСТИКЕ В СИСТЕМЕ «ШКОЛА-ВУЗ» С ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ 473

Денисова Н.С. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА АНАЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СВОЙСТВ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА 476

Евдокимов А.А., Захарова В.И., Жаринова Т.А., Сагадеева Г.А. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТВОРЧЕСКИЙ ПОДХОД К УЧЕБНОМУ ПРОЦЕССУ – ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК 478

Егорова Т.М., Вельмисов П.А. ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В СОВРЕМЕННОМ ИНФОРМАЦИОННОМ МИРЕ 482

Зайцева Ж.И., Зайниев Р.М., Губочкина Н.И. О ПРИМЕНЕНИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ 484

Ильинская Л.Н. К ВОПРОСУ ОБ УГЛУБЛЕННОМ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ» СТУДЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ПЕДВУЗА 486

Карасев В.А. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ 488

Костин С.В. ВОЗМОЖНОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЯ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ 492

Ли О.В. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУАНАЛИЗУ В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ 499

Лобанова Н.И. ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЙ ПОДХОД ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ УЧАЩИХСЯ СРЕДНЕГО И СТАРШЕГО ЗВЕНА 501

Малыгина О.А., Игонина Т.Р., Кольцова Е.В., Руденская И.Н., Таланова Л.И., Чекалкин Н.С. О ПРОБЛЕМАХ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ 503

Мищенко Т.М., Гусева Н.И. БАЗОВЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ 505

Муханов С.А., Муханова А.А. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО МАТЕМАТИКЕ В КОНТЕКСТЕ ТРЕБОВАНИЙ ФГОС (ПЛЮС) И СТАНДАРТОВ CDIO 507

Ольнева А.Б. ИНТЕРАКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ РАЗЛИЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ 510

Petrova V.T., Matveyev O.A., Dmitrieva M.N. MODERN PROBLEMS OF MULTI-LEVEL LEARNING MATHEMATICS IN HIGH SCHOOL 512

Розов Н.Х. ЧЕМУ УЧАТ МНОГИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ? 514

Русаков А.А. О МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ 515

Русаков А.А., Русакова В.Н. К ВОПРОСУ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С МОДУЛЕМ 521

Салаватова С.С., Сандулова Л.М., Салаватов М.Х. СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ РЕАЛИЗАЦИИ ЗДОРОВЬЕСБЕРЕГАЮЩЕЙ НАПРАВЛЕННОСТИ УЧЕБНО-ВОСПИТАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА 526

Седова Е.А., Троицкая С.Д. ПРОБЛЕМА МИНИМУМА ТРЕБОВАНИЙ К ШКОЛЬНОМУ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОБРАЗОВАНИЮ 528

Семеновых Д.Н., Орлик Л.К. АКТУАЛИЗАЦИЯ ПОСТКЛАССИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ В РАМКАХ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИН ИНФОРМАЦИОННО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦИКЛА 530

Синчуков А.В. О МЕТОДИЧЕСКИХ ПРИНЦИПАХ ПРИМЕНЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ В ВУЗЕ 538

Тесля О.Ю. О ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА И КОНСТРУКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ» НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ МОСКОВСКОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА 540

Тестов В.А. О ПРОБЛЕМАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ 542

Томилова А.Е. КОНКУРСЫ ПО СОСТАВЛЕНИЮ И РЕШЕНИЮ КРАЕВЕДЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ: ОПЫТ И ПЕРСПЕКТИВЫ 544

Хохлова Л.И. ИЗМЕНЕНИЕ ИНЖЕНЕРНОГО МЫШЛЕНИЯ И РАЗВИТИЕ НОВЫХ ФОРМ ИНЖЕНЕРНОЙ КУЛЬТУРЫ 546

Черноусова Н.В. К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ШКОЛЕ 548

Шапошникова И.А., Евдокимов А.А., Мекеко Н.М. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ ПРАКТИКУМОВ И КУРСОВ ПО ВЫБОРУ ЛИНИИ МЕТАПРЕДМЕТНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «ТАБЛИЦА МЕНДЕЛЕЕВА В ПРИРОДЕ» 550

Щербатых В.Е. ОБ ОДНОМ КУРСЕ ПО ВЫБОРУ 555

Щербатых С.В. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ, КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ: УРОКИ ИСТОРИИ 557

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ КОЛМОГОРОВА И СВЯЗАННЫХ С НЕЙ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ МЕРЫ

В.И. Богачев[1], А.И. Кириллов[2], С.В. Шапошников[3]

[1] Московский государственный университет,
e-mail: VIBogach@mail.ru

[2] Российский фонд фундаментальных исследований,
e-mail: AcademiaXXI@mail.ru

[3] Московский государственный университет,
e-mail: starticle@mail.ru

В работе [1], опубликованной в 1931 году, Колмогоров дал определение диффузионного процесса, его коэффициента сноса b и матрицы диффузии a, а также сформулировал следующую проблему:

При каких условиях для отображений b и a можно указать диффузионный процесс ξ, для которого они являются коэффициентом сноса и матрицей диффузии?

При каких условиях этот процесс ξ однозначно определяется начальными данными?

Проблема Колмогорова имеет особенное значение для анализа на бесконечномерных многообразиях, поскольку на таких многообразиях нет аналогов меры Лебега, т.е. некоторох стандартных мер, плотностями относительно которых можно определять другие меры. Поэтому приходится определять меры как решения уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова или как стационарные распределения решений уравнений Ито. Такие решения редко определяются явными формулами. Поэтому свойства мер приходится выяснять анализируя коэффициет сноса b и матрицу диффузии a.

Для теории меры особый интерес представляет случай, когда $b = aJ$, где J — векторное поле, которое может быть т.н. логарифмическим градиентом инвариантной меры исследуемой диффузии.

В последующие после выхода статьи Колмогорова десятилетия заметный вклад в изучение образовавшегося широкого круга проблем внесли многие коупные математики. Тем не менее целый ряд проблем даже с элементарными формулировками оставались открытыми. Вот далеко не полный их перечень для мер на $\mathbb{R}^d$.

1. Может ли симплекс вероятностных мер — решений стационарного уравнения Колмогорова с $a = Id$ и гладким b быть бесконечномерным?

2. Верно ли, что при $J = \nabla\Psi$ вероятностное решение стационарного уравнения Колмогорова единственно и имеет плотность $C \cdot e^{\Psi}$?

3. Возможно ли, что вероятностное решение единственно при существовании линейно независимых решений в классе ограниченных мер?

4. Каковы локальные и глобальные свойства решений стационарных уравнений Колмогорова? Каково поведение плотностей решений на бесконечности?

5. При каких условиях на коэффициенты решение в классе вероятностных мер обладает непрерывной и положительной плотностью?

Аналогичные проблемы возникли и в бесконечномерном случае. К таким проблемам сводятся фундаментальные задачи квантовой теории и статистической физики [2].

Два существенных отличия проблем данного направления от классических задач теории уравнений с частными производными состоят в том, что

1) уравнения решаются относительно мер, а не относительно функций

2) допускаются только очень слабые ограничения на гладкость и рост коэффициентов.

Эта специфика в значительной мере мотивирована бесконечномерным случаем.

Комбинируя методы теории дифференциальных уравнений в частных производных и методы стохастического анализа, мы нашли ответы на сформулированные выше вопросы, которые сейчас являются наиболее общими и сильными [2, 3]. Основными из этих результатов являются следующие:

1. Разработан первый конструктивный метод восстановления вероятностной меры на бесконечномерном пространстве по ее логарифмическому градиенту J. Найдены условия, при которых заданное отображение J является логарифмическим градиентом некоторой вероятностной меры, и условия единственности такой меры. Найдены также условия существования диффузионного процесса с таким сносом, условия его эргодичности и единственности стационарного распределения. Исследованы дифференциальные свойства таких распределений.

Эти результаты имеют важные приложения в квантовой теории поля и статистической механике.

2. Найдены широкие условия существования и единственности решения стационарного уравнения Колмогорова $\partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\varrho)-\partial_{x_i}(b^i\varrho)+c\varrho=0$ на $\mathbb{R}^d$ в классе вероятностных плотностей ϱ и в классе плотностей, интегрируемых на $\mathbb{R}^d$. Построены первые примеры неединственности в случае сноса градиентного вида $b=\nabla\Psi$. Оказалось, что вероятностное решение может быть не пропорциональным функции e^{Ψ}, в отличие от случая компактного многообразия, для которого Колмогоров доказал, что стационарное распределение единственно и имеет плотность $C\cdot e^{\Psi}$. Более того, симплекс вероятностных решений может иметь бесконечную размерность.

3. Найдены условия отсутствия нулей плотностей решений и найдены нижние оценки плотностей в случае сингулярного (локально неограниченного и неинтегрируемого по мере Лебега) коэффициента сноса. Эти условия сформулированы в терминах локальной интегрируемости по решению некоторых функций (типа экспоненты) от коэффициента сноса и в классе такого рода условий оптимальны. Получены верхние и нижние оценки плотностей решений стационарного уравнения Колмогорова в $\mathbb{R}^d$ с существенно неограниченными коэффициентами.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00196).

Библиографический список

1. A. Kolmogoroff, Uber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., 104:1 (1931), 415–458; русс. пер.: А.Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей // УМН. 1938. Т. 5. С. 5–41.

2. Кириллов А.И. Бесконечномерный анализ и квантовая теория как исчисления семимартингалов // УМН. 1994. Т. 49, № 3. С. 43–92.

3. Богачев В.И., Крылов Н.В., Рекнер М., Шапошников С.В. Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва – Ижевск, 2013.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МНОГООБРАЗИЯ С ДЕЙСТВИЕМ ТОРА

В.М. Бухштабер

МИАН им. В.А.Стеклова

Функциональные уравнения естественно возникают в различных областях математики и математической физики. Примерами функциональных уравнений, решение которых привело к фундаментальным результатам, являются теоремы сложения для элементарных и эллиптических функций. Ряд крупных достижений обязан теоремам сложения для функций на якобианах алгебраических кривых. Доклад посвящен приложению функциональных уравнений в известной задаче о действиях компактных торов на гладких многообразиях.Для каждого действия с изолированными неподвижными точками вводится функциональное уравнение жесткости рода Хирцебруха,как инвариант структуры на многообразии, согласованной с таким действием. Класс функциональных уравнений, возникающих таким образом содержит классические уравнения, уравнения известные в теории интегрируемых систем, а также новые уравнения. Мы обсудим уравнения жесткости для классической задачи действия максимальных торов на однородных пространствах компактных групп Ли. Развитый подход получил широкую область приложений благодаря таким направлениям алгебраической геометрии и алгебраической топологии как торическая геометрия и торическая топология соответственно.

Все необходимые определения будут даны в ходе доклада.

Автор благодарит Российский Научный Фонд за поддержку исследований в рамках гранта РНФ № 14-11-00414

ПРОБЛЕМА РЕАЛИЗАЦИИ ЦИКЛОВ И ОТНОШЕНИЕ ДОМИНИРОВАНИЯ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ

А.А. Гайфуллин

МИАН им. В.А.Стеклова

Классическое понятие цикла в многообразии (или даже в произвольном топологическом пространстве) восходит к работам А. Пуанкаре. Сначала Пуанкаре не совсем строго определил цикл как подмногообразие без края. Позже в процессе формализации определения гомологий сформировалось определение цикла как суммы сингулярных симплексов, граница которой равна нулю. Первоначальное определение Пуанкаре также нашло себе применение при развитии теории бордизмов. Естественным образом возник вопрос о том, как соотносятся между собой эти два определения цикла. Этот вопрос был чтко сформулирован Н. Стинродом в конце 1940-х годов и в настоящее время известен как проблема Стинрода о реализации циклов. Ключевые результаты по проблеме реализации циклов были получены Р. Томом, С.П. Новиковым, Дж. Милнором, В.М. Бухштабером, Д. Сулливаном. Наряду с вопросом Стинрода о том, какие классы гомологий можно реализовать образами фундаментальных циклов гладких многообразий, возникает ещ один очень важный вопрос: какие многообразия нужны для того, чтобы образами их фундаментальных циклов можно ыло реализовать (возможно, с некоторой кратностью) любой класс гомологий. Эта задача тесно связана с восходящей к работам Дж. Милнора, У. Трстона и М. Громова задачей о так называемом отношении доминирования для многообразий. Говорят, что ориентированное замкнутое многообразие M доминирует ориентированное замкнутое многообразие N той же размерности, если M может быть отображено на N с ненулевой степенью. Дж. Карлсону и Д. Толедо принадлежит вопрос о нахождении в каждой размерности n класса многообразий, максимального по отношению к отношению доминирования, то есть такого, что любое n-мерное многообразие доминируется некоторым многообразием из этого класса. Несколько лет назад докладчиком был дан следующий ответ на этот вопрос: в каждо размерности было указано одно многообразие, всевозможные конечнолистные накрытия которого образуют искомый класс.

В докладе будет рассказано об этом и других недавних результатах докладчика об отношении доминирования и по проблеме реализации циклов, их взаимосвязях и дальнейших задачах в этой области.

Все необходимые определения будут даны в ходе доклада.

Автор благодарит Российский Научный Фонд за поддержку исследований в рамках гранта РНФ № 14-11-00414

СИЛЬНЫЙ МАГИСТРАЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ И ПРИЧИННОСТЬ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Поспелов И.Г.

Вычислительный центр РАН

Наиболее популярные в настоящее время в экономике модели равновесия рациональных ожиданий, строго говоря, не обладают свойством причинности. Для преодоления этого недостатка в мировой практике используют довольно странные предположения: например, считают государственную экономическую политику стационарным случайным процессом. Мы, однако, обнаружили, что в моделях, учитывающих специфику изучаемой экономики зависимость от будущего при "правильных" значениях параметров модели пропадает ввиду неожиданно сильного проявления магистрального свойства в целом всегда присущего разумным моделям экономической динамики. В докладе на примере простейшей модели экономического планирования будет показано, как это может происходить, а также как эта модель планирования может быть декомпозирована в модель общего экономического равновесия рациональных ожиданий с реалистичным набором экономических агентов и финансовых инструментов и с сохранением независимости от будущего. Будут также приведены примеры реалистичных моделей экономики Росии, в которых систематически наблюдалось указанное явление.

Работа выполнена при поддержке и РФФИ (проект № 12-01-00916) и РНФ (проект № 14-11-00432)

Секция 1

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ И СТАТИСТИКА

Рандомизированное уравнение Левнера и диффузионные процессы Ито

Аджар Х., Лукашов А.Л.
Университет Фатих
34500, Турция, Стамбул, Бююкчекмедже
Тел.:10902128663300 / 2105, e-mail: alexey.lukashov@gmail.com

Известно (см. [1]), что любое эволюционное семейство (evolution family) порядка d описывается уравнением (обобщенное дифференциальное уравнение Левнера)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi_t(z) = (\Phi_t(z) - \tau(t))(\overline{\tau(t)}\Phi_t(z) - 1)p(\Phi_t(z), t) \\ \Phi_0(z) = z, \end{cases} z \in \mathbb{D}, t \geq 0, \tag{1}$$

где $\mathbb{D}$ - единичный круг , $\tau : [0,\infty) \to \bar{\mathbb{D}}$ - измеримая функция и $p(z,t)$ - функция Герглотца, т.е. $p : \mathbb{D}\times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ и такая, что $\mathrm{Re}p(\Phi_t(z), t) \geq 0$ для всех $z \in \mathbb{D}$ и $t \geq 0$. В работе [2] Г.Иванов и А. Васильев рассмотрели рандомизированную форму обощенного дифференциального уравнения Левнера и доказали, что в случае $\tau(t) = e^{ikB_t}$, где B_t - одномерное Броуновское движение, $k \in \mathbb{R}$ и $p(z,t) = \tilde{p}(\frac{z}{\tau(t)})$, где $\tilde{p} : \mathbb{D}\times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ и действительная часть функции $\tilde{p}$ неотрицательна, задача (1) может быть сведена к одномерному диффузионному процессу Ито (см., например, [3]) с помощью подстановки $\Psi_t(z) = \frac{\Phi_t(z)}{\tau(t)}$. Основной результат данной заметки обобщает теорему Иванова-Васильева на случай векторного диффузионного процесса Ито и показывает, что в определенном смысле это единственная форма обощенного дифференциального уравнения Левнера, допускающая сведение к процессу Ито.

Теорема 1 *Рассмотрим рандомизированное дифференциальное уравнение Левнера*

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_t(z,w)}{dt} = \frac{(\tau_1(t,w) - \Phi_t(z,w))^2}{\tau_1(t,w)}\tilde{p}(\frac{\Phi_t(z,w)}{\tau_1(t,w)}) \\ \Phi_0(z,w) = z \end{cases} \tag{2}$$

где $|\tau_1(t,w)| = 1$ и $\tilde{p}$ - произвольная функция Герглотца при каждом фиксированном случайном событии $w \in \Omega$. Пусть $\breve{C}$ - множество функций $m(x, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{D} \times \mathbb{R}^n)$ таких, что $\frac{\partial m}{\partial y_i}$ не обращается в нуль. Предположим, что $\tau_1(t,w) = \tau(\vec{B}_t)$ и $\Psi_t = m(\Phi_t, B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \cdots, B_t^{(n)})$, где $B_t^{(i)}$ - независимые Броуновские движения. Тогда

Ψ_t является $n \times 1$ диффузионным процессом Ито для произвольной функции Герглотца $\tilde{p}$ в том и только том случае, когда $\tau(\vec{B}_t) = e^{ik_1B_t^{(1)} + ik_2B_t^{(2)} + \cdots + ik_nB_t^{(n)}}$.

Кроме того, при этом производящий оператор процесса Ψ_t задается формулой

$$A = \left(-\frac{z}{2}\left|\vec{k}\right|^2 + (1-z)^2\tilde{p}(z)\right)\frac{d}{dz} - \frac{1}{2}\left|\vec{k}\right|^2 z^2\frac{d^2}{dz^2} \tag{3}$$

где $\Psi_t(z,w) = \frac{\Phi_t(z,w)}{\tau(\vec{B}_t)}$ и $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$.

Литература

1. F.Bracci, M.D.Contreras, S.Díaz-Madrigal, Evolution families and the Loewner equation I: the unit disc. J. Reine Angew. Math. 672 (2012), 1–37.

2. G. Ivanov, A. Vasil'ev, Löwner evolution driven by a stochastic boundary point. Anal. Math. Phys. 1 (2011), 387-412.

3. Б. Оксендаль, Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, АСТ, 2003. 408 с.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КРОСС-ДИФФУЗИЕЙ

Белопольская Я.И.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

194005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская 4.

Тел.:(812) 3164930, e-mail. yana@YB1569.spb.edu

В рамках современной теории стохастических дифференциальных уравнений исследованы различные случайные процессы, ассоциированные с решениями нелинейных параболических уравнений. В частности, построены стохастические дифференциальные уравнения, решения которых позволяют получить вероятностные представления как для классических решений, так и для обобщенных и вязкостных решений различных краевых задач для нелинейных параболических уравнений. При этом вероятностная интерпретация рассматриваемой краевой задачи позволяет свести ее решение к решению соответствующей стохастической задачи, что позволяет, наряду с качественными исследованиями, разработать эффективные численные методы решения исходной задачи.

Во многих прикладных задачах физики, химии, биологии, финансовой математикм важные явления описываются в терминах систем нелинейных параболических уравнений. Таковы, например, задачи хемотаксиса, описание роста клеток при контактном ингибировании, задачи популяционной динамики и другие.

Вероятностный подход к построению различных классов решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений активно развивается в последнее десятилетие. Выделен класс систем нелинейных параболических уравнений, для которого удается получить результаты, аналогичные скалярному случаю. Однако до последнего времени к этому классу не принадлежали системы параболических уравнений с кросс-диффузией, в частности, системы следующего типа

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}\Delta[u(d_1 + \alpha_{11}u + \alpha_{12}v)] + (a_1 - b_1 u - c_1 v)u, \\ v_t = \frac{1}{2}\Delta[v(d_2 + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v)] + (a_2 - b_2 u - c_2 v)v \\ u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), x \in R^d, \end{cases} \tag{1}$$

включающие, в частности систему Лотка-Вольтерра с кросс диффузией. Здесь $\alpha_{ij}, d_i,\ i,j = 1,2$ а также a, b, c - положительные константы,

Мы предлагаем подход, позволяющий свести решение задачи типа (1) к решению соответствующей стохастической задачи и строим вероятностное представление для обобщенного решения задачи (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта Минобрнауки N 2074 и гранта РФФИ 12-01-00457.

Литература

1.Belopolskaya Ya. Markov processes associated with fully nondiagonal systems of parabolic equations Markov processes and related fields N 3 2014 452 – 478.

2. Belopolskaya Ya. Probabilistic counterparts for strongly coupled parabolic systems Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Topics in Statistical Simulation. v 114 2014 34-43.

О КОНСТРУКЦИИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Бовкун В.А.

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Тел.: 89644858810, e-mail: 123456m@inbox.ru.ru

Объектом исследования является стохастическая задача Коши в форме Ито для систем дифференциальных уравнений Гельфанда–Шилова:

$$X(t,x)-\xi=\int_0^t A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)X(s,x)ds+\int_0^t BdW(s,x), \quad t\in[0;T],\ x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

В задаче (1) оператор $A(i\frac{\partial}{\partial x})$ — линейный дифференциальный оператор–матрица конечного порядка p в пространстве $L_2^m(\mathbb{R}) := L_2(\mathbb{R})\times...\times L_2(\mathbb{R})$, B — линейный ограниченный оператор в этом пространстве, $\xi\in L_2^m(\mathbb{R})$.

В пространстве $L_2^m(\mathbb{R})$ оператор $A(i\frac{\partial}{\partial x})$ порождает некорректную детерминированную задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t),\ t\in[0;T],\ x\in\mathbb{R},\quad u(x,0)=f(x).$$

решение которой, с помощью техники обобщенного преобразования Фурье определяется семейством операторов $\{U(t),\ t\in[0;T]\}$:

$$u(x,t)=(U(t)f)(x)=(G(\cdot,t)*f(\cdot))(x). \tag{2}$$

Равенство (2) понимается на основных функциях $\varphi\in\Phi$, где пространство Φ определяется свойствами оператора $A(i\frac{\partial}{\partial x})$. Функция $G(x,t)=(F^{-1}\{e^{tA(\sigma)}\})(x)$ — функция Грина задачи (2), матричная экспонента $e^{tA(\sigma)}$ определяется как формальный ряд по степеням матрицы $A(\sigma)$ — образа Фурье матрицы $A(i\frac{\partial}{\partial x})$.

Дифференциальная специфика оператора $A(i\frac{\partial}{\partial x})$ позволяет определить операторы решения $\{U(t),\ t\in[0;T]\}$ для систем, корректных по

Петровскому, условно–корректных и некорректных через R–полугруппу $\{S(t)\}$:

$$\langle \varphi, U(t)\xi \rangle = \langle \varphi, R^{-1}S(t)\xi \rangle = \langle (R^{-1})^{*}\varphi, S(t)\xi \rangle, \quad t \in [0;T],$$

с оператором R, построенными для каждого из трех классов корректности систем [1]. Тогда для обобщенного решения стохастической задачи (1) имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть оператор $A(i\frac{\partial}{\partial x})$ порождает R–полугруппу $\{S(t)\}$, соответствующую определенному классу корректности системы. Тогда обобщенное по переменной x решение задачи Коши (1) представимо в виде*

$$\langle \varphi, X(t) \rangle := \langle \left(R^{-1}\right)^{*} \varphi, S(t)\xi \rangle + \langle \left(R^{-1}\right)^{*} \varphi, \int_0^t S(t-s)BdW(s) \rangle, \quad \varphi \in \Phi,$$

где Φ подбирается в соответствии с классом системы.

Подбор пространства Φ осуществляется в соответствии со свойствами функции Грина, являющейся обратным преобразованием Фурье от матричного оператора $e^{tA(\sigma)}$, а также представлением (2) операторов решения и опирается на следующий результат.

Теорема 2. *Пусть Φ, Ψ пространства основных функций с непрерывным сдвигом, а $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ — их двойственные пространства соответсвенно. Тогда функционал $g(\sigma)$ типа функции, определяющий мультипликатор из $\widetilde{\Phi}'$ в $\widetilde{\Psi}'$, порождает функционал $G = F^{-1}\{g\}$ — свертыватель из Φ' в Ψ' и для любого $f \in \Phi'$ справедливо равенство*

$$F\{G * f\} = F\{G\} \cdot F\{f\}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00090 и программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Литература

1. Melnikova, I. V., Alekseeva, U. A. Weak regularized solutions to stochastic Cauchy problems / Chaotic modeling and simulations. – 2014. – № 1. – С. 49–56.

2. Гельфанд, И.М., Шилов, Г.Е. Обощенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений – М.: Физматгиз, 1958.

О ЗАДАЧЕ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Букин Д. Б.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

Тел.: 89032984280, e-mail: d.b.bukin@gmail.com

Пусть $(X, \mathcal{B})$ — измеримое пространство с двумя заданными на нем вероятностными мерами μ и ν. Пусть $c(x, y)$ — неотрицательная измеримая функция на $X \times X$. Она называется функцией стоимости. Задача Канторовича состоит в минимизации функционала стоимости

$$K(\pi) = \int_{X \times X} c(x, y)\pi(dx, dy)$$

по всем вероятностным мерам π на $X \times X$ с проекциями μ и ν.

Рассмотрим задачу Канторовича на пространстве $X = C[0, 1]$ с борелевской σ-алгеброй, соответствующей его естественной равномерной норме, с функциями стоимости $c(x, y) = |x - y|_H^2$ и $c(x, y) = |x - y|_H$, где

$$H = W_0^{2,1} = \{h \colon h \text{ абсолютно непрерывна на } [0, 1], h' \in L^2[0, 1], h(0) = 0\}$$

есть пространство Камерона–Мартина меры Винера P_W (см. [1]) с нормой $|h|_H = \|h'\|_{L^2}$.

Задача Канторовича с такой функцией стоимости была впервые изучена Д. Фейелем и А. С. Устюнелем [2] и оказалась разрешима в случае, когда μ — это мера Винера, а ν абсолютно непрерывна относительно μ.

Рассмотрим аналогичную задачу, где вместо меры Винера возьмем более общее распределение диффузионного процесса. В этом случае, при соответствующих условиях на коэффициенты процесса, мера μ есть образ меры Винера P_W на X при отображении

$$F \colon X \to X, \ F(x) = f \circ x,$$

где $f \in C^1(\mathbb{R})$ — нелинейный диффеоморфизм вещественной прямой. Оказывается, что, как правило, такая задача Канторовича не имеет нетривиальных решений (т.е., решений, отличных от случая $\mu = \nu$). Точнее, справедлива следующая теорема:

Теорема 1 *Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$ — диффеоморфизм прямой, причем нули функции f'' изолированы. Предположим, что мера π на $X \times X$ имеет проекции μ и ν, причем мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ. Пусть конечна величина $K(\pi)$. Тогда $x = y$ для π-почти всех $(x, y) \in X \times X$ и, следовательно, $\mu = \nu$.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что задача Канторовича не имеет нетривиальных решений в случае, когда f — нелинейная аналитическая функция.

Работа поддержана грантом РНФ 14-11-00196.

Литература

1. V. I. Bogachev. Gaussian measures. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998.

2. D. Feyel, A. S. Üstünel. Monge–Kantorovitch measure transportation and Monge–Ampére equation on Wiener space.// Probab. Theory Related Fields, vol. 128 (3), 2004, 347–385.

STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS AND INCLUSIONS WITH MEAN DERIVATIVES: PROPERTIES, APPLICATIONS, OPTIMAL CONTROL

Gliklikh Yu.E.

Voronezh State University

394088, Voronezh, Universitetskaya pl. 1

Tel.: +79611833119, e-mail: yeg@math.vsu.ru

This is a survey of results on the theory of equations and inclusions with mean derivatives and their applications published in part in [1 – 6].

The notion of mean derivatives was introduced by Edward Nelson for the needs of stochastic mechanics (a version of quantum mechanics). The equation of motion in this theory (called the Newton-Nelson equation) was the first example of equations in mean derivatives. Later it turned out that the equations in mean derivatives arose also in the description of motion of viscous incompressible fluid, in the description of Navier-Stokes vortices, etc.

Some remarks on notations. The space of $n \times n$ matrices is denoted by $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. By $\mathrm{S}(n)$ we denote the linear space of symmetric $n \times n$ matrices that is a subspace in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. The symbol $\mathrm{S}_+(n)$ denotes the set of positive definite symmetric $n \times n$ matrices that is a convex open set in $\mathrm{S}(n)$. Its closure, i.e., the set of positive semi-definite symmetric $n \times n$ matrices, is denoted by $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$.

Everywhere below for a set B in $\mathbb{R}^n$ or in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ we use the norm introduced by usual formula $\|B\| = \sup\limits_{y \in B} \|y\|$.

Mean derivatives

Consider a stochastic process $\xi(t)$ in $\mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, given on a certain probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ and such that $\xi(t)$ is an L_1 random element for all t. It is known that such a process determines 3 families of σ-subalgebras of the σ-algebra $\mathcal{F}$:

(i) "the past" $\mathcal{P}_t^\xi$ generated by preimages of Borel sets from в $\mathbb{R}^n$ under all mappings $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ for $0 \le s \le t$;

(ii) "the future" $\mathcal{F}_t^\xi$ generated by preimages of Borel sets from в $\mathbb{R}^n$ under all mappings $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ for $t \le s \le T$;

(iii) "the present" ("now") $\mathcal{N}_t^\xi$ generated by preimages of Borel sets from в $\mathbb{R}^n$ under the mapping $\xi(t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

All the above families we suppose to be complete, i.e., containing all sets of probability zero.

For the sake of convenience we denote by E_t^ξ the conditional expectation $E(\cdot|\mathcal{N}_t^\xi)$ with respect to the "present" $\mathcal{N}_t^\xi$ for $\xi(t)$.

According to Nelson's ideas we introduce the following notions of forward and backward mean derivatives.

Definition 1 *(i) The forward mean derivative $D\xi(t)$ of $\xi(t)$ at the time instant t is an L_1 random element of the form*

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{\xi(t + \triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\right), \tag{1}$$

where the limit is supposed to exist in $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ and $\triangle t \to +0$ means that $\triangle t$ tends to 0 and $\triangle t > 0$.

(ii) The backward mean derivative $D_*\xi(t)$ of $\xi(t)$ at t is the L_1-random element

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t\to +0} E^{\xi}_t\left(\frac{\xi(t)-\xi(t-\Delta t)}{\Delta t}\right) \tag{2}$$

where (as well as in (i)) the limit is assumed to exist in $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ and $\Delta t\to +0$ means that $\Delta t\to 0$ and $\Delta t>0$.

Introduce the differential operator D_2 that differentiates an L_1 random process $\xi(t)$, $t\in[0,T]$ according to the rule

$$D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t\to +0} E^{\xi}_t\left(\frac{(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))\otimes(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))}{\triangle t}\right). \tag{3}$$

It can be also described as

$$D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t\to +0} E^{\xi}_t\left(\frac{(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*}{\triangle t}\right), \tag{4}$$

where $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))$ is considered as a column vector (vector in $\mathbb{R}^n$), $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*$ is a row vector (transposed, or conjugate vector) and the limit is supposed to exists in $L_1(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$.

We emphasize that the matrix product of a column on the left and a row on the right is a matrix of rank 1, but $D_2\xi(t)$ is a symmetric semi-positive definite matrix function on $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ and it can be non-degenerate (positive-definite).

Definition 2 *D_2 is called quadratic mean derivative.*

Remark 1 *From the properties of conditional expectation it follows that there exist Borel mappings $a(t,x)$, $a_*(t,x)$ and $\alpha(t,x)$ from $R\times\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ and to $\bar{\mathrm{S}}_+$, respectively, such that $D\xi(t)=a(t,\xi(t))$, $D_*\xi(t)=a_*(t,\xi(t))$ and $D_2\xi(t)=\alpha(t,\xi(t))$. We call $a(t,x)$, $a_*(t,x)$ and $\alpha(t,x)$ the regressions.*

Recall that Ito process is a process $\xi(t)$ of the form

$$\xi(t)=\xi_0+\int_0^t a(s)ds+\int_0^t A(s)dw(s).$$

Definition 3 *An Itô process $\xi(t)$ is called a process of diffusion type if $a(t)$ and $A(t)$ are not anticipating with respect to $\mathcal{P}^{\xi}_t$ and the Wiener process $w(t)$ is adapted to $\mathcal{P}^{\xi}_t$. If $a(t)=a(t,\xi(t))$ and $A(t)=A(t,\xi(t))$, where $a(t,x)$ and $A(t,x)$ are Borel measurable mappings from $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ and to $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, respectively, the Itô process is called a diffusion process.*

Taking into account the properties of conditional expectation and the fact that $\mathcal{N}^{\xi}_t$ is a σ-subalgebra in $\mathcal{P}^{\xi}_t$, it is clear that for any martingale $\eta(t)$ with respect to $\mathcal{P}^{\xi}_t$ the equality $D^{\xi}\eta(t)=0$ holds. Since for a diffusion type process the integral $\int_0^t A(s)dw(s)$ is a martingale with respect to $\mathcal{P}^{\xi}_t$, the following statement takes place:

Theorem 1 *For an Itô diffusion type process $\xi(t)$ the mean derivative $D\xi(t)$ exists and equals $E^{\xi}_t(a(t))$. In particular, if $\xi(t)$ is a diffusion process, $D\xi(t)=a(t,\xi(t))$.*

Theorem 2 *Let $\xi(t)$ be a diffusion type process. Then $D_2\xi(t)=E^{\xi}_t[\alpha(t)]$ with $\alpha(t)=A(t)A^*(t)$ is the diffusion coefficient. In particular, if $\xi(t)$ is a diffusion process, $D_2\xi(t)=\alpha(t,\xi(t))$ where $\alpha(t,x)=A(t,x)A^*(t,x)$ is the diffusion coefficient.*

Theorem 3 *For a diffusion type process $D_2\xi(t) = 0$ if and only if $A = 0$ and so $\xi(t)$ is a deterministic process.*

Definition 4 *The derivative $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ is called the symmetric mean derivative. The derivative $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ is called the antisymmetric mean derivative.*

Consider the vectors $v^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(a(t,x) + a_*(t,x))$ and $u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(a(t,x) - a_*(t,x))$.

Definition 5 *$v^\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ is called the current velocity of the process $\xi(t)$; $u^\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ is called the osmotic velocity of the process $\xi(t)$.*

The physical meaning of v^ξ and u^ξ and mathematical description.

Denote by $\rho^\xi(t,x)$ the density of a stochastic process with respect to Lebesgue measure λ on $[0,l] \times \mathbb{R}^n$. This means that for every continuous inntegrable function $f(t,x)$ on $[0,l] \times \mathbb{R}^n$ the following equality takes place:

$$\int_{[0,l]\times\mathbb{R}^n} f(t,x)\rho^\xi(t,x)d\lambda = \int_{\Omega\times[0,l]} f(t,\xi(t))d\mathsf{P}dt.$$

Lemma 4 (J. Cresson & S. Darses) *Let $\xi(t)$ satisfy the Ito equation*

$$\xi(t) = \int_0^t a(s,\xi(s))ds + \int_0^t A(s,x)dw(s).$$

Then

$$u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha^{ij}\rho^\xi(t,x))}{\rho^\xi(t,x)}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{5}$$

where (α^{ij}) is the matrix of operator AA^*.

Corollary 5 *If $\xi(t) = \int_0^t a(s,\xi(s))ds + \sigma w(s)$. Then*

$$u^\xi(t,x) = \frac{\sigma^2}{2} grad \log \rho^\xi(t,x) = \sigma^2 grad \log\sqrt{\rho^\xi(t,x)}, \tag{6}$$

Consider an autonomous smooth field of non-degenerate linear operators $A(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Suppose that $\xi(t)$ is a diffusion type process whose diffusion integrand is $A(\xi(t))$. Then its diffusion coefficient $A(x)A^*(x)$ is a smooth field of symmetric positive definite matrices $\alpha(x) = (\alpha^{ij}(x))$. Since all those matrices are non-degenerate, the field of inverse matrices (α_{ij}) exists and is smooth and at any x the matrix $(\alpha_{ij})(x)$ is symmetric and positive definite.

Thus it defines a new Riemannian metric $\alpha(\cdot,\cdot) = \alpha_{ij}dx^idx^j$ on $\mathbb{R}^n$. Consider the Riemannian volume form of this Riemannian metric $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})}dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Denote by $\rho^\xi(t,x)$ the probability density of $\xi(t)$ with respect to the volume form $dt \wedge \Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})}dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$ on $[0,T] \times \mathbb{R}^n$. Then for $v^\xi(t,x)$ and $\rho^\xi(t,x)$ the so called equation of continuity

$$\frac{\partial\rho^\xi(t,x)}{\partial t} = -Div(v^\xi(t,x)\rho^\xi(t,x)) \tag{7}$$

holds, where Div denotes divergence with respect to the Riemannian metric $\alpha(\cdot,\cdot)$.

Analogous constructions of forward and backward mean derivatives on manifolds are well-posed only if a connection is involved and the values of those derivatives depend on the connection. On the other hand, the construction of current velocity and quadratic mean derivative avoids using the connection an so they are independent of the connection.

Let $Y(t,m)$, $t \in [0,l]$, be a smooth time-dependent vector field on $\mathbb{R}^n$. We define the forward derivative DY and the backward derivative D_*Y of Y as follows:

$$DY(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \frac{Y(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t)) - Y(t,\xi(t))}{\Delta t}$$

$$D_*Y(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \frac{Y(t,\xi(t)) - Y(t-\Delta t, \xi(t-\Delta t))}{\Delta t}$$

Suppose that the process ξ has diffusion coefficient $\sigma^2 I$. Then we obtain

$$DY = \left(\frac{\sigma^2}{2}\Delta + X \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t}\right) Y$$

and

$$D_*Y = \left(\frac{-\sigma^2}{2}\Delta + X_* \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t}\right) Y$$

where Δ is the Laplace operator, $\nabla = (\partial/\partial q^1, \ldots, \partial/\partial q^n)$, and the dot denotes the inner product in $\mathbb{R}^n$.

Analogous formulae take place in the case of Riemannian manifolds, but here $X \cdot \nabla$ is replaced be ∇_X where ∇ if the covariant derivative of Levi-Civita connection (the same for $X_* \cdot \nabla$) and Δ is Laplace-Beltrami operator.

Calculation of mean derivatives

For a Wiener process $w(t)$ in $\mathbb{R}^n$ we have $Dw(t) = 0$, $t \in [0,l)$, since $w(t)$ is a martingale.

Lemma 6 *For $t \in (0,l]$ we have $D_*w(t) = \frac{w(t)}{t}$.*

Obviously $\frac{w(t)}{t}$ does not exist at $t = 0$. Nevertheless the following statement takes place.

Lemma 7 *The integral $\int_0^t \frac{w(s)}{s} ds$ a.s. exists for $t \in [0,l]$.*

Lemma 8

$$(i) \quad D^w \frac{w(t)}{t} = -\frac{w(t)}{t^2} \text{ for } t \in (0,l).$$

$$(ii) D_*^w \frac{w(t)}{t} = 0 \text{ for } t \in (0,l].$$

Lemma 9 *For a solution $\xi(t)$ of the Itô equation*

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + A(t,\xi(t))dw(t)$$

The relations $D\xi(t) = a(t,\xi(t))$ and

$$D_*\xi(t) = a(t,\xi(t)) - trA'(A(t,\xi(t)) + A(t,\xi(t))D_*^\xi w(t)$$

hold.

Definition 6 *The process $w_*^\xi(t) = -\int_0^t D_*^\xi w(s) + w(t)$ is called backward Wiener process with respect to $\xi(t)$.*

Obviously $w_*^\xi(t)$ is a backward martingale with respect to $\mathcal{F}_t^\xi$. Notice that $w_*^\xi(t)$ depends on $\xi(t)$. It follows from above formulae that

$$w_*^w(t) = -\int_0^t \frac{w(s)}{s} ds + w(t)$$

and this process is well-posed. For calculating $w_*^\xi(t)$ for an arbitrary $\xi(t)$, one needs to know $D_*^\xi w(t)$. Below we find $D_*^\xi w(t)$ for processes with unit diffusion coefficient.

From lemmas 6 and 8 it follows that $D_*^w w_*^w(t) = 0$ and $D^w w_*^w(t) = -D_* w(t)$. It is important that we use D^w and D_*^w here. There is a famous result by T. Jeulin and M. Yor that $w_*^w(t)$ is a Wiener process with respect to its own past, i.e., $Dw_*^w(t) = 0$.

Now denote by $W(t)$ the standard Wiener process in $\mathbb{R}^n$, i.e., the coordinate process on the space of continuous curves $\Omega = C^0([0,T], \mathbb{R}^n)$ with cylinder σ-algebra $\mathcal{F}$ and Wiener measure ν. Consider the process

$$\xi(t) = \int_0^t \beta(s)ds + w(t).$$

It is a well-known fact that under some natural assumptions its measure μ on the above space of sample paths is absolutely continuous with respect to the Wiener measure ν with density

$$\theta(l) = exp(-\frac{1}{2}\int_0^l \beta(s)^2 ds + \int_0^l (\beta(s) \cdot dW(s))) \tag{8}$$

Denote E^W the (conditional) expectation on $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$.

Consider the regression for $E_t^W(\theta(l))$, i.e., the Borel function $E_t^W(\theta(l))(x)$ on $\mathbb{R}^n$ such that $E_t^W(\theta(l))(\xi(t)) = E_t^W(\theta(l))$. Introduce the notation

$$\kappa(t) = \theta(l)^{-1} \mathrm{grad} E_t^W(\theta(l)), \tag{9}$$

where $\mathrm{grad}E_t^W(\theta(l))$ is the gradient of regression, where $\xi(t)$ is submitted.

Lemma 10

$$D_*\xi(t) = E_t^\xi(\beta(t)) + \frac{\xi(t)}{t} - E_t^\xi(\kappa(t)), \tag{10}$$

$$D_*^\xi w(t) = \frac{\xi(t)}{t} - E_t^\xi(\kappa(t)), \tag{11}$$

Lemma 11 .

$$D^\xi E_t^\xi(\kappa(t)) = 0. \tag{12}$$

$$D_*^\xi E_t^\xi(\kappa(t)) = 0. \tag{13}$$

Lemma 12 *The following equalities hold:*

$$DD\xi(t) = D^\xi \beta(t). \tag{14}$$

$$D_* D_* \xi(t) = D_*^\xi \beta(t) + E_t^\xi(\frac{\beta(t)}{t} - \frac{\kappa(t)}{t}). \tag{15}$$

$$D_* D\xi(t) = D_*^\xi \beta(t). \tag{16}$$

$$DD_*\xi(t) = D^\xi\beta(t) + E_t^\xi(\frac{\beta(t)}{t}) - \frac{\xi(t)}{t^2} \tag{17}$$

$$DD_*\xi(t) = D^\xi\beta(t) - D^W u^W(t,\xi(t)) - E_t^\xi(\beta(t)\cdot\nabla)u^W(t,\xi(t)). \tag{18}$$

First order differential equations withforward mean derivatives

Everywhere below, for the sake of simplicity we consider equations, their solutions, etc., on a finite time interval $t \in [0, T]$.

Let Borel measurable maps $a(t, x)$ and $\alpha(t, x)$ from $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ and to $\bar{S}_+(n)$, respectively, be given.

Consider the system of the form

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t)), \end{cases} \tag{19}$$

We cal it the first order differential equation with forward mean derivatives.

One can easily to see that the problem of finding a diffusion type process, P-a.s. satisfying (19) is well-posed. The first equation of (19) determines the drift and the second one – the diffusion coefficient of a process.

Definition 7 *We say that (19) has a weak solution on $[0, T]$ with initial condition $\xi(0) = x_0$, if there exists a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ and a stochastic process $\xi(t)$ given on it and taking values in $\mathbb{R}^n$ and satisfying the above initial condition, such that for $\xi(t)$ P-a.s. (19) is fulfilled for all $t \in [0, T]$.*

Theorem 13 *Let $\alpha(t, x)$ in (19) be jointly continuous, positive definite (i.e. for all $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ it belongs to $S_+(n)$), and satisfy the following estimate*

$$\|tr\alpha(t, x)\| < K(1 + \|x\|)^2 \tag{20}$$

for a certain $K > 0$. Let $a(t, x)$ be Borel measurable and satisfy the estimate

$$\|a(t, x)\| < K(1 + \|x\|) \tag{21}$$

for a certain $K > 0$. Then for any initial condition $\xi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ equation (19) has a weak solution, well-posed on the entire interval $[0, T]$.

Theorem 14 *Let $\alpha(t, x)$ be C^2-smooth, semi-positive definite (i.e. for all $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ it belongs to $\bar{S}_+(n)$) and satisfy (20). Let $a(t, x)$ be continuous and satisfy (21). Then for any initial condition $\xi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ equation (19) has a weak solution that is well posed on the entire interval $[0, T]$.*

Differential equations with current velocities

As it is mentioned above, the meaning of current velocities is analogous to that of ordinary velocity for a non-random process. Thus the case of equations and inclusions with current velocities is probably the most natural from the physical point of view.

The system

$$\begin{cases} D_S\xi(t) = v(t, \xi(t)) \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t)) \end{cases} \tag{22}$$

is called a first order differential equation with current velocities.

Theorem 15 *Let $v : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be smooth and $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathrm{S}_+(n)$ be smooth and autonomous Let also they satisfy the estimates*

$$\|v(t, x)\| < K(1 + \|x\|), \quad tr\ \alpha(x) < K(1 + \|x\|^2)$$

for some $K > 0$. Let ξ_0 be a random element with values in $\mathbb{R}^n$ whose probability density ρ_0 with respect to the the volume form Λ_α of $\alpha(\cdot, \cdot)$ on $\mathbb{R}^n$, is smooth and nowhere equal to zero. Then for the initial condition $\xi(0) = \xi_0$ equation (22) has a weak solution that is well posed on the entire interval $t \in [0, T]$.

Lemma 16 *Let $\alpha(x)$, $\rho(t,x)$ and Λ_α be the same as in Theorem 15. Let also the vector field v from Theorem 15 be autonomous. Then the flow $\hat{g}_t$ of vector field $(1, v(x))$ on $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ preserves the volume form $\rho(t,x)dt\wedge\Lambda_\alpha$ (i.e., $\hat{g}_t^*(\rho(t,x)dt\wedge\Lambda_\alpha) = \rho_0(x)dt\wedge\Lambda_\alpha$ where $\hat{g}_t^*$ is the pull back) and so for any measurable set $Q\subset\mathbb{R}^n$ and for any $t\in[0,T]$*

$$\int\limits_Q \rho_0(x)\Lambda_\alpha = \int\limits_{g_t(Q)} \rho(t,x)\Lambda_\alpha.$$

Differential inclusions with forward mean derivatives

Let $\mathbf{a}(t,x)$ and $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ be set-valued mappings from $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ and to $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$, respectively. The system of the form

$$\begin{cases} D\xi(t)\in\mathbf{a}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t)\in\boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)) \end{cases} \tag{23}$$

will be called a first order differential inclusion in forward mean derivatives.

Theorem 17 *Suppose that $\mathbf{a}(t,x)$ is a uniformly bounded, Borel measurable set-valued mapping from $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ with closed values. Let $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ be a uniformly bounded, Borel measurable set-valued mapping from $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ to $\mathrm{S}_+(n)$ with closed values and let there exist $\varepsilon_0>0$ such that for all t,x the ε_0-neighbourhood of $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ in $\mathrm{S}(n)$ does not intersect the set $\mathrm{S}_0(n)$ of symmetric degenerate $n\times n$ matrices. Then for any initial condition $\xi(0)=\xi_0\in\mathbb{R}^n$ inclusion (23) has a weak solution that is well-posed on the entire interval $t\in[0,T]$.*

Theorem 18 *Let $\mathbf{a}(t,x)$ be an upper semicontinuous set-valued mapping with closed convex values from $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ and let it satisfy the estimate $\|\mathbf{a}(t,x)\|^2 < K(1+\|x\|^2)$ for some $K>0$. Let $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ be an upper semicontinuous set-valued mapping with closed convex values from $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ to $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$ such that for each $\alpha(t,x)\in\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ the estimate $\|tr\alpha(t,x)\| < K(1+\|x\|^2)$ takes place for some $K>0$. Then for any initial condition $\xi(0)=\xi_0\in\mathbb{R}^n$ inclusion (23) has a weak solution that is well-posed on the entire interval $t\in[0,T]$.*

Theorem 19 *Suppose that $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ takes values in the space $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$ of positive semi-definite symmetric matrices, has closed convex images, it is lower semicontinuous and for each $\alpha\in\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ the following estimate $\|tr\alpha(t,x)\| < K(1+\|x\|)^2$ holds for some $K>0$. Let also $\mathbf{a}(t,x)$ be Borel measurable set-valued mapping and satisfy the estimate $\|\mathbf{a}(t,x)\| < K(1+\|x\|)$ for some $K>0$. Then for any initial condition $\xi(0)=\xi_0$ there exists a weak solution of (23) that is well-posed on the entire interval $t\in[0,T]$.*

Optimal control (joint results with O.O. Zheltikova)

For inclusions with forward mean derivatives we have proved the existence of an optimal solution that minimizes (or maximizes) a certain cost criterion. For equations with mean derivatives with control we pass to the corresponding inclusion where the set-valued right hand side is obtained as the union of all possible values of the equation right-hand side for all values of controlling parameter, and obtain the existence of optimal solution as well. It is shown that there exists a Borel measurable control that realizes the optimal solution.

The same is proved also for a special type of the inclusions of the form

$$\begin{cases} D\xi(t)+\frac{1}{2}diag D_2\xi(t)\in\mathbf{a}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t)\in\boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)) \end{cases}$$

Stochastic differential equations of Leontieff type (joint results with E. Mashkov)

We understand the Leontieff type stochastic differential equation as

$$\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M}\int_0^t \xi(s)ds + f(t) + B\tilde{w}(t),$$

where $\tilde{L}$ is a degenerate matrix $n \times n$, $\tilde{M}$ and B are non-degenerate matrices $n \times n$, $\xi(t)$ is an n-dimensional stochastic process, $f(t)$ is a smooth n-dimensional vector-function and $\tilde{w}(t)$ is a Wiener process in $\mathbb{R}^n$. The physical meaning of these objects is as follows: $f(t)$ is the signal incoming into the device described by the matrices $\tilde{L}$ and $\tilde{M}$, while $B\dot{\tilde{w}}(t)$ (where $\dot{\tilde{w}}(t)$ is "derivative" of Wiener process, i.e., white noise) describes the noise (interference).

Such equations (first without Wiener process) arise in papers by A.L. Shestakov and G.A. Sviridyuk in their description of dynamically distorted signals. In order to take the noise into account, the Wiener process was added.

After some special transformation (that in particular includes the change of Euclidean metric in $\mathbb{R}^n$) the Leontieff type equation takes the form

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(\tau)d\tau + \int_0^t Af(\tau)d\tau + w(t), \tag{24}$$

where under appropriate numeration of basis vectors, in the matrix L first along diagonal there are Jordan boxes with zeros on diagonal, and the last matrix along diagonal is the unit one. In M in the lines corresponding to Jordan boxes, there is the unit matrix and the last block along diagonal is a certain non-degenerate matrix.

By the conditions of the problem, the "present" σ-algebra of solution must be taken as the "present" of Wiener process $w(t)$. Then the solution is represented in terms of the current velocity of $w(t)$, $D_S w(t) = \frac{w(t)}{2t}$ and its higher symmetric derivatives. Namely, the equation is expanded into the system of independent equations, and for the part corresponding to a given Jordan box in L the solution takes the form:

$$\eta^i(t) = -\sum_{k=i}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{k+1}\frac{d^{k-i}f^j}{dt^{k-i}}\right) - \sum_{j=1}^{n} a_j^i f^j$$
$$+\sum_{k=i+1}^{p+1}\left((-1)^{k-i+1}\frac{\prod_{j=1}^{k-i}(2j-1)}{2^{k-i+1}}\frac{w^k(t)}{t^{k-i+1}}\right) - \frac{w^i(t)}{2t}. \tag{25}$$

From the definition of symmetric mean derivatives it clearly follows that they are well-posed only on open time-intervals since their construction involves both forward and backward time increments. Taking into account formula (25), one can easily see that the solutions constructed above, have the form of sums where some summands contain multipliers of $\frac{w^j(t)}{t^k}$, $k \geq 1$, type. So, the solutions tend to zero as $t \to 0$, i.e., at $t = 0$ the values do not exist.

A version of solving this problem is as follows. Specify an arbitrary small time instant $t_0 \in (0, l)$ and consider the function $t_0(t)$ by the formula

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0 & \text{если} \quad 0 \leq t \leq t_0; \\ t & \text{если} \quad t_0 \leq t. \end{cases}$$

Replace the elements $\frac{w^j(t)}{t^k}$ by $\frac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. After that the processes will take zero value at $t = 0$ but only for $t > t_0$ they will be solutions of (24). Note that for two different time instants $t_0^{(1)}$ and $t_0^{(2)}$, for $t > max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ the values of corresponding solutions coincide a.s.

Second order equations with mean derivatives arising in mathematical physics

All such equations are analogues of second Newton's law

$$\ddot{x}(t) = \alpha(t, x(t), \dot{x}(t))$$

or (on Riemannian manifolds)

$$\frac{D}{dt}x(t) = \alpha(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

Note that there are several versions of second mean derivatives: completely forward, completely backward, mixed, etc. All equations with such derivatives make sense and arise in different branches of mathematical physics.

First consider a mechanical system whose force field is subjected to a random perturbation of the form $A(t, x, \dot{x})\dot{w}(t)$ where $\dot{w}(t)$ is a white noise. This situation yields the so called Langevin equation that in terms of mean derivatives takes the form of the system

$$\begin{cases} \mathbf{D}\dot{\xi}(t) = \bar{\alpha}(t, \xi(t), \dot{\xi}(t)) \\ \mathbf{D}_2\dot{\xi}(t) = A(t, \xi(t), \dot{\xi}(t))\, A^*(t, \xi(t), \dot{\xi}(t)) \\ D_2\xi(t) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Analogous inclusion

$$\begin{cases} \mathbf{D}\dot{\xi}(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(t), \dot{\xi}(t)) \\ \mathbf{D}_2\dot{\xi}(t) = A(t, \xi(t), \dot{\xi}(t))\, A^*(t, \xi(t), \dot{\xi}(t)) \\ D_2\xi(t) = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Theorem 20 *Let the set-valued force field $\alpha(t, m, X)$ and set-valued $(1,1)$-tensor field $A(t, m, X)$ be upper semi-continuous with convex bounded closed values and satisfy Itô condition*

$$\|\bar{\alpha}(t, m, X)\| + \|A(t, m, X)\| < K(1 + \|X\|) \tag{28}$$

for a certain K. Then for any $m_0 \in M$ and $C \in T_{m_0}M$ the Langevin inclusion (27) has a weak solution with initial conditions $\xi(0) = m_0$, $\dot{\xi}(0) = C$, well-posed for all $t \in [0, \infty)$.

The case where the velocity is subjected to random influence, is described by the equation

$$\begin{cases} D\xi(t) = v(t, \xi(t)) \\ D_2\xi(t) = A(t, \xi(t))A^*(t, \xi(t)) \\ Dv(t, \xi(t)) = \bar{\alpha}(t, \xi(t)). \end{cases} \tag{29}$$

We also suppose that $A(t, x)$ and $\bar{\alpha}(t, x))$ satisfy the Itô condition

$$\|A(t, x)\| + \|\bar{\alpha}(t, x)\| < K(1 + \|x\|) \tag{30}$$

for some $K > 0$.

Theorem 21 *Let $A(t, x)$ and $\bar{\alpha}(t, x)$ be jointly continuous in t, x and satisfy (30). Then for every couple ξ_0, $v_0 \in \mathbb{R}^n$ there exists a weak solution of (29) with initial conditions $\xi(0) = \xi_0$ and $v(0) = v_0$.*

An equation with mixed mean derivatives is Newton-Nelson equation describing the motion of a quantum particle.

$$\frac{1}{2}(DD_* + D_*D)\xi = \alpha(t, \xi(t), v^{\xi}(t))$$

$$D_2\xi(t) = \frac{\hbar}{\mathrm{m}}I$$

Let Ψ be a solution to a certain Schrödinger equation with a certain potential V. Consider it in the form $\Psi = e^{R+iS}$ and introduce $v = \frac{\hbar}{\mathrm{m}} gradS$, $u = \frac{\hbar}{\mathrm{m}} gradR$ and $a = v + u$. Then the solution of Itô equation $d\xi = adt + \sqrt{\frac{\hbar}{\mathrm{m}}}dw$ satisfies the Newton-Nelson equation with the force field $-\mathrm{grad}V$.

By transition to a stochastic analogue of velocity hodograph equation we prove the existence of solution of the Newton-Nelson equation under some natural hypotheses where $\alpha_0(t,\xi(t))+\alpha_1(t,\xi(t))\circ v^{\xi}(t)$ with α_0 is a vector field and α_1 is $(1,1)$-tensor field (a field of linear operators).

The existence is proved for two types of initial data: if the density of initial distribution is nowhere zero and if it is a single deterministic point. But in the latter case it is possible to construct a process that becomes a solution from every time instant $t_0 > 0$ but not from $t = 0$. It looks similar to the Big Bang.

In this case we have to consider Newton-Nelson equation on the space time of General Relativity. Note that the construction of mean derivatives is not covariant with respect to the Lorentz group and so it is subjected to some modification. Say, the forward relativistic mean derivative is "forward in time and backward in space" and vice versa for backward relativistic mean derivative. The existence theorem for Newton-Nelson equation in relativistic case is quite analogous to the non-relativistic case.

An equation with completely backward mean derivatives arises in deterministic viscous hydrodynamics in the framework of Lagrange approach based on the geometry of groups of diffeomorphisms (for perfect fluids it was suggested by V. Arnold and developed by D. Ebin and J. Marsden). For a model example of fluid on a flat n-dimensional torus this equation takes the form

$$\begin{cases} \bar{D}_*\bar{D}_*\xi(t) = F \\ D_2\xi(t) = 2\nu I \end{cases} \tag{31}$$

where $\bar{D}_* = PD_*$, P is L_2-orthogonal projector onto divergence-free vector fields, ν is the viscosity coefficient. Equation (31) can be considered as constraint Newton's law on the group of diffeomorphisms If $D_*\xi(t) = u(t,\xi(t))$ is right-invariant vector, i.e., generated by a vector field $u(t,m)$ on the torus, then $u(t,m)$ satisfies the Navier-Stokes equation with external force F and viscosity ν. This can be derived from the formulae of backward mean derivatives of vector fields I mentioned at the beginning.

Let $g(t)$ be a flow of perfect incompressible fluid on the torus given for $t \in [0,T]$. Consider its random perturbation $\xi(t) = g(T-t) - \sigma w(T-t)$. It satisfies (31) but generates a solution of Reynolds equation. Nevertheless, if the perfect flow is subjected to a certain special random force field, the latter turns into a solution of Navier-Stokes equation without external forces.

Note that $2\nu I$ in the right-hand side of second equation in (31) can be replaced by some other operators that will yield a description of non-Newtonian fluids.

We have translated into the language of stochastic mechanics the description of motion of a quantum particle in the classical gauge field.

References

1. Gliklikh Yu. E. Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics.- London: Springer-Verlag,2011.- 460 p.

2. Gliklikh Yu.E., Vinokurova N.V. On the description of motion of a quantum particle in the classical gauge field in the language of stochastic mechanics // Communications in Statistics - Theory and Methods.- 2011.- Vol. 40.- No. 19-20.- P. 3630-3640

3. Gliklikh Yu.E., Makarova A.V. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities // Applicable Analysis.- 2012.- Vol. 91.- Issue 9.- P. 1731 - 1739

4. Gliklikh Yu.E. On the description of some anisotropic viscous fluids by the methods of stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms / Yu.E. Gliklikh, M.E. Zalygaeva // Bulletin of Voronezh State University. Series Phyiscs Mathematics.-2013.- Вып. 1.- С. 146-154

5. Gliklikh Yu.E. Stochastic Leontieff type type equations and mean derivatives of stochastic processes / Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov // Vestnik of South Ural State University Series Mathematical Modelling and Computer software.-2013.- Vol. 6.- No. 2.- P. 25 - 39.

6. Gliklikh Yu.E., Zheltikova O.O. On existence of optimal solutions for stochastic differential inclusions with mean derivatives // Applicable Analysis.- 2014.- Vol.93.- No. 1.- P. 35 - 46.

ЗАДАЧА МОНЖА-КАНТОРОВИЧА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Заев Д.А.

Национальный Исследовательский Университет - Высшая Школа Экономики

117312, г.Москва, ул. Вавилова, 7

Тел.:+79201610813, e-mail: zaev.da@gmail.com

Задача Монжа-Канторовича - это задача оптимального переноса массы из одного заданного распределения в другое. В постановке Канторовича она относится к классу задач бесконечномерной линейной оптимизации. Оказывается, что такая задача имеет множество приложений как в фундаментальных, так и в прикладных областях. Теория, развитая вокруг неё, изучает вопросы существования, единственности и формы оптимального переноса массы.

Доклад посвящён некоторым важным модификациям задачи Монжа-Канторовича, а именно задаче, в которой на множество допустимых планов переноса накладываются дополнительные линейные ограничения.

Зафиксируем вероятностные меры μ и ν на польских пространствах X и Y соответственно и выберем подпространство W некоторого подходящего пространства функций, заданных на $X \times Y$. Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\inf \left\{ \int c d\pi : (\mathrm{Pr}_X)_\# \pi = \mu, (\mathrm{Pr}_Y)_\# \pi = \nu, \int \omega d\pi = 0 \ \forall \omega \in W \right\}$$

для некоторой измеримой функции стоимости $c : X \times Y \to \mathbb{R}$. Эту задачу можно назвать задачей Монжа-Канторовича с дополнительными линейными ограничениями. В нашем случае мы ограничиваем множество транспортных планов, добавляя следующее линейное ограничение:

$$\int \omega d\pi = 0 \ \forall \omega \in W$$

Примером таких ограничений является требование инвариантности относительно некоторой заданной группы преобразований или требование быть мартингалом. Важным приложением такой модификации является возможность осмысленной формулировки задачи Монжа-Канторовича на бесконечномерных пространствах для симметричных мер.

Для задачи Монжа-Канторовича с дополнительными линейными ограничениями можно сформулировать критерий существования оптимального решения, утверждение о двойственности типа Канторовича и необходимое геометрическое условие на носитель оптимальной меры, которое аналогично известному условию c-монотонности.

ОПИСАНИЕ ВЯЗКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В ТЕРМИНАХ ПРОИЗВОДНЫХ В СРЕДНЕМ НА ГРУППАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПЛОСКОГО ТОРА

Залыгаева М.Е.

Воронежский государственный университет

394006, Воронеж, Университетская пл. 1

Тел.: (473)2208641, e-mail: zalygaeva@math.vsu.ru

Строится специальное стохастическое возмущение лагранжева описания движения вязкой жидкости на плоском n-мерном торе, с вязким членом **B(t)w(t)**, где **B(t) -** некоторый стационарный линейный оператор, **w(t) -** винеровский процесс.

Доказывается, что при переходе к эйлерову описанию в данном случае возникают аналоги уравнений Бюргерса, Рейнольдса и Навье-Стокса, в которых оператор Лапласа заменен на дифференциальный оператор второго порядка с матрицей следующего вида: матрица оператора **B(t)**, умноженная на транспонированную матрицу оператора **B(t)**.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ СТРУКТУРА СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В.И. Заляпин

Южно-Уральский государственный университет (НИУ)

454080, Челябинск, пр. Ленина 76,

(351)-267-9904, e-mail: vzal@susu.ac.ru

I. Рассмотрим случайное блуждание ξ в $\mathbb{R}^{n+k}$, задаваемое однородной переходной функцией

$$P\{x,y\} = P\{0, x-y\} = \begin{cases} p_i & x-y = e_i \\ 0, & x-y \neq e_i \end{cases}, i = 1,2,\ldots,n+k, \tag{1}$$

где e_i – система базисных ортов. Рандомизуем это случайное блуждание пуассоновским процессом, параметр которого без ограничения общности можно считать равным единице.

Пусть $A = (a_{ij}),\ i = 1,2,\ldots,k,\ j = 1,2,\ldots,n+k$ – матрица с целочисленными элементами, $m \in \mathbb{R}^k$ –целочисленный вектор. Положим $x \sim y \ \Leftrightarrow\ \exists m:\ x-y = mA$. Обозначим через $\mathcal{R}_n^k(A)$ совокупность классов эквивалентности $\mathcal{H}_y(A) = \{x \in \mathbb{R}^{n+k} : \exists m:\ x = y + mA\}$.

Случайное блуждание (1) индуцирует случайное блуждание в $\mathcal{R}_n^k(A)$, при этом

$$P\{\xi \in \mathcal{H}_y(A)\} = e^{-t}\mathcal{G}_y(tp),\ p = \{p_1,\ldots,p_{n+k}\}.$$

$\mathcal{G}_y(\mathbf{z})$ – функции пуассоновского блуждания (Ф.П.Б.) [1].

Среди них:

1). $A = (1,1)$, Ф.П.Б. – модифицированные функции Бесселя,

2). $A = (1,1,\ldots,1)$, Ф.П.Б. – функции Люстерника (обобщенные цилиндрические функции),

3). $n = 1,\ k = 1,\ A = (1,-2),\ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z)$ – многочлены Эрмита,

4). $n = 2,\ k = 1,\ A = (1,1,-1),\ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ – многочлены Лагерра

5). $n = 2,\ k = 1,\ A = (1,1,-2),\ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ – многочлены Лежандра, многочлены Гегенбауэра, трехмерные сферические функции

6). $n = 3,\ k = 1,\ A = (1,1,-1,-1),\ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ – многочлены Якоби, многочлены Лагранжа, четырехмерные сферические функции, гипергеометрия

II. Прозрачные вероятностные соображения позволяют получить основные соотношения, которым удовлетворяют Ф.П.Б.:

$$\sum_{\mathbf{s}} \mathbf{u}^{\mathbf{s}}\mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) = exp(\mathbf{zu}), \quad \mathbf{s}\cdot\mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n+k}(z_i\mathcal{G}_{\mathbf{s}-\mathbf{e_i}}(\mathbf{z}))e_i,$$

$$\sum_{\mathbf{s}} \mathbf{s}\mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) = e^{|\mathbf{z}|}\cdot\sum_{i=1}^{n+k}(z_i)\mathbf{e_i},\ |\mathbf{z}| = \sum_i z_i,\ \ \mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z_1}+\mathbf{z_2}) = \sum_l \mathcal{G}_{\mathbf{s}-\mathbf{l}}(\mathbf{z_1})\mathcal{G}_{\mathbf{l}}(\mathbf{z_2}),$$

в том числе и дифференциальные тождества

$$\frac{\partial\mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z})}{\partial z_i} = \mathcal{G}_{\mathbf{s}-\mathbf{e_i}}(\mathbf{z}) \quad D^{\overline{S_1(A)}}\mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) = D^{\overline{S_2(A)}}\mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}).$$

III. Для классических специальных функций математической физики получаем:

$A = (1;-2)$, $\mathcal{G}_{\mathbf{k}}(-1,x) = \frac{1}{(k_2-2k_1)!}H_{k_2-2k_1}(x)$ — многочлены Эрмита. Реккурентное дифференцирование

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x);\ H_n''(x) + 2nH_n(x) = 2xH_n'(x)$$

Формулы сложения

$$(\sqrt{2})^n H_n(z_1+z_2) = \sum_m C_n^m H_{n-m}(z_1\sqrt{2})H_m(z_2\sqrt{2})$$

$$H_n(z_1+z_2) = \sum_m C_n^m z_2^m H_{n-m}(z_1) = \sum_m C_n^m z_1^m H_{n-m}(z_2).$$

$A = (1;-1,1)$, $\quad \mathcal{G}_{\mathbf{k}}(\rho\cdot e^{\overline{\varphi}}) = e^{\mathbf{k}\overline{\varphi}}\frac{\rho^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}L_{k_2+k_3}^{k_1-k_3}(-\rho)$ — многочлены Лагерра Реккурентные соотношения

$$L_n^m(z) = L_{n-1}^m(z) + L_n^{m-1}(z), \qquad L_n^m(z) = \sum_{j=0}^r C_r^j L_{n-r+j}^{m-j}(z), \frac{d}{dz}L_n^m(z) = -L_{n+1}^{m-1}(z),$$

формула сложения

$$\frac{(x+y)^{n+m}}{(n+m)!}L_n^m(x+y) = \sum_{i,j}\frac{x^{n+m-i-j}\cdot y^{i+j}}{(n+m-i-j)!(i+j)!}L_{n-j}^{m-i}(x)L_n^m(y),$$

формула удвоения

$$L_n^m(2z) = 2^{-(n+m)}\sum_{i,j}C_{n+m}^{i+j}L_{n-j}^{m-i}(z)L_n^m(z).$$

III. Источником асимптотик для ФПБ служат предельные теоремы теории вероятностей.

Например, классические асимптотики для бесселевых функций получаются из следующих простых соображений:

если $p_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ – пуассоновское распределение, то известно, что при $\lambda \gg 1$, $\lambda - k = o(\sqrt{\lambda})$ оно аппроксимируется нормальным. Сответственно, вероятности $\mathsf{P}\{\xi(\mathsf{t}) \in \mathsf{H}_{\mathsf{x}}^{\mathsf{A}}\}$ аппроксимируются нормальными.

Для функций Люстерника (в т.ч. для модифицированных функций Бесселя) может быть на этом пути получен аналог асимптотики Виленкина – Цукермана:

Теорема ([2]) *Пусть* $x \in \mathbb{R}^{n+1}, d(x) = \frac{1}{\sum_1^n \frac{1}{x_i}}\left(1 - \frac{1}{\sum_1^n \frac{x_{n+1}}{x_i}}\right)$, *тогда при* $\sum x_i \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod x_i \sum \frac{1}{x_i}}} exp\left(-\frac{1}{2}\sum_1^n \frac{L_j(x,k)}{x_j}\right).$$

Здесь $L_j(x,k) = \left(x_j - x_{n+1} - k_j - d(x)\sum_1^n \frac{x_j - x_{n+1} - k_j}{x_j}\right)^2$.

Литература.

1. *Заляпин, В.И.* О системе функций пуассоновского блуждания./Заляпин В.И., Люстерник Л.А.//ДАН СССР.–1972.– Т.207, №1. С.29-31

2. *Григорьев С.А.* Асимптотические разложения функций Люстерника.
Вестник ЮУрГУ.–2002.– №3(12). С.11–18

О «НЕЛОКАЛЬНЫХ» МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ В МОДЕЛЯХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

А.И. Кириллов

Российский фонд фундаментальных исследований
e-mail: AcademiaXXI@mail.ru

Сложной называется система, состоящая из большого (свыше нескольких сот) элементов, взаимодействующих между собой посредством изменения общей для элементов системы среды обитания. При мезоскопическом описании таких систем (модель типа «жизнь и судьба») предполагается, что каждый элемет системы следует выборочной траектории некоторого единственного для всей системы случайного процесса. Если имеется несколько сложных систем, взаимодействующих между собой, то эти системы описываются совокупностью взаимосвязанных случайных процессов.

Одного случайного процесса в пространстве нескольких измерений оказывается достаточно для мезоскопического описания системы из очень большого числа элементов.

Для описания взаимодействия элементов сложной системы естественно предполагать, что переходные вероятности основного процесса зависят от некоторых функционалов от этого процесса, например, от его выборочных средних или от распределения вероятности. Формально процесс с такими переходными вероятностями не является марковским. Однако, можно изменить пространство сотояний системы так, что в нем основной процесс будет марковским. После этого стандартным образом формулируются условия, при которых основной процесс будет диффузионным. Выведены соответствующме уравнения Колмогорова и Ито. Обсуждаются условия существования и единственности их решений.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00196).

КОНСТРУКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ МЕР В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Малофеев И. И.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

Тел.: +79175213180, e-mail: ilmalofeev@yandex.ru

Пусть μ — ограниченная неотрицательная радоновская мера на вполне регулярном топологическом пространстве X, определенная на борелевской σ"-алгебре $\mathcal{B}$. Мы будем предполагать, что мера μ сосредоточена на счетном объединении метризуемых компактов. Это условие всегда выполнено, если X — суслинское или метризуемое или если μ — гауссовская мера. Для данной измеримой функции $F\colon X \to \mathbb{R}$ или измеримого отображения $F\colon X \to \mathbb{R}^d$ можно рассмотреть образ меры $\mu \circ F^{-1}$, задаваемый формулой

$$\mu \circ F^{-1}(B) := \mu(F^{-1}(B))$$

на борелевской σ-алгебре в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^d$ соответственно.

Предлагаемая конструкция поверхностной меры σ^y на множестве уровня $F^{-1}(y)$ следующая: вводится некоторая весовая функция θ_F и полагается

$$\int f(x)\sigma^y(dx) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_{\{y<F<y+r\}} f(x)\theta_F(x)\mu(dx)$$

для подходящего класса функций f (скажем, ограниченных липшицевых). В отличие от условных мер такая конструкция требует определенных ограничений на меры и функции, о которых идет речь.

Ненормализованные поверхностные меры. Мера μ, упомянутая выше, фиксирована всюду далее. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс ограниченных $\mathcal{B}$-измеримых функций. Предполагается, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет следующим условиям:

(F1) $\mathcal{F}$ — линейное пространство и $\varphi(f) \in \mathcal{F}$ для всех $f \in \mathcal{F}$ и всех липшицевых функций φ на $\mathbb{R}$,

(F2) пространство $\mathcal{P}(X)$ радоновских вероятностных мер на $\mathcal{B}$ секвенциально полно в топологии пространства ограниченных мер, порожденной двойственностью с $\mathcal{F}$ и соответствующая сходимость дает слабую сходимость, это означает, что если $\{\mu_n\}$ — такая последовательность в $\mathcal{P}(X)$, что интегралы каждой функции из $\mathcal{F}$ по мерам μ_n имеют конечный предел, то существует мера $\mu \in \mathcal{P}(X)$ такая, что для каждой ограниченной непрерывной функции f имеем

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f(x)\mu_n(dx).$$

Векторным полем v будем называть отображение $f \mapsto \partial_v f$ из $\mathcal{F}$ в $L^1(\mu)$, для которого $\partial_v(\psi \circ f) = \psi'(f)\partial_v f$ μ-п.в. для всех $f \in \mathcal{F}$ и всех липшицевых функций ψ.

Предположим, что $\mathcal{F}$ наделено некоторой нормой $\|f\|_{\mathcal{F}}$, причем существует $p > 1$ такое, что

$$\|f\|_{L^p(\mu)} + \|\partial_v f\|_{L^1(\mu)} \le \|f\|_{\mathcal{F}}, \quad f \in \mathcal{F}.$$

С помощью этой нормы обычным образом вводится $C_{\mathcal{F}}$-емкость на X (см. [1]).

Далее считаем, что мера μ дифференцируема вдоль v по Фомину, т.е. имеется такая функция $\beta_v \in L^1(\mu)$, что

$$\int_X \partial_v f(x)\mu(dx) = -\int_X f(x)\beta_v(x)\mu(dx), \quad f \in \mathcal{F}.$$

Определение 1 *Будем говорить, что функция $\Psi \in L^1(\mu)$ входит в $\mathfrak{D}_v$, если $\psi \in L^1(d_v\mu)$ и существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}$, сходящаяся к Ψ в $L^1(\mu)$ и $L^1(d_v\mu)$, такая, что функции $\partial_v f_n$ сходятся в $L^1(\mu)$ к некоторой функции w и функции $f_n\partial_v g$ равномерно интегрируемы для каждой $g \in \mathcal{F}$. Тогда положим $\partial_v\Psi := w$.*

Будем считать,что $F\colon X \to \mathbb{R}$ — $\mathcal{B}$-измеримая функция, причем

(F3) $\psi(F) \in \mathfrak{D}_v$ для каждой липшицевой функции ψ на $\mathbb{R}$ с компактным носителем,

(F4) $\partial_v F \in L^1(\mu)$,

(F5) F имеет квазинепрерывную версию.

Определение 2 *Для фиксированного $y \in \mathbb{R}$ предположим, что Φ_f дифференцируема в y для каждой функции $f \in \mathcal{F}$. Мера σ^y на X определяется следующим образом:*

$$\int_X f(x)\sigma^y(dx) = \varrho_f(y).$$

Теорема 1 *Пусть $\beta_v \in L^{p/(p-1}(\mu)$ и выполнены условия* (F1)–(F5). *Тогда для каждого $y \in \mathbb{R}$ мера σ^y на $\mathcal{B}$ существует, сосредоточена на множестве $F^{-1}(y)$ и обращается в нуль на всех множествах $C_{\mathcal{F}}$-емкости нуль. Кроме того, для $\nu \circ F^{-1}$-п.в. имеет место равенство*

$$\sigma^y = \varrho_1(y)\nu^y.$$

Поверхностные меры на поверхностях высокой коразмерности. Данная конструкция работает также в случае поверхностей высокой коразмерности, но требует большей регулярности от отображения

$$F = (F_1, \ldots, F_d)\colon X \to \mathbb{R}^d,$$

на множествах уровня которого мы хотим определить поверхностные меры. Пусть Δ_F — определитель Маллявэна, $M^{i,j}$ — минор матрицы Маллявэна с элементами $\partial_{v_i} F_j$ и $W_r = \{|F| < r\}$. Положим $\nu = \Delta_F \cdot \mu$.

Определение 3 *Пусть для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ мера $(f \cdot \nu) \circ F^{-1}$ имеет непрерывную плотность ϱ_f. Поверхностная мера σ^y на $F^{-1}(y)$ определяется формулой*

$$\int_X f(x)\sigma^y(dx) = \varrho_f(y), \quad f \in \mathcal{F}$$

Теорема 2 *Предположим, что $fM^{i,j} \in \mathfrak{D}_{v_i}$ для всех $i, j \leq d$ и всех $f \in \mathcal{F}$, обращающихся в нуль вне W_r. Тогда верно заключение предыдущей теоремы.*

Работа поддержана грантом РНФ № 14-11-00196.

Литература

1. V.I. Bogachev. Gaussian measures. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998.

О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Мифтахов А.Ф.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

119991, Москва, Ленинские горы, д. 1

Тел.: 89163707251, e-mail: sunwind977@gmail.com

В теории случайных процессов часто используется слабая сходимость конечномерных распределений процессов. С точки зрения распределений в пространствах траекторий это соответствует слабой сходимости мер на пространстве траекторий, наделенном топологией поточечной сходимости. Однако во многих приложениях такая сходимость оказывается слишком слабой, поэтому ее приходится дополнять различными условиями, чтобы получить сходимость распределений процессов в функциональных пространствах с различными нормами или метриками. Обычно для слабой сходимости распределений процессов в некотором функциональном пространстве X достаточно слабой сходимости конечномерных распределений и равномерной плотности распределений этих процессов. Целью же данной статьи является замена условия равномерной плотности на другое, более удобное с практической точки зрения, условие для специфического случая пространства X.

Пусть $(T, \mathcal{B}, \lambda)$ — измеримое пространство с конечной неотрицательной мерой λ. Обозначим через $\mathcal{L}^q(T, \lambda)$ пространство функций $x(\cdot)$ на T таких, что $\|x\|_q < \infty$, где $\|x\|_q$ определяется как L^q-норма элемента из $L^q(T, \lambda)$ содержащего x т.е.

$$\|x\|_q^q = \int\limits_T |x(t)|^q \lambda(dt).$$

Доказана следующая теорема, усиливающая результаты работ [1], [2].

Теорема 1 *Пусть ξ и $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - случайные процессы с траекториями из $\mathcal{L}^q(T, \lambda)$, где $q > 1$, и пусть $\mathrm{E}\|\xi_n\|_q^p < \infty$ и $\mathrm{E}\|\xi\|_q^p < \infty$ для некоторого $p > 1$, причем величины $\mathrm{E}\|\xi_n\|_q^p$ сходятся к $\mathrm{E}\|\xi\|_q^p$. Предположим, что конечномерные распределения процессов ξ_n слабо сходятся к соответствующим распределениям процесса ξ.*

Тогда последовательность распределений процессов $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *слабо сходится к распределению процесса* ξ *относительно обычной нормы* $\|\cdot\|_q$. *Аналогичное утверждение верно для пространств траекторий с равномерно выпуклыми нормами.*

Доказательство основано на следующем утверждении.

Лемма 1 *Если при условиях теоремы процессы* ξ_n *сходятся к* ξ *почти наверное относительно метрики сходимости по мере* λ, *то имеет место сходимость по вероятности относительно нормы* $\|\cdot\|_q$.

Работа поддержана грантом РНФ № 14-11-00196.

Литература

1. L.S. Grinblat. Convergence of measurable random functions// Amer. Math. Soc., 1979.

2. L.S. Grinblat. Convergence of probability measures on separable Banach spaces.//Amer. Math. Soc., 1977.

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СЕМИОТИКЕ

Паршина С.В.

Южно-Уральский государственный университет

454080, Челябинск, пр-т Ленина 76

Тел.: 89514439850, e-mail: ssvetik15@yandex.ru

Прикладной характер математической статистики приводит к необходимости качественного анализа области ее применения. В настоящее время особое значение приобретает информатизация процессов человеческой деятельности, которая осуществляется на основе принципа коммуникации. Важную роль для информатизации играет семиотика – наука о знаковых системах (языках общения, языках программирования и др.). Рассматривая виды (символы, метки, идентификаторы) и значения знаков, семиотика изучает различные структурные и логические взаимосвязи между знаками, как элементами информации, в процессе их передачи и получения. С помощью знаков информация кодируется для передачи и распознается при получении. Переходя от рассмотрения знака к коду, кодом назовем правило, сопоставляющее каждому передаваемому знаку, некоторую комбинацию сигналов. А операцию перевода информации в последовательность различных сигналов назовем кодированием. Передача информации с помощью знаковых систем подвержена всевозможным искажениям и изменениям под действием случайных факторов. Поэтому, кодировка описывает свойства передаваемой информации с определенной степенью полноты и достоверности. Отсюда, возникает необходимость оценивать степень совпадения свойств кода и той информации, которая фиксируется данным кодом. С другой стороны, при получении кодов, их информационная содержательная суть также может быть в определенной степени изменена, что приводит к рассогласованию передаваемой и принятой информации. Полной уверенности в том, что произойдет ошибка при кодировании, передаче и декодировании никогда не существует. Ошибка может произойти, а может и не произойти. Если добавить ось времени, происходит переход в сферу случайных процессов. Отсутствие полной уверенности в появлении ошибок в определенные моменты времени, позволяет рассматривать ошибки в качестве случайных событий $A_i = A(t_i)$ и $B_i = B(t_i)$, где t_i – момент , когда произошла ошибка в процессе кодирования или декодирования и в качестве случайного события $C_i = C(\Delta t_i)$, где Δt_i – определенный интервал, на котором произошла ошибка в процессе передачи сигнала. Последовательность типа вход (кодирование), передача, выход (декодирование) назовем элементарной синтагмой, а упорядоченную тройку событий A_i, C_i, B_i назовем элементарной синтагматической ошибкой. Для характеристики этой ошибки введем случайную величину X, которую назовем случайной синтагматической ошибкой и определим так:

$$X: \{x_i \in [0; k_i + 3], i = \overline{1,n}\text{, где } n - \text{число синтагм за время } t,\ k_i - \text{число ошибок в } \Delta t_i\}.$$

Рассмотрим задачу вычисления вероятности синтагматической ошибки. Если ошибка была допущена в момент кодирования, то она автоматически становится ошибкой в момент декодирования. Плюс в момент декодирования добавляются собственно ошибки декодирования. Таким образом, суммарная ошибка выступает в качестве показателя того, насколько количество информации на входе и количество информации на выходе отличаются друг от друга. Кроме ошибок, допущенных в моменты кодирования и декодирования, возникает неопределенность на временных интервалах между появлением сигнала и реакцией на него. Если принять равной нулю вероятность того, что в период Δt_i не произойдет никаких добавочных ошибок, то ошибки кодирования и декодирования в сумме дают двумерную случайную величину $X = X(\mu_1, \mu_2)$. Тогда ее можно определить так:

$$X: \left\{ x_i = \left(\mu_1^i, \mu_2^i\right): \mu_1^i \in [0; n], \mu_2^i \in [0; 2n], i = \overline{1, n}\text{ , где } n - \text{число синтагм за время } t \right\} .$$

Если же вероятность ошибки в период Δt_i не может быть исключена, то синтагматическая ошибка принимает характер трехмерной случайной величины $X = X(\mu_1, \vartheta, \mu_2)$ и может быть определена следующим образом:

$$X: \left\{ \begin{matrix} x_i = \left(\mu_1^i, \vartheta^i, \mu_2^i\right): \mu_1^i \in [0; n],\ \vartheta^i \in N, \mu_2^i \in [0; 2n], \\ i = \overline{1, n}\text{ , где } n - \text{число синтагм за время } t \end{matrix} \right\}.$$

С помощью простых преобразований двумерную и трехмерную случайные величины можно перевести в одномерную и двумерную случайные величины соответственно, в зависимости от того возможно ли пренебречь вероятностью ошибки при передаче, то есть вероятностью $P(C_i)$ или нет. Далее будем рассматривать преобразованные случайные величины: одномерную случайную величину $X = X(\mu)$ и двумерную случайную величину $Y = Y(\mu, \vartheta)$. Значения одномерной величины $X(\mu)$ представим в виде суммы значений μ_1 и μ_2 , а также учтем, что ошибка, допущенная на входе, дублируется на выходе. Получим: $\mu = 2\mu_1 + \mu_2$. Отметим, что значения μ_1 и μ_2 соответствуют одной и той же элементарной синтагме. Если можно отбросить вероятность $P(C_i)$, то случайная величин X - число ошибок в элементарной синтагме, принимает всего четыре значения: $X: \{0; 1; 2; 3\}$. При этом, вероятности этих значений одинаковы и равны $\frac{1}{4}$. Множество значений двумерной случайной величины Y – числа ошибок в элементарной синтагме, можно представить в виде пар чисел $\left(\mu, \vartheta(\Delta t)\right)$, где $\mu \in \{0; 1; 2; 3\}$, а $\vartheta(\Delta t)$ зависит от свойств канала передачи. Соответственно вероятности этих значений имеют выражение

$$P = P(Y) = P\left(\mu, \vartheta(\Delta t)\right) = \frac{1}{4} \cdot P(C) .$$

Для вычисления вероятности $P(C)$, требуется провести математический анализ процесса передачи информации на участках Δt между появлением сигнала и реакцией на него.

Литература:

1. Вероятность и информация. Я.М. Яглом и И.М. Яглом, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1973, 513 с.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ.

Н.В.Смородина

Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет

198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Ульяновская ул. 3

Тел. 8(921)9212864, E-MAIL: NSMORODNA@YAHOO.COM

Рассмотрим семейство эволюционных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta u + V(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \geqslant 0 \tag{1}$$

где σ – комплексный параметр, удовлетворяющий условию $\mathrm{Re}\sigma^2 \geqslant 0$. Если σ это вещественное число, то уравнение (1) это уравнение теплопроводности, а случай $\mathrm{Re}\sigma^2 = 0$ соответствует уравнению Шрёдингера. Таким образом, параметр σ связывает в единое семейство уравнения теплопроводности и Шрёдингера.

Для уравнения (1) рассмотрим задачу Коши

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}^d). \tag{2}$$

причем мы будем предполагать, что начальное данное φ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^d)$, а функция V ограничена и для любого $x \in \mathbb{R}^d$ выполнено условие

$$\mathrm{Re}\, V(x) \leqslant 0. \tag{3}$$

Заметим, что из условия $\mathrm{Re}\,\sigma^2 \geqslant 0$ и (3) немедленно вытекает, что для всех $t > 0$ справедливо неравенство $\|u(t,\cdot)\|_{L_2} \leqslant \|\varphi\|_{L_2}$.

Далее, в случае, когда σ – вещественное число, решение задачи Коши (1), (2) представляется в виде математического ожидания функционала от винеровского процесса (формула Фейнмана-Каца), именно

$$u(t,x) = \mathbb{E}\,\varphi\big(x + \sigma w(t)\big) \exp\left(\int_0^t V(x + \sigma w(\tau))d\tau\right) \tag{4}$$

где $w(t)$ – d-мерный стандартный винеровский процесс.

Если $\mathrm{Im}\,\sigma \neq 0$, то (4), вообще говоря, не имеет смысла, так как функции определены на $\mathbb{R}^d$ и мы не можем подставить в них в качестве аргумента $d-$мерный комплексный вектор. Тем не менее, в работе [1] в случае $V = 0$ было показано, что вероятностную трактовку можно сохранить, если предположить, что функция φ аналитически продолжается с $\mathbb{R}^d$ на $\mathbb{C}^d$ до целой функции своего аргумента, а в формуле (4) подстановка комплексной величины в функцию вещественного аргумента понимается как подстановка в аналитическое продолжение функции. Более того, было показано, что это представление устойчиво относительно замены винеровского процесса на его аппроксимацию, построенную по суммам независимых случайных величин.

Подход, предложенный в [1], не может быть применен в общем случае ($V \neq 0$), так как целая функция, ограниченная на вещественной оси, вдоль прямых, параллельных мнимой оси, растет по крайней мере экспоненциально и, значит математическое ожидание в (4), вообще говоря, не существует.

Отметим еще, что в случае $\operatorname{Re}\sigma^2 = 0$ в качестве заменителя математического ожидания в представлении (4) обычно используется интеграл по так называемой мере Фейнмана, которая является комплекснозначной конечно-аддитивной функцией множества и не продолжается до меры в функциональном пространстве. Обзор публикаций, посвященных различным подходам к построению интеграла Фейнмана можно найти в [2, 4, 3].

Нами предложена некоторая регуляризация (4) (обеспечивающая существование математического ожидания), основанная на понятии частотного усечения случайных величин и процессов с независимыми приращениями. Мы также показываем, что сходимость к решению задачи Коши сохранится если в (регуляризованной) формуле (4) винеровский процесс заменить на его аппроксимацию, построенную по суммам независимых случайных величин.

Список литературы

[1] *Ибрагимов И.А., Смородина Н.В., Фаддеев М.М.* Предельные теоремы о сходимости функционалов от комплексных случайных блужданий к решениям начально-краевых задач. – Зап.Научн.Сем.ПОМИ, т. 420, с. 88-102, 2013.

[2] *Маслов В.П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976.

[3] S. Albeverio, R. Høegh-Krohn, S. Mazzucchi, Mathematical Theory of Feynman. Path Integrals, 2nd ed., LNP 523, Springer 2008.

[4] Дж. Глимм, А. Джаффе, *Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов.* Мир, М., 1984.

О СРАВНЕНИИ РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Старкова О.С.

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Тел.: 89122679387, e-mail: olga-n4@yandex.ru

Доклад посвящен абстрактной стохастической задачи Коши

$$X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t),\ t \geq 0, \quad X(0) = \zeta, \tag{1}$$

где оператор A — генератор полугруппы класса C_0 или некоторой регуляризованной (интегрированной, K-конволюционной) полугруппы операторов в гильбертовом пространстве H, B — линейный оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathbb{H}$ в H, и $\{\mathbb{W}(t),\ t \geq 0\}$ — H-значный стохастический процесс типа белого шума.

"Классическим" подходом к решению стохастических задач, в том числе абстрактных, является переход к интегральной задаче с интегралом Ито по некоторому винеровскому процессу $\{W(t), t \geq 0\}$, "первообразной" от белого шума $\{\mathbb{W}(t), t \geq 0\}$ (см., напр., [1]–[3]).

Для задачи (1) — это интегральная задача Коши с абстрактным интегралом Ито по Q-винеровскому процессу W_Q:

$$X(t) = \zeta + \int_0^t AX(s)ds + \int_0^t BdW_Q(t),\ t \geq 0. \tag{2}$$

Здесь строится слабое решение в случае полугруппы класса C_0, слабое n-интегральное решение — в случае n раз интегрированных полугрупп и слабое K-конволюционное — в случае K-конволюционных полугрупп.

Другой подход к решению задачи (1) — это решение задачи в пространствах обобщенных по временной или случайной переменной функций (см., напр., [3, 4]).

В пространствах распределений по временной переменной t дано определение процесса Q-белого шума как обобщенной производной от Q-винеровского процесса и построено решение задачи с генератором некоторой регуляризованной (интегрированной, K-конволюционной) полугруппы.

Обобщенное по ω решение строится в пространствах $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ — распределений по случайной переменной ω, где для любого $t \in \mathbb{R}$ определен более общий процесс $\mathbb{W}(t)$ — сингулярный белый шум. Решение задачи (1) получено для задачи с генератором полугруппы класса C_0.

В докладе приводятся новые результаты о совпадении (на пересечении условий существования) слабого решения с обобщенным по t и по ω в случае полугруппы класса C_0, а также сравнение слабых регуляризованных решений с обобщенными по t в случае, когда оператор A является генератором некоторой регуляризованной полугруппы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00090 и программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

References

[1] Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge Univ. Press (1992).

[2] Gawarecki L., Mandrekar V. *Stochastic differential equations in infinite dimensions.* Springer-Verlag Berlin Heidellberg (2011).

[3] Melnikova, I. V., Alshanskiy M. A. *Regularized and generalized solutions of infinite-dimensional stochastic problems.* Matematicheskii sbornik **202**(11), 3–30 (2011).

[4] Melnikova I.V. *Generalized solutions of differential-operator equations with singular white noise*, Diffeerential Equations **49**(4), 475–486 (2013).

ИЗМЕРИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ И ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Юрова Е.В.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

119991, Москва, Ленинские горы, д. 1

Тел.: 89163077409, e-mail:yurova-k@rambler.ru

Имеются два естественных определения линейного измеримого оператора A на сепарабельном пространстве Фреше X с радоновской мерой, действующего в сепарабельное пространство Фреше Y:

(1) существует последовательность непрерывных линейных операторов $A_n\colon X \mapsto Y$ такая, что A почти всюду по мере является поточечным пределом последовательности A_n;

(2) существуют сепарабельное рефлексивное банахово пространство E полной меры, компактно вложенное в X, и непрерывный линейный оператор из E в Y, почти всюду совпадающий с A.

Теорема 1. Линейный измеримый оператор в смысле первого определения является таковым и в смысле второго определения. Если Y – банахово пространство с базисом Шаудера, то верно и обратное.

Для полилинейных отображений возникают два обобщения второго определения:

(i) существуют сепарабельное рефлексивное банахово пространство L полной меры, компактно вложенное в X, и непрерывное полилинейное отображение

$$\widetilde{B}(x_1, \dots, x_n)\colon L \times \dots \times L \to Y,$$

такие, что

$$\widetilde{B}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

для почти всех $(x_1, \dots, x_n) \in L \times \dots \times L$.

(ii) существуют сепарабельное рефлексивное банахово пространство E полной меры, компактно вложенное в $X \times \dots \times X$, и непрерывное полилинейное отображение

$$\widetilde{B}(x_1, \dots, x_n)\colon E \to Y,$$

такие, что
$$\widetilde{B}(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n)$$
для почти всех $(x_1,\ldots,x_n)\in E$.

Теорема 2. Условия (i) и (ii) равносильны.

Вопрос о том, когда измеримое полилинейное отображение обладает этими свойствами, пока открыт, однако можно привести пример, показывающий, что нужны более сильные условия даже в случае билинейных форм. Существует билинейная форма на $X\times X$, которая почти всюду является поточечным пределом конечномерных непрерывных билинейных форм, но при этом нет сепарабельного рефлексивного банахова пространства L полной меры, компактно вложенного в X, и непрерывной билинейной формы $\widetilde{B}(x,y)\colon X\times X\to R$, для которых $\widetilde{B}(x,y)=B(x,y)$ для почти всех $(x,y)\in X\times X$.

Работа поддержана грантом РНФ № 14-11-00196.

Секция 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ, ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И КОМБИНАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

О КАТЕГОРИИ БИНАРНЫХ G-ПРОСТРАНСТВ

Геворкян П.С.

Академия труда и социальных отношений,

Московский энергетический институт

119454, Москва, ул. Лобачевского, д. 90А

Тел.: 89852102381, pgev@yandex.ru

Строится категория бинарных G-пространств и би-эквивариантных отображений и доказываются некоторые теоремы, относящиеся к основам теории бинарных G-пространств.

Пусть X — топологическое пространство, а G — топологическая группа.

Определение 1. Непрерывное отображение $\alpha : G \times X^2 \to X$ назовем *бинарным действием* топологической группы G на пространстве X, если выполняются условия

$$\alpha(gh, x_1, x_2) = \alpha(g, x_1, \alpha(h, x_1, x_2)), \tag{1}$$

$$\alpha(e, x_1, x_2) = x_2. \tag{2}$$

для всех $g, h \in G$ и $x_1, x_2 \in X$.

Пространство X с фиксированным бинарным действием группы G или тройку (G, X, α) назовем *бинарным G-пространством*.

Пример 1. Непрерывное отображение $\alpha : G \times G^2 \to G$, заданное формулой

$$\alpha(g, h_1, h_2) = h_1 g h_1^{-1} h_2, \quad \text{или} \quad g(h_1, h_2) = h_1 g h_1^{-1} h_2 \tag{3}$$

является бинарным действием топологической группе G на себя.

Пример 2. Пусть $GL(n, \mathbf{R})$ — общая линейная группа n-го порядка. Определим непрерывное отображение $\alpha : GL(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ формулой

$$\alpha(A, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (E - A)\mathbf{x} + A\mathbf{y}, \tag{4}$$

или

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (E - A)\mathbf{x} + A\mathbf{y}, \tag{5}$$

где $A \in GL(n, \mathbf{R})$, E — единичная матрица, а $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.

Отображение α является бинарным действием топологической группе $GL(n, \mathbf{R})$ на $\mathbf{R}^n$.

Пусть (G, X, α) и (G, Y, β) две бинарные G-пространства.

Определение 2. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ назовем *би-эквивариантным*, если выполняется равенство

$$f(\alpha(g, x_1, x_2)) = \beta(g, f(x_1), f(x_2)),$$

или

$$f(g(x_1, x_2)) = g(f(x_1), f(x_2))$$

для всех $g \in G$ и $x_1, x_2 \in X$.

Би-эквивариантное отображение $f : X \to Y$, являющееся также гомеоморфизмом, назовем *би-эквивалентностью* бинарных G-пространств.

Теорема 1. Бинарные G-пространства и би-эквивариантные отображения составляют категорию.

Существуют естественные ковариантные функторы между категориями Bi-G-TOP и G-TOP.

Список литературы

[1] П. С. Геворкян, *О бинарных G-пространствах*, Матем. заметки, 96:4 (2014), 623–626.
[2] Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, М., Наука, 1980.
[3] R. S. Palais, *The classification of G-spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., 36, 1960, 1–72.

ОБ A-СВОЙСТВАХ ТКАНЕЙ E_1^r И E_2^r

Джукашев К.Р.

Тверской государственный университет

170002, Тверь, Садовый переулок, дом 35

тел. 89066545667 e-mail: dzhukashev@gmail.com

Многомерная три-ткань называется эластичной или тканью E, если в любой ее координатной лупе выполняется тождество эластичности $x(yx) = (xy)x$. В [1] было доказано, что эластичные три-ткани образуют собственный подкласс средних тканей Бола и найдены уравнения двух шестимерных три-тканей E: E_1 и E_2. Тензорные соотношения эластичных тканей мы рассматривали в работе [2], в [3] были найдены многомерные обобщения тканей E_1 и E_2, обозначенные через E_1^r и E_2^r.

Мёдоч в [4] предложил рассматривать в лупах операторы $l_{x,y}$ и $r_{x,y}$, определяемые равенствами:

$$(xy)l_{x,y}(u) = x(yu), \tag{1}$$

$$r_{x,y}(u)(xy) = (ux)y. \tag{2}$$

В [5] был введен еще оператор $m_{x,y}$ равенством

$$(xm_{x,y}(u))y = x(uy). \tag{3}$$

В случае, если какой-либо из перечисленных операторов является тождественным, лупа является группой. Поэтому можно считать, что чем ближе (в некотором смысле) рассматриваемые операторы к тождественным, тем ближе лупа к группе.

В дальнейшем на основе указанных операторов можно выделить специфические классы тканей.

Определение 1. *[5] Три-ткани, в координатных лупах которых операторы $l_{x,y}$ являются автоморфизмами, называются левыми специальными или A_l-тканями.*

Аналогично определяются правые специальные и средние специальные три-ткани:

$$A_l: \quad l_{x,y}(u \cdot v) = l_{x,y}(u) \cdot l_{x,y}(v), \tag{4}$$

$$A_r: \quad r_{x,y}(u \cdot v) = r_{x,y}(u) \cdot r_{x,y}(v), \tag{5}$$

$$A_m: \quad m_{x,y}(u \cdot v) = m_{x,y}(u) \cdot m_{x,y}(v). \tag{6}$$

Определение 2. *[5] Три-ткани, которые являются одновременно A_l-тканями, A_r-тканями и A_m-тканяи, называются A-тканями или специальными тканями.*

Мы рассматриваем три-ткани E_1^r и E_2^r, заданные соответственно уравнениями:

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + e^{x^2}(y^1 - \lambda_{ab}x^a y^b), \\ z^a &= x^a + y^a; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + y^1 + \frac{1}{3}b^1_{(a|b|c)}x^a x^c y^b - \frac{1}{3}b^1_{(ab)c}y^a y^b x^c + c^1_{bc}x^c y^b, \\ z^a &= x^a + y^a. \end{aligned}$$

Доказана

Теорема 1. *Три-ткань E_1^r является средней специальной тканью. Три-ткань E_2^r является специальной тканью.*

References

[1] Шелехов, А.М.: *Об аналитических решениях уравнения* $x(yx) = (xy)x$. Матем. заметки **50** (1991), N 4, 132–140 (РЖМат, 1992, 5A550).

[2] Джукашев, К.Р.: *О три-тканях с эластичными координатными лупами.* Труды международного геометрического центра, т. 6 (2013), № 4, 52–80, Одесса, 2013

[3] Джукашев, К.Р., Шелехов А.М *Многомерные гладкие лупы с универсальным свойством эластичности*// Математический сборник (в печати)

[4] Мёдоч Д. (D.G. Murdoch) *Quasigroups which satisfy certain generalized associative laws.* // Amer. J. Math., 1939, 61, 509—522.

[5] Акивис М.А., Шелехов А.М. *Многомерные три-ткани и их приложения:* Монография. - Тверь, Тверской государственный университет, 2010. - 308 с.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЧТИ ЭРМИТОВОЙ СТРУКТУРЫ ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ ПОЧТИ КОНТАКТНОГО МЕТРИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

Игнаточкина Л.А.

Московский педагогический государственный университет

119435, г.Москва, ул. Малая Пироговская, д.1, стр.1.

Тел.: 89299693341, e-mail: ignlia@gmail.com

Конформные преобразования римановых и постримановых многообразий применяются в создании современной теории гравитационного поля, их свойства связаны с проблемой асимптотической свободы в квантовой теории поля, а также с вычислением критических размерностей $n = 26$ и $n = 10$ в теории струн, с гравитационными инстантонами и т.п. [1]. С римановым многообразием (в том числе и римановым многообразием, на котором кроме римановой метрики фиксированы какие-либо еще тензорные поля) могут быть связаны другие гладкие многообразия, несущие какие-либо тензорные структуры (касательное и кокасательное расслоения, T^1-расслоения, линейные расширения и т.д.). Тогда конформное преобразование на исходном римановом многообразии индуцирует некоторое преобразование тензорной структуры, связанного с ним многообразия. В связи с этим встает задача получения явного вида индуцированных преобразований и изучения их свойств.

Пусть M – связное гладкое $2n+1$-мерное многообразие. Пусть на нем фиксирована четверка тензорных полей (Φ, ξ, η, g), где Φ – тензорное поле типа (1,1), η – 1-форма, ξ – векторное поле, g – риманова метрика. При этом выполняются соотношения

$$1)\, \Phi(\xi) = 0; \quad 2)\, \eta \circ \Phi = 0; \quad 3)\, \eta(\xi) = 1; \quad 4)\, \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$
$$5)\, g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y).$$

Такая четверка тензорных полей называется *почти контактной метрической структурой.* Гладкое многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием.*

Рассмотрим декартово произведение $M \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – это вещественная прямая, M – почти контактное метрическое многообразие. Как известно, на таком многообразии порождается почти эрмитова структура. Напомним, что *почти эрмитовой структурой* на гладком многообразии называется пара (J, h), где J – тензорное поле типа (1,1) и $J^2 = -id$, а h – риманова метрика, для которой $h(JX, JY) = h(X, Y)$, X, Y – произвольные векторные поля на гладком многообразии. Многообразие $M \times \mathbb{R}$ вместе с такой почти эрмитовой структурой называется *линейным расширением* [2].

На многообразии M перейдем от почти контактная метрическая структуры (Φ, ξ, η, g) к почти контактной метрической структуре $(\Phi, \tilde{\xi} = e^{-f}\xi, \tilde{\eta} = e^{f}\eta, \tilde{g} = e^{2f}g)$, где f – гладкая функция на многообразии M. Такой переход называется *конформным преобразованием почти контактной метрической структуры.* Построим линейное расширение исходного и преобразованного почти контактных метрических многообразий. В результате получим на гладком многообразии $M \times \mathbb{R}$ две почти эрмитовых структуры (J, h) и $(\tilde{J}, \tilde{h})$. Переход от первой ко второй назовем *индуцированным преобразованием* почти эрмитовой структуры на линейном расширении.

Задание почти контактной метрической структуры на гладком многообразии равносильно заданию подрасслоения в главном расслоении реперов со структурной группой $\{e\} \times U(n)$. Эти реперы имеют вид $(x, \xi_x, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$, $a = 1, \ldots, n$, $\hat{a} = a + n$, $\hat{a} = \hat{1}, \ldots, \hat{n}$, $x \in M$. Указанное подрасслоение называется присоединенной G-структурой. Используя эти реперы, построим два множества реперов для линейного расширения $M \times \mathbb{R}$

$$B_1 = \{(m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_x, \nu)\}; \quad B_2 = \{(m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_0, \varepsilon_{\hat{0}})\},$$

где ν – единичный вектор вещественной прямой, $m = (x,t) \in M \times \mathbb{R}$ – произвольная точка, $\varepsilon_0 = \frac{\xi_x - \sqrt{-1}\nu}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon_{\hat{0}} = \frac{\xi_x + \sqrt{-1}\nu}{\sqrt{2}}$. Система реперов B_2 задает подрасслоение в главном расслоении реперов со структурной группой $U(n+1)$. Конформное преобразование почти контактной метрической структуры можно задать так [3]:

$$\psi : (x, \xi_x, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}) \to (x, e^{-f}(x)\xi_x, e^{-f}(x)\varepsilon_a, e^{-f}(x)\varepsilon_{\hat{a}}).$$

Пара (ψ, id) будет изоморфизмом присоединенных G-структур исходного и конформно преобразованного почти контактных метрических многообразий. Тогда для индуцированного преобразования на линейном расширении $M \times \mathbb{R}$ в случае реперов B_1 получим (отображения присоединенных G-структур обозначим той же буквой ψ)

$$\psi : (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \xi_m, \nu) \to (m, e^{-f}(x)(\varepsilon_a, e^{-f}(x)\varepsilon_{\hat{a}}, e^{-f}(x)\xi_m, \nu),$$

Это преобразование реперов из B_1 порождает преобразование реперов из B_2, которое обозначим той же буквой

$$\psi : (m, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}}, \varepsilon_0, \varepsilon_{\hat{0}}) \to (m, \tilde{\varepsilon}_a, \tilde{\varepsilon}_{\hat{a}}, \tilde{\varepsilon}_0, \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}}),$$

где $\tilde{\varepsilon}_a = e^{-f}(x)\varepsilon_a$, $\tilde{\varepsilon}_{\hat{a}} = e^{-f}(x)\varepsilon_{\hat{a}}$,

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{(e^{-f}(x)+1)\varepsilon_0 + (e^{-f}(x)-1)\varepsilon_{\hat{0}}}{2}; \quad \tilde{\varepsilon}_{\hat{0}} = \frac{(e^{-f}(x)-1)\varepsilon_0 + (e^{-f}(x)+1)\varepsilon_{\hat{0}}}{2}.$$

Это отображение однозначно задает индуцированное преобразование почти эрмитовой структуры (J, h).

Теорема 1. *Индуцированное преобразование почти эрмитовой структуры линейного расширения будет конформным тогда и только тогда, когда функция f является константой.*

Напомним, что конформным преобразованием почти эрмитовой структуры называется переход от почти эрмитовой структуры (J, h) к почти эрмитовой структуре $(J, e^{2f}h)$, где f – гладкая функция.

Теорема 2. *Пусть на гладком многообразии M задано конформное преобразование почти контактной метрической структуры. Тогда на его линейном расширении $M \times \mathbb{R}$ индуцированное преобразование $(J, h) \to (\tilde{J}, \tilde{h})$ имеет вид*

$$\tilde{J}(X) = JX + (e^f - 1)h(X, \xi)\nu - (e^{-f} - 1)h(X, \nu)\xi;$$
$$\tilde{h}(X, Y) = e^{2f}h(X, Y) + (1 - e^{2f})h(X, \nu)h(Y, \nu),$$

где X, Y – произвольные векторные поля на $M \times \mathbb{R}$.

Литература

1. Бабурова О.В., Фролов Б.Н. Математические основы современной теории гравитации. М: Прометей, 2012.

2. Родина Е.В. Линейные расширения почти контактных метрических многообразий. //Дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Москва, 1997.

3. Игнаточкина Л.А. Обобщение преобразований, индуцированных на T^1-расслоениях конформными преобразованиями их базы.// Матем. сб. 202:5 (2011), стр. 45–62.

СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Кабанова М.И.

Московский Педагогический Государственный Университет

19991, Москва, ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1.

Тел.: 89267775210, luinel@list.ru

Классическим методом Эли Картана построен канонический репер гладкой кривой в многомерном аффинном пространстве с каноническим и неканоническим параметром и аналог уравнений Френе без использования канонического параметра.

Запишем деривационные и структурные уравнения аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ в обычном виде:

$$d\,r = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j, \tag{1}$$

$$d\omega^i = \omega^i \wedge \omega_j^i, \quad d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i.$$

Здесь и далее $i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n$, если не оговорено противное; r — радиус-вектор вершины M подвижного репера $\{M,\, e_i\}$.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Вторую серию деривационных уравнений (1) можно привести к виду

$$\begin{aligned}
\frac{de_1}{d\sigma} &= \kappa_0 e_1 + e_2, \\
\frac{de_2}{d\sigma} &= \qquad 2\kappa_0 e_2 + e_3, \\
\frac{de_3}{d\sigma} &= \qquad\qquad 3\kappa_0 e_3 + e_4, \\
\ldots \quad & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\frac{de_{n-2}}{d\sigma} &= \qquad\qquad\qquad (n-2)\kappa_0 e_{n-2} \quad + \quad e_{n-1}, \\
\frac{de_{n-1}}{d\sigma} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n-1)\kappa_0 e_{n-1} \quad + \quad e_n, \\
\frac{de_n}{d\sigma} &= \kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2 + \ldots + \kappa_{n-2} e_{n-2} \quad + \quad e_{n-1} \quad + \quad n\kappa_0 e_n.
\end{aligned}$$

В частности, при $n = 2$ получим

$$\begin{aligned}
\frac{de_1}{d\sigma} &= \kappa_0 e_1 + e_2, \\
\frac{de_2}{d\sigma} &= e_1 + 2\kappa_0 e_2,
\end{aligned}$$

а при $n = 3$ —

$$\begin{aligned}
\frac{de_1}{d\sigma} &= \kappa_0 e_1 + e_2, \\
\frac{de_2}{d\sigma} &= \qquad 2\kappa_0 e_2 + e_3, \\
\frac{de_3}{d\sigma} &= \kappa_1 e_1 + e_2 + 3\kappa_0 e_3.
\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть на кривой l выделен канонический параметр, определенный соотношением $(e_1e_2\ldots e_n)=s$, где левая часть представляет собой определитель, составленный из координат векторов e_i, а s — произвольная постоянная, не равная нулю. Тогда деривационные уравнения примут следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned}
\frac{de_1}{ds} &= e_2,\\
\frac{de_2}{ds} &= e_3,\\
\frac{de_3}{ds} &= e_4,\\
&\ldots\\
\frac{de_{n-2}}{ds} &= e_{n-1},\\
\frac{de_{n-1}}{ds} &= e_n,\\
\frac{de_n}{ds} &= \kappa_1e_1+\kappa_2e_2+\ldots+\kappa_{n-2}e_{n-2}+\kappa_{n-1}e_{n-1}.
\end{aligned}\tag{2}$$

В частности, при $n=2$ имеем

$$\begin{aligned}
\frac{de_1}{ds} &= e_2,\\
\frac{de_2}{ds} &= \kappa_1e_1,
\end{aligned}$$

при $n=3$ —

$$\begin{aligned}
\frac{de_1}{ds} &= e_2,\\
\frac{de_2}{ds} &= e_3,\\
\frac{de_3}{ds} &= \kappa_1e_1+\kappa_2e_2.
\end{aligned}$$

При этом канонический параметр s допускает преобразования вида $s\to as+b$.

Также показано, что деривационные уравнения кривой в эквиаффинном пространстве также имеют же вид (2), но в них канонический параметр s допускает только преобразования вида $s\to s+a$.

Литература

1. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. М.: Физматгиз, 1959. 144 с.

2. Широков П.А., Широков А.П. Аффинная дифференциальная геометрия 1959.

3. Declan Davis. Generic affine differential geometry of curves in $\mathbb{R}^n$. Proc. of The Poyal Soc. of Edinburgh Section A — math, v. 136, no 06, 2006, pp. 1–13.

ОБ ОБЪЕМАХ НЕЕВКЛИДОВЫХ ОКТАЭДРОВ С mm2-СИММЕТРИЕЙ

Краснов В.А.
Российский университет дружбы народов, г. Москва; Московский государственный областной социально–гуманитарный институт, г. Коломна
vladimir.krasnov3107@gmail.com

Рассматривается задача вычисления объемов выпуклых многогранников на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ постоянной кривизны $K = +1$ и в трехмерном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$ постоянной кривизны $K = -1$.

Одним из основных инструментов вычисления объемов неевклидовых многогранников является дифференциальная формула Шлефли [8]. Однако во многих случаях для получения формул объема можно использовать идею правильной триангуляции (без новых вершин) выпуклого многогранника и последующего исключения возникающих при этом дополнительных параметров. Для исключения последних применяются как классические методы неевклидовых геометрий, разработанные еще Л. Шлефли [8], Н.И. Лобачевским [6] и Я. Больяи [2], так и метод, основанный на применении теоремы Е.М. Андреева [1], утверждающей существование гиперболического остроугольного многогранника с заданным набором двугранных углов фиксированного комбинаторного типа, единственного с точностью до движения пространства. В свою очередь, объемы тетраэдров триангуляции могут быть вычислены по формулам Мураками [8] (для $\mathbb{S}^3$) и Деревнина–Медных [5] (для $\mathbb{H}^3$).

В работе [5] с помощью идеи правильной триангуляции были получены явные интегральные формулы объема гиперболических октаэдров, обладающих mmm- и 2|m-симметриями.

Метод правильной триангуляции и последующего исключения возникающих дополнительных параметров может быть использован и при вычислении объемов неевклидовых октаэдров с mm2-симметриями.

Определение 1. Назовем mm2-октаэдром октаэдр $O = O(A, B, C, D, E)$, остающийся инвариантным при отражениях от двух взаимно перпендикулярных координатных плоскостей, пересекающих его по реберным циклам.

Следующая теорема позволяет вычислить объем гиперболического октаэдра с mm2-симметрией.

Теорема. Пусть $O = O(A, B, C, D, E)$ — гиперболический октаэдр, обладающий mm2-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается формулой:

$$V(O) = 2V(\frac{A}{2}, B, \frac{A}{2}, \lambda, \frac{\pi}{2}, \lambda) + 2V(\frac{C}{2}, D, \frac{C}{2}, E-\lambda, \frac{\pi}{2}, E-\lambda),$$

где

$$\lambda = \operatorname{arcctg}\frac{\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos E}{\cos\frac{A}{2}\sin E},$$

$$V(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta) = -\frac{1}{4}\times$$

$$\int_{z_2}^{z_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+\alpha+\beta+\delta+\epsilon}{2}\sin\frac{\xi+\alpha+\gamma+\delta+\zeta}{2}\sin\frac{\xi+\beta+\gamma+\epsilon+\zeta}{2}}{\cos\frac{\xi+\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\xi+\alpha+\epsilon+\zeta}{2}\cos\frac{\xi+\beta+\delta+\zeta}{2}\cos\frac{\xi+\gamma+\delta+\epsilon}{2}}\right| d\xi,$$

$$z_1 = \operatorname{arctg}\frac{k_2}{k_1} - \operatorname{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$z_2 = \operatorname{arctg}\frac{k_2}{k_1} + \operatorname{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$k_1 = -(\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta) + \cos(\alpha+\delta) +$$

$$+\cos(\beta+\epsilon) + \cos(\gamma+\zeta) +$$

$$+\cos(\delta+\epsilon+\zeta) + \cos(\delta+\beta+\gamma) +$$

$$+\cos(\alpha+\epsilon+\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\zeta)),$$

$$k_2 = \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta) + \sin(\alpha+\delta) +$$

$$+\sin(\beta+\epsilon) + \sin(\gamma+\zeta) +$$

$$+\sin(\delta+\epsilon+\zeta) + \sin(\delta+\beta+\gamma) +$$

$$+\sin(\alpha+\epsilon+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\zeta)),$$

$$k_3 = 2(\sin\alpha\sin\delta + \sin\beta\sin\epsilon + \sin\gamma\sin\zeta),$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

Как было сказано выше, в случае mm2-октаэдра в $\mathbb{S}^3$ для вычисления объемов тетраэдров триангуляции может быть использована формула Мураками, выражающая объем произвольного сферического тетраэдра через его двугранные углы [7]. В свою очередь, выражение для параметра λ в случае сферы имеет точно такой же вид [6].

Полученные в работе результаты являются обобщениями результатов Галиулина-Михалева-Сабитова [3] на сферический и гиперболический случаи.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки № 1.1974.2014/К "Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными".

Литература

1. *Андреев Е.М.* О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского // Математический сборник. — 1970. — *81 (123)*. — С. 445–478.

2. *Bolyai J.* Appendix. The Theory of Space // Janos Bolyai (F. Karteszi ed.). — Budapest:1987. — 239 p.

3. *Галиулин Р. В., Михалев С. Н., Сабитов И. Х.* Некоторые приложения формулы для объема октаэдра // Математические заметки. — 2004. — *1 (76)*. — С. 27–43.

4. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron // Rus. Math. Surv. — 2005. — *60(2):346*.

5. *Краснов В. А.* Об объеме гиперболического октаэдра с нетривиальными симметриями // Совр. математика. Фундам. направления. — 2013. — *51*. — С. 74–86.

6. *Лобачевский Н. И.* Воображаемая геометрия // Полное собр. соч. Т. 3. — М.-Л.:1949. — 536 с.

7. *Murakami J.* The volume formulas for a spherical tetrahedron // Arxiv e-prints, Arxiv:1011.2584v4. — 2011. — 7 pp.

8. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität, In: Gesammelte mathematische Abhandlungen. — Basel: Birkhäuser, 1950.

СВОЙСТВА ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ, ДОПУСКАЮЩЕЙ КОНТАКТНО ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Никифорова А.В.

Московский педагогический государственный университет

119435, г.Москва, ул. Малая Пироговская, д.1, стр.1.

Тел.: 89161704883, e-mail: anik7@bk.ru

Пусть M – почти эрмитово многообразие, то есть связное гладкое $2n$-мерное многообразие, на котором определена почти эрмитова структура, то есть задана пара тензорных полей (J, g), где J – тензорное поле типа (1,1) такое, что $J^2 = -id$, g – риманова метрика. Голоморфно проективным преобразованием почти эрмитова многообразия называется такой переход от почти эрмитовой структуры (J, g) к почти эрмитовой структуре $(J, \tilde{g})$, при котором обе структуры имеют общие голоморфно почти геодезические кривые, то есть такие кривые многообразия M, для которых любой касательный вектор μ_p после параллельного переноса из точки p в произвольную точку q на M принадлежит линейной оболочке $L(\mu_q, J\mu_q)$.[1]

Известно, что на произвольной гиперповерхности N почти эрмитова многообразия M естественным образом возникает почти контактная метрическая структура [2] (AC-структура), то есть такая четверка тензорных полей (Φ, ξ, η, g), где Φ – тензорное поле типа (1,1), η – 1-форма, ξ – векторное поле, g – риманова метрика, что выполняются соотношения

$$1)\, \Phi(\xi) = 0; \quad 2)\, \eta \circ \Phi = 0; \quad 3)\, \eta(\xi) = 1; \quad 4)\, \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta; \tag{1}$$
$$5)\, g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y).$$

Таким образом, гладкое многообразие N становится почти контактным метрическим многообразием.

Голоморфно проективное преобразование почти эрмитовой структуры (J, g) произвольного многообразия индуцирует на гиперповерхности N преобразование AC-структуры (g, Φ, ξ, η), возникающей на N следующим образом: пусть ν - поле единичной нормали,тогда положим $\xi = J(\nu)$, $\eta(X) = g(\xi, X)$, $\zeta(X) = g(\nu, X)$, $\Phi = J \circ (id - \xi \otimes \nu - \eta \otimes \xi)|_{\mathfrak{X}(M)}$.

В этом случае связь между старой AC-структурой (g, Φ, ξ, η) и новой AC-структурой $(\tilde{g}, \tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ многообразия N выражается следующими соотношениями:

$$\tilde{g}(X, Y) = g(X, fY), \quad \tilde{\xi} = \lambda f^{-1}(\xi), \quad \tilde{\eta} = \lambda\eta, \quad \tilde{\Phi} = \Phi - \eta \otimes \nu + \lambda^2 \eta \otimes f^{-1}\nu, \tag{2}$$

где f-тензор голоморфно-проективной деформации, $\lambda = \pm\sqrt{(\zeta(f^{-1}\nu))^{-1}}$.
Такой переход назовем *контактно-проективным преобразованием.*

Рассмотрим теперь произвольную AC-структуру (g, Φ, ξ, η), и выясним, когда формулы (2),где f-произвольный невырожденный эндоморфизм, ν -векторное поле, λ-гладкая функция, определяют переход к новой AC-структуре $(\tilde{g}, \tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$. Подставляя в первые три равенства, определенные формулами (1), соответствующие выражения из формул(2),после преобразований получим, что
1) $\eta(f^{-1}(\xi)) = \frac{1}{\lambda^2}$;
2) $\Phi(f^{-1}\xi) = \frac{1}{\lambda^2}\vartheta$, где введено обозначение: $\vartheta = \nu - \lambda^2 f^{-1}\nu$;
3) $\xi - \lambda^2 f^{-1}\xi = \Phi\vartheta$;
4) λ не обращается в ноль ни в какой точке многообразия.

Заметим, что четвертое равенство в условии(2) с учетом введенного обозначения можно записать так: $\tilde{\Phi} = \Phi - \eta \otimes \vartheta$. Подставим это выражение и выражение $\tilde{\eta}$ из формул(2)в равенство $\tilde{\eta} \circ \tilde{\Phi} = 0$: $(\lambda\eta) \circ (\Phi - \eta \otimes \vartheta) = 0$. Тогда для произвольного векторного поля X с учетом $\eta \circ \Phi = 0$ получим: $\lambda\eta(X)\eta(\vartheta) = 0$. Положим $X = \xi$. Так как $\eta(\xi) = 1$, то имеем следующее условие:

$$\eta(\vartheta) = 0.$$

Откуда следует, что $\vartheta \in \mathscr{L}$, где $\mathscr{L}$ – первое фундаментальное распределение.

Далее, подставим в равенство $\tilde{g}(\tilde{\Phi}X, \tilde{\Phi}Y) = \tilde{g}(X,Y) - \tilde{\nu}(X)\tilde{\nu}(Y)$ определенные выше выражения $\tilde{g}, \tilde{\eta}$ и $\tilde{\Phi}$, получим:
$g(\Phi X, f\Phi) - \eta(X)g(\vartheta, f\Phi Y) - \eta(Y)g(\Phi X, f\vartheta) + \eta(X)\eta(Y)g(\vartheta, f\vartheta) = g(X, fY) - \lambda^2\nu(X)\nu(Y)$.

Тогда имеем: $g(\Phi\vartheta, f\Phi\vartheta) = g(\vartheta, f\vartheta)$.

Подставим теперь в равенство $\tilde{\Phi}^2 = -id + \tilde{\eta} \otimes \tilde{\xi}$ выражения $\tilde{\eta}, \tilde{\xi}$ и $\tilde{\Phi}$, определенные выше: $(\Phi - \eta \otimes \vartheta)^2 = -id + \lambda\eta \otimes \lambda f^{-1}\xi$. Учитывая, что $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$, а $\eta \circ \Phi = 0$, получим:

$$\eta \otimes \xi - \lambda^2 \eta \otimes f^{-1}\xi - \eta \otimes \Phi\vartheta - \eta(\vartheta)(\eta \otimes \vartheta) = 0$$

Отсюда следует, что

$$\eta \otimes (\xi - \lambda^2 f^{-1}\xi) - \eta \otimes \Phi\vartheta - \eta(\vartheta)(\eta \otimes \vartheta) = 0$$

Так как имеют место формулы $\xi - \lambda^2 f^{-1}\xi = \Phi\vartheta$ и $\eta(\vartheta) = 0$, то полученное условие выполняется тождественно, следовательно, условие $\tilde{\Phi}^2 = -id + \tilde{\eta} \otimes \tilde{\xi}$ выполняется тождественно.

Теорема 1. *Формулы (2)определяют переход от АС-структуры (g, Φ, ξ, η) к новой АС- структуре $(\tilde{g}, \tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\eta(f^{-1}(\xi)) = \tfrac{1}{\lambda^2}; \quad \Phi(f^{-1}\xi) = \tfrac{1}{\lambda^2}\vartheta, \quad \eta(\vartheta) = 0, \quad g(\Phi\vartheta, f\Phi\vartheta) = g(\vartheta, f\vartheta),$$

где $\vartheta = \nu - \lambda^2 f^{-1}\nu$.

Назовем переход от одной почти контактной метрической структуры к другой при выполнении полученных условий *обобщенным контактно проективным преобразованием АС*-структуры.

Примером такого преобразования может также служить конформное преобразование почти контактной метрической структуры, то есть переход от почти контактная метрическая структуры (Φ, ξ, η, g) к почти контактной метрической структуре $(\Phi, \tilde{\xi} = e^{-f}\xi, \tilde{\eta} = e^{f}\eta, \tilde{g} = e^{2f}g)$, где f – гладкая функция на многообразии M.Для него полученные условия выполняются.

Кроме того, имеют место следующие утверждения:

Теорема 2. *Если f – скалярный эндоморфизм с собственным значением μ,заданный на почти контактном метрическом многообразии, то*
1)μ>0, причем $\mu = \lambda^2$;
2)f – конформное преобразованиеАС-структуры.

Теорема 3. *Пусть ξ – собственное векторное поле эндоморфизма f с собственным значением β. Тогда*
1) $\beta = \lambda^2$;
2) ν – собственный вектор эндоморфизма с тем же собственным значением λ^2;
3) формулы преобразования АС-структуры примут вид:

$$\tilde{g}(X,Y) = g(X, fY), \quad \tilde{\xi} = \tfrac{1}{\lambda}\xi, \quad \tilde{\eta} = \lambda\eta, \quad \tilde{\Phi} = \Phi.$$

Литература

1.Синюков Н.С.Геодезические отображения римановых пространств. Москва,1979/

2. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса,2013.

О минимальном условии проективизации гладкого отображения и проблеме Гронвола

Шелехов А. М.

Тверской госуниверситет, Москва, Россия

170100, Тверь, ул. Желябова, 33

Тел.: 89262114107, e-mail: amshelekhov@rambler.ru

Известно, что гладкое отображение плоскости на себя является проективным (дробно-линейным) пребразованием тогда и только тогда, когда оно переводит прямые в прямые. Это утверждение можно существенно усилить.

Дадим предварительно несколько определений [1]. Три-тканью на плоскости называют совокупность трех семейств гладких кривых. Три-ткань, эквивалентная (локально диффеоморфная) параллельной три-ткани, образованной тремя семействами параллельных прямых, называется регулярной. Три-ткань, образованная тремя семействами прямых общего положения, называется прямолинейной. Три-ткань, эквивалентная прямолинейной три-ткани, называется спрямляемой. Нами доказана

Теорема 1. [2] *Пусть W и $\tilde{W}$ — две эквивалентные нерегулярные прямолинейные три-ткани, θ — локальный диффеоморфизм, переводящий слоения ткани W в слоения ткани $\tilde{W}$. Тогда θ — проективное преобразование.*

В 1912 году F. H. Gronwall высказал следующую гипотезу: если нерегулярная три-ткань W спрямляема, то локальный диффеоморфизм, переводящий ткань W в прямолинейную ткань, определяется, с точностью до проективного преобразования, единственным образом. Как писал В. Бляшке в [1], имея в виду данную проблему, "... проблемы номографии являются примерами вопросов, которые теоретически не сложны, но фактическому решению которых препятствуют вычислительные трудности." Вследствие указанных трудностей проблема не была решена до настоящего времени. Покажем, что имеет место

Теорема 2. *Гипотеза Гронвола верна.*

В самом деле, пусть локальный диффеоморфизм φ_1 переводит спрямляемую три-ткань W в прямолинейную ткань $\tilde{W}_1$, а локальный диффеоморфизм φ_2 переводит три-ткань W в прямолинейную ткань $\tilde{W}_2$. Тогда ткани $\tilde{W}_1$ и $\tilde{W}_2$ эквивалентны, и по теореме 1 существует проективное преобразование θ, которое переводит $\tilde{W}_1$ в $\tilde{W}_2$. Но тогда $\varphi_2 = \theta \circ \varphi_1$, то есть φ_1 и φ_2 отличаются только проективным преобразованием.

В [3] было доказано следующее утверждение: *если некоторый локальный гомеоморфизм θ переводит гладкую нерегулярную криволинейную три-ткань W в гладкую нерегулярную криволинейную три-ткань $\tilde{W}$, то θ — гладкое преобразование.* Следовательно, теорему 1 можно усилить. Верна

Теорема 3. *Пусть W и $\tilde{W}$ — две эквивалентные нерегулярные прямолинейные три-ткани, θ — локальный гомеоморфизм, переводящий слоения ткани W в слоения ткани $\tilde{W}$. Тогда θ — проективное преобразование.*

Доказательство теоремы 1 проведено в [2] классическим методом внешних форм и подвижного репера Эли Картана. Для удобства там рассматривается вместо прямолинейной три-ткани двойственный объект — грассманова три-ткань GW, образованная тремя семействами пучков прямых, причем вершины пучков каждого семейства лежат на некоторой гладкой кривой. Доказательство оказывается весьма сложным, поскольку основной дифференциально-геометрический объект принадлежит дифференциальной окрестности шестого порядка.

Понятие грассмановой ткани обобщается на многомерный случай: в проективном пространстве P^n размерности n три-ткань GW образована с помощью трех гладких гиперповерхностей $X_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$, общего положения, причем слоения ткани GW суть связки прямых, вершины которых лежат на этих гиперповерхностях. В этом случае проблема Гронвола формулируется аналогичным образом. Обозначим через $G(1,n)$ грассманово многообразие прямых пространства P^n. Верна

Теорема 4.[4] *Пусть GW и $\widetilde{GW}$ — две эквивалентные многомерные грассмановы три-ткани в пространстве P^n, $f : G(1,n) \to G(1,n)$ — локальный диффеоморфизм, который слоения ткани GW (связки прямых с вершинами на гиперповерхностях X_α) переводит в слоения ткани $\widetilde{GW}$. Тогда f любую связку прямых переводит опять в связку прямых, то есть f индуцирует точечное преобразование пространства P^n, причем последнее является проективным преобразованием.*

Доказательство этой теоремы оказывается существенно проще, чем в двумерном случае, и вытекает из известных результатов теории многомерных тканей. Все необходимые сведения из теории криволинейных тканей см. в [5], по теории многомерных тканей — в [6], [7].

Литература

[1] В. Бляшке. *Введение в геометрию тканей.* М., Физматгиз, 1959, 144 с.

[2] А. М. Шелехов. *Решение проблемы Гронвелла об эквивалентности грассмановых тканей.* Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского, 2012, вып. 4, стр. 311-320.

[3] Dufour J.P., Jean P. *Rigidity of webs and families of hypersurfaces*. Singularities and Dynamical Systems (Iráklion, 1983), North-Holland Math. Stud., 103, North-Holland, Amsterdam/New York, 1985, 271–283.

[4] Шелехов А.М. *Об условиях линеаризуемости гладких отображений грассмановых многообразий* . В кн.: Теория функций и ее приложения. Материалы Всероссийской научной конференции (к 70-летию со дня рождения Л.Д. Иванова). Тверь, 2009, с. 89-94.

[5] Шелехов А.М., Лазарева В.Б., Уткин А.А. *Криволинейные три-ткани.* Изд. Тверского университета, 2013, 231 с.

[6] Акивис М.А., Шелехов А.М. *Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1992, xvii+358 pp.

[7] Акивис М.А., Шелехов А.М. *Многомерные три-ткани и их приложения.* Изд. Тверского госуниверситета, Тверь, 2010, 307 с.

Секция 3

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

ВЫРОЖДЕННАЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Андреева И.Ю., Сесекин А.Н.
Уральский федеральный университет
620002, Екатеринбург, ул. Мира д. 19
Тел. 89221401515, e-mail: sesekin@list.ru

Пусть объект управления описывается линейной системой с линейным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_\mu(t)x(\mu t) + \int_\mu^1 G(t,s)x(st)\,ds + B\dot{v}(t). \tag{1}$$

Начальное условие имеет вид

$$x(t) = \varphi(t), \qquad t \in [\mu t_0, t_0].$$

Здесь $A(t)$, $A_\mu(t)$, B — матрицы соответственно размерностей $n\times n$, $n\times n$, $n\times m$, причем компоненты двух первых матриц - непрерывные функции, $x \in R^n$, $\varphi \in R^n$, $v \in R^m$, $0 < \mu < 1$, $t_0 > 0$. Для определенности будем полагать, что $v(t_0) = 0$.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J[v(\cdot)] = x^T(T)Sx(T) + \int_{t_0}^{t_f}\Big[x^T(t)\Phi_0(t)x(t) + x^T(t)\int_\mu^1 \Phi_1(t,\theta)x(\theta t)d\theta +$$

$$+\int_\mu^1 x^T(\theta t)\Phi_1^T(t,\theta)d\theta\, x(t) + \int_\mu^1 x^T(st)\Phi_2(t,s)x(st)ds +$$

$$+\int_\mu^1\int_\mu^1 x^T(\theta t)\Phi_3(t,\theta,\rho)x(\rho t)d\theta d\rho + x^T(\mu t)\Phi_4(t)x(\mu t)\Big]\,dt, \tag{2}$$

вдоль траекторий системы (1). В (2) S, $\Phi_0(t)$, $\Phi_2(t,s)$, $\Phi_4(t)$ — симметричные матрицы, $\Phi_0(t)$, $\Phi_1(t,\theta)$, $\Phi_2(t,s)$, $\Phi_3(t,\theta,\rho)$, $\Phi_4(t)$ — непрерывные матрицы-функции своих аргументов, размерность этих матриц — $n\times n$.

Данная задача является вырожденной [1] и в классе абсолютно непрерывных функций решения не имеет. Для построения оптимального решения осуществим расширение задачи путем введения импульсных управлений. Далее будем полагать, что $v(t)$, а следовательно, и $x(t)$ — функции ограниченной вариации, производные которых понимаются в обобщенном смысле [2]. Начальную функцию $\varphi(t)$ также будем считать функцией ограниченной вариации.

Для этой задачи при определенных условиях на ее параметры получены достаточные условия, обеспечивающие существование ее решения в классе обобщенных функций первого порядка сингулярности. Установлено, что оптимальное программное управление содержит импульсные составляющие в начальный и конечный моменты времени, внутри промежутка управления оптимальное управление является абсолютно непрерывной функцией. Получены уравнения, описывающие коэффициенты перед фазовыми переменными и интенсивности импульсных составляющих, которые определяют вид оптимального управления. Предложены условия, позволяющие за счет выбора матриц в функционале упростить систему для нахождения элементов оптимального управления. Другие постановки вырожденных линейно-квадратичных задач для систем с запаздыванием рассматривались в [3-5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00304.

Литература

1. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.

2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.

3. Андреева И.Ю., Сесекин А.Н. Вырожденная линейно-квадратичная задача оптимизации с запаздыванием по времени // АиТ. 1997. № 7. С. 43–54.

4. Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В. О порядке сингулярности импульсного оптимального управления в вырожденной линейно-квадратичной задаче оптимизации с последействием // АиТ. 2009.№ 4. С. 31–40.

5. Желонкина Н.И., Ложников А.Б., Сесекин А.Н. Об оптимальной стабилизации импульсным управлением линейных систем с последействием // АиТ. 2013. № 11. С. 39–48.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РИССОВЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Асхабов С.Н.

Чеченский государственный университет

364907, Грозный, ул. Шерипова, 32

Тел.: 89287828637, e-mail: askhabov@yandex.ru

Для трех различных классов нелинейных интегральных уравнений, содержащих оператор типа потенциала (риссов потенциал) $\left(I^{\alpha}u\right)(x)=\int\limits_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}$, $0<\alpha<1$, методом монотонных операторов установлены теоремы о существовании, единственности и оценках решений в вещественных пространствах Лебега $L_p(a,b)$.

Из теоремы Харди-Литтлвуда с предельным показателем вытекает (см., например, [1]), что оператор I^{α} действует из $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ в $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$ и ограничен. Обозначим его норму через $n(\alpha)$. Известно также, что этот оператор действует из $L_p(a,b)$ в $L_p(a,b)$ и ограничен при любом $p\ge 1$. В этой связи представляет интерес следующая лемма, существенно используемая в дальнейшем.

Лемма 1. *Если* $0<\alpha<1$ *и* $p\ge 2/(1+\alpha)$, *то оператор* I^{α} *действует непрерывно из* $L_p(a,b)$ *в* $L_{p'}(a,b)$, $p'=p/(p-1)$, *и строго положителен, причем*

$$\left\|I^{\alpha}u\right\|_{p'}\le (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}\cdot n(\alpha)\cdot\|u\|_p,\quad \forall u(x)\in L_p(a,b).$$

При $p=2/(1+\alpha)$ и $p'=2/(1-\alpha)$, лемма 1 доказана в [1]. Заметим, что при условиях леммы 1 выполняются вложения: $L_p(a,b)\subset L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ и $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)\subset L_{p'}(a,b)$.

Пусть вещественная функция $F(x,t)$ определена при $x\in[a,b]$, $t\in(-\infty,\infty)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном t и непрерывна по t почти при всех x. Обозначим через $(Fu)(x)=F[x,u(x)]$ оператор Немыцкого, порожденный функцией $F(x,t)$, а через $L_p^{+}(a,b)$ – множество всех неотрицательных функций из $L_p(a,b)$.

Теорема 1. *Пусть* $0<\alpha<1$ *и* $p\ge 2/(1+\alpha)$. *Если выполнены условия:*

1). $\left|F(x,t)\right|\le c(x)+d_1\cdot|t|^{p-1}$, *где* $c(x)\in L_{p'}^{+}(a,b)$, $d_1>0$;

2). $F(x,t)$ *не убывает по* t *почти при каждом фиксированном* x;

3). $F(x,t)\cdot t\ge d_2\cdot|t|^p-D(x)$, *где* $D(x)\in L_1^{+}(a,b)$, $d_2>0$,

то при любом $f(x)\in L_{p'}(a,b)$ *уравнение*

$$F[x,u(x)]+\int\limits_a^b\frac{u(s)ds}{|x-s|^{1-\alpha}}=f(x)\tag{1}$$

имеет единственное решение $u^*(x)\in L_p(a,b)$. *Кроме того, если условие 3) выполнено при* $D(x)=0$, *то* $\left\|u^*\right\|_p\le\left(d_2^{-1}\cdot\|f\|_{p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Доказательство теоремы 1 основано на теореме Браудера-Минти (основной теореме теории монотонных операторов, см., например, [1]) и существенно использует лемму 1.

Лемма 2. *Если* $0<\alpha<1$ *и* $1<p\le 2/(1-\alpha)$, *то оператор* I^{α} *действует непрерывно из* $L_{p'}(a,b)$ *в* $L_p(a,b)$, $p'=p/(p-1)$, *и строго положителен, причем*

$$\left\| I^{\alpha} u \right\|_p \le (b-a)^{[2-p(1-\alpha)]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \left\| u \right\|_{p'}, \quad \forall u(x) \in L_{p'}(a,b).$$

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $1 < p \le 2/(1-\alpha)$. *Если выполнены условия 1), 2) теоремы 1, то при любом* $f(x) \in L_p(a,b)$ *уравнение*

$$u(x) + \int_a^b \frac{F[s,u(s)]ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{2}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если выполнены условия 1), 3) теоремы 1 при* $c(x) = D(x) = 0$, *то* $\left\| u^* \right\|_p \le d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot \left\| f \right\|_p$.

Доказательство теоремы 2 в части существования и единственности решения основано на теореме 3 из [2] и использует лемму 2. Следует отметить, что в этой теореме 3, относящейся к уравнениям Гаммерштейна, нелинейность $F(x,t)$ должна не убывать по t (в теореме 3 из [2] предполагается, что она не возрастает по t), иначе не будет единственности решения. В самом деле, уравнение $u(x) - w(x) \int_a^b w(s) \cdot u^{1/3}(s)\, ds = 0$ с убывающей нелинейностью $F(x,t) = -t^{1/3}$, где заданная функция $w(x) \in L_{4/3}(a,b)$, имеет в $L_{4/3}(a,b)$ два различных решения $u_1(x) = 0$ и $u_2(x) = w(x) \cdot \left(\int_a^b w^{4/3}(s) ds \right)^{3/2}$. Из результатов работы [3] этих же авторов также вытекает, что нелинейность в теореме 3 [2] должна быть неубывающей.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $p \ge 2/(1+\alpha)$. *Если выполнены условия:*

4). $\left| F(x,t) \right| \le g(x) + d_3 \cdot |t|^{1/(p-1)}$, *где* $g(x) \in L_p^+(a,b)$, $d_3 > 0$;

5). $F(x,t)$ *строго возрастает по* t *почти при каждом фиксированном* x;

6). $F(x,t) \cdot t \ge d_4 \cdot |t|^{p/(p-1)} - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(a,b)$, $d_4 > 0$,

то при любом $f(x) \in L_p(a,b)$ *уравнение*

$$u(x) + F\left[x, \int_a^b \frac{u(s)ds}{|x-s|^{1-\alpha}} \right] = f(x) \tag{3}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если условия 4), 6) выполнены при* $g(x) = D(x) = 0$, *то* $\left\| u^* - f \right\|_p \le \left(d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot n(\alpha) \cdot (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \cdot \left\| f \right\|_p \right)^{1/(p-1)}$.

Доказательство теоремы 3 основано на обращении оператора Немыцкого F и установлении коэрцитивности обратного оператора F^{-1}.

Получены следствия, иллюстрирующие теоремы 1–3. Изучен также вопрос о приближенном решении уравнений вида (1)–(3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13–01–00422–а.

Литература

1. Асхабов С.Н. *Нелинейные уравнения типа свертки*. Москва: Физматлит, 2009. – 304 с.
2. Brezis H., Browder F.E. *Some new results about Hammerstein equations* // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80, №3. P. 567–572.
3. Brezis H., Browder F.E. *Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type* // Advances in Math. 1975. V. 18. P. 115–147.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Даровская К.А.

Российский университет дружбы народов

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6

Тел.: 84959550710, e-mail: darovsk@mail

Для дифференциального уравнения второго порядка с параметром и нелокальными условиями интегрального и смешанного типа приводятся конструктивные достаточные условия существования априорной оценки решения для достаточно больших значений параметра.

Настоящая работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, задание № 1.1974.2014/K «Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными».

Литература

1. Даровская К.А., Скубачевский А.Л. Об одной спектральной задаче с интегральными условиями// Труды семинара имени И. Г. Петровского – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. – Вып. 28. – С. 147–160.
2. Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. I// Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т. 26.

О росте (дестабилизации) решений параболических уравнений

В.Н.Денисов

МГУ, ВМК, кафедра Общей математики

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, 2-ой учебный корпус

Тел.: 89161419495, e-mail: vdenisov2008@yandex.ru

Рассмотрим модельную задачу Коши

$$\Delta u + q(x,t)u - u_t = 0, \quad \text{в} \quad R^N \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in R^N, \tag{2}$$

где

$$q(x,t) \geqslant 0, x \in R^N, \tag{3}$$

$u_0(x)$ начальная функция из класса единственности решений задачи Коши (1), (2).

Будем говорить, что решение задачи (1), (2) дестабилизируется, если существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = +\infty, \tag{4}$$

равномерно по x на каждом компакте K в R^N

Во многих работах, с обзором которых можно ознакомиться в статье [1], изучались условия, при которых решения задачи (1), (2) являются стабилизирующимися, т.е. существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \tag{5}$$

равномерно по x на каждом компакте K в R^N .

Существование пределов (4) и (5) существенно зависит от младшего коэффициента $q(x,t)$ в уравнении (1) и от начальной функции $u_0(x)$.

Пусть коэффициент $q(x,t)$ удовлетворяет неравенству

$$q(x,t) \leqslant \alpha^2 \min(1, r^{-2}). \tag{6}$$

Теорема 1. Если размерность пространства $N \geqslant 3$ и коэффициент $q(x,t)$ удовлетворяет неравенству (6) при

$$\alpha^2 < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2, \tag{7}$$

то для любой финитной, бесконечно дифференцируемой начальной функции $u_0(x)$ решение задачи Коши (1), (2) стабилизируется у нулю, т.е. существует предел (5), равномерно по x на любом компакте K в R^N .

Теорема 2. Если размерность пространства $N \geqslant 3$ и коэффициент $q(x,t)$ удовлетворяет неравенству

$$q(x,t) \geqslant \alpha^2 \min(1, r^{-2}). \tag{8}$$

при
$$\alpha^2 > (\frac{N-2}{2})^2, \tag{9}$$
то для любой непрерывной, ограниченной и неотрицательной функции: $u_0(x) \geqslant 0$ решение задачи (1),(2) дестабилизируется.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-000-58)

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.Н.Денисов. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени. // УМН, 2005, т.60, N4, с. 145-212.*
2. *Krzyzanski M. // Ann. Polon. Math., 1962, v. 12, p. 209-214.*
3. *Besala P. and Fife P. // Annali. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1966, v. 20, p. 719-732.*
4. *Kusano T.// Funcialaj Ekvacioj., 1968, v. 11, p. 169-174.*
5. *Kuroda T. and Lu-San-Shen // Annali. Polon. Math., 1970, v. 23, p. 57-64.*
6. *Кондратьев В.А. // Дифф. уравн. , 2010, т.46, № 8, с. 104-112.*

НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОФФА НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

С.А. Загребина, Д.Е. Шафранов

Южно-Уральский государственный университет

(национальный исследовательский университет)

454080, Челябинск, пр. Ленина, 76

Тел.: 83512679339, e-mail: zagrebina_sophiya@mail.ru, shafranovde@susu.ac.ru

Уравнение Хоффа

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3 + f$$

моделирует процесс выпучивания двутавровой балки при высокой температуре и низком давлении [1]. Функция определяет отклонение балки от начального положения $u = 0$; числовые параметры α, β определяют свойства материала, из которого изготовлена балка, а параметр λ характеризует нагрузку на нее.

Рассмотрим линейное уравнение Хоффа

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha u, \tag{1}$$

в пространстве гладких дифференциальных k-форм, определенных на гладком компактном ориентированном римановом многообразии без края. Тогда $\mathfrak{U} = \mathcal{H}_k^2$, $\mathfrak{F} = \mathcal{H}_k^0$ – банаховы пространства. Спектр оператора Лапласа – Бельтрами $\sigma(\Delta)$ состоит из собственных значений $\{\lambda_k\}$, занумерованных по неубыванию с учетом кратности. Собственные функции соответствующие этим собственным значениям обозначим $\{\varphi_k\}$. Спектр оператора Лапласа – Бельтрами вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Для фиксированных параметров $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$ определим операторы $L = (\lambda - \Delta)$, $M = \alpha\mathbb{I}$, причем $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (линейны и ограничены).

Определение 1. [2] L-резольвентным называется множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а L-спектром называется множество $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$. Оператор-функция $(\mu L - M)^{-1}$ называется L-спектром оператора M.

Введем условие на относительный спектр оператора M

$$\sigma^L(M) = \sigma^L_{in}(M) \cup \sigma^L_{fin}(M),\ \ \sigma^L_{in}(M) \cap \sigma^L_{fin}(M) = \emptyset, \tag{3}$$

причем существует контур $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \sigma^L(M)$, ограничивающий область $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащую $\sigma^L_{fin}(M)$, $\Omega \cap \sigma^L_{in}(M) = \emptyset$.

Определение 2. [2] Оператор M называется $(L,0)$-ограниченным, если $\exists \delta > 0\ \forall \mu \in \mathbb{C}\ (|\mu| > \delta) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M))$ и бесконечно удаленная точка является устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M.

Лемма 1. [3] *При всех $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$ оператор M $(L,0)$-ограничен, причем L-спектр оператора имеет вид* $\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \dfrac{\alpha}{\lambda - \lambda_k}\ :\ \lambda_k \in \sigma(M) \right\}$.

В силу леммы 1 условие (3) выполняется и существуют относительно спектральные проекторы [4]. Для уравнения (1) рассмотрим начально-конечные условия

$$\sum_{k:\mu_k \in \sigma^L_{fin}(M)} (u(0) - u_0)_0 \varphi_k = 0; \sum_{k:\mu_k \in \sigma^L_{fin}(M)} (u(\tau) - u_\tau)_0 \varphi_k = 0. \tag{4}$$

В силу [4] и леммы 1 справедлива

Теорема 1. *При любых $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$ и $u_0, u_\tau \in \mathfrak{U}$ начально-конечная задача (1), (4) имеет единственное решение, причем*

$$u(t) = \sum_{k:\mu_k \in \sigma^L_{fin}(M)} exp(\mu_k t)(u_0, \varphi_k)_0 \varphi_k + \sum_{k:\mu_k \in \sigma^L_{fin}(M)} exp(\mu_k (t - \tau))(u_\tau, \varphi_k)_0 \varphi_k.$$

Литература

1. Hoff, N.J. Creep buckling / N.J. Hoff // Aeronautic.– Quarterly 7.– 1956.– № 1.– P.1-20.

2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo, 2003.

3. Шафранов, Д.Е. Уравнение Хоффа как модель упругой оболочки / Д.Е.Шафранов, А.И. Шведчикова // Вест. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2012. – Т.18 (277), вып. 12. – С.77-81.

4. Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вест. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2013. – Т.6, №2. – С.5-24.

МГНОВЕННОЕ РАЗРУШЕНИЕ VS ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

М. О. Корпусов

Кафедра математики, физический факультет МГУ им М.В. Ломоносова

e-mail: korpusov@gmail.com

В работе рассматриваются задачи Коши для следующих нелинейных уравнений соболевского типа:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta u + |u|^q\right) + \Delta u = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u^{'}(x,0) = u_1(x); \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u + \Delta u + |u|^q = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u^{'}(x,0) = u_1(x); \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + \Delta u + |u|^q = 0, \quad u(x,0) = u_0(x); \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u - \Delta^2 u + |u|^q = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \tag{4}$$

при $q > 1$ и $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$ и с соответствующими начальными условиями. При надлежащем определении слабых решений указанных задач мы покажем, что критическим показателем для данных задач является величина

$$q_{kr} = \begin{cases} N/(N-2), & \text{если} \quad N \geq 3; \\ +\infty, & \text{если} \quad N = 1, 2, \end{cases} \tag{5}$$

совпадающая с критическим показателем (теорема типа Лиувилля) для эллиптического уравнения

$$\triangle u + |u|^q = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad q > 1.$$

Причем, если $1 < q \leqslant q_{kr}$, то отсутствуют слабые решения задач (2), (3) и (4) даже локально во времени. В случае задачи Коши (1) ситуация становится сложнее и интереснее — выявлена зависимость критического показателя от начальных функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$. Если же $q > q_{kr}$ (при $N = 3$), то при малых начальных данных $u(x,0) = u_0(x)$ и $u^{'}(x,0) = u_1(x)$

в случае задачи Коши для уравнения (1), при произвольных начальных функций $u(x,0) = u_0(x)$ и $u^{'}(x,0) = u_1(x)$ в случае задачи Коши для уравнения (2) и для произвольной начальной функции $u(x,0) = u_0(x)$ в случае задачи Коши для уравнений (3) и (4) имеет место локальная во времени разрешимость в классическом смысле. Отметим, что при этом классические решения являются слабыми. Кроме того, исследован вопрос о локальной разрешимости всех задач Коши в сильном обобщенном смысле при $N \geqslant 3$ в случае $q > q_{kr}$.

У задачи Коши (4) имеется другой критический показатель

$$p_{kr} = \begin{cases} (N+2)/(N-2), & \text{если} \quad N \geq 3. \\ +\infty, & \text{если} \quad N = 1, 2, \end{cases} \tag{6}$$

такой, что при $q_{kr} < q \leqslant p_{kr}$ у задачи Коши (4) не существует глобального во времени нетривиального слабого решения (хотя локальное, как мы покажем далее, существует), причем, ясно, что $q_{kr} < p_{kr}$ при $N \geqslant 3$. Таким образом, у некоторых нелинейных соболевских уравнений существует своеобразная ситуация наличия нескольких критических показателей.

Кроме того, в заключение мы рассмотрим еще две задачи Коши для соболевских уравнений с градиентными нелинейностями

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + \Delta u + |\nabla u|^q = 0, \quad u(x,0) = u_0(x); \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u + \Delta u + |\nabla u|^q = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u^{'}(x,0) = u_1(x), \tag{8}$$

для которых критическим показателем *мгновенное разрушение* versus *локальная разрешимость* является величина

$$r_{kr} \equiv \begin{cases} N/(N-1), & \text{если} \quad N \geq 2, \\ +\infty, & \text{если} \quad N = 1. \end{cases} \tag{9}$$

О ЗАДАЧЕ СОБОЛЕВА, АССОЦИИРОВАННОЙ С КОМПАКТНОЙ ГРУППОЙ ЛИ

Лощенова Д.А.
Российский университет дружбы народов
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
Тел. 84959550897, e-mail: darya.loshhenova.90@bk.ru

Пусть M — гладкое замкнутое многообразие размерности n, а X — подмногообразие коразмерности $\nu = n/2$. Будем также предполагать, что на M действует компактная группа Ли G.

Действие группы G индуцирует представление группы в пространствах функций на M операторами сдвига T_g, действующими на функции u по формуле

$$(T_g u)(x) = u(g^{-1}x).$$

В настоящей работе исследуется следующая задача Соболева с нелокальным граничным условием

$$\left\{ \begin{array}{ll} Du \equiv f \pmod X, & u \in H^s(M),\ f \in H^{s-m}(M) \\ i^* Bu = \varphi, & \varphi \in H^{s-b-\nu/2}(X), \end{array} \right. \tag{1}$$

где D — псевдодифференциальный оператор (далее ПДО) на M порядка m, $i^* : H^{s-b}(M) \longrightarrow H^{s-b-\frac{\nu}{2}}(X)$ — оператор сужения функций на подмногообразие, индуцированный вложением $i : X \subset M$, а сравнение понимается в том смысле, что функции Du и f совпадают вне X. Наконец, граничное условие в (1) определяется нелокальным оператором

$$Bu = B_0 u + \int_G B_g T_g u dg \tag{2}$$

ассоциированным с группой G. Здесь B_0 — ПДО на M порядка b, а B_g ($g \in G$) — семейство ПДО на M того же порядка b, гладко зависящее от g.

Мы будем предполагать, что порядки операторов связаны с индексами пространств Соболева неравенствами $s - b - \nu/2 > 0$ (ограниченность граничного оператора) и $0 < m - s - \nu/2 \leq 1$ (эти неравенства обеспечивают то, что в задаче Соболева требуется только одно граничное условие).

Основной результат работы состоит в указании условий, при которых задача (1) является фредгольмовой, а также в предъявлении формулы индекса этой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Ю. Стернин.* Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности. Труды Моск. Мат. общ-ва, 15:346–382, 1966.

2. *А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин.* Нелокальные эллиптические операторы для компактных групп Ли. Докл. АН, 431(4):457–460, 2010.

О гладкости обобщенных решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений

Д. А. Неверова [*]

13 ноября 2014 г.

Изучается гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения вида

$$\mathcal{L}Ru = f(x) \quad (x \in Q) \tag{1}$$

с краевым условием

$$u(x) = 0 \qquad (x \notin Q)\,, \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{L} = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ — эллиптический дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $b_{ij} = b_{ji} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, правая часть $f \in C^{\sigma}(\overline{Q})$ $(0 \le \sigma < 1)$, а разностный оператор R имеет вид

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x+h), \quad a_h \in \mathbb{C},$$

где $\mathcal{M}$ — конечное множество векторов h из $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами.

Известно, что гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений может нарушаться внутри области Q даже при бесконечно дифференцируемых правых частях уравнений, а в случае $f \in L_2(Q)$ сохраняется лишь в некоторых подобла-

[*]Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ №1.1974.2014/K "Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными"

стях Q_r, полученных из области Q выбрасыванием всевозможных сдвигов границы ∂Q на векторы аддитивной группы, порожденной разностными операторами. Для случая гельдеровской правой части получен результат о сохранении гладкости обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений в подобластях Q_r и установлены необходимые и достаточные условия гладкости обобщенных решений на границах соседних подобластей.

Для доказательства данных результатов используется связь краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений и эллиптических задач с нелокальными условиями.

Подобные задачи имеют множество приложений, возникающих в теории управления системами с последействием, в задачах об упругих деформациях многослойных пластин и оболочек, в теории многомерных диффузионных процессов и др.

О НЕПРОДОЛЖАЕМОМ РЕШЕНИИ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Панин А. А.

МГУ имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М. В. Ломоносова, дом 1, строение 2, физический факультет

Тел.: (495)939-10-33, e-mail: a-panin@yandex.ru

Основными результатами работы являются: 1) теорема о существовании и единственности непродолжаемого решения абстрактного интегрального уравнения Вольтерра, 2) теорема о существовании и единственности непродолжаемого решения абстрактной задачи Коши с ограниченно липшиц-непрерывной правой частью, 3) установление того факта, что непродолжаемое решение задачи Коши, не существующее на бесконечном промежутке, является бесконечно большим, а непродолжаемое решение уравнения Вольтерра в аналогичном случается является неограниченным, но не обязательно бесконечно большим (построен соответствующий явный пример).

Пусть B — банахово пространство с нормой $\|.\|$. Пусть $L(B)$ — банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов в пространстве B. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$u(t) = v(t) + \int_0^t K(t,\tau)A(s,u(\tau))d\tau. \tag{1}$$

Пусть отображение $A(t,u):[0,+\infty)\times B \to B$ удовлетворяет следующим двум условиям:

(A_1) оно непрерывно по совокупности переменных (t,u);

(A_2) оно ограниченно липшиц-непрерывно на B, т. е. существует такая функция

$$\mu(t,s):[0,+\infty)\times[0,+\infty) \to [0,+\infty),$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0,T]\times[0,S]$, что при всех $t \geq 0$ и при всех $t \geq 0$ верно неравенство

$$\|A(t,u_1) - A(t,u_2)\| \leq \mu(t, \max(\|u_1\|, \|u_2\|))\|u_1 - u_2\|.$$

Пусть оператор-функция $K(t,\tau)$ непрерывна по совокупности переменных в стандартной норме $L(B)$. Пусть функция $v(t)$ непрерывна на $[0,+\infty)$.

Теорема 1. Пусть для уравнения (1) выполнены сформулированные выше условия. Тогда верны следующие утверждения. 1. Уравнение (1) имеет единственное непродолжаемое решение *u(t)*. 2. Каждое другое решение является ограничением решения *u(t)*. 3. Если промежуток существования $[0,T)$ решения *u(t)* ограничен, то при $t \to T-0$ имеет место предельное соотношение $[0,+\infty)$

$$\limsup \|u(t)\| = +\infty. \tag{2}$$

Аналогичная теорема может быть доказана для абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} u'(t) = A(t,u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3}$$

При этом для непродолжаемого решения задачи (3) в случае конечного промежутка $[0,T)$ его существования вместо соотношения (2) получаем предельное соотношение

$$\lim \|u(t)\| = +\infty \text{ при } t \to T - 0 . \qquad (4)$$

Таким образом, верна

Теорема 2. Пусть для отображения $A(t,u)$, входящего в уравнение (2), выполнены сформулированные выше условия. Тогда верны следующие утверждения. 1. Уравнение (2) имеет единственное непродолжаемое решение *u(t)*. 2. Каждое другое решение является ограничением решения *u(t)*. 3. Если промежуток существования $[0,T)$ решения *u(t)* ограничен, то при $t \to T - 0$ имеет место предельное соотношение (4).

Теоремы 1 и 2 являются обобщениями классических теорем типа теоремы Коши—Пикара (см., например, [1]) на случай абстрактных уравнений и лишь ограниченно (а не глобально) липшиц-непрерывных правых частей.

Также нами построен пример, показывающий, что в теореме 1 соотношение (2) не может быть усилено до соотношения (4). Подобный вопрос был поставлен в [2] и впервые решён в [3]. Однако наш пример отличается от данного в [3] более простой конструктивной формой и принадлежностью более узкому классу уравнений. Наш пример — это уравнение Вольтерра

$$u(t) = 1 + \int_0^t K(t)\big(u(s)\big)^3 ds, \quad t \in (0, T_0),$$

где $T_0 = 2/\pi$. Здесь ядро имеет вид

$$K(t,\tau) = K(t) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{T_0 - t}\cos^2\left(\dfrac{1}{T_0 - t}\right)}{\displaystyle\int_0^t \left[1 + \dfrac{1}{T_0 - s}\cos^2\left(\dfrac{1}{T_0 - s}\right)\right]^3 ds}, & t \in (0, T_0), \\ 0, & t \in \{0\} \cup [T_0, +\infty), \end{cases}$$

отображение $A(t,u) = A(u) = u^3$, а решение уравнения есть

$$u(t) = 1 + \frac{1}{T_0 - t}\cos^2\left(\frac{1}{T_0 - t}\right).$$

В литературе по интегральным уравнениям распространены ссылки на примеры значительно более сложного характера, чем пример из [3] и тем более чем наш пример.

Данные теоремы могут быть полезны при исследовании явлений разрушения решений нелинейных уравнений соболевского типа.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 12-01-00479-а.

Литература

1. Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

2. R.K Miller. Nonlinear Volterra integral equations. Menlo Park: W. A. Benjamin, 1971.

3. Z. Artstein. Continuous dependence of solutions of Volterra integral equations. SIAM J. Mathematical Analysis, **6** (1975), 446—456.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СУБЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПОЛУОСИ

Д. В. ПРОХОРОВ
Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск
E-mail: prohorov@as.khb.ru

В. Д. СТЕПАНОВ
Российский университет дружбы народов, Москва,
Математический институт РАН им. В. А. Стеклова, Москва
E-mail: stepanov@mi.ras.ru

Мы изучаем весовые $L^p - L^r$ неравенства с положительными сублинейными интегральными операторами с ядрами Ойнарова на полуоси и даем их полную характеризацию для всех случаев параметров суммирования. Найдены приложения к задаче об ограниченности максиального оператора Харди-Литтлвуда в весовых Г-пространствах Лоренца.

Работа авторов поддержана Российским научным фондом (Проект 14-11-00443)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прохоров Д.В., Степанов В.Д.* О весовых неравенствах Харди в смешанных нормах // Труды МИАН. 2013. Т. 283. С. 155-170.

2. *Прохоров Д.В., Степанов В.Д.* Весовые оценки одного класса сублинейных операторов // Доклады АН. 2013. Т. 453, № 5. С. 486-488.

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АРГУМЕНТОВ

Россовский Л.Е.

Российский университет дружбы народов

117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Тел.: 84959550710, e-mail: lrossovskii@gmail.com

Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $f \in L_2(\Omega)$, а p - некоторый параметр, меняющийся в окрестности значения $p = p_0$. Рассматривается семейство непрерывных полуторалинейных форм $\mathfrak{a}_p[u, v]$ на пространстве Соболева $H_0^1(\Omega)$, зависящее от параметра p так, что

$$1)\ |\mathfrak{a}_p[u, v] - \mathfrak{a}_{p_0}[u, v]| \le h_p(u) \parallel v \parallel_{H_0^1(\Omega)},$$

где $h_p(u) \to 0$ при $p \to p_0$ для каждой фиксированной функции u, и

$$2)\ \mathrm{Re}\ \mathfrak{a}_p[u, u] \ge \gamma \parallel u \parallel_{H_0^1(\Omega)} \left(u \in H_0^1(\Omega)\right),$$

где $\gamma > 0$ не зависит от u и p.

Тогда для каждого значения параметра существует единственное решение $u = u_p$ уравнения

$$\mathfrak{a}_p[u_p, v] = (f, v)_{L_2(\Omega)} \left(v \in H_0^1(\Omega)\right),$$

и выполнено соотношение

$$\parallel u_p - u_{p_0} \parallel_{H_0^1(\Omega)} \to 0, \qquad p \to p_0.$$

Данный результат применяется к функционально-дифференциальным уравнениям (задаче Дирихле), где параметр p отвечает за преобразование аргументов (например, p - величина сдвига или коэффициент сжатия). При этом в каждом случае возникает проблемапроверкинеравенства 2). Для некоторых классов уравнений найдены простые алгебраические критерии выполнения равномерного по параметру условия коэрцитивности 2). Следует отметить, что в каждом из приведенных примеров выполнение неравенства 2) для значения $p = p_0$ не влечет за собой выполнение этого неравенства для сколь угодно близких к p_0 значений параметра. Другими словами, требование равномерной коэрцитивности формы вблизи некоторого значения параметра не сводится к условию коэрцитивности формы при этом значении параметра.

Работа выполнена по заданию Министерства образования и науки РФ № 1.1974.2014/К "Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными".

УНИФОРМИЗАЦИЯ И ИНДЕКС ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ МНОГООБРАЗИЙ

Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.
Российский университет дружбы народов
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
Тел. 89167998244, e-mail: a.yu.savin@gmail.com sternin@mail.ru

Пусть M — гладкое многообразие и $g : M \to M$ — диффеоморфизм. Развивается эллиптическая теория для операторов вида

$$D = \sum_k D_k T^k : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M). \tag{1}$$

Здесь T — оператор сдвига $Tu(x) = u(g(x))$ вдоль траекторий диффеоморфизма g, D_k — (псевдо)дифференциальные операторы на M, а сумма предполагается конечной. Операторы (1) рассматривались Антоневичем, Конном, Лебедевым, Московичи, Назайкинским, Перротом, Савиным, Стерниным и др. В этих работах для ряда многообразий M и диффеоморфизмов g были установлены формулы индекса таких операторов.

В настоящей работе мы рассматриваем произвольные компактные гладкие многообразия и произвольные диффеоморфизмы. Даётся формула индекса таких операторов в терминах топологических инвариантов многообразия и символа оператора. Этот результат получен в рамках нового подхода — *псевдодифференциальной униформизации*. Идея этого подхода состоит в том, чтобы заменить оператор D, который существенно нелокален, на эллиптический псевдодифференциальный оператор с тем же индексом и затем применить классическую формулу Атьи–Зингера.

Отметим, что символ оператора D является элементом некоммутативной алгебры — скрещенного произведения $C^\infty(S^*M) \rtimes \mathbb{Z}$ алгебры функций на косферическом расслоении многообразия и группы $\mathbb{Z}$. Поэтому окончательная формула индекса естественно формулируется в терминах некоммутативной геометрии Конна, т.е. в циклических когомологиях скрещенного произведения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *A. Savin, B. Sternin.* Index of elliptic operators for diffeomorphisms of manifolds. Journal of noncommutative geometry, 2014, V. 8, N. 3, 695–734. ArXiv:1106.4195, 2011.

2. *A. Savin, B. Sternin.* Uniformization of nonlocal elliptic operators and KK-theory. Russian Journal of Mathematical Physics, V. 20, No. 3 (2013), 345-359.

НОВЫЙ КЛАСС СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тасевич А.Л.
Российский университет дружбы народов
г. Москва, ул. Орджоникидзе, д.3
Тел.: 89857894837, e-mail: atasevich@gmail.com

В круге $B_r \subset \mathbb{R}^2$ рассматривается функционально-дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, содержащее в старшей части ортотропные сжатия аргументов искомой функции. Для данного уравнения определяются необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности уравнения. В силу специфики уравнения сильная эллиптичность определяется в терминах выполнения неравенства типа Гординга.

Как известно, сильно эллиптический оператор удовлетворяет гипотезе Т. Като о квадратном корне из m-аккретивного оператора (см. [1]). Таким образом, рассматриваемый класс дает положительное решение этой проблемы.

Для дифференциально-разностных уравнений проблема нахождения алгебраического эквивалента неравенству типа Гординга была решена А.Л. Скубачевским [2], а для функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями — Л.Е. Россовским [3], [4].

В докладе будет освещены следующие результаты: условия сильной эллиптичности, разрешимость задачи Дирихле, свойства спектра, гладкость обобщенных решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ (задание 1.1974.2014/K).

[1] *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов М.: Мир, 1972.

[2] *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations J. Diff. Equat. 1986. T. 63, 3. C. 332–361.

[3] *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений
Мат. зам. 1996. Т. 59, 1. С. 103–113.

[4] *Россовский Л. Е.* Об одном классе секториальных функционально-дифференциальных операторов
Дифф. ур. 2012. Т. 48, 2. С. 227–237.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ГЕССИАНОВСКИХ УРАВНЕНИЙ

Филимоненкова Н. В.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

190005, Санкт-Петербург, 2-ая Красноармейская ул., 4

Тел.: 89052837945, e-mail: nf33@yandex.ru

Доклад посвящен одной разновидности полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных – m-гессиановским уравнениям. Как известно, классическими представителями нелинейной теории являются уравнения с оператором Монжа – Ампера:

$$det(u_{xx})$$

где $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$. Его можно рассматривать как частный случай в классе m-гессиановских операторов

$$tr_m(u_{xx}), \quad 1 \leqslant m \leqslant n.$$

Символом tr_m обозначена сумма всех главных миноров порядка m симметричной матрицы u_{xx}. Эта матричная операция известна под названием "след порядка m", поскольку при $m = 1$ она совпадает с классическим понятием следа.

Рассмотрим краевую задачу для стационарного m-гессиановского уравнения в ограниченной области

$$tr_m^{\frac{1}{m}} u_{xx} = f > 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$
$$u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

и начально-краевую задачу для эволюционного m-гессиановского уравнения в конечном цилиндре

$$-u_t tr_{m-1}^{\frac{1}{m-1}} u_{xx} + tr_m^{\frac{1}{m}} u_{xx} = f > 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2}$$
$$u|_{\partial' Q_T} = \varphi,$$

где $Q_T = \Omega \times (0; T)$, $\partial' Q_T = (\Omega \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times [0; T])$. Заметим, что при $m = 1$ уравнение (1) совпадает с уравнением Пуассона, уравнение (2) – с уравнением теплопроводности. Уравнения Монжа – Ампера получаем в (1) при $m = n$ и в (2) при $m = n + 1$, если учитывать $tr_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} u_{xx} = 0$.

Изучение уравнений (1), (2) началось в 80-е годы 20 века и развивалось по образцу уравнения Монжа – Ампера. Известно, что для разрешимости последнего требуется положительная определенность матрицы u_{xx}. Исследование уравнений (1), (2) при $m < n$ было направлено на выявление аналогичных требований для матрицы u_{xx}. В результате были построены специальные конусы m-положительных симметричных матриц (см. [1], [2], [3], [4]), более широкие, чем конус положительно определенных матриц.

При $m > 1$ краевая задача (1) и начально-краевая задача (2) являются типичными представителями нелокальных задач.

Принципиальное влияние границы области Ω на разрешимость этих задач было впервые отмечено в фундаментальной работе [5]: поверхность $\partial\Omega$ должна быть $(m-1)$-выпуклой. Это означает, то матрица кривизны этой поверхности должна быть $(m-1)$-положительной в каждой точке. В последние годы необходимость этого требования подтверждена следующими результатами. Доказаны "теоремы несуществования" для задач (1) и (2) при $\varphi = const$ на $\partial\Omega$: если данные f, φ, $\partial\Omega$ удовлетворяют всем требованиям разрешимости (в частности, достаточно гладкие), но поверхность $\partial\Omega$ не является $(m-1)$-выпуклой хотя бы в одной точке, то краевая задача (1) и начально-краевая задача (2) не имеют гладких решений.

Эти и другие результаты для задач (1), (2) опираются на недавно полученный критерий Сильвестра для m-положительных матриц [6], который является обобщением широко известного критерия Сильвестра для положительно определенных матриц.

Список литературы

[1] Ивочкина Н. М., Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа-Ампера, Математический сборник, 22 (1983), 265–275.

[2] Ivochkina N. M., Yakunina G. V., Prokof'eva S. I. The Garding cones in the modern theory of fully nonlin-ear second order differential equations, Journal of Mathematical Sciences, 184 (2012), 295-–315.

[3] Ивочкина Н. М., От конусов Гординга к p-выпуклым гипербоповерхностям, Современная математика. Фундаментальные направления, 45 (2012), 94–104.

[4] Ivochkina N. M., Filimonenkova N.V., On the bakgrounds of the theory of m-Hessian equations, Communications on Pure and Applied Analysis, 12 (2013), 1687–1703.

[5] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III. Functions of the Hessian. Acta Math. 155, 1985, 261-301.

[6] Филимоненкова Н. В., Критерий Сильвестра для m-положительных матриц, Препринт Санкт-Петербургского математического общества, 7 (2014).

Критерий ограниченности одного класса квазилинейных операторов на весовом конусе монотонных функций

Г. Э. Шамбилова
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо Маклая, 6, Москва 117198
E-mail: shambilova@mail.ru

Пусть $\mathfrak{M}^+$ обозначает множество всех неотрицательных измеримых функций на $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ и $\mathfrak{M}^\downarrow \subset \mathfrak{M}^+$ – подмножество всех невозрастающих функций. Пусть весовые функции $u, v, w, \rho \in \mathfrak{M}^+$ и параметры суммирования $0 < p, r < \infty,\ 0 < q \leq \infty$.

Рассматривается задача характеризации неравенства

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \left(\int_0^t fu\right)^q w(t)dt\right)^{\frac{r}{q}} \rho(x)dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_0^\infty [f(x)]^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad (1)$$

где константа C не зависит от f и полагается наименьшей из возможных. Данное неравенство и ему подобные исследованы в работе [13]. Эти неравенства играют важную роль в теории пространств Морри (см., например, [1], [2]). При $r = q$ они исследованы во многих работах (см., например, [3] - [9]), но случай $r \neq q$ является новым и потребовал новой техники.

Пусть

$$V(t) := \int_0^t v,\ U(t) := \int_0^t u,\ W(t) := \int_t^\infty w,\ 0 < t < \infty.$$

Теорема 1. *Пусть* $0 < q < \infty, 0 < p < \infty, 0 < r < \infty$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (1) *выполняется оценка*

$$C \approx A_1 + A_2 + B,$$

где A_1, A_2 *- наилучшие константы в неравенствах*

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)[W(x)]^{\frac{r}{q}} \left(\int_0^x \left(\int_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} u(s)ds\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq A_1^p \int_0^\infty hV,$$

$$\left(\int_0^\infty \left[\left(\int_x^\infty \left(\int_y^\infty h\right)^{\frac{q}{p}} [U(y)]^q w(y)dy\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}} \rho(x)dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq A_2^p \int_0^\infty hV,$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, *а константа* B *имеет вид*

$$B := \begin{cases} \sup_{t>0} \left(\int_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\mathscr{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_w}, & p \leq r; \\ \left(\int_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int_0^x \rho\right) \left\|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\right\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p, \end{cases}$$

где $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

Здесь функции $\sigma : [0;\infty) \to [0;\infty)$ и $\sigma^{-1} : [0;\infty) \to [0;\infty)$ задаются формулами ($\inf \varnothing = \infty$)

$$\sigma(x) := \inf\left\{y > 0 : \int_0^y \rho \geq 2\int_0^x \rho\right\},\ x \geq 0,$$

$$\sigma^{-1}(x) := \inf\left\{y > 0 : \int_0^y \rho \geq \frac{1}{2}\int_0^x \rho\right\},\ x \geq 0,$$

а операторы $\mathscr{T}_t$ и $\mathscr{T}_{[c,d]}$ имеют вид

$$\mathscr{T}_t h(x) := \chi_{[t,\infty)}(x)\left(\int_{\sigma^{-1}(t)}^x \left(\int_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} u(s)ds\right)^p,$$

$$\mathscr{T}_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x)\left(\int_{\sigma^{-1}(c)}^x \left(\int_s^d h\right)^{\frac{1}{p}} u(s)ds\right)^p,$$

для $0 < c < d \leq \infty, 0 < t < \infty, h \in \mathfrak{M}^+$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Burenkov V.I., Gogatishvili A., Guliev V.S., Mustafaeyev R.Ch.* Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces // Complex Variables and Elliptic Equations. 2010. V. 55, N 8-10. P. 739-758.

2. *Burenkov V.I., Gogatishvili A., Guliev V.S., Mustafaeyev R.Ch.* Boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces // Potential Anal. 2011. V. 35. P. 67-87.

3. *Попова О.В.* Неравенства типа Харди на конусах монотонных функций // Сибир. матем. журн., 2012. Т. 53, № 1. С. 187-204.

4. *Буренков В.И., Гольдман М.Л.* Вычисление нормы положительного оператора на конусе монотонных функций // Труды МИАН. 1995. Т. 210. С. 65-89.

5. *Johanson M., Stepanov V.D., Ushakova E.P.* Hardy inequality with three measures on monotone functions // Math. Inequal. Appl., 2008. V. 11, N 3. P. 393-413.

6. *Myasnikov E.A., Persson L.- E., Stepanov V.D.* On the best constants in certain integral inequalities for monotone functions // Acta Sci. Math. (Szeged), 1994. V. 59, N 3-4. P. 613-624.

7. *Persson L.- E., Popova O.V., Stepanov V.D.* Two - sided Hardy inequalities for monotone functions // Complex Var. Elliptic Equ. 2010. V. 55, N 8-10. P. 973-989.

8. *Stepanov V.D.* Integral operators on the cone of monotone functions // J. London Math. Soc., 1993. V. 48, N 3. P. 465-487.

9. *Степанов В.Д.* Об ограниченности линейных интегральных операторов на классе монотонных функций // Сиб. матем. журн., 1991. V. 32, N 3. P. 222-224.

10. *Гогатишвили А., Степанов В.Д.* Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенств на конусе монотонных функций // Успехи матем. наук. 2013. Т. 68, № 4. С. 3-68.

11. *Прохоров Д.В., Степанов В.Д.* О весовых неравенствах Харди в смешанных нормах // Труды МИАН. 2013. Т. 283. С. 155-170.

12. *Прохоров Д.В., Степанов В.Д.* Весовые оценки одного класса сублинейных операторов // Доклады АН. 2013. Т. 453, № 5. С. 486-488.

13. *Шамбилова Г.Э.* Весовые неравенства для одного класса квазилинейных интегральных операторов на конусе монотонных функций.// Сибир. матем. журн. Т 55. №4. 2014. С. 912-936. Англ. пер.: *Shambilova G.E.* The weighted inequalities for a certain class of quasilinear integral operators on the cone of monotone functions. // Siberian Mathematical Journal. 2014. V. 55. No 4. P. 745-767.

Секция 4

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

Обратные задачи для интегральных представлений

И.И. Баврин

Московский педагогический государственный университет

Москва

Широким классом некорректно поставленных задач, возникающих в физике, технике и других областях знаний, являются так называемые обратные задачи (см; например[1-3]). Автором[4], в частности, в случае круга решена обратная задача для интегральной формулы Коши. Имеет место следующее предложение[4].

Теорема 1. Если функция $f(z)$ голоморфна в круге $K_R: |z| < R$, то в $K_{R \setminus C_r}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-t} dt \int_{C_r} e^{\frac{z}{\zeta} t} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \qquad (1)$$

где $C_r: |\zeta| = r$ - окружность, проходимая в положительном направлении, $0 < r < R$, Формула (1) по значению функции f(z) на любой окружности $C_r(0<r<R)$ выражает ее значения во всех остальных точках K_r, причем для $z\in K_r(0<r<R)$ формула (1) переходит в формулу Коши, если f(z) голоморфна в K_R.

Позднее [5] при условии теоремы 1 в $K_{R\setminus C_r}$ установлена и формула

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} e^{-t}dt\int_{C_r}\left[\frac{1}{zt}\left(e^{\frac{z}{\zeta}t}-1\right)\right]L_{1,0}[f(\zeta)]d\zeta, \qquad (2)$$

где

$$L_{1,0}[f(z)]\equiv f(z)+zf'(z)$$

Формула (2) в случае круга является обратной для формулы

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 d\tau\int_{C_r}\frac{L_{1,0}[f(\zeta)]d\zeta}{\zeta-\tau z},$$

(τ вещественно), справедливой для функции f(z), голоморфной в звездной относительно начала координат области G

Для этой же функции в области G верна и формула [6]

$$f(z)=\int_0^1 L_{1,0}[f(\tau z)]d\tau \qquad (3)$$

В настоящем сообщении, используя формулы (1) и (3), приводится новое упрощенное по сравнению с прежним [5], доказательство формулы (2).

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука 1979, 288 с.

2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука 1980, 286 с.

3. Марчук Г.И. //ДАН. 1964, Т.156, №3. С.503-506

4.Баврин И.И. // ДАН. 2008, Т421, №3. С.299-301

5.Баврин И.И. // ДАН. 2013. Т.450, №3. С.257-259

6.Баврин И.И. // ДАН. 1966. Т.169, №3. С.495-498

ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Баев А. В.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет

119992 Москва, Ленинские горы, д. 1

andrewbayev@mail.ru

В докладе рассказывается о применении теории оптимального восстановления к решению линейных обратных задач. Описаны классы обратных задач, для которых удалось построить оптимальные алгоритмы (для условно корректных задач) и оптимальные регуляризующие алгоритмы (для некорректных задач).

Большинство обратных задач является некорректными, но если, помимо прочего, для решения известны априорные ограничения определённого вида (например, компактное множество априорных ограничений), то задачу можно свести к задаче оптимального восстановления [1,2]. Эта методика позволяет решать задачу именно тем методом, который точнее всех возможных, который обладает минимальной *априорной погрешностью*. До недавнего времени теория оптимального восстановления не имела алгоритмов решения достаточно широкого класса задач. Ситуация изменилась после исследований по конечномерной аппроксимации задач оптимального восстановления.

Допустим, задача может быть записана в виде

$$\overline{z} \in M, \qquad \left\|F(\overline{z}) - v\right\| \le \varepsilon. \tag{1}$$

Здесь $\overline{z}$ — восстанавливаемое *точное решение*, являющееся элементом действительного нормированного пространства Z, $F : Z \to \mathbb{R}^m$ — известный линейный непрерывный оператор, $M \subset Z$ — известное *множество априорных ограничений*, $v \in \mathbb{R}^m$ — известный вектор, имеющий смысл приближённого значения для выражения $F(\overline{z})$, $\varepsilon > 0$ — *погрешность задачи*. В разных задачах норма в $\mathbb{R}^m$ может быть различной, но в любом случае существует выпуклое уравновешенное множество $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^m$, такое что второе условие в (1) эквивалентно включению $F(\overline{z}) - v \in \Omega_\varepsilon$. Пусть $\ell \in Z^*$ — некоторый фиксированный линейный непрерывный функционал. Если M выпукло и уравновешенно, то вместо задачи (1) можно решать задачу минимизации *априорной погрешности восстановления функционала* ℓ среди всех *методов восстановления* $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$\sup_{z \in M,\ y \in \mathbb{R}^m:\ F(z) - y \in \Omega_\varepsilon} \left|\ell(z) - \varphi(y)\right| \quad \to \quad \min_{\varphi}, \qquad \varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}. \tag{2}$$

Пусть $\hat{\varphi} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — решение этой задачи. Его интерпретация такова: приближением для числа $\ell(\overline{z})$ считаем число $\hat{\varphi}(v)$, а погрешностью этого приближения будет значение минимума в задаче (2). Для большинства прикладных задач это значение равно $+\infty$, т.е. все методы восстановления φ имеют бесконечную априорную погрешность. В этом случае можно искать оптимальный регуляризующий алгоритм. Но если множество M достаточно узко, то минимум может быть конечным. В этом случае можно искать решение и значение задачи (2), т.е. можно построить наиболее точный метод решения задачи и найти его погрешность.

В [2] была предложена методика решения достаточно широких классов задач типа (2). Она основана на конечномерной аппроксимации исходной задачи. Здесь особенностью является то, что простой конечномерной аппроксимации не достаточно, поскольку при этом теряется свойство оптимальности. Была разработана методика, в которой задача (2) сводится к задаче того же вида, но в которой присутствуют только конечномерные объекты. Алгоритмы для конечномерных задач были предложены в [3]. Они применимы для множеств квадратичных (и как частный случай линейных) ограничений вида

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \left\|G_\sigma x\right\|^2 \le \rho_\sigma^2 \quad \forall \sigma \in \Sigma\}, \quad \Omega_\varepsilon = \{w \in \mathbb{R}^m \mid \left\|\hat{G}_\sigma w\right\|^2 \le \varepsilon^2 \quad \forall \sigma \in \hat{\Sigma}\},$$

где Σ — конечное множество индексов, при любом $\sigma \in \Sigma$ $\rho_\sigma > 0$, $G_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{p_\sigma}$ — линейный оператор, $p_\sigma \in \mathbb{N}$. Аналогичным определениям удовлетворяют объекты $\hat{\Sigma}$ и $\hat{G}_\sigma$.

В [4] построен оптимальный регуляризующий алгоритм для некорректной задачи с $M = \operatorname{Im} V$, где $V : W \to Z$ — известный линейный инъективный компактный оператор из действительного гильбертова пространства W. Этот алгоритм имеет смысл применять, если значение задачи (2) равно $+\infty$. Если это значение конечно, то предпочтительно решать задачу оптимального восстановления.

Литература

[1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[2] *Баев А. В.* Оптимальное восстановление и конечномерная аппроксимация в линейных обратных задачах // Матем. Сборник. 2008. **199**. № 12. 3–18.

[3] *Баев А. В.* Принцип Лагранжа в задаче оптимального обращения линейных операторов в конечномерных пространствах при наличии априорной информации о решении // Журнал Выч. Мат. и Мат. Физ. 2007. **47**. № 9. 1512–1523.

[4] *Баев А. В.* Оптимальный регуляризующий алгоритм восстановления функционала в линейных обратных задачах с истокопредставимым решением // Журнал Выч. Мат. и Мат. Физ. 2008. **48**. № 11. 1933–1941.

ОПТИМАЛЬНОЕ ОБФП, СОДЕРЖАЩЕЕ ЗАДАННЫЙ КОНУС ДВОЯКОМОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ [1]

Бахтигареева Э. Г.

Российский университет дружбы народов

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая д.6

Тел.: 89295267641, e-mail: salykai@yandex.ru

Для заданного конуса двоякомонотонных функций из $L_{p,u}(\mathbb{R}_+)$ задача о нахождении обобщенного банахово функционального пространства (кратко: ОБФП), в которое вложен этот конус, имеет множество решений; одним из них являетсяя само пространство $L_{p,u}(\mathbb{R}_+)$. Здесь мы регуляризуем эту задачу, вводя дополнительное условие оптимальности ОБФП, т.е. среди всех ОБФП, в которые вложен этот конус, ищем оптимальное ОБФП с максимально жесткой нормой. Отметим, что общая теория БФП представлена в [1], концепция ОБФП развита в [2].
Пусть $1 \leq p < \infty$, u -положительная, измеримая функция на $\mathbb{R}_+$. Конус двоякомонотонных функций на $\mathbb{R}_+$

$$K = \{h \geq 0, 0 \leq h(t) \downarrow, th(t) \uparrow, \rho_K(h) < \infty\} \tag{1}$$

снабжен функционалом

$$\rho_K(h) = \|h\|_{L_{p,u}(\mathbb{R}_+)} = \left(\int\limits_0^\infty h^p u dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Определение 1. Вложение конуса в ОБФП: $K \mapsto X$ означает, что $K \subset X$ и $\exists \quad c_K \in \mathbb{R}_+$, такая что $\|h\|_X \leqslant c_K \rho_K(h), \quad h \in K$.

Определение 2. ОБФП X_0 назовем оптимальным (минимальным) для вложения $K \mapsto X$, если $K \mapsto X_0$ и, если для некоторого ОБФП X справедливо вложение $K \mapsto X$, то $X_0 \subset X$.

Теорема. *Пусть дан конус K (1), снабженный функционалом ρ_K (2). Тогда оптимальное ОБФП X_0, содержащее конус K (1), имеет норму*

$$\|f\|_{X_0} = \left\| \left\| \frac{\tau f(\tau)}{\tau + t} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \right\|_{L_{p,u}(\mathbb{R}_+)}$$

(внутрення норма по τ, внешняя - по t).

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. Bennett and R. Sharpley.* Interpolation of Operators // Academic, New York, 1988. 469 с.

2. *Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман, П. П. Забрейко.* Оптимальное восстановление обобщенного банахова функционального пространства по конусу неотрицательных функций // Вестник Тамбовского университета. Серия "Естественные и технические науки", т.19, вып.2, 2014г., с. 316-330.

Благодарности: автор выражает благодарность профессору М. Л. Гольдману за постановку задачи и ценные замечания.

[1]Эта работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00443).

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Замышляева А. А., Цыпленкова О. Н.
Южно-Уральский государственный университет
454080, Челябинск, пр. Ленина, 76
e-mail: alzama@mail.ru, Tsyplenkova_Olga@mail.ru

Рассмотрим полное уравнение соболевского типа высокого порядка

$$Ax^{(n)} = B_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + B_0x + y + Cu, \tag{1}$$

где операторы $A, B_{n-1}, \ldots, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$, функции $u : [0, \tau) \subset \mathbf{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $y : [0, \tau) \subset \mathbf{R}_+ \to \mathfrak{Y}\,(\tau < \infty)$, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства.

Рассмотрим задачу Коши

$$x^{(m)}(0) = x_m, \quad m = \overline{0, n-1}. \tag{2}$$

Нас будет интересовать задача оптимального управления, которая заключается в отыскании пары $(\hat{x}, \hat{u})$, где $\hat{x}$ – решение задачи (1), (2), а $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$ – управление, для которого выполняется соотношение

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \min\nolimits_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}} J(x, u). \tag{3}$$

Здесь $J(x, u) = \mu \sum_{q=0}^{n} \int_0^\tau ||x^{(q)} - \tilde{x}^{(q)}||^2 dt + \nu \sum_{q=0}^{p+n} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt$, где $\mu, \nu > 0$, $\mu + \nu = 1$, $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \ldots, p+n$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $\tilde{x}(t)$ – плановое состояние системы, $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$.

Впервые исследованием задач оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа стали заниматься Г.А. Свиридюк и А.А. Ефремов [1]. В дальнейшем начатые исследования в этой области продолжили ученики Г.А. Свиридюка, среди которых Н.А. Манакова [2], А.В. Келлер [3] и др.

Через $\vec{B}$ обозначим пучок операторов $B_{n-1}, \ldots, B_0$, через $R_\mu^A(\vec{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1}B_{n-1} - \ldots - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ обозначим *A-резольвенту пучка $\vec{B}$*.

Определение 1. Пучок операторов $\vec{B}$ называется *полиномиально ограниченным относительно оператора A* (или просто *полиномиально A-ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R_\mu^A(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})).$$

Введем в рассмотрение дополнительное условие

$$\int\limits_\gamma \mu^m R_\mu^A(\vec{B}) d\mu \equiv \mathbb{O}, m = \overline{0, n-2}, \tag{A}$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Лемма 1. [4] *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено (A). Тогда операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R_\mu^A(\vec{B}) \mu^{n-1} A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \mu^{n-1} A R_\mu^A(\vec{B}) d\mu$$

– *проекторы в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ соответственно.*

Положим $\mathfrak{X}^0 = \ker P$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{X}^1 = \mathrm{im}\ P$, $\mathfrak{Y}^1 = \mathrm{im}\ Q$. Через A^k (B_l^k) обозначим сужение оператора A (B_l) на $\mathfrak{X}^k$, $k = 0, 1$; $l = \overline{0, n-1}$.

Рассмотрим неоднородное уравнение соболевского типа

$$Ax^{(n)} = B_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + B_0 x + y. \tag{4}$$

Определение 2. Вектор-функцию $x \in H^n(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X}) : \ x^{(n)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X})\}$ назовем *сильным решением* уравнения (4), если она п. в. на $(0, \tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (4) назовем сильным решением задачи (2),(4), если оно удовлетворяет (2).

Построим пространства $H^{p+n}(\mathfrak{Y}) = \{v \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}) : v^{(p+n)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{Y}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ и множества $\mathcal{M}_f^m = \{x \in \mathfrak{X} : \ (\mathbb{I} - P)x = -\sum\limits_{l=0}^{p} K_l^n (B_0^0)^{-1} \frac{d^{l+m}}{dt^{l+m}} (\mathbb{I} - Q)y(0)\}$, где $m = \overline{0, n-1}$.

Теорема 1. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполняется (A). Тогда для любых $x_m \in \mathcal{M}_f^m$, $m = \overline{0, n-1}$ и $y \in H^{p+n}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи (2) для уравнения (4).*

Введем в рассмотрение пространство управлений

$$\overset{\circ}{H}{}^{p+n}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0, \tau; \mathfrak{U}) : u^{(p+n)} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{U}), u^{(q)}(0) = 0, q = \overline{0, p}\}, \ p \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Выделим в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{p+n}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $\overset{\circ}{H}{}^{p+n}_{\partial}(\mathfrak{U})$– *множество допустимых управлений.*

Определение 3. Вектор-функцию $\hat{u} \in \overset{\circ}{H}{}^{p+n}_{\partial}(\mathfrak{U})$ назовем *оптимальным управлением решениями задачи* (1), (2), если выполнено соотношение (3).

Теорема 2. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, выполнено (A), причем ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$. Тогда для любых $x_m \in \mathcal{M}_f^m$, $m = \overline{0, n-1}$ и $y \in H^{p+n}(\mathfrak{Y})$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (2) для уравнения (1).*

Литература

1. *Свиридюк Г. А.* Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 11. — С. 1912 – 1919.

2. *Manakova N. A.* Optimal control of the solutions of the initial-finish problem for the linear Hoff model / Manakova N. A. A.G. Dyl'kov // Mathematical notes. — 2013. — V. 43, № 1-2. — P. 220 – 230.

3. *Келлер А. В.* Численное решение задач оптимального и жесткого управления для одной нестационарной системы леонтьевского типа / А.В. Келлер, М.А. Сагадеева // Науч. ведомости Белгородского гос. университета. Сер.: Математика. Физика. Белгород. – 2013. – Т. 32, № 32. С. 57 – 66.

4. *Замышляева А. А.* Математические модели соболевского типа высокого порядка // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2014. № 2, вып. 7. С. 5 – 28.

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУДЫ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

Кабанихин С.И., Криворотько О.И.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

630090, Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 6

Новосибирский государственный университет

630090, Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2

Тел.: 8(383)3306167, e-mail: kabanikhin@sscc.ru, krivorotko.olya@mail.ru

Разработан алгоритм расчета амплитуды переднего фронта волны, возбуждаемой кратковременным (импульсным) локальным источником $g(\mathbf{x},t)$ (носитель источника $\mathrm{supp}\{\mathrm{g}\}$ предполагается достаточно малым). Известно [1], что в этом случае быстроизменяющаяся «сигнальная» часть волнового поля $u(\mathbf{x},t)$ сосредоточена в окрестности поверхности характеристического конуса, вершина которого расположена в центре источника. Другими словами, имеет место формула

$$u(\mathbf{x},t)=\int_{R^3}\int_{R} v(\mathbf{x}-\mathbf{x_0},t-t_0)\cdot g(\mathbf{x_0},t_0)\,dt_0 d\mathbf{x_0},\quad \mathbf{x}\in R^3. \tag{1}$$

Здесь $v(\mathbf{x},t)$ - фундаментальное решение уравнений распространения волн (в нашем случае, цунами, акустики и вязкоупругости)

$$Lv=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x_0},t-t_0),\quad \mathbf{x}\in R^3, t\in R. \tag{2}$$

Следовательно, амплитуда переднего фронта волны может быть приближена амплитудой соответствующей сингулярной составляющей фундаментального решения задачи (2). В самом деле, из формулы (1) следует, что чем ближе $g(\mathbf{x_0},t_0)$ к дельта-функции Дирака $\delta(\mathbf{x_0},t_0)$, тем лучше $v(\mathbf{x},t)$ приближает $u(\mathbf{x_0},t_0)$.

Амплитуда $S(z,y)$ переднего фронта волны, порожденной линейным источником $g(\mathbf{x},t)=h(y)\delta(x)$, для *уравнений мелкой воды* удовлетворяет задаче Коши [2]

$$\begin{cases} 2S_z+a_1S_y+a_2S=0, & z>0, y\in R,\\ S(0,y)=h(y)\left(b^{-2}(0,y)-\tau_y^2(0,y)\right)^{-1/2}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $z=\tau(x,y)$, где $\tau(x,y)$ - решение задачи Коши для уравнения эйконала [3]

$$\left|\nabla\tau\right|^2=(gH(x,y))^{-1}(x,y),\quad \tau(0,y)=0,\quad \tau_x(0,y)=(gH(x,y))^{-1/2}(0,y),\qquad x>0, y\in\ \ ,$$

$b(z,y)=\sqrt{gH(x,y)}$, где $H(x,y)$ - функция, описывающая рельеф дна в водоеме, $a_1=2b^2\tau_y$, $a_2=b^2(\tau_{xx}+\tau_{yy})+2\left(b_z/b+bb_y\tau_y\right)$. Отметим, что если все функции, входящие в задачу Коши (3), не зависят от переменной y (одномерный случай), то решение задачи (3) совпадает с формулой Эри-Грина [4]: $S(x)=S(0)\sqrt[4]{H(0)/H(x)}$.

Амплитуда $S(z,y)$ переднего фронта *акустической волны*, порожденной точечным источником вида $h(y)\delta(t)$, удовлетворяет следующей задаче Коши [5]:

$$\begin{cases} S_z+b^2\tau_yS_y+b^2(\ {}_{x,z}\tau)S=0, & z>0, y\in R,\\ S(0,y)=0.5h(y), & k\in Z. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $b(z,y)=c(x,y)$ - скорость распространения акустической волны. Если все функции, входящие в задачу Коши (4), не зависят от переменной y (одномерный случай), то ее решение имеет вид: $S(x)=S(0)\sqrt{c(x)/c(0)}$.

Амплитуды для *вязкоупругой продольной* $S_p(\mathbf{x};\mathbf{x_0})$ и *поперечной* $S_s(\mathbf{x};\mathbf{x_0})$ *волн*, порожденных точечным источником в точке $\mathbf{x_0}\in R^3$ вектором силы $f^0\in R^3$, имеют вид [6]:

$$S_p(\mathbf{x};\mathbf{x_0})=\begin{cases}-\dfrac{\left(f^0\cdot\nabla_{\mathbf{x_0}}\tau_p(\mathbf{x};\mathbf{x_0})\right)\nabla\tau_p(\mathbf{x};\mathbf{x_0})}{4\pi\rho(\mathbf{x_0})c_p(\mathbf{x_0})\tau_p(\mathbf{x};\mathbf{x_0})}, & |\mathbf{x}-\mathbf{x_0}|<\varepsilon,\\ -c_p(\mathbf{x})\left(f^0\cdot\nabla_{\mathbf{x_0}}\tau_p(\mathbf{x};\mathbf{x_0})\right)A_p(\mathbf{x};\mathbf{x_0})\nabla\tau_p(\mathbf{x};\mathbf{x_0}), & |\mathbf{x}-\mathbf{x_0}|>\varepsilon;\end{cases}$$

$$S_s(\mathbf{x};\mathbf{x_0})=\begin{cases}-\dfrac{\nabla\tau_s(\mathbf{x};\mathbf{x_0})\times\left(f^0\times\nabla_{\mathbf{x_0}}\tau_s(\mathbf{x};\mathbf{x_0})\right)}{4\pi\rho(\mathbf{x_0})c_s(\mathbf{x_0})\tau_s(\mathbf{x};\mathbf{x_0})}, & |\mathbf{x}-\mathbf{x_0}|<\varepsilon,\\ -c_s(\mathbf{x})\left(\nabla\tau_s(\mathbf{x};\mathbf{x_0})\times\left(f^0\times\nabla_{\mathbf{x_0}}\tau_s(\mathbf{x};\mathbf{x_0})\right)\right)A_s(\mathbf{x};\mathbf{x_0}), & |\mathbf{x}-\mathbf{x_0}|>\varepsilon.\end{cases}$$

Здесь $\mathbf{x}\in R^3$, $\tau_p(\mathbf{x};\mathbf{x_0})$ и $\tau_s(\mathbf{x};\mathbf{x_0})$ определяются равенствами $d\tau_p=|d\mathbf{x}|/c_p(\mathbf{x})$, $d\tau_s=|d\mathbf{x}|/c_s(\mathbf{x})$, $c_p(\mathbf{x})$ и $c_s(\mathbf{x})$ - скорости продольных и поперечных волн в неоднородной среде соответственно, $\rho(\mathbf{x})>0$ - плотность, функции $A_p(\mathbf{x};\mathbf{x_0})$ и $A_s(\mathbf{x};\mathbf{x_0})$ зависят от функций вязкоупругости [6].

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации, грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-5666.2014.5 и грантом РФФИ № 12-01-00773.

Литература

1. Петрашень Г.И. *Распространение волновых полей сигнального типа в упругих сейсмических средах*. СПб.: Изд-во С-Петерб. ун-та, 2000.
2. Kabanikhin S.I., Krivorot'ko O.I. A numerical method for determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation. *Appl. Comp. Math*. – 2013. – V. 12. – P. 91-96.
3. Кабанихин С.И. *Линейная регуляризация многомерных обратных задач для гиперболических уравнений*. Препринт ин-та математики СО АН СССР, Т. 27, Новосибирск, 1988.
4. Airy G. Tides and Waves. *Encyclopedia Metropolitana*. – 1845. – V. 5. – P. 241-396.
5. Kabanikhin S.I., Satybaev A.D., Shishlenin M.A. *Direct Methods of Solving Multidimensional Inverse Hyperbolic Problems.* Boston: Utrecht, 2004.
6. Romanov V.G. An asymptotic expansion for a solution to viscoelasticity equations. Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. – 2013. – V. 1, N. 1. – P. 41-61.
7. Зельдович Я.Б. *Избранные труды. Частицы, ядра, Вселенная*. М.: Наука, 1985.
8. Адамар Ж. *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа*. М.: Наука, 1978.
9. Курант Р. *Уравнения с частными производными*. М.: Мир, 1964.
10. Романов В.Г. *Устойчивость в обратных задачах*. М.: Научный мир, 2005.

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГОВ УРАВНЕНИЙ И.М. ГЕЛЬФАНДА, Б.М. ЛЕВИТАНА И М.Г. КРЕЙНА

Кабанихин С.И.[1,3], Шишленин М.А.[2,3]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН*

630090, Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 6

[2]*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН*

630090, Новосибирск, пр-т Академика Коптюга, д. 4

[3]*Новосибирский государственный университет*

630090, Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2

Тел.: 83833306167, e-mail: kabanikhin@sscc.ru, mshishlenin@ngs.ru

Рассмотрим метод регуляризации двумерной коэффициентной обратной задачи, основанный на проекционном методе и методе И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна.

Одним из преимуществ нашего подхода [2-4] в том, что он позволяет избежать многократного решения двумерной прямой задачи (см. также метод граничного управления, предложенный М.И. Белишевым [1] и глобально сходящийся метод, предложенный М.В. Клибановым [5]).

Двумерный аналог уравнения И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x,y)u^{(k)}, \quad x \in R,\ y \in R,\ t > 0;$$

$$u^{(k)}\big|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}\big|_{t=0} = e^{iky}\delta(x),$$

$$u^{(k)}\big|_{y=\pi} = u^{(k)}\big|_{y=-\pi}.$$

Обратная задача заключается в определении функции $q(x,y)$ по заданной дополнительной информации ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$u^{(k)}\big|_{x=0} = f^{(k)}(y,t), \quad u_x^{(k)}\big|_{x=0} = 0.$$

Обратная задача сводится к системе линейных интегральных уравнений (двумерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана)

$$w^{(k)}(x,y,t) + \sum_m \int_{-x}^{x} \left[f_m^{(k)}\right]'(t-s)w^{(k)}(x,y,s)ds = -\frac{1}{2}\left[f^{(k)}{}'(y,t-x) + f^{(k)}{}'(y,t+x)\right], \quad |t| < x,\ y \in R.$$

Решение обратной задачи может быть найдено по формуле:

$$q(x,y) = 4\frac{d}{dx}w^{(0)}(x,y,x-0).$$

Двумерный аналог уравнения М.Г. Крейна ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

Применим этот подход для восстановления скорости распространения волн $c(x,y)$ и плотности среды $\rho(x,y)$ из последовательности соотношений:

$$u_{tt}^{(k)} = u_{tt}^{(k)} + u_{tt}^{(k)} - \rho(x,y)u^{(k)}, \quad x \in R,\ y \in R,\ t > 0;$$

$$u^{(k)}\big|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}\big|_{t=0} = e^{iky}\delta(x),$$

$$u^{(k)}\big|_{y=\pi} = u^{(k)}\big|_{y=-\pi},$$

$$u^{(k)}\big|_{x=0} = f^{(k)}(y,t), \quad u_x^{(k)}\big|_{x=0} = 0.$$

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации и грантом РФФИ № 14-01-00208.

Литература

1. Belishev M. I. Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method). *Inverse Problems.* – 1997. – V. 13, N. 5. - P. R1-R45.
2. Kabanikhin S. I. On linear regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations. *Sov. Math. Dokl.* – 1990. – V. 40, N. 3. – P. 579-583.
3. Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A. *Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems*, VSP, The Netherlands, 2005.
4. Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A. Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gel'fand-Levitan-Krein equation. *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. – 2011. V. 18, N. 9. -P. 979-995.
5. Beilina L., Klibanov M.V. A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem. *SIAM J. Sci. Comp.* – 2008. - V. 31. – P. 478-509.

З.А.Каденова
e-mail: kadenova71@mail.ru

ОДИН КЛАСС ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСЫМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

One class of linear integral equations of the first kind with two independent variables.

Аннотация: На основе метода неотрицательных квадратичных форм для линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными доказаны теоремы единственности решения.

Ключевые слова: Линейные интегральные уравнения, первого рода, с двумя независимыми переменными, единственность.
Библиография 10.

Annotation: We consider linear integral equations of the first kind with two independent variables by the method of non-negative quadratic form. The theorem of uniqueness are proved.

Keywords: Linear, Inteqral Equations, first kind,with two independent variables by the method of non-negative quadratic form. The theorem of uniqueness.

Рассмотрим уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)ds+\int_{t_0}^T\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds =$$

$$= f(t,x),(t,x)\in G,\ G=\left\{(t,x)\in R^2,\ t_0\le t\le T\ ,\ a\le x\le b\right\}, \qquad (1)$$

где

$$K(t,x,y)=\begin{cases} A(t,x,y),\ t_0\le t\le T; \\ a\le y\le x\le b; \\ B(t,x,y),\ t_0\le t\le T; \\ a\le x\le y\le b, \end{cases} \quad (2)$$

$A(t,x,y), B(t,x,y), H(t,x,s), C(t,x,s,y)$ - известные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y): t_0\le t\le T,\quad a\le y\le x\le b\};$$

$$G_2=\{(t,x,y): t_0\le t\le T, a\le x\le y\le b\};$$

$$G_3=\{(t,x,s): t_0\le s\le t\le T, a\le x\le b\}, G^2=G\times G.$$

$f(t,x)-$ известная, а $u(t,x)-$ неизвестная функция, $(t,x)\in G$.

Различные вопросы интегральных уравнений первого и третьего рода исследовались в [1-10]. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [2,3], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В

[1] для линейных интегральных уравнений Вольтерры первого и третьего рода с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений. В [6] изучены вопросы регуляризации и единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В данной работе доказывается единственность решений интегральных уравнений (1)в пространстве $L_2(G)$.

Предполагается, что ядро $C(t,x,s,y)-$ интегрируемо с квадратом в области G^2 и самосопряженная т.е. $C(t,x,s,y) \in L_2(G^2)$ и разлагается в ряд

$$C(t,x,s,y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(t,x)\varphi_i(s,y),\ m \le \infty, 0 \le \lambda_i,\ i = 1,2,...,m \qquad (3)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ...-$ собственные значения ядра $C(t,x,s,y)$, расположенные в порядке убывания их модулей $|\lambda_1| \ \ge \ |\lambda_2| \ \ge \ ...$ и $\varphi_1(t,x), \varphi_1(t,x), ...$ соответствующие ортонормированные собственные функции.

Обозначим

$$P(s,y,z) = A(s,y,z) + B(s,z,y), (s,y,z) \in G_1. \qquad (4)$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$1)\ P(s,b,a) \in C[t_0,T], P(s,b,a) \ge 0, \forall s \in [t_0,T],$$

$$P_y^{'}(s,y,a) \in C(G), P_y^{'}(s,y,a) \le 0, \forall (s,y) \in G,$$

$$P_z^{'}(s,b,z) \in C(G), P_z^{'}(s,b,z) \ge 0, \forall (s,z) \in G,$$

$$P_{zy}^{''}(s,y,z) \in C(G_1), P_{zy}^{''}(s,y,z) \le 0, (s,y,z) \in G_1,$$

$$2)\ H(T,y,t_0) \in C[a,b], H(T,y,t_0) \ge 0, \forall y \in [a,b],$$

$$H_s^{'}(s,y,t_0) \in C(G), H_s^{'}(s,y,t_0) \le 0, \forall (s,y) \in G,$$

$$H_\tau^{'}(T,y,\tau) \in C(G), H_\tau^{'}(T,y,\tau) \ge 0, \forall (y,\tau) \in G,$$

$$H_{\tau s}^{''}(s,y,\tau) \in C(G_3), H_{\tau s}^{''}(s,y,\tau) \le 0, (s,y,\tau) \in G_3.$$

3)Выполняются хотя бы один из следующих четырех условий
а) при почти всех $(s,y) \in G$ $P_y^{'}(s,y,a) < 0$;
б) при почти всех $(s,z) \in G$ $P_z^{'}(s,b,z) > 0$;
в) при почти всех $(s,y) \in G$ $H_s^{'}(s,y,t_0) < 0$;
г) при почти всех $(\tau,y) \in G$ $H_\tau^{'}(T,y,\tau) > 0$;
4) Ядро $C(t,x,s,y)-$ представимо в виде (3) и в разложении (3) все элементы последовательности λ_i неотрицательны.

Теорема . Пусть выполняются 1), 2), 3), и 4). Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $L_2(G)$.

Доказательство. В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^x A(t,x,y)u(t,y)dy + \int_x^b B(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)ds +$$

$$+\int_{t_0}^{T}\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds = f(t,x). \tag{5}$$

Обе части уравнения (5) умножим на функции $u(t,x)$ и интегрируем по области G:

$$\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_a^y A(s,y,z)u(s,z)u(s,y)dzdyds+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s} H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\tau dsdy+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)dzd\tau dsdy =$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^{T} f(s,y)u(s,y)dsdy. \tag{6}$$

Применяя формулу Дирихле из (6), имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_a^y [A(s,y,z+B(s,z,y)]u(s,z)u(s,y)dzdsdy+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s} H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\tau dyds+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)dzd\tau dsdy = \int_a^b\int_{t_0}^{T} f(s,y)u(s,y)dsdy.$$

Отсюда, учитывая (3.3.4), имеем

$$\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)dzdyds+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s} H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\tau dsdy+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)dzd\tau dsdy =$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^{T} f(s,y)u(s,y)dsdy. \tag{7}$$

Преобразуем первый два интеграла левой части уравнения (7). Дважды интегрируя по частям и применяя формулу Дирихле, имеем

$$\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)dzdyds = -$$

$$-\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)dz\ u(s,y)dyds = -$$

$$-\int_{t_0}^{T}\int_a^b\left\{P(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)\Big|_a^y-\int_a^y P_z^{'}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)dz\right\}u(s,y)dyds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b P(s,y,a)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2\right]dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_z^b P_z^{'}(s,y,z)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2\right]dydzds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[P(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2\right]\Bigg|_a^b ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b P_y^{'}(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\left[P_z^{'}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2\right]\Bigg|_z^b dzds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_z^b P_{zy}^{''}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dydzds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b P_y^{'}(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b P_z^{'}(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_a^y P_{zy}^{''}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzdyds, \qquad (8)$$

где $P_t^{'}(t,x,s), P_y^{'}(t,x,s)$ частные производные по t и s соответственно.

Дважды интегрируя по частям и применяя формулы Дирихле для второго интеграла, имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\tau dsdy=$$

$$=-\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}H(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)d\tau u(s,y)dsdy=$$

$$=-\int_a^b\int_{t_0}^{T}\left[H(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)\Bigg|_{t_0}^{s}-\int_{t_0}^{s}H_\tau^{'}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)d\tau\right]u(s,y)dyds=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^{T}H(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{s}u(\xi,y)d\xi\right)u(s,y)dsdy+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}H_\tau^{'}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)d\tau u(s,y)dsdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H(s,y,t_0)\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right)^2\right]dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_\tau^T H_\tau^{'}(s,y,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2\right]dsd\tau dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b H(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right)^2\Bigg|_{t_0}^T dy-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H_s^{'}(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H_\tau^{'}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2\Bigg|_\tau^T d\tau dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_\tau^T H_{\tau s}^{''}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 dsd\tau dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b H(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 dy-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H_s^{'}(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H_\tau^{'}(T,y,\tau)\left(\int_\tau^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s H_{\tau s}^{''}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dsdy. \qquad (9)$$

Выражения (8), (9) подставляя в (7) и учитывая (3), получим

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^T P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P_y^{'}(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P_z^{'}(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P_{zy}^{''}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzdyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b H(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 dy-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H_s^{'}(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H_\tau^{'}(T,y,\tau)\left(\int_\tau^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s H_{\tau s}^{''}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dsdy+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\int_a^b\int_{t_0}^T\varphi(s,y)u(s,y)dsdy\right)^2=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)dsdy. \qquad (10)$$

Пусть $f(t,x)\equiv 0,(t,x)\in G$.
Тогда, учитывая условия 1), 2), 3) и 4) из (10), имеем

$$\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi=0,(s,y)\in G$$

или

$$\int_a^y u(s,\nu)d\nu=0,(s,y)\in G.$$

Отсюда $u(t,x)=0$, при всех $(t,x)\in[t_0,T]\times[a,b]$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение (1) для $a=t_0=0$, $b=T=1, A(t,x,y)=0,5t+2x^2+4y^3+e^{-x+y^2}$ при $(t,x,y)\in G_1$, $B(t,x,y)=1+0,5t+x^3-3y^2+e^{x^2-y}$ при $(t,x,y)\in G_2, H(t,x,s)=$ $=2+x+3e^{-t^2+s^3}$ при $(t,x,s)\in G_3, C(t,x,s,y)=3(t+x)(s+y)+$ $+4t^3x^2s^3y^2$ при $(t,x,s,y)\in G^2$. В этом случае из (4) имеем

$$P(s,y,z)=1+s-y^2+5z^3+2e^{-y+z^2},(s,y,z)\in G_1.$$

Тогда нетрудно проверить, что функции $P(s,y,z),H(s,y,\tau)$ и $C(t,x,s,y)$ удовлетворяют все условию 1)-4). Поэтому в силу теоремы решение уравнение (1) единственно в пространстве $L_2(0,1)$.

Список литературы

1. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода.//Журнал вычислительной математики и математический физики. 1979.Т.19. N4. с. 970-989.
2. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127. N1. с. 31-33.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. // ДАН 2007. Т. 415. N1. с. 14-17.
5. Асанов А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра.// Известия АН Киргизской ССР. 1988. N1.с.13-18.
6. Асанов А., Каденова З.А. Регуляризация и устойчивость систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. // Вестник Самарского Государственного Технического Университета. Серия физико-математические науки. Самара: Сам ГТУ. 2005. N38. с. 11-14.
7. Денисов А. М., Коровин С. В. // Вестник МГУ. Вычислительной математика и кибернетика. 1992. N3. с. 22-28.
8. Aparstyn A.S. Nonclassical linear Volterra Equations of the First Kind. Amsterdam: VSP, 2003. 168 p.

9. Asanov A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. Amsterdam: VSP, 1998. 276 p.
10. Bukhgeim A. L. Volterra Equations and Inverse Problems. Amsterdam: VSP, 1999. 204 p. a720071, Бишкек, Проспект Чуй 265а, Институт теоретической и прикладной математики Национальной академии наук кыргызской Республики.

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Каденова. З. А., Орозмаматова Ж.Ш.

Ошский Технологический университет, г.Ош, ул. Исанова 86

Kadenova71@mail.ru, тел. +996 555 884066

УДК 517.968

В настоящей работе рассмотрена получены оценки устойчивости и регуляризация решений систем линейных интегральных уравнений первого рода в неограниченных областях.

In the present article of stability and regularization of systems linear integral equations of Fredgolm of the first kind with in unlimited areas.

Рассмотрим систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$Ku \equiv \int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty), \tag{1}$$

где

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ B(t,s), & a \le t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

$K(t,s) = (K_{ij}(t,s)),\ A(t,s) = (A_{ij}(t,s)),\ B(t,s) = (B_{ij}(t,s)),$

$K(t,s) \in L_2([a,\infty)\times[a,\infty);\ M),$

$u(t) = (u_i(t)),\ f(t) = (f_i(t)) \in L_2([a,\infty);\ E_n)$.

Отметим, что интегральные уравнения первого рода или интегральные уравнения, сводящиеся к ним, ранее изучались частности в [1]-[5], где были получены теоремы единственности, устойчивости и регуляризации.

В силу (2) системы уравнений (1) запишем в виде

$$\int_a^t A(t,s)u(s)ds + \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds = f(t). \qquad (3)$$

Обе части системы (3) скалярно умножим на вектор-функцию $u(t)$. Полученное произведение интегрируем по области $a \le t < \infty$, применяя формулу Дирихле имеем

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle A(t,s)u(s), u(t)\rangle_n dsdt + \int_a^\infty \int_a^t \langle B^*(s,t)u(s), u(t)\rangle_n dsdt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t)\rangle_n dt,$$

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle (A(t,s) + B^*(s,t))u(s), u(t)\rangle_n dsdt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t)\rangle_n dt.$$

Обозначим

$$H(t,s) = \frac{1}{2}\left(A(t,s) + B^*(s,t)\right), \quad (t,s) \in G = \{(t,s) \mid a \le s \le t < \infty\}. \qquad (4)$$

Тогда

$$2\int_a^\infty \int_a^t \langle H(t,s)u(s), u(t)\rangle_n dsdt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t)\rangle_n dt. \qquad (5)$$

Введём новую матричную функцию $M(t,s) = (M_{ij}(t,s))$ следующим образом

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ H(s,t), & a \le t \le s < \infty, \end{cases} \qquad (6)$$

где $H(t,s) = (H_{ij}(t,s)), \quad H(s,t) = (H_{ij}(s,t))$.

Ясно, что $M(t,s) = M(s,t)$.

$$M(t,s) = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \begin{pmatrix} \varphi_1^{(\nu)}(t) \\ . \quad . \quad . \\ \varphi_n^{(\nu)}(t) \end{pmatrix} \left(\overline{\varphi}_1^{(\nu)}(s) \ldots \overline{\varphi}_n^{(\nu)}(s)\right), \quad m \le \infty. \qquad (7)$$

В дальнейшем будем считать, что все собственные значения λ_ν матричного ядра *M(t,s)* положительны. В силу вполне непрерывности и самосопряженности оператора *M*, порожденного матричным ядром *M(t,s)*, ортонормированная последовательность собственных вектор - функций $\{\varphi^{(\nu)}(t)\}$ полна в $L_2([a,\infty); E_n)$. Очевидно, что если $u(t) \in L_2([a,\infty), E_n)$,

то $\|u(t)\| = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, где $u^{(\nu)} = \langle u(t), \varphi^{(\nu)}(t)\rangle, \quad (\nu = 1,2,\ldots)$.

Пусть последовательность соответствующих собственных значений $\{\lambda_\nu\}$ расположена в порядке убывания их модулей.

Семейство множеств корректности, зависящее от параметра α, выделим следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{ u(t) \in L_2([a,\infty); E_n) \quad : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-\alpha} \left| u^{(\nu)} \right|^2 \leq c \right\},$$

где $c>0,\ \ 0<\alpha<\infty,\ \ u^{(\nu)} = \langle u(t), \varphi^{(\nu)}(t) \rangle, (\nu = 1,2,...)$, т.е.

$$u^{(\nu)} = \int_a^\infty \langle u(t), \varphi^{(\nu)}(t) \rangle_n dt. \tag{8}$$

Ясно, что если $u(t) \in M_\alpha$, то $\| u(t) \| \leq c\lambda_1^\alpha$.

Будем предполагать, что $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда системы (1) имеет решение $u(t) \in M_\alpha$ и справедливо

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left| \int_a^\infty \langle u(t), \varphi^{(\nu)}(t) \rangle_{E_n} dt \right|^2 = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_{E_n} dt.$$

Отсюда, используя неравенства Гельдера, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left| u^{(\nu)} \right|^2 \leq \| f(t) \| \cdot \| u(t) \|. \tag{9}$$

С другой стороны

$$\| u(t) \|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left| u^{(\nu)} \right|^{\frac{2}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \cdot \lambda_\nu^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left| u^{(\nu)} \right|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left| u^{(\nu)} \right|^2}{\lambda_\nu^\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left| u^{(\nu)} \right|^2 \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера при $p = 1+\alpha, \quad q = (1+\alpha)/\alpha.$

Учитывая $u(t) \in M_\alpha$ и (9), из последнего неравенства имеем

$$\| u(t) \|^2 \leq c^{\frac{1}{1+\alpha}} \left\langle \| f(t) \|, \| u(t) \| \right\rangle^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

отсюда получим следующую оценку устойчивости

$$\| u(t) \| \leq c^{\frac{1}{2+\alpha}} \cdot \| f(t) \|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \ 0 < \alpha < \infty. \tag{10}$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема 1. Пусть оператор *M* порожденным матричным ядром *M(t,s)* положительный, где *M(t,s)* определен по формуле (6) и (7). Тогда решение системы (1) в $L_2([a,b];E_n)$ единственно. Кроме того, на множестве $K(M_\alpha)$ $(K(M_\alpha)-$ образ M_α при отображении оператором K оператор K^{-1}, обратный к *K*, равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (10).

Решение системы уравнений

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_a^\infty K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = f(t), \quad t\in[a,\infty), \varepsilon>0 \tag{11}$$

будет регуляризирующим для системы уравнений (1) на множестве M_α.

На самом деле, сделаем следующую подстановку в системе (1)

$$u(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon),$$

где $u(t)\in M_\alpha$ - решение системы (1), получим

$$\varepsilon\,\xi(t,\varepsilon)+\int_a^\infty K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=-\varepsilon\,u(t).$$

Отсюда, учитывая (1), имеем

$$\varepsilon\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^2+\sum_{\nu=1}^\infty \lambda_\nu\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\le\varepsilon\sum_{\nu=1}^\infty\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|, \tag{12}$$

где $\xi_\nu(\varepsilon)$- коэффициенты Фурье для функции $\xi(t,\varepsilon)$, по ортонормированной системе $\varphi^{(\nu)}(t)=\{\varphi_i^{(\nu)}(t)\}$ т.е. $\xi_\nu(\varepsilon)=\langle\xi(t,\varepsilon),\varphi^{(\nu)}(t)\rangle$.

Применяя неравенство Гёльдера при $p=q=\frac{1}{2}$, из (14) получим

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|\le\left\|u(t)\right\|, \tag{13}$$

$$\sum_{\nu=1}^\infty\lambda_\nu\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\le\varepsilon\left\|u(t)\right\|^2\le\varepsilon c\lambda_1^\alpha,\varepsilon>0. \tag{14}$$

С другой стороны

$$\sum_{\nu=1}^\infty\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|=\sum_{\nu=1}^\infty\frac{\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}}\cdot\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|\xi_\nu(t,\varepsilon)\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда, после применения к правой части обобщенного неравенства Гёльдера при $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q = 2(1+\alpha)$, $m = 2(1+\alpha)$, $n = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, имеем

$$\left\| u(t,\varepsilon) - u(t) \right\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{4(1+\alpha)}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{15}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть оператор *M* порожденный матричным ядром *M(t,s)* положительный и $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда справедлива оценка (15), где $u(t,\varepsilon)$- решение системы (11), $u(t)$- решение системы (10), *M(t,s)* определен по формуле (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. // ДАН СССР. 1989. Т. 309. № 5. с. 1052-1055.
4. Asanov A., M. Haluk Chelik, Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables - International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914.HIKARI Ltd.
5. Asanov A., Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions for Certain Linear Equations of the First Kind with Two Variables- Bulletin of Peoples Friendship of Russia. Moscow, Russia- 2013, №3- C. 30-36.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Кадченко С.И.
Магнитогорский государственный технический
университ им. Г.И. Носова
455000, Магнитогорск, Челябинской обл., пр. Ленина, д. 38
Тел: +73519313654, e-mail: kadchenko@masu.ru

В работах [1], [2] был разработан численный метод вычисления собственных значений полуограниченных снизу дискретных операторов, который, по предложению автора, был назван методом *регуляризованных следов* (РС). На основе построенной теории разработан численный метод, позволяющий решать обратные спектральные задачи, порожденные дискретными полуограниченными снизу операторами заданными в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Рассмотрим задачу нахождения собственных значений оператора $T+P$

$$\Big(T+P\Big)u = \beta u,$$

где T - дискретный полуограниченный снизу оператор, P - ограниченный оператор, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Допустим, что известны собственные значения $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, которые занумерованы в порядке возрастания собственных значений μ_n по величине с учетом кратности. Обозначим через ν_n кратность собственного значения μ_n, а количество всех неравных друг другу собственных значений μ_n, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \frac{|\mu_{n_0+1}+\mu_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Пусть $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ - собственные значения оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Пусть для всех $n \in N$ выполняются неравенства $q_n = \frac{2\|P\|}{|\mu_{n+\nu_n}-\mu_n|} < 1$. Известно, что в этом случае контур T_{n_0} содержит одинаковое количество собственных значений операторов T и $T+P$ [**?**].

Теорема 1. Пусть T - дискретный полуограниченный снизу оператор, а P - ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если для всех $n \in N$ выполняются неравенства $q_n < 1$ и собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T являются базисом в H, то собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$

вычисляются по формулам:

$$\beta_n = \mu_n + (P\omega_n, \omega_n) + \widetilde{\delta}_1(n),\ n = \overline{1, m_0},$$

где $m_0 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \nu_n$, $|\widetilde{\delta}_1(n)| \le (2n-1)\rho_n \frac{q^2}{1-q}$, $\widetilde{\delta}_1(n) = \delta_1(n) - \delta_1(n-1)$.

Рассмотрим задачу восстановления потенциала P по собственным значениям $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и собственным функциям $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T и собственным значениям $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $T+P$ в гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$, где (a,b) - интервал изменения переменной s. Пусть T - дискретный полуограниченный снизу оператор, а P - ограниченный оператор умножения на функцию $p(s)$. Если для всех $n \in N$ выполняются неравенства $q_n < 1$ и собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T является базисом в $L_2(a,b)$, то согласно теореме 1 собственные значения $\{\beta_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ вычисляются по формулам:

$$\beta_n = \mu_n + \int_a^b \omega_n^2(s) p(s) ds + \tilde{\delta}_1(n),\ n = \overline{1, m_0}.$$

Рассмотрим интегральное уравнение фредгольма первого рода

$$Ap \equiv \int_a^b K(x,s)p(s)ds = f(x), \quad c \le x \le d, \tag{1}$$

где функции $f(x)$ и $K(x,s)$ такие, что

$$f(x_n) = \beta_n - \mu_n - \tilde{\delta}_1(n), \quad K(x_n, s) = \omega_n^2(s),\ c \le x_n \le d,\ n = \overline{1, m_0}.$$

Пусть ядро интегрального уравнения (1) $K(x,s)$ непрерывно и замкнуто в квадрате $\Pi = [a,b] \times [c,d]$, а функции $p(s) \in W_2^1[a,b]$ и $f(x) \in L_2[c,d]$.

Задача решения интегрального уравнения фредгольма первого рода (1) является некорректно поставленной. Ее приближенное решение может быть найдено с помощью метода регуляризации Н. А. Тихонова. Численное решение уравнения (1) будет определять значения функции $p(s)$ в узловых точках s_i, $i = \overline{1, I}$, $a = s_1 < s_2 < ... < s_I = b$. Число узловых точек I можно выбрать достаточно большим, чтобы получить хорошую точность при интерполяции функции $p(s)$.

Метод был проверен на обратных задачах для операторов типа Штурма-Лиувилля. Результаты многочисленных расчетов показали его вычислительную эффективность.

Список литературы

[1] **Дубровский, В.В.** *Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе* / В. В. Дубровский, С. И. Кадченко, В. Ф. Кравченко, В. А. Садовничий // ДАН России. — 2001. — Т. 380, № 2. — С.160–163.

[2] **Кадченко, С. И.** *Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов* / С. И. Кадченко, Л. С. Рязанова // Вести. Юж-Урал. гос. ун-та. Серия "Математическое моделирование и программирование". - 2011. - № 17 (234), вып. 8. - С. 46–51.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРОВ УПРАВЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНО ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.Н. Козлов
Санкт-Петербургский политехнический университет

Регуляризация некорректных задач необходима для обеспечения управления на основе допустимых и локально оптимальных управлений динамическими объектами, которые стабилизируются на основе операторов конечномерной оптимизации [1, 2]. Математические модели систем с операторами указанных выше типов представляются нелинейными разностными операторами в конечномерном пространстве [3].

1. Математическая модель процесса управления. Уравнения замкнутых систем локально оптимального управления *с операторами допустимых пропорциональных управлений*, представленные счетным числом нелинейных разностных уравнений, формулируются в виде [3]

$$x_{k+1} = H\Phi_x\left(x_k\right) + F_u\Phi_u\left(\Gamma T z_{k,*}\right) + F_\mu m_k =$$

$$= H\Phi_x\left(x_k\right) + F_u\Phi_u\left\{\Gamma T\left[P_A cH\Phi_x\left(x_k\right) + (2\theta-1)\tilde{P}^0 C\left|\alpha_k/\rho\right|^{1/2}\right]\right\} + F_\mu m_k,\ x_{k0} = x^0,$$

$$\Gamma = \gamma E,\ \gamma\in\ {}^{1},\ \alpha_k = r^2 - \left(b_k^i\right)^T\left(AA^T\right)^{-1}\left(b^i\right),$$

$$b_k^1 = cHx_k,\ b_k^2 = cH\Phi_x\left(x_k\right),\ \rho = C^T\tilde{P}^0 C,\ \left\|m_k\right\| \le M < \infty, \left\|m_k\right\| \to 0,\ k\to\infty. \quad (1)$$

Эти операторы формируют аналитические решения задач конечномерной минимизации или максимизации квадратичных функционалов типа нормы евклидова пространства [2, 3].

2. Регуляризация задач локально оптимального управления. *Непрерывность нелинейной части оператора управления* в (1) доказывается с учетом области определения, корректности и совместности ограничений задач оптимизации. *Непрерывность оператора по координатам* должна иметь место на пересечении области его задания и области совместности ограничений задач управления. Регуляризованное у*словие совместности* ограничений определено *областью корректности* задания нелинейной части оператора, определяемой счетным числом неравенств

$$\sigma_k = r^2 - \left(b_k^i\right)^T\left(AA^T\right)^{-1}\left(b_k^i\right) \ge 0,\ \rho = C^T\tilde{P}^0 C,\ b_k^1 = cHx_k,\ b_k^2 = cH\Phi\left(x_k\right). \quad (2)$$

Это условие определяет множество линейного пространства, в котором нелинейный оператор (1) является непрерывным, ограниченным и корректно заданным. Выполнение (2) обеспечивает корректность задания нелинейных частей операторов в (1) с помощью кусочно-линейной функции, ограничивающей значение квадратичной формы допустимым интервалом.

Тогда *регуляризованные условия* совместности ограничений имеют вид

$$\alpha_k = r^2 - \varphi(q)/\rho \geq 0, \;\; \varphi(q) = \left(b_k^i\right)^T \left(AA^T\right)^{-1} \left(b_k^i\right),$$
$$\rho = C^T \tilde{P}^0 C, \, C \neq 0, \, b_k^1 = cHx_k, \;\; b_k^2 = cH\Phi\left(x_k\right),$$
$$\varphi(q) = 0,5\left(\left| q \right| - \left| q - \tilde{r} \right| + \tilde{r}\right), \, \tilde{r} = r - \varepsilon^2, \, i = 1,2. \qquad (3)$$

Таким образом, проекционный оператор управления в уравнении (1) и регуляризацией позволяет исследовать устойчивость с учетом «регуляризующей нелинейности» $\varphi(q)$ в (3). Необходимо ограничить $C \in {}^n$ отделимостью от нуля: $C \notin D_\varepsilon = \left\{C \,\middle|\, \| C \| \leq \varepsilon^2 \right\}$. Это обеспечивает корректное управление, гарантирует положительность α_k/ρ квадратного корня в (2).

Условия устойчивости, полученные на основе принципа сжимающих отображений с регуляризованным оператором неравномерного сжатия, представляются оценкой параметра обратной связи в виде неравенства [2, 3]

$$|\gamma| < \left(1 - \|H\|\right) \cdot \left[\|F\| \cdot \|T\| \left(\|P_A\| \cdot \|c\| \cdot \|H\| + 2r\rho^{-1}|2\theta - 1| \cdot \left\|\tilde{P}^0\right\| \cdot \|C\| \cdot \|c\|^2 \cdot \|H\|^2 \cdot \|D\|\right)\right]^{-1} =$$

$$= \left(1 - \|H\|\right) \cdot \left[\|F\| \cdot \|T\| \left(\alpha + 2\alpha^2 r\rho^{-1}|2\theta - 1| \cdot \left\|\tilde{P}^0\right\| \cdot \|C\|\right)\right]^{-1}, \qquad (4)$$

где $\alpha = \|P_A\| \cdot \|c\| \cdot \|H\|, \; D = P_A^T P_A, \; \|D\| = \|P_A\|^2 = \left\|\left(AA^T\right)^{-1}\right\|.$

Таким образом, регуляризация для больших отклонений состояний приводит к динамике системы с ограниченными ресурсами, которые проявляются при различных параметрах ограничений на состояния и ресурсы управлений. Необходимо учитывать сбалансированные параметры ограничений и ресурсов, локальность или интервальность оптимизации, что является важным фактором для сохранения асимптотической устойчивости или диссипативности системы при $\|m_k\| \to 0, \, k \to \infty.$ [3]. Доказательство указанных условий использует принцип сжимающих отображения, теорему Банаха-Штейнгауса о равномерной ограниченности норм операторов Фреше, локально адекватных оператору (1), оценки квадратичных форм.

Литература

1. Козлов В. Н. Операторы минимизации линейных и негладких функционалов на компактных множествах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, N 1(165), 2013. С. 164-170.

2. Козлов В. Н. Операторы минимизации нормы на компактных множествах евклидова пространства // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки, N 3 (167), 2013.

30. Козлов В. Н. Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость. Изд-во Политехн. ун-та. СПб.: 2012.- 190 с.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ КОЛЕБАНИЙ В ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Криворотько О.И.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

630090, Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 6

Новосибирский государственный университет

630090, Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2

Тел.: 89833033083, e-mail: krivorotko.olya@mail.ru

В докладе рассматриваются задачи определения источников колебаний в приближении мелкой воды по двум типам измерений: (1) дискретным данным внутри рассматриваемой области [1] и (2) непрерывным данным на времениподобной поверхности [2]. В общем случае задачи определения источников колебаний могут быть сведены к виду $Aq = f$, где A - оператор (или матрица) обратной задачи, q - функция (или вектор) источников, f - функция (или вектор) данных. В случае компактного оператора A задача является некорректной [3]. Исследовать степень некорректности задачи $Aq = f$ позволяют сингулярные числа оператора A, поиск которых, в общем случае, является сложной задачей [4]. В докладе будет изложен метод сингулярного разложения оператора A и его применение к регуляризации обратных некорректных задач 1 $A_1q = f_1$ и 2 $A_2q = f_2$. Здесь f_1 и f_2 - измерения (1) и (2) типов, соответственно. Еще одним важным этапом регуляризации обратных задач 1 и 2 является исследование совмещенной обратной задачи, в которой одновременно используются данные обратной задачи 1 и обратной задачи 2. В работе показано, что совместное использование двух типов дополнительной информации повышает эффективность и точность решения обратной задачи восстановления источника возмущения водной поверхности [5].

Решения обратных задач 1 и 2, а также совмещенной обратной задачи для уравнений мелкой воды получены с помощью метода сопряженных градиентов. Данные, используемые в работе, могут быть получены с глубоководных станций DART для первой задачи и при помощи спутниковых измерений для второй задачи.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации, грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-5666.2014.5 и грантом РФФИ № 12-01-00773.

Литература

1. Kabanikhin S., Hasanov A., Marinin I., Krivorotko O., Khidasheli D. A variational approach to reconstruction of an initial tsunami source perturbation. *Applied Numerical Mathematics,* Elsevier. – 2014. – V. 83. – P. 22-37.
2. Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Nurseitov D.B., Krivorotko O.I., Alimova A.N. An optimization method in the Dirichlet problem for the wave equation. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. – 2012. – V. 20, N. 2. – P. 193-211.
3. Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи*. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.
4. Кабанихин С.И., Криворотько О.И. *Сингулярное разложение в некорректных задачах*. Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2014. – 218 с.
5. Kabanikhin S., Krivorotko O. Optimization approach to combined inverse tsunami problem. *Proceedings of the International Conference "Inverse Problems – from Theory to Application" (IPTA 2014), 26-28 August 2014, Bristol, UK.* – 2014. – P. 102-107.

НОВЫЕ УСТОЙЧИВЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ СПЕКТРОСКОПИИ ДЛЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г.М.Курамшина[a], А.Г.Ягола[b]

[a]*МГУ имени М.В. Ломоносова, химический факультет, кафедра физической химии*

119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, д.1, стр.3, Химический факультет

Тел.: +7(495)939-29-50, e-mail: kuramshi@phys.chem.msu.ru

[b]*МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики*

119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, д.1, стр.2, Физический факультет

Тел.: +7(495)939-10-33, e-mail: yagola@physics.msu.ru

При решении обратных задач, возникающих при обработке молекулярных спектров биологических молекул, в частности, при решении обратной колебательной задачи определения молекулярного силового поля по экспериментальным данным, помимо проблем, относящихся к некорректности математической задачи, возникает ряд трудностей. Проблемы связаны с высокой размерностью задач, так как биологические молекулы могут включать от десятков до сотен и тысяч атомов, и необходимостью учета сложного конформационного состава рассматриваемых систем, наличия дополнительных связей из-за внутримолекулярных и межмолекулярных взаимодействий и т.д.

Предложенные в наших работах устойчивые алгоритмы для решения обратной колебательной задачи в рамках теории регуляризации нелинейных некорректных задач [1-5] позволяют в явной форме учитывать специфику сложных биологических систем путем включения различных ограничений на структуру матрицы силовых постоянных на основе анализа результатов квантово-химических расчетов. Созданные в данной работе новые алгоритмы расчета силовых полей многоатомных молекул в декартовых системах координат позволяют решить проблемы, связанные с неоднозначностью выбора систем обобщенных координат при анализе силовых полей сложных молекулярных систем. Эти алгоритмы ранее успешно использованы для решения обратных задач нахождения регуляризованных квантово-химических силовых полей в декартовых координатах для ряда биологически важных соединений - нуклеиновых кислот (глутаминовой кислоты [6], аденина, гуанина, цитозина, и др. [7]), а также производных мелатонина с пептидной связью [8] и производных бензимидазола [9].

Мелатонин – нейрогормон, синтезируемый в организме из аминокислоты триптофана, присутствует во всех живых системах и играет огромную роль в различных биологических и физиологических регуляторных процессах (рис.1). Особое место занимает антиокислительная способность мелатонина, а также то, что продукты, образующиеся при его метаболизме, также являются антиоксидантами, т.е. катаболитами или природно возникаюшими метаболитами. Важнейшими катаболитами являются N-гамма-ацетил-N-формил-5-метоксикинуренамин (АФМК) и N-гамма-ацетил-5-метоксикинуренамин (АМК), представляющие собой вещества с мелатониноподобной активностью по отношению к контролю биологических ритмов.

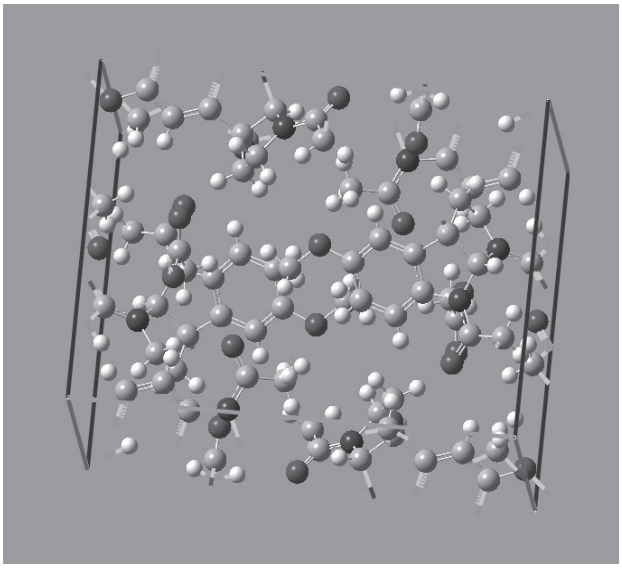


Рис. 1. Структура мелатонина.

Среди различных физико-химических методов, применяемых для определения мелатонина и продуктов его окисления в клинических исследованиях, методы колебательной спектроскопии занимают особое место, поскольку обладают высокой информативностью, сравнительной простотой применения и позволяют находить характеристические частоты колебаний и другие специфические спектральные характеристики, использующиеся для идентификации и анализа строения соединений, участвующих в биологических процессах. В данной работе рассматривались задачи обработки экспериментальных спектральных данных мелатонина и продуктов его окисления с целью определения положений в молекулах, наиболее чувствительных к изотопозамещению (изотопных меток).

Работа поддержана грантами РФФИ 14-03-00929а, 14-01-00182а.

Литература

1. Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Пентин Ю.А., Ягола А.Г. ДАН СССР. - 1985, т. 283, N 4, с. 850-854.
2. Доставалова А.С., Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Ягола А.Г. ДАН СССР. - 1990, т. 315, N 6, с. 1368-1373.
3. Yagola A.G., Kochikov I.V., Kuramshina G.M., Pentin Yu.A. Inverse Problems of Vibrational Spectroscopy. VSP. Zeist. The Netherlands, 1999.
4. Kuramshina G.M., Weinhold F.A., Kochikov I.V., Pentin Yu.A., Yagola A.G. J. Chem. Phys. 1994, vol. 100, N 2, p. 1414-1424.
5. I.V.Kochikov,G.M.Kuramshina,A.V.Stepanova . International Journal of Quantum Chemistry, Volume 109, Issue 1, p. 28-33, 2009.
6. Доценко Г. С., Курамшина Г. М., Пентин Ю. А. Журнал физической химии, 2010, т. 84(7) , 1304-1314.
7. G.M. Kuramshina, S.A. Sharapova, D.A. Sharapov. Regularized quantum mechanical molecular force fields of purine and its derivatives. In 19th Conference on Current trends of computational chemistry, Oct. 29-30, 2010, Jackson, Miss., Proceedings, p.78-79.
8. О.А.Вакула, Н.И.Вакула, Г.М.Курамшина, Ю.А.Пентин. Журнал физической химии, 2013, т. 87, №9 с. 1538-1548.
9. . И.Б.Давыдова, В.М.Сенявин, О.Н.Зефирова, Г.М. Курамшина, Ю.А. Пентин.
   Журнал физической химии, том 88, № 4, с. 657-666, 2014.

ЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Леонов А.С.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

115409, Москва, Каширское ш., д. 31

e-mail: asleonov@mephi.ru

1. Пусть Z и U нормированные пространства, а $F:Z\to U$ – непрерывный (в общем случае, нелинейный) оператор. Рассмотрим операторное уравнение $F(z)=u$. Считаем, что для правой части $u\in U$ оно разрешимо. Нас интересует его решение $\bar{z}\in Z$ с минимальной нормой (нормальное решение). Величина u известна с погрешностью δ, т.е. дана такая правая часть $u_\delta\in U$, что $\|u-u_\delta\|\le\delta$. Для задачи нахождения по данным (F,u_δ) приближения $z_\delta\in Z$ к $\bar{z}$ применим регуляризующие алгоритмы (РА). Они могут быть записаны в форме $z_\delta=R_\delta(u_\delta)$, где R_δ – некоторый оператор, действующий из U в Z. В теории обратных и некорректно поставленных задач принята следующая схема получения априорной оценки точности приближения z_δ. Фиксируется некоторое множество M, $M\subset Z$, содержащее точное нормальное решение $\bar{z}$, и вводится величина

$$\Delta_M(\delta)=\sup\left\{\|R_\delta(u_\delta)-z\|: z\in M, u_\delta\in\Sigma_\delta(F,z)\right\}.$$

Здесь $\Sigma_\delta(F,z)=\left\{u_\delta\in U:\ \|u_\delta-F(z)\|\le\delta\right\}$ – множество всех допустимых приближенных данных уравнения $F(z)=u$. Далее, находится функция $\varphi_M(\delta)$ такая, что $\Delta_M(\delta)\le\varphi_M(\delta)$. Тогда $\|z_\delta-\bar{z}\|\le\varphi_M(\delta)$, и функция $\varphi_M(\delta)$ есть искомая априорная оценка, которая будет верна для любого точного решения $\bar{z}$ из множества M. Пример применения такой схемы – случай, когда Z,U – гильбертовы пространства, $F=A$ – линейный вполне непрерывный инъективный оператор. Для этого случая известны априорные, оптимальные по порядку точности, оценки на множествах вида $M=\left\{z=|A|^p v:\ v\in Z, \|v\|\le r\right\}$:

$$\|z_\delta-\bar{z}\|\le C(r,p)\delta^{\frac{p}{p+1}},\ C(r,p)=\text{const}. \tag{1}$$

Здесь $|A|^p=\left(A^*A\right)^{p/2}$, а $p>0$ – заданное число. Сравним это со случаем линейного ограниченного нормально разрешимого оператора A. Тогда задача вычисления нормального решения уравнения $Az=u$ с возмущенным оператором $A_h:Z\to U$: $\|A_h-A\|\le h$, является в общем случае некорректно поставленной, а в случае точно заданного ($h=0$) нормально разрешимого оператора A – корректной (устойчивой) задачей. Для таких операторов A известны РА с приближенными решениями $z_{h\delta}$, которые оптимальны по порядку точности на множестве $M=Z$, причем оценка точности имеет вид

$$\|z_\delta-\bar{z}\|\le C_0(\delta+h),\ C_0=\text{const}. \tag{2}$$

Оценка (2) принципиально отличается от (1): она по порядку сравнима с погрешностями данных h,δ. Будем называть оценки вида (2) на множестве M *линейными оценками* (по δ и h). В докладе изучается вопрос о том, для каких обратных задач вида $F(z)=u$ и каких множеств M найдутся приближенные решения z_δ, имеющие линейную оценку точности $O(\delta)$. Указывается также, как найти такие приближенные решения. Докладываемые результаты являются продолжением работ [1,2].

2. Центральный результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть уравнение* $F(z)=u$ *имеет единственное решение* $z\in M$ *для каждой правой части* $u\in F(M)$. *Если выполнена линейная оценка* $\Delta_M(\delta)\le C(M)\delta$, $C(M)=\mathrm{const}>0$, *то на множестве* M *обратная задача корректна по Тихонову, причем*

$$\|z_1-z_2\|\le 2C(M)\|F(z_1)-F(z_2)\|,\ \forall z_{1,2}\in M\,. \tag{3}$$

Из теоремы 1 ясно, что для получения линейной оценки при решении уравнения $F(z)=u$ нужно выбрать адекватное множество корректности M и решать обратную задачу на нем. Такой подход был предложен в известной статье А.Н.Тихонова (ДАН СССР, 1943) и затем развивался многими авторами. Однако, вопрос о линейных оценках в этих работах не ставился.

3. По теореме 1, необходимым условием выполнения линейной оценки является неравенство (3). Оно справедливо с $C(M)=\nu^{-1}/2$, если взять

$$\nu=\inf\left\{\frac{\|F(z_1)-F(z_2)\|}{\|z_1-z_2\|}:\ z_{1,2}\in M\right\}>0\,.$$

Вычислив $\nu>0$, можно найти приближение $z_\delta\in M$ к решению $\bar z\in M$ и оценку его точности с помощью *метода невязки на множестве корректности* (МНМК), в котором $z_\delta\in M$ находится из неравенства $\|F(z_\delta)-u_\delta\|\le d\delta,\ d=\mathrm{const}>1$. Такой элемент существует.

Теорема 2. *Пусть найдено* $\nu>0$. *Тогда для приближенного решения* $z_\delta\in M$ *, полученного с помощью МНМК, справедлива линейная оценка точности* $\|z_\delta-\bar z\|\le\dfrac{1+d}{\nu}\delta$.

4. Результаты п.п. 2, 3 уточняются и конкретизируются в докладе для случая линейного уравнения $Az=u$ с приближенно заданным оператором (см.[1]).

5. Предлагаемая методика получения линейных оценок иллюстрируется численными примерами решения обратных задач..

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 14-01-00182-а и 14-01-91151-ГФЕН-а.

Литература

1. Леонов А. С. Может ли априорная оценка точности приближенного решения некорректной задачи быть сравнимой с ошибкой данных? // Журн. выч. мат. и мат. физ., 2014, Т. 54, № 4, с. 562–568.

2. Leonov A.S. Linear estimates of accuracy for approximate solutions of inverse problems // Applicable Analysis, 2014. http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2014.910887

HOW TO TAKE INTO ACCOUNT THE ROUND-OFF ERRORS IN SOLVING MULTIDIMENSIONAL ILL-POSED PROBLEMS

Dmitry Lukyanenko

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,

Department of Mathematics

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University,

Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

Solving multidimensional ill-posed problems has attracted wide interests and found many practical applications. However, most modern applications require processing a large amount of data that often is very difficult to perform on personal computers. In these cases usually different methods are applied for simplification of the problems statement but these simplifications degrade the accuracy of the inverted parameters.

It was shown [1,2] by example of solving multidimensional Fredholm integral equation of the 1st kind that using parallel computing gives us an advantage in time and accuracy. Nevertheless, when we are able to use supercomputers at our usual scientific researches and when we are able to process a huge amount of data we can encounter another problem – a round-off error that grows with increasing amount of computations can significantly affect the final result of calculations.

Several recent results will be presented on the study of this problem.

This work was supported by RFBR, project No. 14-01-31201, and by the Supercomputing Center of Lomonosov Moscow State University [3].

References

1. D.V.Lukyanenko and A.G.Yagola, *Using parallel computers for solving multidimensional ill-posed problems*, Computational Methods for Applied Inverse Problems, Inverse and Ill-Posed Problems Series, de Gruyter (Germany), Vol.56, 49-64, 2012.

2. D.V.Lukyanenko, A.G.Yagola, N.A.Evdokimova, *Application of inversion methods in solving ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel*, J. Inverse and Ill-Posed Problems, Vol.18, No.9, 1013-1029, 2011.

3. V. Sadovnichy, A. Tikhonravov, Vl. Voevodin, V. Opanasenko *"Lomonosov": Supercomputing at Moscow State University. In Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale* (Chapman & Hall/CRC Computational Science), pp.283-307, Boca Raton, USA, CRC Press, 2013.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Меньшиков Ю. Л.

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара

Украина, Днепропетровск, 49010, проспект Гагарина72

Тел.: +38067 565 8332, e-mail: Menshikov2003@list.ru

Среди множества обратных задач можно выделить некоторый класс задач, которые имеют ряд отличительных особенностей. К таким задачам, например, можно отнести обратные задачи синтеза адекватного математического описания физических процессов, например [1,2,3]. После решения задачи синтеза адекватного математического описания результаты исследований можно использовать для прогноза поведения физического процесса методами математического моделирования [4]: в прогнозировании поведения различных технических устройств [5], прогноза погоды [6] и т.д.

Математическое описание физического процесса состоит из математической модели физического процесса и модели внешнего воздействия. В данной работе исследуются математические модели физических процессов в форме линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Хорошо известно, что обратные задачи синтеза могут быть сведены в нашем случае к решению линейных операторных уравнений первого рода [1,2,3]:

$$A_p z = u, \tag{1}$$

где A_p вполне непрерывный оператор, $A_p : Z \to U$, $z \in Z$, $u_\delta \in U$, u_δ– исходные экспериментальные данные (графические), z – неизвестная функция, (Z, U – функциональные пространства).

Далее будем считать, что элемент u_δ в уравнении (1) задается с известной ошибкой:

$$\| u_\delta - u_{ex} \|_U \le \delta,$$

где δ – константа, $\delta > 0$, u_{ex} – точные исходные данные.

Обозначим через $Q_{\delta,p}$ множество:

$$Q_{\delta,p} = \{ z : \| A_p z - u_\delta \|_U \le \delta \}.$$

Множество $Q_{\delta,p}$ является неограниченным при любом δ. Однако начальная математическая модель физического процесса и любая функция из множества $Q_{\delta,p}$ обеспечивает адекватность результатов математического моделирования с точностью δ. Кроме того, точное решение z_{ex} уравнения (1) может не принадлежать множеству возможных решений уравнения (1) $Q_{\delta,p}$, так как оператор A_p неточно описывает реальный физический процесс [1,2,3].

В силу этого обратные задачи синтеза имеют ряд специфических особенностей:

- приближенное решение может значительно отличаться от точного решения z_{ex};
- размер погрешности приближенного решения по отношению к точному решению z_{ex} не имеет никакого значения для дальнейшего использования приближенного решения для целей прогнозирования;
- точное решение z_{ex} обратной задачи в совокупности с начальной математической моделью физического процесса может давать худшие результаты математического моделирования для целей прогнозирования, так как точное решение z_{ex} может не принадлежать множеству возможных решений $Q_{\delta,p}$;
- можно игнорировать ошибку оператора A_p по отношению к точному оператору, так как именно начальная математическая модель физического процесса будут использоваться при математическом моделировании в дальнейшем;
- нет смысла изучать поведение приближенного решения обратной задачи в зависимости от уменьшения погрешности исходных данных δ. Другими словами, приближенное решение может не иметь свойства регуляризованного решения.

Для определения единственного устойчивого решения обратной задачи (1) из множества возможных решений можно использовать подход, который был предложен Филлипсом и Тихоновым [7].

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\Omega[z_{\delta_k,p}] = \inf_{z \in Q_{\delta,p} \cap Z_1} \Omega[z], \tag{2}$$

где функционал $\Omega\,[z]$ определен на множестве Z_1 (Z_1 всюду плотно в Z) [7].

Было показано, что при определенных условиях решение экстремальной задачи (2) существует, единственно и устойчиво по отношению к малым изменением исходных данных u_δ [7]. Следует отметить, что нет смысла исследовать поведение полученного решения при $\delta \to 0$.

Литература

[1] Yu. Menshikov, Synthesis of Adequate Mathematical Description as Solution of Special Inverse Problems // European Journal of Mathematical Sciences, v. 2, No 3, 2013, pp. 256-271.

[2] Yu. Menshikov, Inverse problems for dynamic systems: classification and solution methods // Journal Advances in Pure Mathematics, v. 3, No 4, 2013, pp. 390-393.

[3] В.С.Спепашко, Метод критических дисперсий как аналитический аппарат теории индуктивного моделирования // Проблемы управления и информатики. –2008, –№2.– С.8-26.

[4] E. Barbosa, L. Goes, W. Filho, Control problem analysis using inverse simulation applied to the Brazilian satellite launcher during first and second stage of flight // 4-th Inverse Problems, Design and Optimization Symposium, Book of Abstracts, Albi, France, 2013, pp. 63-64.

[5] D. Thomson, R. Bradley, Inverse simulation as a tool for flight dynamics research – Principles and applications // Elsevier, Progress in Aerospace Sciences, 42, 2006, pp. 174-210.

[6] A. Chedin, N. Scott, C. Wahicle, P. Moulini, The improved initialization inversion method: A high resolution physical method for temperature retrievals from TIROS-N series // Climate Appl. Meteor., B.24, 1985, pp.128-143.

[7] А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, Методы решения некорректных задач, Москва, Наука, 1979.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Муфтахов И.Р.

Иркутский государственный технический университет

664074, Иркутск, ул. Лермонтова, 83

Тел.: 89140081060, e-mail: ildar_sm@mail.ru

При построении ряда математических моделей применяются интегральные уравнения Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами. В докладе рассматривается построение численного решения для таких уравнений в случае, когда ядро содержит искомую функцию.

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t K(t,s,x(s))ds = f(t), 0 \le s \le t \le T, f(0) = 0, \quad (1)$$

где

$$K(t,s,x(s)) = \begin{cases} K_1(t,s)G_1(s,x(s)), t,s \in \overline{m_1} \\ \dots \\ K_n(t,s)G_n(s,x(s)), t,s \in \overline{m_n} \end{cases}, \quad (2)$$

$m_i = \{t,s | \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}$, $\alpha_0(t) = 0$, $\alpha_n(t) = t$, $i = \overline{1,n}$, функции K_i, $f(t)$, $\alpha_i(t)$ имеют непрерывные производные по t при $t,s \in \overline{m_i}$, $K_n(t,t) \neq 0, \alpha_i(0) = 0,\ 0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$, функции $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ возрастают в малой окрестности $0 < t < \tau$.

Теорема. *Пусть при* $t \in [0,T]$ *выполнены условия:* $K_i(t,s), i = \overline{1,n}$ *- непрерывны,* $\alpha_i(t)$ *и* $f(t)$ *имеют непрерывные производные по* t, $K_n(t,t) \neq 0,\ 0 < \alpha_1(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < \alpha_n(t) = t$, *при* $t \in [0,T]$, $\alpha_i(0) = 0$, $f(0) = 0$. *Пусть кроме того выполнено условие Липшица:* $|G_i(s,x_1) - G_i(s,x_2) - (x_1 - x_2)| \le q_i|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in R^1$

$q_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i{}'(0)\left|K_i{}^{-1}(0,0)\left(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)\right)\right|(1 + q_i) < 1$. *Тогда* $\exists \tau > 0$ *такое, что уравнение (1) имеет единственное локальное решение. Более того, если* $min_{\tau \le t \le T}\big(t -$ *αn−1t=h>0, то такое локальное решение можно непрерывно продолжить на всю область определения исходных данных* $[\tau, T]$ *комбинацией метода шагов и последовательных приближений. Тогда существует единственное решение на интенрвале [0,T].*

Для построения численного решения уравнения (1) введем сетку узлов на отрезке $[0,T]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T], h = max_{i=\overline{1,N}}(t_i - t_{i-1}) = O(N^{-1}). \quad (3)$$

Следуя [2], приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = \sum_{i=1}^n x_i \delta_i(t), t \in (0,T], \delta_i(t) = \begin{cases} 1, t \in \Delta_i = (t_{i-1}, t_i] \\ 0, t \notin \Delta_i \end{cases} \quad (4)$$

с неопределенными коэффициентами $x_i, i = \overline{1,N}$. Пусть известны коэффициенты $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ приближенного решения. Тогда уравнение (1) в точке $t = t_k$, может быть переписано следующим образом

$$\sum_{j=1}^{v_{1,k-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K_1(t_k,s)G_1(s,x(s))ds + \int_{t_{v_{1,k-1}}}^{\alpha_1(t_k)} K_1(t_k,s)G_1(s,x(s))ds + I_p +$$

$$+\int_{\propto_{n-1}(t_k)}^{t_{v_{n-1,k}}} K_n(t_k,s)G_n\big(s,x(s)\big)ds + \sum_{j=v_{n-1,k+1}}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K_n(t_k,s)G_n\big(s,x(s)\big)\,ds = f(t_k),$$

где $v_{i,j}$ обозначает номер сегмента сетки, внутрь которого попадает значение $\propto_i\ (t_j)$.
Если $v_{p-1,k} \neq v_{p,k}, p = 2, \dots, n-1$, тогда

$$I_p = \int_{\propto_{p-1}(t_k)}^{t_{v_{p-1,k}}} K_p(t_k,s)G_p\big(s,x(s)\big)ds +$$

$$+\sum_{j=v_{p-1,k+1}}^{t_{v_{p,k-1}}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K_p(t_k,s)G_p\big(s,x(s)\big)ds + \int_{t_{v_{p,k-1}}}^{\propto_p(t_k)} K_p(t_k,s)G_p\big(s,x(s)\big)ds$$

если $v_{p-1,k} = v_{p,k}, p = 2, \dots, n-1$, тогда

$$\mathrm{I_p} = \int_{\propto_{p-1}(t_k)}^{\propto_p(t_k)} \mathrm{K_p}(t_k,s)\mathrm{G_p}\big(s,x(s)\big)ds.$$

Т.к. искомая функция уже определена при $t \leq t_{k-1}$, то ее неизвестное значение появляется только в нескольких последних слагаемых. Для его выражения в таких случаях используем метод Ньютона для решения нелинейного уравнения. Каждый интеграл аппроксимируется по формуле средних прямоугольников. Расчеты на модельных примерах показали, что погрешность метода имеет порядок *O(1/N)*.

Автор выражает благодарность доценту Сидорову Д.Н. за постановку задачи и внимание.

Литература

1. Сидоров Д.Н., Тында А.Н., Муфтахов И.Р. Численное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами // Вестник ЮУрГУ. – 2014. – Т. 3, № 7. – С.107-115.
2. Маркова Е.В., Сидоров Д.Н. Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами в теории моделирования развивающихся систем // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 2. – С.31-45.
3. Sidorov D.N. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control // World Scientific Publ. Series on Nonlinear Sciences. Series A. – 2014. Vol. 87.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ТРЕХСЛОЙНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ

Раевский Д.Н.

Институт Физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН

123995, Москва, Б. Грузинская ул., д. 10, стр. 1

Тел.: 89852632817, e-mail: nofirma2010@mail.ru

Обратные задачи гравиметрии делятся на линейные и нелинейные. Если требуется найти распределение плотности по известному гравитационному полю или его производным, то имеем дело с линейной обратной задачей. Если же требуется определить носитель масс, то имеет место нелинейная обратная задача.

Гравиразведка является одним из методов детального изучения геологического строения коры и верхней мантии Земли. Высокочувствительные приборы позволяют выявлять очень слабые гравитационные аномалии что дает возможность применять этот метод для решения задач поиска нефти и газа. В последние годы, в связи с непрерывным и интенсивным развитием персональной компьютерной техники, методы обработки и интерпретации данных разнообразных геофизических исследований заметно изменились. С увеличением точности измерений возрастает влияние помех и осложнений, затрудняющих геологическое истолкование результатов гравиразведки. Так, при решении сложно структурированных задач, когда геологические объекты имеют разные форму и размеры, возникающие погрешности при интерпретации могут сильно исказить результат и не дать необходимой интерпретатору информации.

Метод S-аппроксимаций, основанный на методе линейных интегральных представлений, предложенный В. Н. Страховым [1-4], является одним из наиболее эффективных методов интерпретации данных гравиразведки. В этом методе основная вычислительная проблема состоит в нахождении устойчивого приближенного решения $\hat{x}$, согласованного с имеющейся априорной информацией, системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) виду

$$\mathbf{A}x = f_\delta = f + \delta f, \qquad (1)$$

где f_δ – N-вектор заданных величин, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T > 0$ - $N\times N$-матрица, f суть вектор полезного сигнала, а δf – помеха. Априорная информация задается в знании величин $\delta^2_{\min}$, $\delta^2_{\max}$, фигурирующих в неравенстве:

$$\delta^2_{\min} \le \|\delta f\|^2_E \le \delta^2_{\max}. \qquad (2)$$

В задачах геофизики такая система имеет большую ($N = 10^3 \div 10^4$) и даже сверхбольшую ($N = 10^4 \div 10^5$) размерность. В связи с этим требуется создание и совершенствование итерационных методов, имеющих относительно невысокую вычислительную сложность, а также устойчивых к возникающим при решении ошибкам. Вдобавок к этому, обратные задачи геофизики являются некорректно-поставленными и требуют разработки специальных итерационных методов.

Автором разработан и апробирован итерационный метод, основанный на регуляризации трехслойного итерационного метода Чебышева. Как известно, одно из самых замечательных свойств многочленов Чебышева первого рода состоит в том, что они наименее отклоняются на отрезке [-1,1] [5,6]. Однако, скорость сходимости напрямую зависит от свойств матрицы, а свойства матриц, получаемых при решении обратных задач геофизики, являются очень плохо обусловленными. К тому же, полученное решение должно быть физически адекватным для рассматриваемой области и учитывать имеющуюся априорную информацию (2).

Алгоритм метода можно описать следующим образом: пусть задан следующий функционал $\Omega(x) = (\mathbf{S}x, x), \mathbf{S} = \mathbf{S}^T > 0$, задающий отношение предпочтения множества приближенных решений СЛАУ (1). Тогда регуляризованная СЛАУ определяется соотношением

$$(\alpha\mathbf{S} + \mathbf{A})x_\alpha = f_\delta, \tag{3}$$

где α – параметр регуляризации, и устойчивое приближенное решение определяется равенством $\hat{x} = x_{\alpha_\delta}$, где α_δ есть то значение α, при котором выполняется неравенство:

$$\delta_{\min}^2 \le \left\|\mathbf{A}x_\alpha - f_\delta\right\|_E^2 \le \delta_{\max}^2. \tag{4}$$

Система (3) решается при помощи трехслойного итерационного метода Чебышева. Допустим, мы нашли $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_L$ решений. Из них отбираются те, которые минимизируют следующий функционал

$$\left(\left\|\mathbf{A}\hat{x} - f_\delta\right\|_E^2 - \delta_{\min}^2\right)^2 + \left(\left\|\mathbf{A}\hat{x} - f_\delta\right\|_E^2 - \delta_{\max}^2\right)^2 + \Omega^2(\hat{x}) + \left(\left\|\mathbf{A}\hat{x} - f_\delta\right\|_E^2 - \left\|\mathbf{A}\hat{x}\right\|_E^2 + \left\|f_\delta\right\|_E^2\right) = \min_\alpha. \tag{5}$$

Хорошо известно, что при таком подходе требуется перебрать достаточно большое количество значений параметра α, что серьезно увеличивает время расчета. Однако, автором показано, что, опираясь на получаемый квадрат нормы вектора невязки $\left\|\mathbf{A}x_\alpha - f_\delta\right\|_E^2$ и на известные величины $\delta_{\min}^2$, $\delta_{\max}^2$, если норма невязки не возрастает, то можно выбрать параметр α таким образом, что итерационный процесс сходится достаточно быстро.

Данный метод апробирован на ряде модельных примерах и проведен сравнительный анализ с регуляризованным методом Холецкого и методом Лаврентьева, описание которых можно найти в [7].

Литература.

1. Страхов В.Н., О построении аналитических аппроксимаций аномальных гравитационных и магнитных полей, Основные проблемы теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, М. ОИФЗ РАН, 1999, с. 65-125.
2. Страхов В.Н., Степанова И.Э, Метод S- аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант), Физика Земли № 2. 2002. С. 3-19.
3. Страхов В.Н., Степанова И.Э, Метод S- аппроксимаций при решении задач гравиметрии (региональный вариант), Физика Земли № 7. 2002. С. 3-12.
4. Страхов В.Н., Страхов А.В., Степанова И.Э., Актуальные проблемы геофизики и геоинформатики, М. ОИФЗ РАН, 2004.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С., Методы решения сеточных уравнений, М. Наука, 1978.
6. Пашковский С., Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева, М. Наука, 1983.
7. А.Г. Ягола, Ван Янфей, И.Э. Степанова, В.Н. Титаренко, Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике, М. БИНОМ, 2014.

BORG-LEVINSON THEOREM FOR ELLIPTIC OPERATORS

Serov V.S.

University of Oulu, Department of Mathematical Sciences, Finland

P.O. Box 3000, FIN-90014, Oulu, Finland

+358503506861, email:valeri.serov@oulu.fi

The subject of this work concerns to the classical inverse spectral problem. Do the Dirichlet eigenvalues and some derivatives of the normalized eigenfunctions at the boundary determine uniquely the coefficients of the corresponding differential operator? For operators of order 2 this type of theorem is called Borg-Levinson theorem. In the case of the Schrodinger operators the knowledge of the Dirichlet eigenvalues and the normal derivatives of the normalized eigenfunctions at the boundary uniquely determine unknown potential (see Nachman, Sylvester and Uhlmann [1]). For the magnetic Schrodinger operator with singular coefficients Borg-Levinson theorem was proved for the first time by Serov [2] (see also [3]). For the operator of order 4 which is the first order perturbation of the bi-harmonic operator with Navier boundary conditions on a smooth bounded domain it was proved by Krupchyk, Lassas and Uhlmann [4] that the Dirichlet-to-Neumann map uniquely determines this first order perturbation. For Riemannian manifolds Borg-Levinson theorem was proved by Kachalov, Kurylev and Lassas (they call this problem as the Gelfand inverse problem for quadratic pencil) in series publications [5], [6]. For elliptic operators with constant coefficients and with potential see Ikehata [7] and Krupchyk and Paivarinta [8].

The main goal of present work is to show that the knowledge of the discrete Dirichlet spectrum and some special derivatives up to the third order of the normalized eigenfunctions at the boundary uniquely determine the coefficients of the operator of order 4 which is the second order perturbation of the bi-harmonic operator.

References

1. Nachman A., Sylvester J., Uhlmann G. An n-dimensional Borg-Levinson theorem // -- Comm. Math. Phys. (1988), **115**, p. 595-605.
2. Serov V.S. Borg-Levinson theorem for magnetic Schrodinger operator // – Bull. Greek Math. Soc. (2010), **57**, p. 321–332.
3. Krupchyk K., Uhlmann G. Uniqueness in an inverse boundary value problems for a magnetic Schrodinger operator with a bounded magnetic potential // – Comm. Math. Phys. (2014), **327**, p. 995–1009.
4. Krupchyk K., Lassas M., Uhlmann G. Inverse boundary value problems for poly-harmonic operator // – Trans. Amer. Math. Soc. (2014), **366**, p. 95-112.
5. Kachalov A., Kurylev Y., Lassas M. Inverse boundary spectral problems // -- Chapman Hall/CRC, 2001.
6. Kurylev Y., Lassas M. Gelfand inverse problem for a quadratic operator pencil // -- J. Funct. Anal. (2000), **17**, p. 247-263.
7. Ikehata M. A special Green's function for the bi-harmonic operator and its application to the boundary value problem // -- Computers Math. Appl. (1991), **22**, p. 53-66.
8. Krupchyk K., Paivarinta L. A Borg-Levinson theorem for higher order elliptic operators, Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), **6**, p. 1321-1351.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛАСТОГРАФИИ

Шаров А.Н.

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, д.1, стр.2, Физический факультет

Тел.: +7(495)939-10-33, e-mail: scharov.aleksandr@physics.msu.ru

За последние 10 – 15 лет в онкологии сформировалась новая наука – эластография (см., например, [1]). При эластографических процедурах на изучаемую ткань дополнительно к ультразвуковому исследованию (УЗИ) накладывается низкочастотное давление. Известно, что здоровые и опухолевые ткани сокращаются по-разному. Это позволяет определить наличие и форму опухоли, даже если плотность опухоли не отличается от плотности здоровой ткани – случай, в котором обычный ультразвук бессилен. В этом состоит преимущество эластографии над УЗИ, которое основано на различии в плотностях здоровой и опухолевой ткани.

Рассматриваемая математическая прямая задача состоит в определении смещений *u(x,y), v(x,y)* вдоль оси x и y в прямоугольной области Ω из системы уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}((\frac{E}{1+\nu}+\frac{E\cdot\nu}{(1+\nu)(1-\nu)})\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{E\cdot\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial v}{\partial x})=-K_x, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{E\cdot\nu}{(1+\nu)(1-\nu)})\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}((\frac{E}{1+\nu}+\frac{E\cdot\nu}{(1+\nu)(1-\nu)})\frac{\partial v}{\partial y})=-K_y, \end{cases}$$

где *u(x,y), v(x,y)* – функции, принадлежащие пространству $W_2^2(\Omega)$, K_x, K_y - компоненты объемной силы, $\nu = 0,495$ - коэффициент Пуассона, *E* – модуль Юнга.

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}-\nu)(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})\Big|_1 = \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} f_x, \\ \nu\frac{\partial u}{\partial x}+(1-\nu)\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_1 = \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} f_y, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{2,3} = 0, \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{2,3} = 0, \\ u\big|_4 = 0, v\big|_4 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

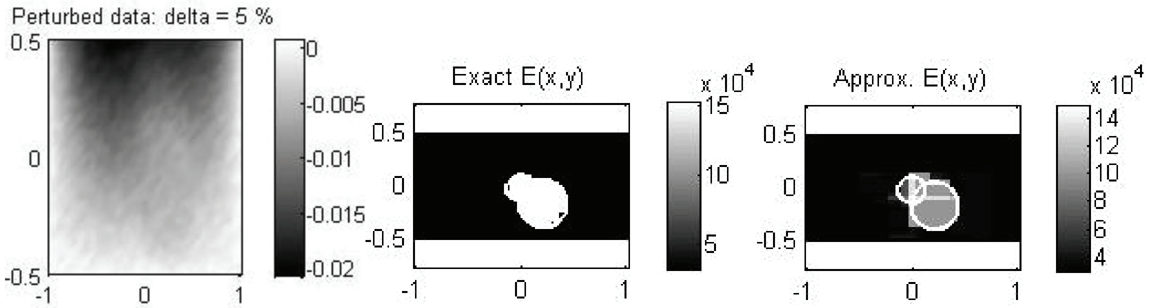
где 1,2,3 и 4 – соответственно верхняя, левая, правая и нижняя границы области Ω, f_x, f_y - функции, пропорциональные давлению на поверхность.

Обратная задача состоит в определении модуля Юнга $E(x,y)\in Z(\Omega)$ по экспериментальным значениям смещений $v_\delta(x,y)$, где δ – ошибка экспериментальных данных, такая, что $\|v-v_\delta\|_{L^2}\le\delta$. Эта обратная задача является некорректно поставленной для многих банаховых пространств $Z(\Omega)$. В работе рассматривался случай, когда $E(x,y)\in Z(\Omega)=V_H(\Omega)$,

$E_{\min} \le E(x,y) \le E_{\max}$. Здесь $V_H(\Omega)$ - банахово пространство функций двух переменных *E(x,y)* с ограниченной вариацией типа Харди $VH(E,\Omega)$ в прямоугольнике Ω (см. [2]). Такие функции $E(x,y)$ могут быть разрывными.

Задача решалась с помощью метода регуляризации Тихонова, в котором регуляризующий функционал выбирался в виде $R(E) = \|E - E_{\min}\|_{V_H} = VH(E - E_{\min},\Omega)$. Параметр регуляризации был найден по обобщенному принципу невязки [3]. Решалась модельная задача, в которой Ω = {[-0,5;0,5)]x[-0,25;0,25]}, K_x=0, K_y=0; величины f_x, f_y из граничных условий (1) имеют вид f_x=0, f_y= -10 000 *Pa*.

В работе обсуждаются численные методы решения обратной задачи и приводятся результаты решения модельных задач. Приведем результаты решения одной модельной задачи, в которой модуль Юнга равен 152000 *Pa* внутри двух кругов и 32000 *Pa* вне них. При относительной ошибке входных данных 5 %, получено приближенное решение, представленное ниже:



Здесь на первом, втором и третьем рисунках изображены соответственно приближенные данные задачи $v_\delta(x,y)$, точное решение задачи и полученное приближенное решение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-00182-а.

Литература

1. Oberai A. A., Gokhale N. H. and Feijoo G. R. Solution of inverse problems in elasticity imaging using the adjoint method. 2003. *Inverse Problems*, V.19, pp. 297–313
2. Leonov A.S. Numerical piecewise-uniform regularization for two-dimensional ill-posed problems. *Inverse Problems*, 1999, V.15, pp.1165–1176.
3. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.

Секция 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ЗАДАЧА ЖЕСТКОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯМИ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Бадоян А.Д., Сагадеева М.А.

Южно-Уральский государственный университет

454080, Челябинск, проспект Ленина, 76

Тел.: 8(351)267-93-39, e-mail: badoyanani@mail.ru, sam79@74.ru

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ гильбертовы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ и $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, причем ядро оператора L не тривиально и оператор M является (L,p)-ограниченным [1], $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим начально-конечную задачу [2,3]

$$P_0(x(0) - x_0) = 0, \quad P_\tau(x(\tau) - x_\tau) = 0 \tag{1}$$

для нестационарного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + f(t) + Bu(t), \qquad t \in [0,\tau] \tag{2}$$

в котором вектор-функция управления $u : [0,\tau] \to \mathfrak{U}$, вектор-функция внешнего воздействия $f : [0,\tau] \to \mathfrak{Y}$, скалярная функция $a : [0,\tau] \to \mathbb{R}_+$ характеризует изменение во времени параметров уравнения (2). Уравнения соболевского типа в настоящее время составляют обширную область среди неклассических уравнений математической физики [4]. Неклассическими называют те уравнения математической физики, чьи представления в виде уравнений или систем уравнений в частных производных не укладываются в рамках одного из классических типов - эллиптического, параболического или гиперболического.

В отличие от задач оптимального управления, где нас кроме приведения системы к нужному состоянию интересует минимизация затраченного управляющего воздействия, в задачах жесткого управления рассматривается приведение системы к нужному состоянию без учета необходимых затрат управляющего воздействия. Отметим, что начально-конечная задача является обобщением задачи Шоуолтера — Сидорова [3], для которой задача оптимального управления для нестационарного уравнения соболевского типа рассмотрена в [5].

Построим пространство $H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{\xi \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}) : \xi^{(p+1)} \in L_2(0,T;\mathfrak{Y}),\ p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$, которое является гильбертовым со скалярным произведением

$$[\xi, \eta] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\langle \xi^{(q)}, \eta^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{Y}} dt.$$

Пусть $\mathfrak{Z}$ — гильбертово пространство и оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Z})$. Рассмотрим *функционал* *качества*

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_{0}^{\tau} \|z^{(q)} - z_d^{(q)}\|_{\mathfrak{Z}}^2 dt, \qquad z = Cx, \tag{3}$$

где $z_d = z_d(t,s)$ — плановое наблюдение из некоторого гильбертового пространства наблюдений $\mathfrak{Z}$. Отметим, что если $x \in H^1(\mathfrak{X})$, то $z \in H^1(\mathfrak{Z})$. Нашей задачей является отыскание такой вектор-функции $v \in \mathfrak{U}_{ad}$ (жесткое управление), для которой выполняется соотношение

$$J(v) = \inf_{(x(u),u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}} J(u), \tag{4}$$

где все пары $(x(u), u)$ удовлетворяют начально-конечной задаче [3] для уравнения (2), $J(u)$ — это специальным образом подобранный функционал качества вида (3). Здесь множество $\mathfrak{U}_{ad}$ — это некоторое замкнутое и выпуклое подмножество допустимых управлений в гильбертовом пространстве управлений $\mathfrak{U}$.

Теорема. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и скалярная функция $a \in C^{p+1}([0,\tau);\mathbb{R}_+)$ отделена от нуля. Тогда для любых вектор-функций $x_j \in \mathfrak{X}$, $j = \overline{0,n}$, $f \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ и $z_d \in \mathfrak{Z}$, существует единственное жесткое управление $v \in \mathfrak{U}_{ad}$ задачи* (1) – (4).

Литература

1. *Sviridyuk, G. A.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht; Boston: VSP, 2003. – 216 p.

2. *Загребина, С. А.* Многоточечная начально-конечная задача для стохостической модели Баренблатта–Желтова–Кочиной / С. А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2013. – Т. 13, № 4. – С. 103–111.

3. *Загребина, С. А.* The Generalized Splitting Theorem for Linear Sobolev type Equations in Relatively Radial Case / С. А. Загребина, М. А. Сагадеева // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2014. – Т. 7. – С. 19–33.

4. *Свиридюк, Г.А.* Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299). – С. 7–18.

5. *Сагадеева, М. А.* Оптимальное управление решениями нестационарных уравнений соболевского типа специального вида в относительно секториальном случае / М. А. Сагадеева, А. Д. Бадоян // Вестник Магнитогорского государственного университета. Математика. – 2013. – Вып. 15. – С. 68–80.

О БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМАХ С НЕ-B_u-ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ СИЛАМИ

Будочкина С.А.

Российский университет дружбы народов

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Тел.: 84959523583, e-mail: sbudotchkina@yandex.ru

Рассматривается уравнение

$$N(u) \equiv P_{2u,t}u_{tt} + P_{1u,t}u_t + P_{3u,t}u_t^2 + Q(t,u) = 0, \tag{1}$$

$$u \in D(N) \subseteq U \subseteq V, \;\; t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \;\; u_t \equiv D_t u \equiv \frac{d}{dt}u, \;\; u_{tt} \equiv \frac{d^2}{dt^2}u.$$

Здесь $\forall t \in [t_0, t_1]$, $\forall u \in U_1$ операторы $P_{iu,t} : U_1 \to V_1$ $(i = \overline{1,3})$ являются линейными; $Q : [t_0, t_1] \times U_1 \to V_1$ - произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный; $D(N)$ - область определения оператора N; $U = C^2([t_0, t_1]; U_1)$, $V = C([t_0, t_1]; V_1)$, U_1, V_1 - действительные линейные нормированные пространства, $U_1 \subseteq V_1$.

Операторное уравнение (1) может быть обыкновенным дифференциальным, дифференциальным уравнением с частными производными, интегро - дифференциальным уравнением, уравнением с отклоняющимися аргументами и др., а также системой таких уравнений.

В работе используются обозначения и терминология [1-6].

Основные результаты.

1. Получены необходимые и достаточные условия представимости операторного уравнения со второй производной по времени (1) в форме уравнения Эйлера-Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы, т.е. уравнения вида

$$\frac{\delta L}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right) + \Lambda = 0,$$

где $\delta/\delta u$ и $\delta/\delta u_t$ - функциональные производные по u и u_t соответственно, L - обобщенный лагранжиан, Λ - плотность не-B_u-потенциальной силы.
В частности, операторный подход применен к исследованию представимости достаточно общего интегро-дифференциального уравнения с отклоняющимися аргументами в форме уравнения Эйлера-Лагранжа с непотенциальной плотностью силы.
2. Разработан конструктивный прием построения обобщенного лагранжиана, в общем случае не принадлежащего классу функционалов Эйлера-Лагранжа.
3. В терминах необходимых и достаточных условий определена структура уравнения (1) с квази-B_u-потенциальным оператором.
4. Используя подход, основанный на применении теории преобразований переменных для установления инвариантности уравнений движения, получена формула для нахождения первого интеграла уравнения (1).
5. Получено условие инвариантности до дивергенции действия по Гамильтону и дан общий вид первого интеграла уравнения (1).

6. Получено условие конформной инвариантности заданного уравнения движения с квази-B_u-потенциальным оператором N и дана формула для нахождения его первого интеграла.
7. Установлена взаимосвязь между симметриями заданного уравнения движения и соответствующего действия по Гамильтону.
8. Установлена связь между симметриями уравнений движения бесконечномерных систем и Ли-допустимыми алгебрами (в том числе алгебрами Ли).
9. Установлена связь между вариационными симметриями и Ли-допустимыми алгебрами (в том числе алгебрами Ли).

Теоретические результаты иллюстрируются конкретными примерами: уравнением малых поперечных колебаний шарнирно закрепленного прямолинейного трубопровода, по которому течет идеальная жидкость со скоростью $v(t)$ при отсутствии внутреннего и внешнего трения; уравнением Бюргерса; уравнением, описывающим колебания стержня с внутренним трением (материал Фойхта) в среде с сопротивлением и др.

Автор выражает признательность профессору Савчину В.М. за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00524а.

Литература

1. *Савчин В. М.* Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Изд-во УДН, 1991.

2. *Budotchkina S. A., Savchin V. M.* On indirect variational formulations for operator equations // Journal of Function Spaces and Applications. 2007. Vol. 5, № 3. P. 231-242.

3. *Budochkina S. A.* Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation // Eurasian Mathematical Journal. 2012. Vol. 3, № 1. P. 18-28.

4. *Будочкина С. А., Савчин В. М.* О бесконечномерных лагранжевых системах с непотенциальными силами // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 5. С. 518-519.

5. *Филиппов В. М., Савчин В. М., Будочкина С. А.* О существовании вариационных принципов для эволюционных дифференциально-разностных уравнений // Труды МИАН. 2013. Т. 283. С. 25-39.

6. *Савчин В. М., Будочкина С. А.* О взаимосвязи симметрий функционалов и уравнений // Доклады Академии наук. 2014. Т. 458, № 2. С. 148-149.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

Карачик В. В.
Южно-Уральский государственный университет
454080, Челябинск, пр-т Ленина д. 76, гл. корп.
e-mail: karachik@susu.ru

Рассмотрим неоднородную задачу Дирихле для l-гармонического уравнения в единичном шаре

$$\begin{aligned} &\Delta^l u(x) = 0, x \in S; \\ &u_{|\partial S} = f_0(s), \ldots, \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}_{|\partial S} = f_{l-1}(s), s \in \partial S, \end{aligned} \tag{1}$$

где $S = \{x \in \ ^n : |x| < 1\}$, ν - внешняя нормаль к ∂S. Известно, что если $f_k \in C^{l-1-k+\lambda}(\partial S)$, где $\lambda \in (0,1)$ и $k = \overline{0, l-1}$, то решение задачи (1) существует единственно и принадлежит классу $C^{l-1+\lambda}(\overline{S}) \cap C^{2l}(S)$.

Обозначим через $u_k(x; f)$ решение однородной задачи Дирихле ($f_0 = \cdots = f_{l-1} = 0$) при $l = k$, которое может быть выражено через функцию Грина [1]. В случае полиномиальных данных, т.е. при $f(x) = P(x)$, где $P(x)$ - полином решение $u_k(x; P)$ имеет вид [2, формула (28)]

$$u_k(x; P) = \frac{(|x|^2 - 1)^k}{2(2k-2)!!} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s (1-\alpha)^{s+k-1}}{(2s)!!(2s+2k)!!} \times \Delta^s P(\alpha x) \alpha^{n/2-1} \, d\alpha.$$

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа при полиномиальных данных было получено в работе [3].

Пусть $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Определим разностную производную функции $p(\lambda)$ по формуле

$$p^{(k)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} p(\lambda + i) \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть $q_j(x)$, $j = \overline{0, l-1}$ - система функций, являющаяся некоторым продолжением функций f_j, $j = \overline{0, l-1}$ с ∂S на $\overline{S}$ из класса $C^{l-1+\lambda}(\overline{S}) \cap C^{2l}(S)$, тогда при функциях $p_s(x)$ находимых из равенства

$$p_s(x) = \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{j!} H_s^{(j)}(-\Lambda) q_j(x), \quad s = \overline{0, l-1}, \tag{3}$$

где обозначено

$$H_s(\lambda) = \frac{1}{(2s)!!} \lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2s+2), \quad s \in \ ,$$

причем $H_0(\lambda) = 1$, а производная $H_s^{(k)}(\lambda)$ порядка k от полинома $H_s(\lambda)$ берется в смысле определения (2), функция

$$U(x) = \sum_{k=0}^{l-1} \left(p_k(x) - u_{l-k}(x; \Delta^{l-k} p_k) \right) (|x|^2 - 1)^k$$

является решением задачи Дирихле (1).

На основе этой теоремы можно доказать следующий более конкретный результат.

Теорема 2. Пусть $q_j(x)$, $j=\overline{0,l-1}$ - система гармонических продолжений функций $f_j(s)\in C^{l-1-j+\lambda}(\partial S)$, $j=\overline{0,l-1}$ с ∂S на $\overline{S}$, тогда при функциях $p_s(x)$, определяемых из (3) функция

$$U(x)=\sum_{k=0}^{l-1} p_k(x)(|x|^2-1)^k, \tag{4}$$

является решением задачи Дирихле (1).

Пример 1. Найдем функции $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ в формуле (4) для решения $U(x)$ задачи Дирихле (1) для 3-гармонического уравнения в шаре. В этом случае $l=3$. Выпишем полиномы $H_0(\lambda)$, $H_1(\lambda)$ и $H_2(\lambda)$:

$$H_0(\lambda)=1,\quad H_1(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda^{[1]},\quad H_2(\lambda)=\frac{1}{8}\lambda(\lambda-2)=\frac{1}{8}(\lambda^{[2]}-\lambda^{[1]})$$

Поскольку $\left(\lambda^{[k]}\right)^{(m)}=k^{[m]}\lambda^{[k-m]}$, то

$$H_1^{(1)}(\lambda)=\frac{1}{2},\quad H_2^{(1)}(\lambda)=\frac{1}{8}(2\lambda^{[1]}-1),\quad H_2^{(2)}(\lambda)=\frac{1}{4}$$

Следовательно

$$\begin{gathered} p_0(x)=q_0(x),\quad p_1(x)=\frac{1}{2}(-\Lambda)q_0(x)+\frac{1}{2}q_1(x), \\ p_2(x)=\frac{1}{8}\Lambda(\Lambda+2)q_0(x)-\frac{1}{8}(2\Lambda+1)q_1(x)+\frac{1}{8}q_2(x) \end{gathered}.$$

Решение (4) при $l=3$ имеет вид

$$U(x)=q_0(x)+\frac{1-|x|^2}{2}\big(\Lambda q_0(x)-q_1(x)\big)+\frac{(1-|x|^2)^2}{8}\big((\Lambda^2+2\Lambda)q_0(x)-(2\Lambda+1)q_1(x)+q_2(x)\big).$$

Полученное решение согласуется с ранее полученным в [4].

Литература

1. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2012. - Т. 48.-№ 3. - С. 441-445.
2. Карачик В. В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. - Т. 54.- № 7.- С. 1149-1170.
3. Карачик В. В. Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. - Т. 51.- № 9.- С. 1674-1694.
4. Карачик В. В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Журнал Сибирского федерального университета, Математика и физика, 2012. - Т. 5.--№ 4. - С. 527-546.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ КВАНТОВЫХ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ

Козырев С.В.

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН

119991, Москва, ул. Губкина 8

e-mail: kozyrev@mi.ras.ru

Обсуждаются приложения метода стохастического предела квантовой динамики. В этом пределе (при перерастяжке времени Ван Хова-Боголюбова) динамику квантовых систем в режиме слабой связи можно приблизить некоторым квантовым случайным процессом. При этом свободная эволюция квантового поля может быть приближена квантовым белым шумом, а уравнение Шрёдингера в представлении взаимодействия - квантовым стохастическим уравнением Шрёдингера.

Обсуждаются приложения к некоторым квантовым системам. В частности, в этом подходе можно единообразным образом описать декогеренцию и термализацию в динамике квантовых систем.

Литература

[1] L. Accardi, Lu Yun Gang, I. Volovich, Quantum theory and its stochastic limit, Springer-Verlag, Berlin, 2002

[2] L.Accardi, S.V.Kozyrev, Lectures on Quantum Interacting Particle Systems, in: QP-PQ: Quantum Probability and White Noise Analysis - Vol. 14 "Quantum Interacting Particle Systems", World Scientific Publishing, 2002

[3] L.Accardi, S.V. Kozyrev, I.V. Volovich, Dynamics of dissipative two-level system in the stochastic approximation, Phys.Rev.A. 1997. V.56. N.4. P.2557-2562. arXiv:quant-ph/9706021

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ПОСТРОЕНИИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Панин А. А., Быков А. А., Шарло А. С.

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, физический факультет

119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова, дом 1, строение 2

Тел. 84959391033, e-mail: a-panin@yandex.ru, abkov@yandex.ru

Проблема разрешимости начально-краевых задач для обобщенных эволюционных уравнений в последнее время привлекает к себе все возрастающее внимание в связи с появлением практически важных задач, для которых обычные эволюционные уравнения не являются адекватной моделью. Одним из таких классов задач являются начально-краевые задачи для обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова (ОКПП), $(u - \Delta u)_t + V \bigtriangledown u = \Delta u - f(u,x)$ в ограниченной области Ω с условиями $u\big|_{\partial\Omega} = \psi_0(x)$ на гладкой границе $\partial\Omega$, и с начальными условиями $u(x,0) = \psi_1(x)$. На практике обычно $f(u,x) = f_0(u,x)\Pi_{j=1}^{J}\big(u - U_j(x)\big)$, где $f_0(u,x)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$, $f_0(u,x) \neq 0$ в $\bar{\Omega}$. Корни $u = U_j(x)$ уравнения $f(u,x) = 0$ называются положения равновесия, устойчивые при $f_u(U_j,x) > 0$, и неустойчивые при $f_u(U_j,x) < 0$ in Ω. В [1] рассмотрена аналогичная задача для случая, когда f есть многочлен второй степени от u. На практике интересен случай, когда уравнение $f(u,x) = 0$ имеет не меньше трех корней, что невозможно для квадратного трехчлена. Поэтому мы в данной работе намерены рассмотреть функции f с произвольным числом корней, но тогда для обоснования разрешимости нам потребуется наложить на функцию условие Липшица, которое для любого многочлена не выполнено. Итак, пусть функция $f(u,x)$ удовлетворяет условию Липшица $|f(u_1,x) - f(u_2,x)| \leq C|u_1 - u_2|$ сразу для всех $x \in D$, $u_{1,2} \in R^1$, где $C > 0$ - константа.

Мы рассмотрим аналогичную задачу, в которой при старших производных присутствует малый параметр $\varepsilon > 0$. Пусть оператор $\mathbb{D}$ действует на трижды дифференцируемую функцию $u(x,t)$ по правилу $\mathbb{D}u = (\varepsilon^4\Delta u - \varepsilon^2 u)_t + \varepsilon^2 k\Delta u - f(u,x)$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\mathbb{D}u = 0, \;\; u(x,t) = 0, \; x \in \partial\Omega, \;\; u(x,0) = u_0(x), \tag{1}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$. В пространстве $\mathbb{H}^1$ введем норму $||u||^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = \big(\int_{\bar{\Omega}} u^2 dx + \int_{\bar{\Omega}} \big(\bigtriangledown u\big)^2 dx\big)^{1/2}$, пространство $\mathbb{H}^1_0$ есть пополнение $\mathbb{H}^1$ по норме $||u|| \equiv ||u||^2_{\mathbb{H}^1_0(G)} = \int_G \big(\bigtriangledown u\big)^2 dx$. Известно, что $\mathbb{H}^1_0$ - Гильбертово со скалярным произведением $(u,v) = \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)dx$. Пусть $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ - сопряженное к $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ и $\langle .,. \rangle$ - скобки двойственности этих двух пространств. В пространстве $\mathbb{L}^2(\Omega)$ скалярное произведение и норму обозначим $(u,v)_2$ и $\|u\|_2$. Пусть линейный оператор $\mathbb{J} : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ действует по правилу $\langle \mathbb{J}v, w\rangle = \int_\Omega vw\,dx \;\; \forall v, w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Как известно, $\exists C_f : \|w\|_2 \leqslant C_F\|w\| \;\; \forall w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ Мы определим оператор $\Delta : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ так, что $\langle \Delta v, w\rangle = -\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla w)\,dx \;\; \forall v, w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Так как $\big|\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla w)\,dx\big| \equiv |(\nabla v, \nabla w)| \leqslant \|v\|\|w\|$, то $\|\Delta\| \leqslant 1$. Наконец, оператор $\mathbb{F}$ действует по правилу $\mathbb{F}(v) = f(v(x),x)$. Мы доказываем следующие леммы **(Л)** и теоремы **(Т)**. **Л1.** Оператор $\mathbb{F}(v)$ Липшиц-непрерывен $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (для всех $p > 1$), с константой Липшица C. Далее выберем $p = 2$. Тогда $\mathbb{F} : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$. Определим оператор вложения $\mathbb{J}_1 : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ и оператор $\mathbb{J}_2 : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ по правилу $\langle \mathbb{J}_2 v, w\rangle = \int_\Omega vw\,dx \;\; \forall v \in L^2(\Omega), \;\; \forall w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Заметим, что $\|\mathbb{J}_1\| \leqslant C_F$ и $\mathbb{J} = \mathbb{J}_2\mathbb{J}_1$. Для всех $v(x) \equiv v(x,t) \in \mathbb{C}^1([0,T]; \mathbb{H}^1_0(\Omega))$ или $v(x) \equiv v(x,t) \in \mathbb{C}^1([0,T); \mathbb{H}^1_0(\Omega))$ ($T > 0$ соответственно $T = +\infty$) определим $\mathbb{D}(v) = \frac{d}{dt}(\varepsilon^4\Delta v - \varepsilon^2\mathbb{J}v) + \varepsilon^2 k\Delta v - \mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 v)$, где $\frac{d}{dt}$ есть дифференцирование в смысле предела по норме $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$: $\frac{d}{dt}v(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}(v(t+\Delta t) - v(t))$. Очевидно, $\mathbb{D} : \mathbb{C}^1\big([0,T]; \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big) \to \mathbb{C}\big([0,T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)\big)$. Функцию $u(x,t) \equiv u(x)(t)$ из класса $\mathbb{C}^{(1)}\big([0,T]; \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big)$ называем обобщенным решением задачи (1), где $0 < T < +\infty$, (или класса $\mathbb{C}^{(1)}\big([0,T);\mathbb{H}^1_0(\Omega)\big)$, где $0 < T \leqslant +\infty$), если верны равенства $\mathbb{D}(u) = 0$ для $t \in [0,T]$ или $t \in [0,T)$, $u(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Пусть оператор $\mathbb{A}$ действует по правилу $\mathbb{A} \equiv \mathbb{J} - \varepsilon^2\Delta : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. **Л2.** Оператор $\mathbb{A} : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ есть ограниченный линейный оператор с нормой $\|A\| \leqslant C_F^2 + \varepsilon^2$. **Л3.** Оператор $\mathbb{A}$ является радиально непрерывным и строго монотонным. **Л4.** Оператор $\mathbb{A}$ является коэрцивным [2]. **Л5.** Оператор $\mathbb{A}$ имеет обратный $\mathbb{A}^{-1}$: $\mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. **Л6.** Оператор $\mathbb{A}^{-1}$ Липшиц-непрерывен с константой Липшица ε^{-2}. Теперь запишем задачу (1) в операторной форме,

$$\varepsilon^2 \tfrac{d}{dt}(\mathbb{A}u) = \varepsilon^2 k\Delta u - \mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u), \;\; u(0) = u_0 \in \mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

Операторы $\frac{d}{dt}$ и $\mathbb{A}$ коммутируют, поэтому можно записать равносильную задачу,

$$\mathbb{A}\tfrac{d}{dt}(u) = k\Delta u - \varepsilon^{-2}\mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u), \;\; u(0) = u_0 \in \mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

Используя непрерывную обратимость оператора $\mathbb{A}$, получим равносильную задачу Коши

$$\tfrac{d}{dt}(u) = \mathbb{A}^{-1}\left(k\Delta u - \varepsilon^{-2}\mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 u)\right), \;\; u(0) = u_0 \in \mathbb{H}^1_0(\Omega). \tag{2}$$

Обозначим правую часть $\Phi(u)$. Тогда оператор $\Phi : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ действует по правилу $\Phi(v) = \mathbb{A}^{-1}\left(k\Delta v - \varepsilon^{-2}\mathbb{J}_2\mathbb{F}(\mathbb{J}_1 v)\right)$. Задачу (2) запишем теперь в виде задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения в Банаховом пространстве

$$\tfrac{d}{dt}(u) = \Phi(u), \;\; u(0) = u_0 \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \tag{3}$$

с Липшиц-непрерывной правой частью $\Phi(u)$.

Л7. Пусть $h = \frac{1}{2L}$. Для любого $t_1 \geqslant t_0$ и $u_1 \in \mathbb{B}$ существует решение $u \in \mathbb{C}^1([t_1, t_1 + h], \mathbb{B})$ задачи Коши

$$\tfrac{d}{dt}(u) = \Phi(u), \quad t \in [t_1, t_1 + h], u(t_1) = u_1 \in \mathbb{B}. \tag{4}$$

Л8. Если $u_1(t)$ и $u_2(t)$ есть два решения на $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ с начальной точкой t_0, то они совпадают на $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

Т1. Пусть $\mathbb{B}$ есть Банахово пространство с нормой $\|.\|_{\mathbb{B}}$. Пусть функция $\Phi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ определена на $\mathbb{B}$ и Липшиц-непрерывна, т.е. $\exists L > 0$ такое, что $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{B}$ верно $\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_{\mathbb{B}} \leqslant L\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{B}}$. Тогда задача Коши

$$\tfrac{d}{dt}(u) = \Phi(u), \quad t \geqslant t_0, \;\; u(t_0) = u_0 \in \mathbb{B} \tag{5}$$

глобально разрешима и имеет единственное решение в классе $u(t) \in \mathbb{C}^1([t_0, +\infty); \mathbb{B})$.

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (3) доказана.

Далее мы строим асимптотический ряд для решения начально-краевой задачи (1), используя методику [3]. В данной работе мы не останавливаемся подробно на этой методике, приведем только основной результат. Для любого $n > 0$ мы строим так называемые верхнее $\beta_n(x,t,\varepsilon)$ и нижнее $\alpha_n(x,t,\varepsilon)$ решения задачи (1) такие, что $\beta_n(x,t,\varepsilon) - \alpha_n(x,t,\varepsilon) < C\varepsilon^n$ равномерно на $x \in \Omega$ и $t \in [0,T]$. Используя итерационный метод, мы доказываем существование функции $u^{(n)}(x,t,\varepsilon) \in \mathbb{H}^1$ которая удовлетворяет неравенствам $\alpha_n(x,t,\varepsilon) < u^{(n)}(x,t,\varepsilon) < \beta_n(x,t,\varepsilon)$ и является, таким образом, асимптотическим приближением n–го порядка к решению задачи (1).

Работа поддержана РФФИ: проект 13-01-0020 (Быков), проект 12-01-00479-а (Панин).

Литература

[1] M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, On blow up of generalized Kolmogorov–Pertovskii–Piskunov equation, // Nonlinear Analysis, 71(2009), pp. 5724–5732.

[2] Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения, М.: «Наука», 1988.

[3] Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н. Движение фронта в параболической задаче реакция—диффузия. // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 2010. Т. 50. № 2. С. 276—285.

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА–ЖЕЛТОВА–КОЧИНОЙ

Умаров Х. Г.

Чеченский государственный университет

364907, Грозный, ул. Шерипова, 32

Тел.: 89889078348, e-mail: umarov50@mail.ru

Исследование течения однородной слабосжимаемой жидкости в трещиновато-пористых средах приводит [1, гл. 3, § 4] к математической модели Баренблатта–Желтова–Кочиной (модели двойной пористости) – дифференциальному уравнению в частных производных третьего порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\omega\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial t}\right)=\chi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

где ω и χ – положительные постоянные, зависящие от геометрических характеристик пласта (в частности, имеет место линейная зависимость ω и χ от проницаемости k) и свойств фильтрующейся жидкости.

Трещины в горных породах в подавляющем большинстве расположены не хаотично, а по определенным системам, каждая из которых ориентирована в пространстве. К параметрам горного пласта, существенно влияющим на фильтрационный поток, относится ориентация трещин в пространстве, порождающая анизотропию горного пласта и являющаяся специфической характеристикой нефтяного коллектора. В горных пластах распространена анизотропия связанная или с естественной слоистостью осадочных пород, или с развитой системой параллельных микротрещин, вызванных напряжениями в горной породе. При этом если пласт характеризуется ярко выраженной анизотропией трещиноватой среды, то это порождает существенную неоднородность пласта по проницаемости. Так, например, в грозненских нижнемеловых залежах отмечается ярко выраженное вертикальное направление трещиноватости, которое порождает значительную неоднородность пласта по проницаемости, поэтому фильтрационный поток в основном осуществляется [2, с. 85] «снизу – вверх».

Для анизотропных пластов с выраженными горизонтальным и вертикальным направлениями трещиноватости, модельное представление фильтрации Баренблатта–Желтова–Кочиной принимает вид [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\omega\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial t}\right)-\omega_0\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial t}=\chi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\chi_0\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{2}$$

причем, в зависимости от направления трещиноватости, одни коэффициенты уравнения существенно меньше других.

Если направление трещиноватости вертикальное, то, пренебрегая изменением фильтрационного потока в «горизонтальном» направлении (слагаемым $\omega(\partial^3 u/\partial x^2\partial t+\partial^3 u/\partial y^2\partial t)$), от уравнения (2) переходим к математической модели фильтрации в анизотропной трещиновато-пористой среде, в которой фильтрационный поток в основном осуществляется «снизу – вверх»:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\omega_0\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial t}-\chi_0\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\chi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{3}$$

в этом случае в «горизонтальном» направлении происходит [1, с. 109] беспрепятственный обмен жидкостью между блоками и трещинами.

Если же направление трещиноватости горизонтальное, то, пренебрегая в (2) изменением фильтрационного потока в «вертикальном» направлении (слагаемым $\omega_0\,\partial^3 u/\partial z^2\partial t$), приходим к математической модели фильтрации в анизотропной трещиновато-пористой среде, в которой направление фильтрационного потока в основном «горизонтальное»:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \omega\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t}\right) - \chi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \chi_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{4}$$

в этом случае в «вертикальном» направлении происходит [1] беспрепятственный обмен жидкостью между блоками и трещинами.

В докладе исследуются математические модели нестационарной фильтрации в изотропных и, с ярко выраженной вертикальной или горизонтальной проницаемостью, анизотропных трещиновато-пористых средах с нахождением в явном виде решения задачи Коши для уравнений (1), (3), (4).

Решение задачи Коши для каждого из уравнений (1), (3), (4) найдено сведением, методами теории [3, гл. 1, § 2] сильно непрерывных полугрупп линейных ограниченных операторов класса C_0, рассматриваемой задачи нестационарной фильтрации к соответствующей задаче Коши для абстрактного аналога дифференциального уравнения диффузии, обобщающего уравнения (1), (3), (4) в произвольном банаховом пространстве E:

$$B\left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \tag{5}$$

в котором операторы $-B$, $-A$ являются производящими операторами коммутирующих полугрупп класса C_0, причем тип полугруппы $U(t; -B)$ — отрицательный:

$$\|U(t; -B)\| \le M\exp(-\beta t), \ \|U(t; -A)\| \le N\exp(\alpha t), \quad M, N, \ \beta > 0, \alpha \in R^1, t \ge 0.$$

Для абстрактной задачи Коши получены интегральные представления решения уравнения (5) через начальную функцию по классической схеме, с применением операторнозначного аналога фундаментального решения:

$$G(\xi, \tau; x, t) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} U(t-\tau; -A) U\left(\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}; -B\right) B^{n/2},$$

где $0 \le \tau < t$, $\xi, x \in R^n$, $|x-\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \xi_i\right)^2$.

Затем, конкретизируя банахово пространство E и действующие в нем операторы – коэффициенты уравнения (5), из решения абстрактной задачи Коши и оценки его нормы получены решения соответствующих задач нестационарной фильтрации в изотропных и, с ярко выраженной вертикальной или горизонтальной проницаемостью, анизотропных трещиновато-пористых средах и их оценки.

Дифференциальные уравнения (1) – (4), не разрешенные относительно производной по временной переменной t, принадлежат псевдопараболическому подклассу уравнений соболевского типа [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13–01–00422–а.

Литература

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. – 211 с.

2. Майдебор В.Н. Особенности разработки нефтяных месторождений с трещиноватыми коллекторами. М.: Недра, 1980. – 288 с.

3. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. – 464 с.

4. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЫРОЖДЕННОЙ C_0-ГРУППЫ РАЗРЕШАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ОДНОЙ РАДИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Шулепов А.Н., Сагадеева М.А.

Южно-Уральский государственный университет

454080, Челябинск, проспект Ленина, 76

Тел.: 8(351)267-93-39, e-mail: andrewn@mail.ru, sam79@74.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times [0,T]$ рассмотрим краевую задачу

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \tag{1}$$

для уравнения в частных производных вида

$$(\lambda - \Delta)u_t = \nu\Delta u - id\Delta^2 u. \tag{2}$$

Здесь коэффициенты $\nu, \lambda, d \in \mathbb{R}$ описывают параметры системы. Уравнение (2) рассматривалось, например, в работе [1]. В ней было показано существование разрешающей вырожденной C_0-полугруппы операторов. Так как правая часть уравнения (2) может принимать нулевые значения, то это уравнение относится к классу уравнений соболевского типа [2,3], составляющих обширную область неклассических уравнений математической физики [5].

Теорема. *При любых $\nu, \lambda, d \in \mathbb{R}$ задача* (1), (2) *обладает разрешающей вырожденной C_0-группой операторов.*

Литература

1. *Сагадеева, М. А.* Об одной нелинейной модели на основе относительно радиального уравнения соболевского типа / М.А. Сагадеева, А.Н. Шулепов // Вестник Одесского национального университета. Математика и механика. – 2013. – Т. 18, вып. 2 (18). – С. 35–43.

2. *Favini, A.* Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc, 1999.

3. *Sviridyuk, G. A.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003.

4. *Свиридюк, Г.А.* Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299). – С. 7–18.

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТЬЮ И ФИКСИРОВАННЫМ ВТОРЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Яременко Л. А.

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет»

350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Тел: +79054039547, e-mail:yaremenko.l@inbox.ru

Обозначим через $P_n(A,B)$, $-1 \le A < B \le 1$, класс регулярных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $p(z) = 1 + c_n z^n + \ldots$, n – целое ≥ 1, представимых в виде

$$p(z) = \frac{1 + Az^{n-1}\omega(z)}{1 + Bz^{n-1}\omega(z)}, \qquad (1)$$

где $\omega(z)$ – регулярная в круге E функция: $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| \le 1$.

Обозначим через $P_b(n, A, B)$, $0 \le b \le 1$, $-1 \le A < B \le 1$, совокупность тех функций класса $P_n(A,B)$, для которых имеет место разложение

$p(z) = 1 + b(B - A)z^n + c_{n+1}z^{n+1} + \ldots$, n – целое ≥ 1.

Таким образом

$P_b(n, A, B) = \{p(z) : p(z) \in P_n(A,B),\ p^{(n)}(0) = n!b(B - A),\ 0 \le b \le 1\}$.

Теорема 1. Пусть z, $|z| = r < 1$, – фиксированная точка. Тогда множество значений функционала $I(p)$ на классе $P_b(n, A, B)$ представляет собой круг

$\{I : |w - a_b| \le d_b\}$,

где

$$a_b = \frac{1 - ABC^2}{1 - B^2C^2},\ d_b = \frac{(B - A)C}{1 - B^2C^2},\ C = r^n \frac{r + b}{1 + br}.$$

Результат точный

Доказательство. Из (1) получаем

$$z^{n-1}\omega(z) = \frac{1 - p(z)}{Bp(z) - A} = bz^n + \ldots = z^n\varphi(z), \qquad (2)$$

где $\varphi(z)$ – некоторая регулярная в круге E функция: $\varphi(0) = b$, $|\varphi(z)| \le 1$.

В силу того, что $0 \le b \le 1$, имеем $\dfrac{\varphi(z) - b}{1 - b\varphi(z)} \prec z$, $z \in E$, а тогда,

$$\varphi(z) \prec \frac{z + b}{1 + bz},\ z \in E. \qquad (3)$$

Из условия (3) следуют оценки

$$\operatorname{Re}\varphi(z) \ge \frac{b - r}{1 - br},\ |\varphi(z)| \le \frac{r + b}{1 + br},\quad |z| \le r < 1. \qquad (4)$$

Из (2) и (4) получаем неравенство

$$\left|\frac{1-p(z)}{Bp(z)-A}\right|=\left|z^n\varphi(z)\right|\le r^n\frac{r+b}{1+br}=C,$$

или неравенство

$$\left|1-p(z)\right|^2\le C^2\left|Bp(z)-A\right|^2.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему

$$\left|p(z)-\frac{1-ABC^2}{1-B^2C^2}\right|\le\frac{(B-A)C}{1-B^2C^2},\qquad (5)$$

что и доказывает теорему 1.

Из неравенства (5) следуют точные оценки

$$\frac{1+AC}{1+BC}\le \mathrm{Re}\,p(z)\le\left|p(z)\right|\le\frac{1-AC}{1-BC},$$

где $z, |z|=r<1$, фиксировано, $p(z)\in P_b(n,A,B)$.

Опираясь на теорему 1 и метод работ [1-2], получен следующий результат.

Теорема 2. Пусть $z, |z|=r<1,$ – фиксированная точка. Тогда совокупность значений системы функционалов $\{p(z), zp'(z)\}$ на классе $P_b(n,A,B)$ представима в виде:

$$\Omega_b(n,A,B)=$$

$$=\left\{(w,\xi): w=a_b+d_b\mu, \xi=-\frac{n(w-1)(A-Bw)+k\left(d_1^{\,2}-\left|w-a_1\right|^2\right)\eta}{B-A}, |\mu|\le 1, |\eta|\le 1\right\}.$$ Здесь введены такие обозначения:

$$a_b=\frac{1-ABC^2}{1-B^2C^2},\ d_b=\frac{(B-A)C}{1-B^2C^2},\ k=\frac{1-B^2r^{2n}}{(1-r^2)r^{n-1}}, C=r^n\frac{r+b}{1+br}.$$

Результат точный.

Использованная литература

1. Яременко Л.А. О взаимном росте функции и ее производной на подклассах класса Каратеодори. Рукопись Деп. в ВИНИТИ 5.08.82, №4342 – 82 ДЕП.
2. Яременко Л.А. Область значений одной системы функционалов на подклассе класса Каратеодори. // Динамика сплошной среды. Вып. Ш. Новосибирск, 1994.

Секция 6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

СУБТАНГЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА-ХИКСА

Ю.Я. Агранович, Н.В. Концевая

Воронежский государственный технический университет

394026 г. Воронеж, Московский проспект, 14

Тел.: 89601036469, e-mail: agranovichyy@yandex.ru

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

125993, Москва, Ленинградский проспект, д. 49

Тел.: 89264994736, e-mail: kontsevaya07@list.ru

В последние десятилетия в среде специалистов в области прикладной эконометрики достаточно широко используется модель Самуэльсона-Хикса [Samuelson—Hicks model] — модель циклических изменений экономики, в которой механизмы конъюнктурных периодических колебаний объясняются взаимодействием принципов акселерации и мультипликации. Теории существования экономических циклов исследуют причины, определяющие изменение экономической активности, вызывая неизменный интерес в научном мире, являясь средством если не предсказать будущие кризисные моменты, то объяснить существующие изменения конъюнктуры. Модель делового цикла базируется на неоднородном конечно-разностном уравнении второго порядка, характеризующим динамику дохода во времени:

$$y(t+2)-(a+w)\cdot y(t+1)+w\cdot y(t)=1\,, \qquad (1)$$

где $y(t+2)$, $y(t+1)$, $y(t)$ - национальный доход периодов t, $t+1$, $t+2$ соответственно; w - фактор (мощность) акселерации; a - склонность к потреблению; 1 - базовое потребление. Данная модель включает исключительно рынок благ, предполагая процентные ставки и уровень цен постоянными, а объем предложения товаров эластичным. Мультипликатором в данной модели является коэффициент, определяющий соотношение между приростом дохода и вызывающим его увеличением инвестиций, акселератор, определяет рост инвестиций, индуцированный ростом производства [1, 2].

Нас интересует расширение участков монотонности в случае затухающих колебаний в непрерывных решениях уравнения (1). Далее мы будем предполагать, что дискретное решение уравнения (1) продолжено на вещественную полуось с сохранением констант интегрирования. В этом случае решение (1) можно представить:

$$y(t)=A+\alpha\cdot r^{t}\cdot\cos\omega t\,, \quad t\in[0,\infty) \qquad (2)$$

где r - модуль корня характеристического уравнения, причем $r<1$, а ω - аргумент указанного корня, ω определяет частоту колебаний решения в окрестности стационарной точки $y\equiv A=\mathrm{const}$, α – постоянная величина, зависящая от выбора начальных данных ($\alpha=y(0)-A$). Распределение участков монотонности естественно связано с поведением функции $T(t)$ – длины подкасательной в проекции на ось t. В данном случае для $T(t)$ получим выражение:

$$T(t)=-\frac{A+\alpha r^{t}\cdot\cos\omega t}{\alpha r^{t}\ln r\cdot\cos\omega t-\omega\alpha r^{t}\cdot\sin\omega t}=\frac{A\cdot r^{-t}+\alpha\cdot\cos\omega t}{\alpha\cdot\ln r\cdot\cos\omega t-\omega\cdot\alpha\cdot\sin\omega t}\,, \qquad (3)$$

Авторы благодарны фонду РФФИ за финансовую поддержку настоящих исследований, работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-00253 а

Отсюда:

$$T'(t)=\frac{-(A\cdot r^{-t}\cdot \ln r+\alpha\cdot\omega\cdot\sin\omega t)(\alpha\cdot\ln r\cdot\cos\omega t-\alpha\cdot\omega\cdot\sin\omega t)}{(\alpha\cdot\ln r\cdot\cos\omega t-\omega\cdot\alpha\cdot\sin\omega t)^2} \tag{4}$$

$$+\frac{(\alpha\omega\cdot\ln r\cdot\sin\omega t-\alpha\omega^2\cdot\cos\omega t)(A\cdot r^{-t}+\alpha\cdot\cos\omega t)}{(\alpha\ln r\cdot\cos\omega t-\omega\alpha\cdot\sin\omega t)^2}\ .$$

Из соотношения (4) при $t\to\infty$ получим следующее асимптотическое уравнение для определения экстремумов подкасательных для достаточно больших t:

$$\alpha\omega(\ln r+1)\cdot\sin\omega t+(\alpha\omega^2-\ln^2 r)\cdot\cos\omega t=0. \tag{5}$$

Откуда

$$\mathrm{tg}\,\omega t=\frac{\alpha\omega\cdot(\ln r+1)}{\ln^2 r-\alpha\omega^2} \tag{6}$$

Таким образом, критические значения t_n асимптотически распределены как арифметическая прогрессия:

$$t_n=\frac{1}{\omega}\left\{\pi n+\mathrm{arctg}\left[\frac{\alpha\omega\cdot(\ln r+1)}{\ln^2 r-\alpha\omega^2}\right]\right\},\ n\in\ . \tag{7}$$

Соответственно экстремальные значения (положительные и отрицательные) длин подкасательных распределены асимптотически как геометрическая прогрессия с ведущим членом вида:

$$T_n=\pm C(\alpha,\omega)\cdot r^{-\frac{\pi n}{\omega}}, \tag{8}$$

где $C(\alpha,\omega)$ - некоторая постоянная, зависящая только от входных данных задачи: параметров модели и начальных данных, а через T_n обозначено асимптотическое значение $T(t_n)$ при $n\to\infty$. При определенных значениях мультипликатора и акселератора, национальный доход достигает нового равновесного уровня, пройдя через затухающие колебания. Скорость достижения нового равновесного состояния определяется следующей величиной, являющейся аналогом пропускной способности, и зависящей от коэффициентов модели:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|T_n|}{n}=\frac{\pi\cdot\ln r}{\omega} \tag{9}$$

или в терминах параметров модели:

$$R=\frac{2\pi\ln w}{\arccos\left(\frac{a+w}{2\sqrt{w}}\right)}. \tag{10}$$

Чередование периодов роста с кризисными моментами в экономике любой страны генерирует естественное предположение о существовании внутренних периодических закономерностей в деловой активности страны. При этом необходимо, чтобы качественные теоретические построения в данной предметной области содержали не только объяснения внутренних механизмов развития экономики и определение стимулов роста, но и давали прогнозные оценки времени вхождения экономических систем в равновесные состояния, на достижение последней цели и ориентирована настоящая работа.

Список литературы:

1. Samuelson, P. Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration, Review of Economic Statistics, 1939b, 21, pp.75–78.
2. Westerhoff F.H. Samuelsons multiplier-accelerator model revisited. Appl. Econ. Letter, 2006, 13. pp.89-92.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕКСТУРЫ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ ПУТЁМ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ИЗМЕРЕНИЙ МЕТОДАМИ ЭЛЕКТРОННОЙ МИКРОСКОПИИ

А. О. Антонова, Т. И. Савелова

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31

Тел.: 89851773206, e-mail: aoantonova@mail.ru

Тел.: 84953934653, e-mail: TISavelova@mephi.ru

Последние достижения в методике автоматизированного анализа картин дифракции обратно рассеянных электронов (EBSD – Electron Back Scattering Diffraction) открыли новые возможности в исследовании структуры и текстуры материалов. Вместе с определением размера зерен стало возможным просто и быстро получать информацию, в частности, о текстуре и характере границ зерен в структуре материала. Именно эти характеристики структуры во многом определяют уровень физико-механических свойств, механизмы образования текстуры (пластической деформации, фазовых переходов, рекристаллизации и т.д.) Целью EBSD анализа также является изучение пространственного распределения ориентировок.

При проведении EBSD измерений экспериментатор должен подготовить образец и указать шаг измерений и угол разориентации для того, чтобы отличить зёрна с различными ориентировками. Проблема выбора параметров измерений остаётся недостаточно изученной, а между тем данные параметры оказывают существенное влияние на результаты измерений.

Разрабатывается двумерная математическая модель поликристаллического образца и эксперимента, получаемого методами электронной микроскопии, для различных параметров измерений: шага сканирования и порогового угла разориентации. Результаты эксперимента используются для сравнения характеристик текстуры образца и измерений: распределение зёрен по размерам, средний размер зерна, дисперсия; распределение по углам разориентации, средний угол разориентации, дисперсия; оценки ФРО в трёхмерном виде и в однопараметрическом представлении. Проверка соответствий всех перечисленных распределений осуществляется с помощью критерия однородности χ^2.

СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В МОДЕЛИ ВИРУСНОЙ ЭВОЛЮЦИИ

Арчибасов А. А.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева (национальный исследовательский университет)

443086 Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34

Тел.: 89277035650, e-mail: aarchibasov@gmail.com

Сингулярно возмущенные уравнения часто возникают в результате математического моделирования явлений и процессов химической кинетики, биологии, физиологии и других областей естественных наук. Для задач такого типа с успехом применяются методы построения асимптотики по малому параметру, которые дают асимптотическое представление решения всюду в рассматриваемом промежутке изменения аргумента и, в частности, в окрестности начальной точки, где имеет место явление пограничного слоя. В работе рассмотрена начально-краевая задача для сингулярно возмущенной системы интегро-параболических уравнений с малым параметром при производной, отражающей динамику численности двух взаимодействующих популяций: здоровых клеток и клеток, зараженных вирусом, получено нулевое приближение решения начально-краевой задачи, проведено численное моделирование динамики популяций клеток.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= b - qu(t) - u(t)\int_0^\infty \beta(s)v(t,s)ds, \\ \frac{\partial v(t,s)}{\partial t} &= -mv(t,s) + \beta(s)u(t)v(t,s) + \mu\frac{\partial^2 v(t,s)}{\partial s^2} \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными

$$u(0) = u^0, \quad v(0,s) = v^0(s) \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial v}{\partial s}(t,0) = 0, \quad v(t,\infty) = 0 \tag{3}$$

Система (1) представляет собой математическую модель вирусной эволюции в пространстве фенотипов [1], где $u(t)$, $кл/мм^3$ - концентрация неинфицированных (восприимчивых к вирусу) клеток, b, $кл/(мм^3 \cdot сут)$ - постоянная скорость производства неинфицированных клеток, q, $1/сут$ - скорость естественной смерти здоровых клеток, $v(t,s)$, $кл/мм^3$ - плотность инфицированных вирусом клеток в одномерном пространстве фенотипов $s \in [0,+\infty)$ (s - величина безразмерная), соответственно, $V(t) = \int_0^\infty v(t,s)ds$ - концентрация инфицированных клеток, $m = m(s)$ - скорость, с которой умирают инфицированные клетки, $\beta(s) = as$, $мм^3/кл \cdot сут$, $a > 0$, μ, $1/сут$ - коэффициент мутации (диффузии, в этой модели случайные мутации моделируются диффузией).

После введения безразмерных переменных задача (1)-(3) приводится к виду:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \frac{du}{dt} = 1 - u - u\int_0^\infty \beta\, v\, ds, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} = -mv + p\beta uv + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$u(0) = u^0, \quad v(0,s) = v^0(s), \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}(t,0) = 0, \quad v(0,\infty) = 0. \tag{6}$$

Положив $\varepsilon = 0$, придём к вырожденной системе (системе нулевого приближения):

$$\begin{aligned} &0 = 1 - u - u\int_0^\infty \beta\, v\, ds, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} = -mv + \beta uv + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

На рис. 1 представлены результаты численного интегрирования полной системы (4) и нулевого приближения (тонкая линия - графики, соответствующие полной системе, жирная линия – нулевому приближению). Из рисунков видно, что нулевое приближение достаточно хорошо аппроксимирует точное решение за исключением окрестности начальной точки, где наблюдается пограничный слой, но если начальная точка лежит на медленной поверхности, задаваемой уравнением $u(t) = \dfrac{1}{1 + \int_0^\infty \beta\, v\, ds}$, то пограничный слой отсутствует [2].

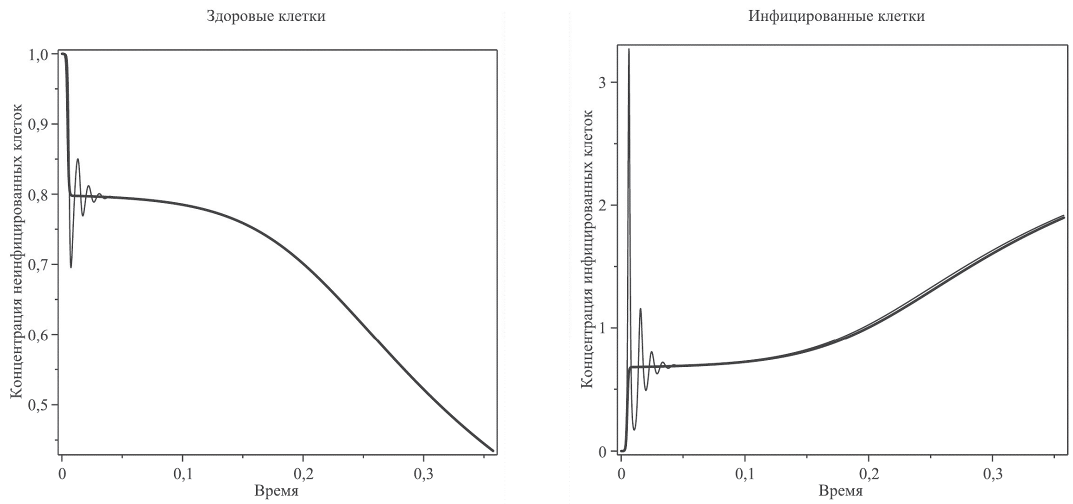


Рис. 1. Решения полной системы (4) и нулевое приближение (7).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-97018-а).

Литература

1. *Korobeinikov A. ,Dempsey C.* A continuous phenotype space model of RNA virus evolution within a host // Math. Biosci. Eng. 2014. V. 11. № 4. P. 919-927.
2. *Соболев В. А., Щепакина Е. А.* // Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010. – 320 с.

ОБ ОПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ПРОСВЕТЛЕНИЯ И АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ОСЛАБЛЕННОЙ ЗАДАЧИ В СМЫСЛЕ ЧЕБЫШЕВА

Ахмедов И.А., Худак Ю.И.

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА)

119454, Москва, пр-т Вернадского, 78

ilzarka@gmail.com, hudak@mirea.ru

1. Работа посвящена математическому моделированию электромагнитных полей в многослойных магнитодиэлектрических системах (МДС) (см., например, [1]).

Однако, многие задачи для таких систем (см., например, [2], [3]) мало изучены, даже при $N = 2, 3$.

Опираясь на [2] – [4], в частности, установлено, что при $N = 2$ пространство параметров (материалов) слоистых систем является плоским графом с 20 вершинами, 66 рёбрами и 48 гранями (см. рис. 1).

Показано, что относительно подходящих вспомогательных переменных всевозможные границы областей ограничения профилирующей функции по заданному уровню $h = \alpha_j^2, j = 0, 1, 2, 3$, где $\alpha_j, j = 0, 1, 2, 3$ вычислительные параметры двухслойных МДС, являются гиперболами.

Доказаны утверждения о локализации нулей профилирующих функций двухслойных МДС и областей просветления таких систем.

В [2] анонсирована теорема, описывающая решения классической задачи просветления (см., например, [1]) для двухслойных МДС и дана математическая постановка задачи просветления в смысле Чебышева для любого числа слоёв N (см. также [3]).

Ниже сформулирована и решена (при $N = 2$) ослабленная задача просветления в смысле Чебышева, для чего предложен метод углового "сканирования" областей просветления, позволяющий эффективно находить толщины слоёв просветляющих покрытий.

2. Проблема ***согласования*** (в радиотехнике) или ***просветления*** (в оптике) состоит в уменьшении величины $\mathbf{R_F}$ — коэффициента отражения Френеля между двумя полупространствами, путём "***включения***" между ними некоторой МДС.

Математическая постановка ***классической задачи просветления*** (см. [1]):
Для ***заданной*** частоты ω_0 минимизировать функционал: $\mathbf{R}(\omega_0; \vec{p}, \vec{\nu}) \underset{\vec{p},\vec{\nu}}{\longrightarrow} \min$.

Будем говорить, что МДС даёт просветление на частоте ω, если:

$$\mathbf{R}_N(\omega) < \mathbf{R_F}\,, \tag{1}$$

МДС даёт ***окно просветления*** (Ω_1, Ω_2), если (1) справедливо $\forall\omega \in (\Omega_1, \Omega_2)$, а ***полное*** просветление возможно на частоте ω_0, если для ω_0 существуют такие значения $\vec{p}$, $\vec{\nu}$, что: $\mathbf{R}(\omega_0; \vec{p}, \vec{\nu}) = 0$.

Показано, что в классической задаче просветления в зависимости от $\vec{p}$, $\vec{\nu}$, существует счетное множество локальных минимумов $\{\omega_0\}$ для $\mathbf{R}_N(\omega)$. В точках $\{\omega_0\}$ — $\mathbf{R}_N(\omega_0)$ одно и то же. При "удачном" выборе $\vec{p}$ — $\mathbf{R}_N(\omega_0) = 0$.

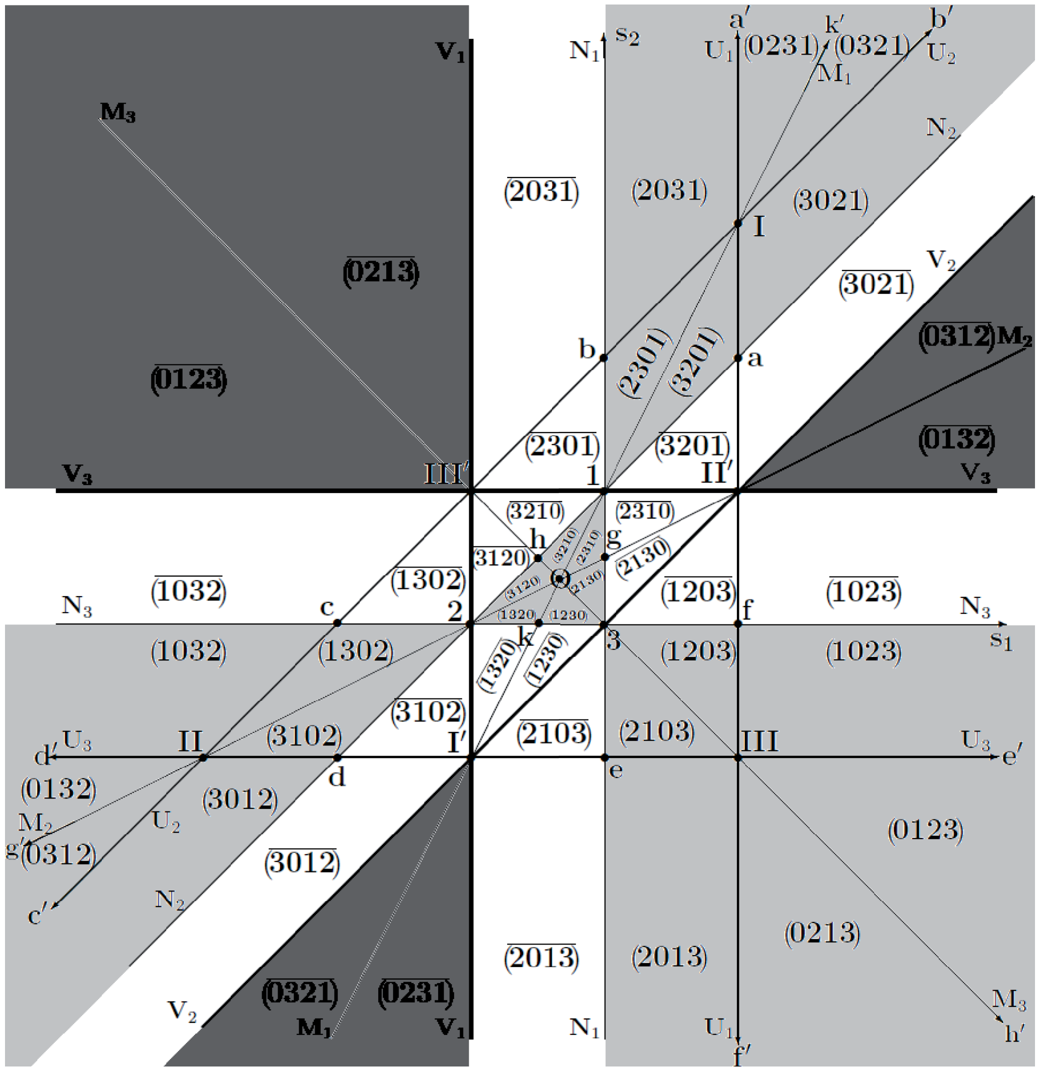


Рис. 1. Пространство параметров $\mathcal{P}_2$ двухслойных МДС — ***карта*** изменения ***свойств*** функции $F(t_1,t_2)$. Наборами чисел $(ijkl)$ отмечены области, для точек которых выполнены ***упорядочивающие*** неравенства $\alpha_i^2 < \alpha_j^2 < \alpha_k^2 < \alpha_l^2$ и условие (3). Наборами чисел $\overline{(ijkl)}$ отмечены области, для точек которых выполнены ***упорядочивающие*** неравенства, а условие (3) не выполняется. Три жирные линии ***вырождения*** $\theta_j = 1$ (на них $\alpha_j^2 = \alpha_0^2$ и $\alpha_i^2 = \alpha_l^2$, $i \neq j, 0$, $l \neq j, 0$), образуют ***средний*** треугольник $\mathbf{I}', \mathbf{II}', \mathbf{III}'$. Три полужирные линии $\theta_j = \Theta$ (на них $\alpha_j^2 = \alpha_0^2$), образуют ***большой*** треугольник $\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}$. Три тонкие линии $\theta_j = \Theta^{1/2}$ (на них $\alpha_j = 0$), образуют ***малый*** треугольник $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$. Кроме того, нанесены три медианы всех треугольников (на них $\alpha_j^2 = \alpha_k^2$). Условие (3) выполняется в замкнутом малом треугольнике и его замкнутых внешних углах.

Задача просветления в смысле Чебышева ([2]):
Для интервала $[\Omega_1, \Omega_2]$ минимизировать функционал: $\max\limits_{\Omega_1 \leqslant \omega \leqslant \Omega_2} \mathbf{R}_N(\omega; \vec{p}, \vec{\nu}) \underset{\vec{p}, \vec{\nu}}{\longrightarrow} \min$.

В [3] показано, что задача просветления в смысле Чебышева для $N = 1$ имеет единственный глобальный минимум и, возможно, конечное число, зависящее от величины интервала $[\Omega_1, \Omega_2]$, локальных минимумов.

Будем говорить, что рассматривается ***ослабленная*** задача просветления в смысле Чебышева, если минимизация в этой задаче проводится только по вектору переменных $\vec{\nu}$ (при фиксированном значении вектора параметров $\vec{p}$ в пространстве параметров $\mathcal{P}_2 = \{\vec{p}\}$).

Определим ***порождающие*** функции (см. [2]), сделав в элементах первого столбца матрицы передачи МДС подстановку:

$$t_1 = \nu_1 \cdot \omega\,,\ \ldots\,,\ t_N = \nu_N \cdot \omega \tag{2}$$

Показано, что в задачах просветления и синтеза по априори задаваемым энергетическим характеристикам МДС можно иметь дело только со второй из этих двух функций, которую будем называть ***профилирующей*** и обозначать $F(\vec{t})$, $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_N)$. Согласно определению эта функция имеет период π $\forall t_j$, $j = 1, \ldots, N$, а основной N-мерный куб её периодов будем обозначать T_0^N.

Будем говорить, что профилирующая функция при данном $\vec{p}$ имеет ***область просветления*** $G_{\vec{p}}^j$ в некотором j-ом её периоде T_j^N, если $\forall\, \vec{t} \in G_{\vec{p}}^j \subset T_j^N$: $F(\vec{t}) < \alpha_0^2$.

С учётом периодичности профилирующая функция $F(\vec{t})$ всегда имеет ***счётное*** множество областей просветления (если они вообще существуют при данном $\vec{p}$).

Для областей просветления, расположенных в одном и том же периоде профилирующей функции, но отвечающих разным значениям параметра $\vec{p}$) можно сформулировать следующий ***принцип предпочтения***:

Будем говорить, что область просветления $G_{\vec{p}_1}$ ***лучше*** области просветления $G_{\vec{p}_0}$, если $G_{\vec{p}_0} \subset G_{\vec{p}_1}$.

Если $G_{\vec{p}}$ какая-либо область просветления, то всякая МДС, получаемая из $F(\vec{t})$ по (2) с $\vec{\nu}$ так, что пересечение луча (2) с $G_{\vec{p}}$ состоит из ***более*** чем одной точки, обязательно имеет хотя бы одно ***окно просветления***.

В замкнутой области просветления $\overline{G}_{\vec{p}}$ функция $F(\vec{t})$ достигает своего минимума, который будет также достигаться и на каждом периоде. Поэтому существует счётное множество (зависящее от $\vec{p}$, $\vec{\nu} = \vec{\nu}(\vec{p})$) локальных минимумов $\{\omega_0\}$ $\mathbf{R}_N(\omega)$.

3. В пространстве параметров $\mathcal{P}_2 = \{\vec{p}\}$ есть такие линии, что поведение профилирующей функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ ***качественно*** меняется при "переходе" точки $\vec{p}$ через эти линии.

Т.к. в приложениях функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ имеется ***характерный*** параметр: $\Theta = p_3/p_0$, то в $\mathcal{P}_2$ удобно ввести "***показательные***" координаты s_1, s_2: $\theta_1 \overset{\text{def}}{=} \Theta^{s_1 + 1/2}$, $\theta_3 \overset{\text{def}}{=} \Theta^{-s_2 + 1/2}$, а тогда $\theta_2 = \Theta^{s_2 - s_1}$.

Пространство $\mathcal{P}_2$ в координатах s_1, s_2 изображёно на рис. 1.

4. В квадрате периодов профилирующей функции T^2 разделённом прямыми $t_1 = \frac{\pi}{2}, t_2 = \frac{\pi}{2}$ на четыре "четверти" $T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}$ существуют две замкнутые четы-

рёхугольные области, в которых ***не существует*** нулей профилирующей функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ ***ни при каких*** значениях параметров $s_1, s_2 \in \mathcal{P}_2 = \{\vec{p}\}$. Расположены безнулевые четырёхугольники вдоль главных диагоналей четвертей T_{10}, T_{01} центральносимметрично друг другу (относительно центра T^2). Граница каждого безнулевого четырёхугольника состоит из двух отрезков границы квадрата T^2 и двух кривых, для которых можно выписать явные параметрические уравнения. Обе кривые исходят из полувершины $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, обращены выпуклостью навстречу друг другу и соединяют указанную полувершину с соответствующими точками границы T^2.

5. Условие:

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 < 0 \tag{3}$$

является необходимым и достаточным для существования внутренних для четвертей T_{ij} нулей функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$. Эти нули при изменении параметров s_1, s_2 в областях доминирования **I, II, III, O** парны и заполняют части треугольников: для **I** — северо-восточную половину $\mathbf{T_{10}}$ и юго-западную $\mathbf{T_{01}}$, для **II** — юго-западную половину $\mathbf{T_{10}}$ и северо-восточную $\mathbf{T_{01}}$, для **III** — юго-западную половину $\mathbf{T_{00}}$ и северо-восточную $\mathbf{T_{11}}$, для **O** — северо-восточную половину $\mathbf{T_{00}}$ и юго-западную $\mathbf{T_{11}}$. Нули $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$, отвечающие разным значениям s_1, s_2, простые и различны (за исключением полувершинных решений). Каждый неполувершинный нуль функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ однозначно определяет соответствующие этой функции значения параметров s_1, s_2.

Список литературы

[1] М. Борн, Э. Вольф Основы оптики. М. "Физматлит 1970г.

[2] Ю. И. Худак О задаче просветления в классической постановке, Доклады АН, 2013, т.448, № 5, 1-4.

[3] Ю. И. Худак О наилучшем однослойном просветляющем покрытии для интервала частот, ЖВМ и МФ, 1990, т.30, №2, 325-327.

[4] I. Akhmedov, Yu. Hudak The Anti-reflective Coating for The Normal Incidence of Light, PROGRESS IN ANALYSIS, Proceeding of the 8th Congress of the International Sosiety for Analysis, its Applications, and Computation (ISAAC) (22-27 August 2011), Volume 1, Moskow, Peopless' Frendship University of Russia Publisher, 2012, 128-137.

Эмпирическая верификация, восстановление и коррекция субъективной модели

Балакин Д.А.* Нагорный Ю.М.* Пытьев Ю.П.*

Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2, Физический факультет

kvorosh@gmail.com imtech5@umail.ru yuri.pytyev@gmail.com

+7(903)203-33-08 +7(916)523-92-42 +7(916)755-45-81

В докладе рассмотрены методы эмпирической верификации и эмпирического восстановления [1, 2] предложенной модельером-исследователем (м.-и.) модели (его) субъективных суждений – пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ с мерами правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, определяющего его интеллектуальный диалог с моделью объекта исследования, заданной как зависящее от неизвестного параметра $x \in X$ вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}(\cdot; x))$. Неопределённый элемент (н.э.) $\widetilde{x}$ моделирует неизвестный параметр $x \in X$, меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}} : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}} : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ характеризуют модальности субъективных суждений м.-и. об истинности каждого $x \in X$ значениями $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$, причем численные значения мер, отличные от 0 и 1, не имеют содержательной интерпретации, а важна лишь их упорядоченность, подробнее см. [3].

Если м.-и. оказались доступны данные наблюдений за объектом исследования, он может использовать их как для эмпирического построения модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ его субъективных суждений, так и для оценки её адекватности цели исследования. В таком случае м.-и. для каждого возможного значения параметра $x \in X$ формулирует статистическую задачу проверки гипотезы $H(x) = \{x\}$ против класса $K(x)$ альтернативных $H(x)$ гипотез о возможных, отличных от x, значениях $x \in X$, например, против $K(x) = X \setminus \{x\}$, где x — неизвестное значение параметра вероятности, контролировавшей данные наблюдений. В докладе рассмотрены:

- методы эмпирического построения модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, основанные на данных наблюдений за объектом и на равномерно наиболее мощных критериях принятия гипотезы,
- методы эмпирического построения модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, основанные на данных наблюдений за объектом и на формализме оценивающих множеств максимального правдоподобия,
- анализ состоятельности субъективной модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ м.-и., основанный на данных наблюдений, и коррекция модели с помощью этих же данных,
- эмпирическое оценивание правдоподобия согласия субъективной модели м.-и. и данных наблюдений за объектом.

В случае, когда существует класс равномерно относительно $x' \in K(x)$ оптимальных областей принятия $H(x)$, $x \in X$, м.-и. может для каждой вероятности pr принятия гипотезы $H(x)$ определить следующие параметрические множества: множество элементарных событий $\Phi(x; \mathrm{pr}) \in \mathcal{A}$, при которых принимается $H(x)$, и множество $\Phi^{-1}(\cdot; \mathrm{pr}) \in \mathcal{P}(X)$ тех $x \in X$, при которых принимается $H(x)$ при данном результате наблюдения, если $H(x)$ и в самом деле верна. М.-и. может определить $\Phi^{-1}(\cdot; \mathrm{pr})$ и непосредственно как оценивающее параметр $x \in X$ множество максимального правдоподобия.

Свойства $\Phi(x; \mathrm{pr})$ и $\Phi^{-1}(\cdot; \mathrm{pr})$ позволяют м.-и. оценивать неизвестный параметр $x \in X$ значениями случайного (зависящего от данных наблюдений) н.э. и считать его эмпирической оценкой н.э. $\widetilde{x}$, определяющего меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$. Соответственно случайный н.э.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 14-07-00441.

определяет случайные меры Pl, Bel и пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}, \mathrm{Bel})$ как эмпирическую (статистическую) модель его субъективных суждений о возможных значениях неизвестного параметра x вероятности, контролировавшей данные наблюдений. Поскольку для восстановления, например, меры Pl важна только упорядоченность её значений, то:

1. Чем больше минимальная вероятность $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, при которой гипотеза $H(x)$ принимается, тем менее правдоподобно значение x;
2. Чем больше максимальная вероятность $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, при которой гипотеза $H(x)$ отвергается, тем менее правдоподобно значение x.

В докладе показано, что эти замечания определяют статистическую модель случайного н.э. вариантами случайных распределений правдоподобий его значений.

М.-и. может использовать случайный н.э. для анализа состоятельности своей модели н.э. $\widetilde{x}$, оценивая максимальную вероятность получить либо результаты наблюдений, ожидаемые при наиболее правдоподобном значении параметра, либо — еще более отклоняющиеся от фактически полученных. Если она мала, то субъективная модель н.э. плохо согласуется с его статистической оценкой. В противном случае м.-и. может использовать последнюю для коррекции своей модели, применив методы построения «коллективной экспертизы», рассмотренные в [2, §3.9].

Судить о том, насколько предложенная м.-и. модель н.э. согласуется с данными наблюдений, следует, не обращаясь к случайному н.э. Чем больше минимальная вероятность покрытия данных наблюдений неопределенным множеством $\Phi(\widetilde{x}; \mathrm{pr})$, при которой правдоподобие покрытия равно единице, тем значительнее наблюдения свидетельствует против субъективной модели н. э. Поэтому случайное правдоподобие истинности неопределенного высказывания «модель н.э. $\widetilde{x}$ согласуется с данными наблюдений» определяется этой минимальной вероятностью.

Заметим, что в представленных методах эмпирической проверки адекватности и эмпирической коррекции модели субъективных суждений, в отличие от байесовского подхода, рассмотренного в [4,5], для эмпирического оценивания не необходимо указывать неинформативное распределение вероятностей, а в отличие от теории Демпстера–Шеффера [6,7], способ эмпирического оценивания не зависит от правила построения совокупной оценки.

Литература

[1] Пытьев Ю. П. Математическое моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 4. — С. 102–125. — doi: 10.1134/S2070048213060094.

[2] Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности. — 2 изд. — М. : Физматлит, 2014.

[3] Пытьев Ю. П., Фаломкина О. В. Субъективное моделирование в научных исследованиях // Всероссийская конференция «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы». — Москва, 2014.

[4] Probabilistic Networks and Expert Systems / R. G. Cowell, A. P. Dawid, S. L. Lauritzen, D. J. Spiegelhalter. — Springer-Verlag, 1999.

[5] Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В. Байесовские сети: Логико-вероятностный подход. — СПб. : Наука, 2006.

[6] Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence. — Princeton University Press, 1976.

[7] Kłopotek M. A., Wierzchoń S. T. Empirical Models for the Dempster-Shafer-Theory // Belief Functions in Business Decisions / Ed. by R.P. Srivastava, T.J. Mock. — Heidelberg : Physica-Verlag HD, 2002. — Vol. 88 of Studies in Fuzziness and Soft Computing. — P. 62–112.

УДАЛЕНИЕ ЛИШНИХ НЕРАВЕНСТВ ИЗ СИСТЕМЫ

Бедринцев А. А., Чепыжов В. В.

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

127994, г. Москва, ГСП-4, Большой Каретный переулок, 19, стр. 1

Тел.: +7 (926) 526 87 47, e-mail: alekseybed@phystech.edu, chep@iitp.ru

Пусть дан набор $P=\{p_i\}_{i=1}^{N}$ полупространств $p_i=\left\{x\in {}^{d}\,\middle|\,a_i^T x\le b^i\right\}$. Их пересечение есть многогранник $M(P)=\bigcap_{i=1}^{N}p_i$, задаваемый системой линейных неравенств $M(P)=\left\{x\in {}^{d}\,\middle|\,Ax\le b\right\}$, где A - матрица размером $N\times d$, строки которой - a_i^T, а $b=\left(b^1,...,b^N\right)^T$, неравенство между векторами понимается покомпонентно. Пусть $M(P)\ne\varnothing$, т.е. система неравенств совместна.

Рассмотрим такие подмножества $Q\subseteq P$, что $M(Q)=M(P)$, т.е. множества решений систем неравенств, задающих Q и P, совпадают. Неравенства, задающие элементы Q, естественно называть *активными*, а неравенства, соответствующие элементам $P\setminus\mathrm{Q}$ - *лишними*. Поставим задачу нахождения минимального подмножества активных неравенств, имеющих то же множество решений, что и исходная система.

Такая задача возникает в инженерной практике. При математическом моделировании геометрические и физические характеристики разрабатываемого объекта, параметры его функционирования и внешней среды объединяются в вектор. На значения его параметров накладываются ограничения, которые задают необходимые условия корректности представления данным вектором реального объекта. Из предметной области известны границы изменения каждой отдельной величины и неравенства с несколькими переменными. Заметим, что если даны нелинейные выпуклые ограничения, то они могут быть с необходимой точностью линеаризованы и представлены в виде системы линейных неравенств.

Ключевым этапом разработки технического решения является оптимизация некоторого функционала. При этом система неравенств включается в состав ограничений оптимизационной задачи. Лишние неравенства приводят к увеличению времени оптимизации.

Для описания и упрощенного рассмотрения ограниченного многогранника $M(P)$ применяется эллипсоид Дикина, который имеет следующие свойства:

• он лежит в многограннике;

• при растяжении в N раз относительно центра содержит многогранник;

• центр эллипсоида Дикина, который принято называть аналитическим центром, есть точка с максимальным произведением расстояний до гиперплоскостей всех граней [1].

Необходимо отметить, что эллипсоид Дикина зависит не от многогранника, а от системы неравенств. Можно доказать, что несколько раз добавляя в систему линейное неравенство, не меняющее ее множество решений, можно переместить аналитический центр многогранника в произвольную его внутреннюю точку [1]. Такое изменение системы неравенств, не меняющее системы решений, влияет и на полуоси эллипсоида, т.е. на описание размеров многогранника. Для описания пространства допустимых значений с помощью эллипсоида Дикина нужно удалить лишние неравенства, которые не меняют многогранник, но искажают эллипсоид.

Изучение литературы [1-4] показало, что существует множество способов приближенного и точного решения данной задачи. В [2-3], с точки зрения авторов, описан наиболее перспективный подход к точному решению поставленной задачи. Он основан на решении серии оптимизационных задач вида

$$\begin{aligned} &\min_x a_i^T x \\ &s.t. \quad A_i y \le b_i. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь A_i - матрица, полученная из матрицы A удалением i-ой строки, а вектор b_i получен удалением i-ого элемента из вектора b. Если оптимальное значение целевой функции не больше b^i, то i-ое неравенство является лишним.

В базовом виде алгоритм формулируется следующим образом:

1. Положим $Q = P$.
2. Для каждого элемента Q с помощью решения задачи типа (1) выяснить, является ли соответствующее неравенство лишним. Если да, то исключить его из системы.
3. Q — искомое минимальное подмножество активных неравенств.

В настоящей работе проанализирована вычислительная сложность данного алгоритма и предложен способ его улучшения. Он заключается в более эффективном построении начального значения Q за счет выбора тех неравенств, которые точно являются активными. Для этого в многограннике выбирается произвольная внутренняя точка, случайное направление (методы «Hit-and-run», «Billiard walk» блуждания внутри многогранника [8-9]) и ищется пересечение луча с гиперплоскостями. Гиперплоскость, ближайшая к точке, соответствует активному ограничению. Остальные неравенства из исходного набора P проверяются на активность по отношению к системе Q.

Литература

[1] *Boyd S.* Convex Optimization. – Cambridge: UniversityPress. - 2004.

[2] *Paulraj S., Sumathi P.* A Comparative Study of Redundant Constraints Identification methods in Linear programming Problems. – Mathematical Problems in Engineering. – Vol. 2010, Article ID 723402. – 2010.

[3] *Caron R.J., McDonald J.F., Ponic C.M.* A degenerate extreme point strategy for the classification of linear constraints as redundant or necessary. – Journal of Optimization Theory and Applications. – Vol. 62, no. 2. – 1989. – pp. 225–237.

[4] *Черников С.Н.* Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968.

[5] *Нестеров Ю.Е.* Методы выпуклой оптимизации. – М.: «МЦМНО» - 2010.

[6] *Хачиян Л.Г.* Сложность задач линейного программирования. – М.: Знание. – 1987. – (Новое в жизни, науке и технике. Сер. «Математика, кибернетика»; №10).

[7] *Anstreicher K.* Linear Programming in $O\left(\frac{n^3}{\ln n}L\right)$ operations. – SIAM J. on Optimization. – Vol. 9, No 4. – 1999. – pp. 803-812.

[8] *Smith R.L.* Efficient Monte-Carlo Procedures for Generating Points Uniformly Distributed over Bounded Regions. – Operations Research. – Vol. 32. – 1984. – pp. 1296-1308.

[9] *Gryazina E., Polyak B.* Random sampling: Billiard Walk algorithm. – European Journal of Operational Research. – Vol. 238. – 2014. – pp. 497-504.

Расчет аксиально-симметричного трехзазорного резонатора

Боголюбов А. Н., Ерохин А. И., Шкитин А. В.

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2

e-mail: alshkit@yandex.ru

Введение

В данной работе рассматривается аксиально-симметричный трехзазорный резонатор. Резонаторы подобного типа находят широкое применение в технике КВЧ и СВЧ.

В общем случае поперечное сечение рассматриваемой системы может иметь сложную геометрию, поэтому в данной работе применяется метод R-функций[1]. Он позволяет построить такую числовую функцию, которая равна нулю на границе плоской области достаточно сложной формы.

Постановка задачи

Рассмотрим трехзазорный цилиндрический резонатор с идеально проводящей поверхностью, поперечное сечение которого изображено на рис.1:

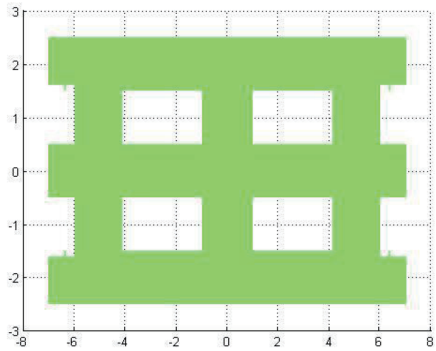


Рис.1 Поперечное сечение трехзазорного резонатора

Электромагнитные колебания в рассматриваемом резонаторе описываются системой уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} rot\,\boldsymbol{H} = -i\boldsymbol{k}\boldsymbol{E} \\ rot\,\boldsymbol{E} = i\boldsymbol{k}\boldsymbol{H} \\ div\,\boldsymbol{H} = 0 \\ div\,\boldsymbol{E} = 0 \end{cases}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{k}$ – волновой вектор, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ – вектора электрической и магнитной напряженности поля.

На границе резонатора для касательной компоненты поля $\boldsymbol{E}$ выполняется условие Дирихле:

$$E_\tau = 0.$$

Поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ представимы с помощью поляризационного потенциала $\boldsymbol{\Pi}$:

$$\boldsymbol{E} = grad\,div\,\boldsymbol{\Pi} + k^2\boldsymbol{\Pi} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{H} = -ik\,rot\,\boldsymbol{\Pi}, \qquad (3)$$

где все компоненты потенциала, кроме направленной вдоль оси z, равны 0. $\boldsymbol{\Pi}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца с граничными условиями Дирихле:

$$\Delta\boldsymbol{\Pi} + k^2\boldsymbol{\Pi} = 0 \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{\Pi}|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (5)$$

Представим z-компоненту **П** в следующем виде:

$$\Pi = u(r,z)e^{im\varphi}, \qquad (6)$$

тогда для $u(r,z)$ получим краевую задачу:

$$\begin{cases} r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + r^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + r^2k^2u = m^2u \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

Проведя преобразование, аналогичное [2], придем к задаче:

Найти такие функции $u \in H_1^0$ в Ω, кторые удовлетворяют следующему уравнению для любых функций $v \in H_1^0$ в Ω:

$$\int_\Omega r(\nabla u, \nabla v)d\sigma - \lambda^2\int_\Omega \frac{uv}{r}d\sigma - k^2\int_\Omega ruvd\sigma = 0. \qquad (8)$$

Численная реализация

Решение задачи будем искать в виде:

$$u = U\omega, \qquad (9)$$

где ω – R-функция Рвачева.

Для поиска функции U используем метод Галеркина. В качестве базисных функций выберем полную систему f_i сдвигов и сжатий атомарной функции $\mathrm{fup}_2(r,z)$, которая с хорошей точностью позволяет приблизить искомую функцию[1]:

$$u = \omega\sum_{i=1}^{i=N} c_i f_i, \qquad (10)$$

тогда задача (8) сводится к матричной задаче вида:

$$Ac + \lambda Bc = k^2Fc. \qquad (11)$$

c – столбец неизвестных коэффициентов, а A, B, F – симметричные матрицы.

Результаты

На основе предложенной математической модели был реализован алгоритм расчета собственных колебаний и собственных частот трехзазорного аксиально-симметричного резонатора с сечением, изображенным на рис. 1. m взято равным 0.

Нормируя скорость света $c = 1$, получим первую собственную частоту $\omega_1 = 6.60$. Соответствующее ей распределение поля E_r изображено на рис.2:

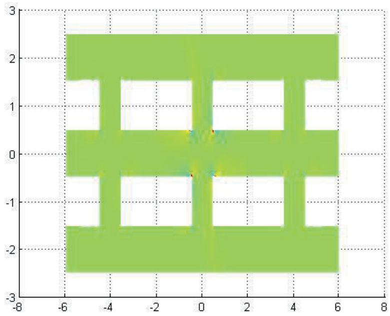


Рис.2. Распределение компоненты E_r для первой собственной моды

Из рис. 2 видно, что поле в углах имеет особенности, что хорошо согласуется с физикой данного процесса[3].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31397 *мол_а, а так же гранта* № 12-01-00479.

Литература

1. Кравченко В. Ф.,Басараб М.А., «Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики», изд. «Физматлит», 2004 г.
2. А.Н. Боголюбов, А.И. Ерохин, И.Е. Могилевский, Н.Е. Шапкина, // Вестник Московского Университета, Серия 3. Физика. Астрономия. 2009 г., №2, стр. 21-23
3. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Могилевский И.Е., Свешников А.Г. Особенности нормальных волн неоднородного волновода с входящими ребрами // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. N7. С.787-794.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ РАЗЛИЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

А. Г. Бодров, А.А. Никитин

НИУ Высшая школа экономики
101000, Российская Федерация, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20
Тел.: 89035720263, e-mail: drinob@gmail.com

МГУ имени М.В. Ломоносова
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, д. 1
Тел.: 89057620653, e-mail: nikitin@cs.msu.ru

В настоящей работе продолжается изучение интегрального уравнения равновесия, возникающего в модели популяции стационарных биологических сообществ из работ Ульфа Дикмана (Ulf Dieckmann) и Ричарда Лоу (Richard Law) [1], [2]. На этот раз авторами рассмотрены многомерные случаи данного уравнения:

$$(b + d\omega(\mathbf{x}))C(\mathbf{x}) - \iint_{\mathbb{R}^n} b\, m(\boldsymbol{y})C(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} - \frac{db}{b-d} m(\mathbf{x}) \iint_{\mathbb{R}^n} \omega\,(\boldsymbol{y})C(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0, \qquad (1)$$

где параметр n принимает значения $1, 2, 3$, а вектора $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. На функции ω и m наложен ряд условий, связанных с их биологической интерпретацией. Кроме того, исходя из той же биологической интерпретации, мы считаем данные функции, а также решение C - радиально-симметричными.

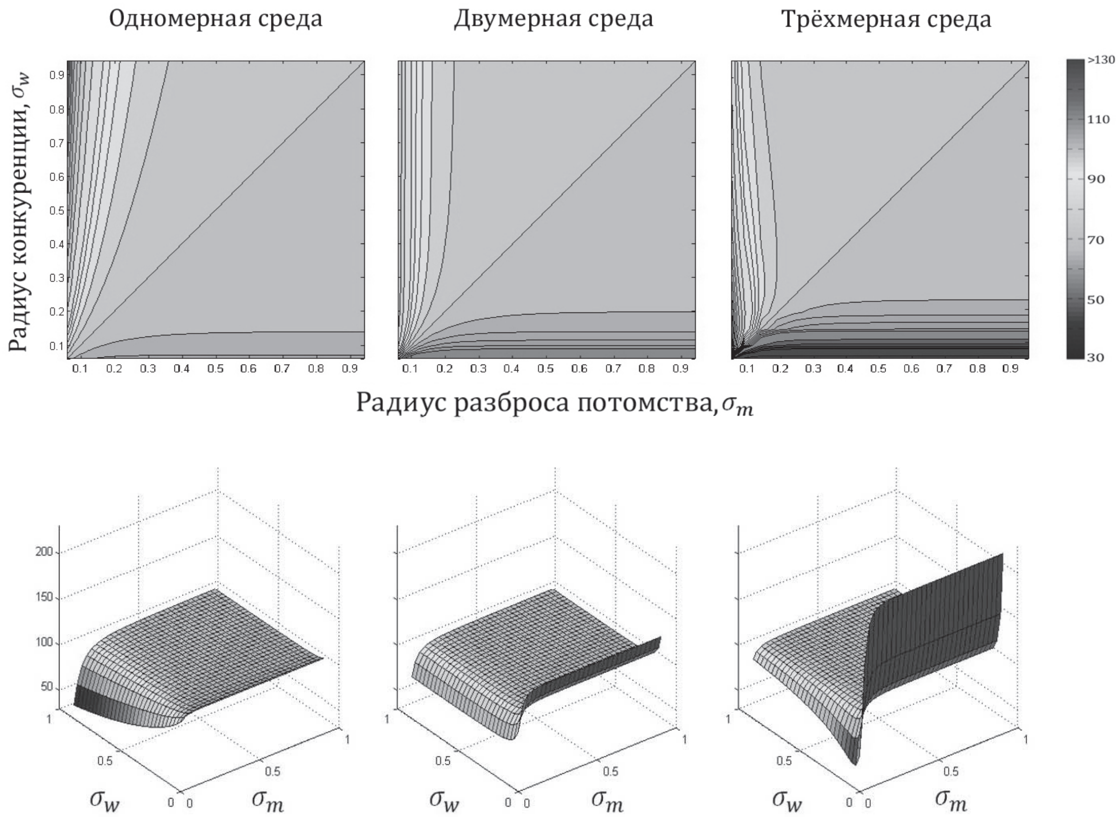
Авторами были рассмотрено уравнение (1) с интегральными ядрами Гаусса:

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma_\omega|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\Sigma_\omega{}^{-1}\boldsymbol{x}},\ m(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma_m|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\Sigma_m{}^{-1}\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$$

в которых Σ_ω, Σ_m - диагональные матрицы с квадратами параметров σ_ω и σ_m на главной диагонали. Многомерные интегральные уравнения были приведены к одномерному. Тем самым данный случай был приведёт к обобщению случая, изученного в работе [3], в которой, между тем, рассматривалось одномерное уравнение (1) с гораздо более простыми интегральными ядрами, чем те, что были получены в данной работе, после приведения интегралов к однократным.

Были построены графики зависимостей первого момента от радиусов конкуренции (competition radius) и разброса потомства (dispersal radius). Интересным является результат не существования решения интегрального уравнения (1) с параметром $d \neq 0$.

На чертеже ниже изображена сравнительная визуализация плотности поплуяции для одно-, двух- и трехмерной среды обитания. На нём хорошо видно, что модель иллюстрирует падение плотности при групповом распределении особей (*clustering*, $\sigma_\omega >> \sigma_m$) и возрастание плотности при равномерном распределении особей (*overdispersion*, $\sigma_\omega << \sigma_m$). Интересным эффектом данной модели является то, что плотность популяции с групповым распределением восстанавливается с ростом радиуса конкуренцииσ_ω, и данный эффект сильнее выражается при увеличении размерности среды.



Литература*:*

1. Dieckmann U and Law R (2000). Relaxation projections and the method of moments. The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity, pp. 412-455. Cambridge University Press
2. Law R and Dieckmann U (2000), A dynamical system for neighborhoods in plant communities. Ecology vol. 81: pp. 2137-2148
3. Бодров А.Г., Никитин А.А. Качественный и численный анализ интегрального уравнения, возникающего в модели стационарных сообществ // Доклады академии наук, том 455, №5, с. 507-511, 2014г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭРГОНОМИЧЕСКОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ СИСТЕМЫ ОТОБРАЖЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЕ

Булгаков Д.Н., Денисова Т.Е.

Московский городской психолого-педагогический университет

127051, Москва, ул. Сретенка, д. 29

Тел.: 84952566617, e-mail: dnbulgakov@mail.ru, tdenissova@mail.ru, DenisovaTE@mgppu.ru

Следящей системой (СС) называется техническая или эргатическая система, воспроизводящая исполнительным механизмом движение задающего устройства или, в общем случае, некоторый процесс. В современной технике следящие системы часто являются элементами сложных комплексов, предназначенных для управления процессами различной природы.

Эффективность функционирования СС, включенной в технический комплекс, зависит от многих факторов, одним из которых является информационное обеспечение работы системы. Очевидно, что непрерывное получение СС информации об отслеживаемом процессе, особенно в случае его стохастической природы, упрощает организацию всего технического комплекса. Однако такое построение комплекса часто бывает экономически неоправданным или просто невозможным, например, когда элементом СС является человек-оператор с его объективно ограниченными психофизиологическими возможностями.

В данной работе для СС, отслеживающей сумму стационарного гауссовского и пуассоновского процессов, по заданному качеству ее функционирования определяются необходимая частота и количество поступающей в СС информации об отслеживаемом случайном процессе, а также необходимая пропускная способность СС. Полученные результаты могут использоваться при конструировании СС для определения по планируемому качеству работы СС технических требований к ее звеньям и для оценки временной и информационной загрузки человека-оператора при его работе в вычислителе СС.

Одной из сложнейших методологических проблем при планировании комплексных исследований в инженерной психологии является установление границ возможностей как эмпирических, так и теоретических методов исследования и организация взаимного дополнения этих методов. Еще в [1] было отмечено, что «технические системы, совместимые с характеристиками человека и присущими ему биологическими ограничениями, могут быть созданы только на базе количественного анализа и эксперимента при условии, что поведение человека и машины может быть описано в сопоставимых понятиях». Данное исследование обобщает результаты работ [3]-[6], в которых проведено расчетно-экспериментальное исследование эргономического качества пилотажно-навигационной части системы отображения информации (СОИ) самолета при штурвальном заходе на посадку.

В сложных системах «человек – машина – среда», которые в дальнейшем будут называться эргатическими системами, связующими звеньями между оператором и исполнительными техническими устройствами являются СОИ и органы управления. СОИ предназначена для предоставления оператору необходимой для выполнения стоящих перед эргатической системой задач информации и информации о состоянии технической части эргатической системы. Поэтому эргономическое качество СОИ оказывает сильное влияние на эффективность и безопасность работы эргатической системы в целом.

В работе решается проблема объективной оценки эргономического качества траекторной составляющей СОИ СС. Например, в терминах теории СС описывается работа системы «пилот – самолет – атмосфера» при заходе на посадку по приборам в режиме штурвального управления. Под траекторной составляющей СОИ СС будем понимать ту часть

СОИ, которая дает оператору СС визуальную параметрическую информацию о значениях и о динамике тех параметров, которые определяют физическое или механическое положение СС в ее фазовом пространстве, - так называемых траекторных параметрах. В дальнейшем изложении для краткости термин «траекторная составляющая» (СОИ) будет опускаться.

Основной целью исследования процесса взаимодействия оператора с СОИ СС является решение практически важной задачи создания объективных методов эргономической экспертизы СОИ СС. В основу разработанных методов положено понятие эргономичности СОИ как меры соответствия между объективно необходимой для выполнения основной задачи СС – отслеживания с заданной точностью случайного процесса – приборной информацией и той необходимой для достижения этой цели информацией, реальную возможность получения, восприятия и переработки в адекватное ситуации управление которой обеспечивает оператору данное СОИ. Но эргономичность СОИ проявляется только опосредованно, через характеристики процесса взаимодействия оператора с СОИ и обеспечиваемое СОИ качество управления СС.

Основным результатом представленного исследования является введение системы обобщенных числовых показателей эргономического качества СОИ СС, состоящей из показателя относительной зрительной загрузки оператора по траекторной информации, траекторно-вероятностного показателя и структурного показателя [6]. Введенная система обобщенных показателей дает объективные числовые оценки основным составляющим эргономичности СОИ: соответствию предъявляемой информации возможностям оператора по ее восприятию, качеству представления информации и обеспечиваемому СОИ качеству работы СС. Область практического применения этой системы обобщенных показателей не ограничивается исследованием соответствия находящихся в эксплуатации типов СОИ эргономическим требованиям и задачей выбора наиболее совершенной в эргономическом отношении СОИ из нескольких конкурирующих образцов. Проведенное по этой системе исследование нескольких типов авиационных пилотажно-навигационных СОИ установило возможности этой системы определять конкретные недостатки СОИ и способы их устранения, то есть определять и обосновывать направления эргономического совершенствования СОИ СС.

Литература

1. Шеридан Т.Б. Феррелл У.Р. Системы человек – машина. – М.: Машиностроение, 1980.
2. Булгаков Д.Н. Следящие системы с дискретным вводом информации// Моделирование и анализ данных. – М.: МГППУ. 2011. - № 1. – С. 76-86.
3. Булгаков Д.Н. Математические методы эргономического проектирования СОИ самолета// Техника. Информатика. Экономика. Сер. СОИ. – М.: ВИМИ. – 1994. – Вып. 1 – С. 3-11.
4. Булгаков Д.Н., Столяров Н.Н. Методология исследования процесса взаимодействия пилота с СОИ при математическом моделировании системы «пилот – ВС – атмосфера»// Научный вестник МГТУ ГА. Сер. Аэромеханика и прочность. – М.: МГТУ ГА. – 2002. - № 50. – С. 61-65.
5. Булгаков Д.Н., Столяров Н.Н. О закономерностях процесса взаимодействия пилота с СОИ, определяемых аэродинамическими характеристиками ВС и заданной точностью пилотирования// Научный вестник МГТУ ГА. Сер. Аэромеханика и прочность. – М.: МГТУ ГА. - 2002. - №50. – С.66-71.
6. Булгаков Д.Н., Столяров Н.Н. Объективные методы эргономической экспертизы СОИ самолета// Научный вестник МГТУ ГА. Сер. Аэромеханика и прочность. – М.: МГТУ ГА. 2003. - №59. – С.51-56.

СКРЫТЫЕ АТТРАКТОРЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ

И.М.Буркин, Нгуен Нгок Хиен

Тульский государственный университет

300012, Тула, пр-т Ленина д.92

Тел.:89105803090, e-mail i-burkin@yandex.ru

При наличии внешних возмущений в системах управления летательными аппаратами могут возникать неустойчивые режимы, которые способны привести к катастрофическим последствиям. Такие режимы, обычно не обнаруживаются при используемом в инженерной практике приближенном линейном анализе систем управления. Сконструированные на основе такого анализа системы, как правило, нормально функционируют в том случае, когда задающие и возмущающие воздействия на систему достаточно малы. Если же возмущения оказываются большими, то система управления не может парировать возникшие рассогласования из-за наличия нелинейности типа "насыщение" в контуре управления.

Хорошо известны случаи входа космического аппарата в неконтролируемое вращение. Исследования переходных режимов при гашении подобного вращения приводят к необходимости разработки математической теории глобального анализа систем ориентации. На необходимость развития такой теории указывал академик Б.В. Раушенбах, отмечая сложности управления космическим аппаратом при быстрых разворотах.

При исследовании математических моделей систем управления полетом самолета и ракеты при учете "насыщения" обнаруживаются так называемые *скрытые аттракторы*, наличие которых и приводит к катастрофическим последствиям.

Линеаризованная модель системы управления ракетой-носителем (flexible space launch vehicle) описывается системой уравнений в R^4 [2,3]:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\xi,\ \xi = \varphi(\sigma),\ \sigma = c^T x, \tag{1}$$

где

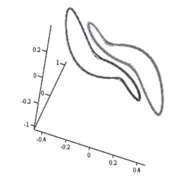
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_y^{\psi} & 0 & -a_y^{\dot\psi} & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & -2\xi_1\omega_1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_y^{\delta_r} \\ l_1\omega_1^2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -k_p \\ -k_p \\ -k_D \\ -k_D \end{pmatrix}, \varphi(\sigma) = sat(\sigma).$$

При исследовании системы (1) в инженерной практике обычно полагают $\varphi(\sigma) = \sigma$. Легко проверить, что при этом получается устойчивая в целом линейная система, на основании чего делается вывод о штатном режиме работы системы управления. Такой вывод, однако, справедлив только при малых возмущающих воздействиях на систему, поскольку он не учитывает истинный вид нелинейности $\varphi(\sigma) = sat(\sigma)$.

Предлагается аналитико-численный метод поиска скрытых аттракторов в системах вида (1), который позволяет обнаружить в исследуемой системе с нелинейностью $\varphi(\sigma) = sat(\sigma)$ наличие пары орбитально асимптотически устойчивых циклов, имеющих малую область притяжения.

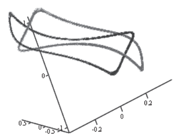
Ниже проводится результат исследования рассматриваемой модели при следующих значениях параметров системы [3]: $a_y^{\psi} = -4c^{-2}$, $a_y^{\dot\psi} = 0.4c^{-1}, a_y^{\delta_r} = 14c^{-2}, \omega_1 = 2c^{-1}, \xi_1 = 0.03$, $l_1 = -0.12c^{-2}$, $M = 0.174$ $k_p = 5, k_D = 2$.

На рисунках 1 и 2 представлены проекции скрытых циклов в подпространства размерности 3.



$\left(z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}\right), \left(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\right)$

Рис.1



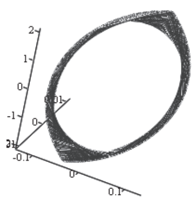
$\left(z^{(2)}, z^{(3)}, z^{(4)}\right), \left(v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}\right)$

Рис.2

Как показано в работе[1], система управления углом атаки неустойчивого самолета может быть представлена в виде (1) с

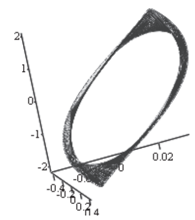
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -5.56 & 19.1 & -0.556 & -2.41 & -145 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -26.1 \\ 89.6 \\ -2.61 \\ 54.5 \\ 763 \end{pmatrix}, \varphi(\sigma) = sat(\sigma).$$

Вновь легко убедиться, что при замене нелинейности типа "насыщение" на линейную функцию $\varphi(\sigma) = \sigma$, получаем устойчивую в целом систему. Учет вида нелинейности и использование предлагаемого метода поиска скрытых колебаний позволяет обнаружить наличие в исследуемой системе скрытого аттрактора, область притяжения которого не содержит точек малой окрестности ее стационарных состояний (рис.3, 4).



$\left(z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}\right)$

Рис.3



$\left(z^{(3)}, z^{(4)}, z^{(5)}\right)$

Рис.4

Проведенные исследования подтверждают вывод о том, что использование только линейного анализа при проектировании систем управления летательными аппаратами не дает гарантии отсутствия в системе сложных колебательных режимов, которые позволяет выявить только специальным образом организованный ее нелинейный анализ.

Литература

1. Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Pogromsky A.Yu. Hidden Oscillations in Aircraft Flight Control System with Input Saturation. IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 2013, vol.5, no.1, pp.75-79. (doi: 10.3182/20130703-3-FR-4039.00026).
2. Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Seledzhi S.M. Hidden oscillations in stabilization system of flexible launcher with saturating actuators. IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 2013, vol.19, no.1, pp.37-41. (doi: 10.3182/20130902-5-DE-2040.00040).
3. Hahs D., Sorrells J. Dynamic vehicle control (Problem). Proc. American Control Conf.(ACC 1991). 1991, Boston, USA, pp. 2967-2968.

ПОГРАНСЛОЙНЫЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ С КРАТНЫМ КОРНЕМ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Бутузов В.Ф.

МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

119991, Москва, МГУ, физический факультет, кафедра математики

Тел.: (495)9394859, e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Асимптотические разложения погранслойных решений сингулярно возмущенных задач с кратным корнем вырожденного уравнения существенно отличаются от асимптотик в случае простого (однократного) корня. Отметим эти отличия на примере краевой задачи

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = f(u,x,\varepsilon), \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(0,\varepsilon) = u^0, \quad u(1,\varepsilon) = u^1, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр,

$$f(u,x,\varepsilon) = h(u,x)\big(u-\varphi(x)\big)^2 - \varepsilon f_1(u,x,\varepsilon), \quad h(u,x,) > 0.$$

Вырожденное уравнение $f(u,x,0) = 0$ имеет двукратный корень $u = \varphi(x)$. В отличие от случая простого корня для существования погранслойного решения задачи (1), (2) принципиальное значение имеют следующие требования к граничным значениям решения и к функции $f_1(u,x,0)$:

$$u^0 > \varphi(0), \quad u^1 > \varphi(1), \quad f_1\,(\varphi(x),x,0) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le 1.$$

При этих условиях асимптотика погранслойного решения задачи (1), (2) состоит, как и в случае простого корня вырожденного уравнения, из регулярной части, главным членом которой является функция $\varphi(x)$, и двух погранслойных частей. Но при этом, в отличие от случая простого корня, регулярная часть асимптотики является рядом по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ (а не ε, как в случае простого корня), а погранслойные части – рядами по степеням $\varepsilon^{1/4}$. Пограничные слои в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ содержат по три зоны. В окрестности точки $x = 0$ в первой зоне пограничные функции убывают степенным образом с ростом погранслойной переменной $\xi = x/\varepsilon$, во второй (переходной) зоне изменяется масштаб погранслойной переменной и характер убывания пограничных функций, и, наконец, в третьей зоне пограничные функции убывают экспоненциально, как ех $(-\kappa\zeta)$, где $\zeta = x/\varepsilon^{3/4}$. Аналогичное поведение имеют пограничные функции в окрестности точки $x = 1$. Все эти особенности были установлены ранее для задачи (1), (2) в случае $h = h(x)$ [1].

Погранслойное решение задачи (1), (2) является стационарным решением соответствующей параболической задачи. Доказана асимптотическая устойчивость этого стационарного решения и найдена его нелокальная область притяжения.

Асимптотики решений в случае кратного корня вырожденного уравнения построены также для некоторых параболических [2] и эллиптических [3] задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 12-01-00387 и 13-01-00200.

Литература

1. Бутузов В.Ф. Матем. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 1. С 68-80.
2. Бутузов В.Ф. ЖВМиМФ. 2011. Т. 51. №1. С 44-55.
3. Белошапко В.А., Бутузов В.Ф. ЖВМиМФ. 2013. Т. 53. №8. С. 65-75.

КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В СРЕДЕ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ ПЛОТНОСТИ ИСТОЧНИКОВ

Быков А. А.

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, физический факультет

119991, ГСП-1, Москва Ленинские горы, МГУ им.М.В.Ломоносова, Дом 1, строение 2

Тел. 84959391033, e-mail: abkov@yandex.ru

Широкий класс практически важных задач описывается уравнением реакции диффузии, в котором плотность источников является быстроизменяющейся функцией координат, но гладко зависит от концентрации. К числу таковых относятся задачи генерации магнитного поля в турбулентной среде, в частности, задачи галактического динамо. При этом условия генерации (реакции) таковы, что плотность источников сильно изменяется на промежутках, сравнимых с толщиной внутреннего переходного слоя. Имеется также несколько разных масштабов плотности источников, так как в разных пространственных масштабах физическая природа генерации (описание которой выходит за рамки данной работы) различается. Можно считать, что плотность источников является разрывной функцией координат, причем имеет множество точек разрыва первого рода, расположенных на небольшом расстоянии одна от другой, величина скачка является случайной величиной, распределенной с заданной плотностью. Известно также, что вероятность реализации разрыва с заданной величиной скачка δf убывает при увеличении δf по степенному закону, так что плотность источников ведет себя подобно фрактальной структуре, оставаясь самоподобной при изменении масштаба поля зрения. Будем называть для краткости такую плотность источников фрактальной. Мы в данной работе попытаемся ответить на вопрос о том, как отличается скорость дрейфа внутреннего переходного слоя (ВПС) для фрактальной плотности источников от таковой для усредненной по пространственной координате с масштабом усреднения, равным толщине ВПС. Заметим, что усредненная плотность источников является гладкой функцией от координат и имеющиеся результаты для этого случая уже являются практически исчерпывающими проблему.

Мы строим формальную асимптотику решения краевой задачи для уравнения реакции-диффузии

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - f(u,x,\varepsilon), \;\; x_a < x < x_b, \;\; t > t_0, \\ u(x_a,t) = u_a(t), \;\; u(x_b,t) = u_b(t), \;\; u(x,t_0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

со сбалансированной плотностью источников, $I(x) = \int_{\phi^{(-)}(x)}^{\phi^{(+)}(x)} f(u,x,\varepsilon)du = 0$, причем $f(\phi^{(\pm)}(x),x,\varepsilon) = 0$, $f(\phi^{(0)}(x),x,\varepsilon) = 0$, $f_u(\phi^{(\pm)}(x),x,\varepsilon) > 0$, $f_u(\phi^{(0)}(x),x,\varepsilon) < 0$, других корней уравнение $f(u,x,\varepsilon) = 0$ при $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ не имеет. Плотность источников $f(u,x,\varepsilon)$ представляет собой функцию, моделирующую функцию фрактальной структуры. Мы рассматриваем плотность вида $f(u,x,\varepsilon) = \gamma u\big(u^2 - U^2(x,\varepsilon)\big)$. Предполагается, что на промежутке (x_a,x_b) функция $U(x,\varepsilon)$ есть сумма регулярной и сингулярной компонент, $U(x,\varepsilon) = U_0(x) + \varepsilon V(x)$. Регулярная компонента $U_0(x)$ есть достаточно гладкая функция, сингулярная компонента $V(x)$ имеет разрывы первого рода $[V]|_{x_k^{(j)}} = V(x_k+0) - V(x_k-0) = (\delta V)_k^{(j)}$ в точках $x_k^{(j)}$, $k \ge 1$, $1 \le j \le J$, причем $V(x_a) = 0$, $x_0^{(j)} = x_a$, $x_k^{(j)} - x_{k-1}^{(j)} = (\delta x)_k^{(j)}$, $(\delta x)_k^{(j)} > 0$. Набор $\{(\delta x)_k^{(j)}, (\delta V)_k^{(j)}\}$ при заданном j будем далее называть j–й фрактальной групой (ФГ). Случайная величина $Z = \big((\delta x)_k^{(j)}, (\delta V)_k^{(j)}\big)$ имеет кусочно константую плотность распределения $\rho_Z(\delta\xi,\delta\eta) = \frac{1}{2}\frac{p_j}{((\delta x)_b^{(j)} - (\delta x)_a^{(j)})((\delta\eta)_b^{(j)} - (\delta\eta)_a^{(j)})}$ при $(\delta x)_a^{(j)} < \delta\xi < (\delta x)_b^{(j)}$, $(\delta\eta)_a^{(j)} < |\delta\eta| < (\delta\eta)_b^{(j)}$, $p_j > 0$, $\sum_j p_j = 1$. Для всех других $(\delta\xi,\delta\eta)$ будет $\rho_Z = 0$. Заметим, что выбранная плотность $\rho_Z(\delta\xi,\delta\eta)$ обеспечивает нулевое среднее значение $\langle V(x)\rangle = \left\langle \sum_{k,j:x_k^{(j)}<x} (\delta V)_k^{(j)} \right\rangle = 0$, так что среднее значение потенциала $\langle U(x,\varepsilon)\rangle = U_0(x)$.

Пусть $L_j = \left\langle \delta x_k^{(j)} \right\rangle$ есть среднее расстояние между точками скачков потенциала j–й ФГ Заметим, что средняя величина скачка j–й ФГ равна $D_j = \left\langle |\delta V_k^{(j)}| \right\rangle$. Имеется в виду, что $j = 1$ соответствует крупномасштабным неоднородностям, $L_1 \gg \theta$, причем θ есть толшина ВПС, $\theta(x) = \frac{1}{U_0(x)}\sqrt{\frac{2k}{\gamma}}$. Значения $j \geq 2$ соответствуют мелкомасштабным неоднородностям, $L_j \ll \theta$, причем имеет место условие фрактальности, $L_{j+1} \ll L_j$ и $D_{j+1} \ll D_j$ для $1 \leq j \leq J - 1$.

Мы рассматриваем сначала единичный скачок, $f(u,x) = \gamma u\big(u^2 - U^2(x)\big)$ при $x < \hat{x}$, $f(u,x) = \gamma u\Big(u^2 - \big(U(x) + \varepsilon\delta U\big)^2\Big)$ при $x > \hat{x}$. Возьмем многочлен Тейлора первого порядка, $f(u,x,\varepsilon) = f_0(u,x) + \varepsilon f_1(u,x)$. Мы выделяем главную часть плотности $f_0(u,x) = \gamma u\big(u^2 - U^2(x)\big)$ и возмущение первого порядка $f_1(u,x) = \begin{cases} 0, \text{ if } x < \hat{x}, \\ -2\gamma u U(x)\delta U, \text{ if } x \geq \hat{x}. \end{cases}$ Используя метод [1] построения асимптотического ряда для уравнения РД, мы находим в первом порядке скорость дрейфа ВПС

$$W_0(x^\star) = -3k\frac{U_x(x^\star)}{U(x^\star)} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{k\gamma}\delta U\left(\tanh^2\frac{\hat{\xi}}{\theta} - 1\right), \tag{2}$$

где $\hat{\xi} = \frac{\hat{x}-x^\star}{\varepsilon}$, координата ВПС $x^\star$ (точка перехода) в первом приближении асимптотического ряда равна $x^\star = x_0(t)$ и перемещается в соответствии с решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx_0}{dt} = W_0, \\ x_0(0) = x_{00}. \end{cases} \tag{3}$$

Далее мы рассматриваем аналогичную задачу с фрактальной плотностью источников. Для скорости дрейфа ВПС находим формулу первого порядка $W_0(x^\star) = W_0^{(\mathrm{reg})}(x^\star) + W_0^{(\mathrm{sing})}(x^\star)$, причем

$$W_0^{(\mathrm{reg})}(x^\star) = -3k\frac{U_{0x}(x^\star)}{U_0(x^\star)}, \;\; W_0^{(\mathrm{sing})}(x^\star) = \sum_{k,j:}\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{k\gamma}(\delta U)_k^{(j)}\left(\tanh^2\frac{\hat{\xi}_k^{(j)}}{\theta} - 1\right), \tag{4}$$

где $\hat{\xi}_k^{(j)} = \frac{\hat{x}_k^{(j)}-x^\star}{\varepsilon}$. Далеее мы усредняем $W_0^{(\mathrm{sing})}(x^\star)$ по ансамблю и доказываем следующие утверждения. 1. В первом порядке асимптотического разложения имеет место равенство скорости дрейфа для фрактальной плотности источников и усредненной по фрактальному ансамблю (гладкой). 2. Во втором порядке скорости различаются, скорость дрейфа фрактальной структуры меньше. 3. Если скорость дрейфа регулярной плотности равна нулю в одной точке, то скорость дрейфа фрактальной структуры в зависимости от параметров Отметим, что мы рассмторели случай конечного числа ФГ, $J < +\infty$. При этом гарантированно (с вероятностью 1) имеется конечное число точек разрыва, что обеспечивает корректность суммирования в (4). Аналогичные результаты можно получить для истинно фрактальной структуры с бесконечным числом ФГ. Достаточно наложить условия достаточно быстрого убывания на $\{p_j\}$ и на $\{(\delta\eta)_{a,b}^{(j)}\}$, но этот вопрос выходит за рамки данной работы.

Литература

[1] Божевольнов Ю.В., Нефедов Н.Н. Движение фронта в параболической задаче реакция – диффузия. // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 2010. Т.50. № 2. С.276-285.

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРУБОПРОВОДА

Вельмисов П.А., Корнеев А.В.

Ульяновский государственный технический университет

432027, г.Ульяновск, ул.Северный Венец, 32

Тел.: 89603793195, e-mail: velmisov@ulstu.ru

Исследуется динамика и динамическая устойчивость трубопровода (полого стержня при протекании внутри него жидкости). На плоскости xOy недеформированному стержню соответствует на оси Ox отрезок $[0, l]$. Скорость жидкости равна U и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox. Введем обозначения: $w(x,t)$ и $u(x,t)$ - упругие перемещения точки оси стержня в направлении осей Oy и Ox соответственно.

При учете только поперечного перемещения w динамика трубопровода описывается уравнением

$$\begin{gathered}(m_0+m_*)\,\ddot{w}+\left(\frac{EJ}{\rho}\right)''+m_*\frac{U^2}{\rho}+2m_*U\,(\arcsin w')^{\cdot}-\\-\Theta_0 w''\Psi-\Theta_* w''\dot{\Psi}+\alpha\dot{w}''''-\beta\ddot{w}''+f(x,t,w,\dot{w})=0,\end{gathered}\tag{1}$$

где ρ и Ψ определяются выражениями

$$\frac{1}{\rho}=\frac{w''}{(1+(w')^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \Psi=\int\limits_0^l\sqrt{1+(w')^2}\,\mathrm{d}x-l\tag{2}$$

Штрих и точка сверху обозначают частные производные по координате x и времени t соответственно.

Предполагая w' малым, уравнение (1) запишем в виде

$$\begin{gathered}(m_0+m_*)\,\ddot{w}+\left[EJw''\left(1-\frac{3}{2}(w')^2\right)\right]''+m_*U^2w''\left[1-\frac{3}{2}(w')^2\right]+\\+2m_*U\dot{w}'\left[1+\frac{1}{2}(w')^2\right]-\frac{1}{2}\Theta_0 w''\int\limits_0^l(w')^2\,\mathrm{d}x-\Theta_* w''\int\limits_0^l w'\dot{w}'\,\mathrm{d}x+\\+\alpha\dot{w}''''-\beta\ddot{w}''+f(x,t,w,\dot{w})=0\end{gathered}\tag{3}$$

Исследование устойчивости проводилось двумя методами. Первый метод основан на составлении функционалов типа Ляпунова для уравнения (3) в некоторых частных случаях. Второй предполагает построение решения уравнения (3) методом Галеркина, в этом случае $w(x,t)$ задается в виде

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{n}w_k(t)g_k(x),\tag{4}$$

где $\{g_k(x)\}_1^\infty$ – полная на $[0,l]$ система базисных функций, соответствующих условиям закрепления концов трубопровода.

При учете как поперечной, так и продольной деформации трубопровода, его динамика описывается системой двух уравнений для $w(x,t)$ и $u(x,t)$

$$
\begin{cases}
(m_0+m_*)u_{tt}-EA_0\left(u_x+\frac{1}{2}w_x^2\right)_x+\gamma_0 u_{xxt}+g(x,t,u,u_t)=0\\
(m_0+m_*)w_{tt}-EA_0\left[w_x\left(u_x+\frac{1}{2}w_x^2\right)\right]_x+EJ_0\left(w_{xx}\delta^3\right)_{xx}+\alpha_0 w_{xxxxt}-\\
-\beta_0 w_{xxtt}+m_*U^2 w_{xx}\delta^3+2m_*U\phi w_{xt}+f(x,t,w,w_t)=0\\
\delta=\frac{1}{\sqrt{1+2\left(u_x+\frac{1}{2}w_x^2\right)}},\quad \phi=\frac{1}{\sqrt{1-w_x^2}}
\end{cases}
\tag{5}
$$

Индексы x и t снизу обозначают частные производные по переменным x и t соответственно.

Предполагая w_x и u_x малыми, систему уравнений (5) запишем в виде

$$
\begin{cases}
(m_0+m_*)u_{tt}-EA_0\left(u_x+\frac{1}{2}w_x^2\right)_x+\gamma_0 u_{xxt}+g(x,t,u,u_t)=0\\
(m_0+m_*)w_{tt}-EA_0\left[w_x\left(u_x+\frac{1}{2}w_x^2\right)\right]_x+EJ_0\left(w_{xx}\left[1-3\left(u_x+\frac{1}{2}w_x^2\right)\right]\right)_{xx}+\alpha_0 w_{xxxxt}-\\
-\beta_0 w_{xxtt}+m_*U^2 w_{xx}\left[1-3\left(u_x+\frac{1}{2}w_x^2\right)\right]+2m_*U\left(1+\frac{1}{2}w_x^2\right)w_{xt}+f(x,t,w,w_t)=0
\end{cases}
\tag{6}
$$

Для исследования устойчивости использовалось два метода. Первый метод основан на составлении функционалов типа Ляпунова для системы уравнений (6) в некоторых частных случаях. Второй предполагает построение решений системы уравнений (6) методом Галеркина, в этом случае $w(x,t)$, $u(x,t)$ задаются в виде

$$
w(x,t)=\sum_{k=1}^{n}w_k(t)g_k(x),\quad u(x,t)=\sum_{k=1}^{n}u_k(t)f_k(x) \tag{7}
$$

где $\{g_k(x)\}_1^\infty$, $\{f_k(x)\}_1^\infty$ – полные на $[0,l]$ системы базисных функций, соответствующих условиям закрепления концов трубопровода.

Внешние воздействия $f(x,t,w,w_t)$, $g(x,t,u,u_t)$ предполагаются действующими в момент времени t либо мгновенно, либо с запаздыванием: $f=f\left(x,t,w\left(x,t-\tau_1\right),w_t\left(x,t-\tau_2\right)\right)$, $g=g\left(x,t,u\left(x,t-\tau_3\right),u_t\left(x,t-\tau_4\right)\right)$.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России.

Литература

1. Анкилов А.В. О динамической устойчивости трубопровода / А.В. Анкилов, П.А. Вельмисов // Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике: Труды международной "Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН-2007"(г. Ульяновск, 17-18 мая 2007 г.). – Ульяновск: УлГТУ, 2007. –Т. 4. – С. 10–14.

2. Вельмисов П.А. Математическое моделирование динамики упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии / П.А. Вельмисов, А.А. Васильева, Е.П. Семенова // Труды 7 Международной конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов (2-5 февраля 2009г., г. Ульяновск)". – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – С. 68–70.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А., Шарова С. В.
Ульяновский государственный технический университет
432027, Ульяновск, ул. Северный Венец 32
Тел.: 89603793195, e-mail: velmisov@ulstu.ru

Рассматриваются некоторые вопросы асимптотической теории движения идеального газа. Получены новые асимптотические уравнения, описывающие возмущения однородного потока при трансзвуковом и сверхзвуковом режимах обтекания. Основной проблемой исследования этих уравнений является их нелинейность.

1. Безвихревые изэнтропические течения газа в цилиндрических безразмерных координатах x, r, θ, t описываются уравнением:

$$\begin{aligned}\Phi_{tt}+2\Phi_x\Phi_{xt}+2\Phi_r\Phi_{rt}+\frac{2}{r^2}\Phi_\theta\Phi_{\theta t}+2\Phi_x\Phi_r\Phi_{rx}+\frac{2}{r^2}\Phi_\theta\Phi_r\Phi_{\theta r}+\frac{2}{r^2}\Phi_x\Phi_\theta\Phi_{\theta x}+\Phi_x^2\Phi_{xx}+\\+\Phi_r^2\Phi_{rr}+\frac{1}{r^4}\Phi_\theta^2\Phi_{\theta\theta}=a^2\left(\Phi_{xx}+\Phi_{rr}+\frac{1}{r}\Phi_r+\frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta}\right),\end{aligned} \tag{1}$$

$$a^2=p^{\frac{\chi-1}{\chi}}=\frac{\chi+1}{2}-\frac{\chi-1}{2}\left(2\Phi_t+\Phi_x^2+\Phi_r^2+\frac{1}{2r^2}\Phi_\theta^2\right). \tag{2}$$

В (1) - (2) $\Phi(x,r,\theta,t)$ - потенциал скорости, t - время, a - скорость звука, p - давление, χ - показатель адиабаты Пуассона, индексы снизу обозначают частные производные.

Введем для $\Phi(x,r,\theta,t)$ асимптотическое разложение:

$$\Phi=x+\varepsilon\psi(r,\theta,t^0)+\varepsilon^3\varphi(x^0,r,\theta,t^0)+...,\ x=\varepsilon x^0,\ t=\frac{1}{\varepsilon}t^0, \tag{3}$$

где ε - малый параметр, функция $\varphi(x^0,r,\theta,t^0)$ определяет основное течение, а функция $\psi(r,\theta,t^0)$ задает поперечное возмущение. Подставляя (3) в (1) - (2) и оставляя члены старшего порядка, получим для функции $\varphi(x^0,r,\theta,t^0)$ трансзвуковое уравнение:

$$\begin{aligned}2\varphi_{x^0t^0}+(\chi+1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0}+2\psi_r\varphi_{x^0r}+\frac{2}{r^2}\psi_\theta\varphi_{x^0\theta}-\Delta\varphi+\\+\frac{\chi-1}{2}\left(2\psi_{t^0}+\psi_r^2+\frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right)\varphi_{x^0x^0}=L(\psi).\end{aligned} \tag{4}$$

В (4) введены обозначения:

$$\begin{aligned}-L(\psi)\equiv\psi_{t^0t^0}+2\psi_r\psi_{rt^0}+\frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_{\theta t^0}+\psi_r^2\psi_{rr}+\frac{1}{r^4}\psi_\theta^2\psi_{\theta\theta}+\\+\frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_r\psi_{r\theta}-\frac{1}{r^3}\psi_r\psi_\theta^2,\ \Delta\varphi\equiv\varphi_{rr}+\frac{1}{r}\varphi_r+\frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}.\end{aligned}$$

Функция $\psi(r,\theta,t^0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi=0$. Если $\psi\equiv 0$, то получим классическое трансзвуковое уравнение Линя-Рейсснера-Тзяна: $2\varphi_{x^0t^0}+(\chi+1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0}-\varphi_{rr}-r^{-1}\varphi_r-r^{-2}\varphi_{\theta\theta}=0$, которое в стационарном случае переходит в уравнение смешанного типа Кармана-Фальковича: $(\chi+1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0}-\varphi_{rr}-\dfrac{1}{r}\varphi_r-\dfrac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}=0$.

Уравнение (4) описывает трансзвуковые течения газа, возникающие при воздействии на обтекаемое тело бокового (по отношению к основному направлению движения, совпадающему с направлением оси x) возмущения основного трансзвукового потока. Для внутреннего обтекания, например для течений в соплах, таким возмущением может быть закрутка потока ($\psi=\Gamma(t)\theta$). Для внешнего обтекания летательных аппаратов таким возмущением является, например, боковой, меняющий свою скорость с течением времени ветер $\psi=V_\infty(t)r\cos(\theta+\alpha(t))$.

Условия на фронте ударной волны $x^0 = x^0(r, \theta, t^0)$ получим из условий Ренкина-Гюгонио, подставляя в них разложение (3) и оставляя члены старшего порядка:

$$\begin{aligned} &2\frac{\partial x^0}{\partial t^0} + \left(\frac{\partial x^0}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial x^0}{\partial \theta}\right)^2 + 2\psi_r \frac{\partial x^0}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta \frac{\partial x^0}{\partial \theta} = \\ &= \frac{\chi - 1}{2}\left(2\psi_{t^0} + \psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right) + \frac{\chi + 1}{2}(\varphi_{x^0} + \varphi^*_{x^0}), \qquad \varphi = \varphi^*. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь φ и φ^* соответствуют течению с разных сторон от ударной волны. Если в (5) положить $\varphi \equiv \varphi^*$, то получим характеристическое уравнение для (4).

Выведем условия на обтекаемой поверхности, мало отличающейся от цилиндрической, задав ее в виде

$$r = r_0(\theta, t^0) + r_2(x^0, \theta, t^0)\varepsilon^4 + ... \tag{6}$$

Подставляя (3) и (6) в точное условие непротекания $-\Phi_x r_x + \Phi_r - r^{-2} r_\theta \Phi_\theta = r_t$ и оставляя старшие члены, получим: $\psi_r - r_0^{-2} r_{0\theta}\psi_\theta = r_{0t^0}, \varphi_r - r_0^{-2} r_{0\theta}\varphi_\theta = r_{2x^0}$. Здесь значения φ_r, φ_θ, ψ_r, ψ_θ вычисляются при $r = r_0(\theta, t^0)$.

Подставляя (3) в выражение для давления (2), проводя разложение в ряд Тейлора и оставляя старшие по порядку члены, получим асимптотическую формулу для определения давления:

$$P = 1 - \chi\varepsilon^2\left(\psi_{t^0} + \varphi_{x^0} + \frac{1}{2}\psi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\psi_\theta^2\right).$$

Построены некоторые точные частные решения уравнения (4) и указаны их приложения к решению ряда задач трансзвуковой аэродинамики.

2. Течения, возникающие при обтекании поверхностей сверхзвуковым потоком газа, описываются уравнением (1), в котором a^2 определяется выражением:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} = 1 + \frac{\chi - 1}{2}M_0^2 - \frac{\chi - 1}{2a_0^2}\left(2\Phi_t + \Phi_x^2 + \Phi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\Phi_\theta^2\right). \tag{7}$$

Здесь V_0, p_0 - скорость, давление однородного потока, a_0 - скорость звука в однородном потоке; $M_0 = \dfrac{V_0}{a_0}$ - число Маха. Введем асимптотическое разложение:

$$\Phi = V_0 x + \varepsilon\psi(r, \theta, t) + \varepsilon^2\varphi(\xi^0, r, \theta, t) + ..., \xi^0 = \varepsilon^{-1}\xi,\ \xi = x - \beta r,\ \beta = \sqrt{M_0^2 - 1}, \tag{8}$$

где ε - малый параметр. Подставляя (8) в (1), получим для функции $\varphi(\xi^0, r, \theta, t)$ уравнение:

$$\begin{aligned} &2V_0\varphi_{\xi^0 t} + 2\beta a_0^2\varphi_{\xi^0 r} + \frac{1}{r}\beta a_0^2\varphi_{\xi^0} + [(\chi + 1)V_0 M_0^2\varphi_{\xi^0} + (\chi - 1)M_0^2\psi_t - 2V_0\beta\psi_r]\varphi_{\xi^0\xi^0} = \\ &= a_0^2(\psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r + \frac{1}{r^2}\psi_{\theta\theta}) - \psi_{tt}. \end{aligned} \tag{9}$$

Условия на обтекаемой поверхности $r = r_0(\theta, t) + r_1(\xi^0, \theta, t)\varepsilon + r_2(\xi^0, \theta, t)\varepsilon^2 + ...$ имеют вид: $-V_0 r_{1\xi^0} = r_{0t},\ \psi_r - r_0^{-2}\psi_\theta r_{0\theta} = (\beta + r_{1\xi^0})\varphi_{\xi^0} + V_0 r_{2\xi^0} + r_{1t}$. Значения ψ_r, ψ_θ, φ_{ξ^0} вычисляются при $r = r_0(\theta, t)$.

Условия на фронте ударной волны $\xi^0 = \xi^0(r, \theta, t)$ получим из условий Ренкина-Гюгонио, подставляя в них разложение (8) и оставляя члены порядка ε^{-1}:

$$\frac{\chi + 1}{2}M_0^2 V_0(\varphi_{\xi^0} + \varphi^*_{\xi^0}) = V_0\frac{\partial\xi^0}{\partial t} + \beta a_0^2\frac{\partial\xi^0}{\partial r} + V_0\beta\psi_r - \frac{(\chi - 1)M_0^2}{2}\psi_t,\ \varphi = \varphi^*.$$

Здесь φ и φ^* соответствуют течению с разных сторон от ударной волны.

Асимптотическая формула для определения давления имеет вид

$$p = p_0\left(1 - \frac{\chi}{a_0^2}\varepsilon(\psi_{t^0} + V_0\varphi_{\xi^0})\right).$$

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАРМАКОКИНЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Воронов Д.А.

Новосибирский Государственный Университет,

Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики

630090, Новосибирская область, г. Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2

Тел.: 89139210022, e-mail: voronov-dima@mail.ru

What happens to the drug in the body can be visualized by considering the body as being made up of a large number of compartments, each of which has a volume where the drug is well mixed. Drug is then transferred between these compartments, either transported by the blood from one to another, or by passing an interior membrane in some body organ.
We can visualize this whole process as a dynamic system described by a system of ordinary differential equations.

Parameter identifiability analysis for dynamic system ODE models addresses the question of which unknown parameters can be quantifies from given input-output data. The linear compartment models that we focus on in this report are never identifiable, except in the trivial case of a model with only one compartment. This forces us to look for identifiable reparametrization of our model. In this report we consider scaling reparametrization that is obtained by replacing an unobserved variable by a scaling version of itself, and updating coefficients accordingly.

In real life we determine a series of time points at which blood samples are taken and plasma concentrations are measured. Here inverse problem arises: it is required to find rate constants (entries of matrix) knowing concentration of a drug at the given moments of a time in one compartment. The quality of those data depends on our choice of time points. An inappropriate choice may make up miss the peak concentration or we may not have sampled long enough to obtain a good estimate of the rate constants. It is demonstrated that the resolving ability of the inverse problem can be improved by varying of the location of measurement data points. The Frechet derivative matrix was constructed.

An algorithm for solving inverse problem in case of n-compartment is covered in this report.

Inverse problem is solved by different algorithms: Landweber iterations method, Newton-Kantorovich method and Singular Value Decomposition. The question of choosing initial approximations is covered in this report. It is shown that physical properties of initial approximations strongly affect on obtained solutions. The results of numerical experiments are presented.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, а также при поддержке гранта президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-5666.2014.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ 3.5D КОНЦЕНТРАЦИИ МАСС В ГЕОФИЗИКЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Гласко Ю.В.[1], Скачков С.А.[2]

[1]*Научно-исследовательский Вычислительный Центр МГУ*

119992, Москва, Ленинские горы, НИВЦ МГУ

[2]*Российский Государственный Геологоразведочный Университет*

Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.23

Тел. 89099530800, e-mail: glaskoyv@mail.ru

Целью задачи интерпретации геофизического поля является определение области Ω и ее плотности $\delta(\omega)$, то есть характеристик источника измеренного поля. В докладе представлены 2-е геофизические модели месторождения нефти (антиклинальная и геосолитонная [3]), метод определения особых точек (интропродолжение) - характеризующих сегмент глубин залежи и алгоритм 3.5-мерной концентрации плотности с границы Γ области V: $\delta_\Gamma(s^*),\ \ s^* \in \Gamma$. При этом алгоритм концентрации многократно использует 3.5D выметание из искомой области Ω. Предложена математическая модель процесса выметания масс – краевая задача для параболического уравнения. Модель же концентрации, как обратной к выметанию задачи, дополняется целевым условием в конечный момент процесса.

В операторной форме задача концентрации (определения p) имеет вид:

$$Ap = \delta_\Gamma(s^*),\ \ s^* \in \Gamma \tag{1}$$

Здесь $p = \{\Omega, \delta(\omega)\},\ \ \Omega = \bigcup_{j=1}^{N} \Omega_j \subset V,\ \ \delta(\omega) = \{\delta_j(\omega)\},\ \ j = 1,...,N$, A- оператор выметания.

Численно выметание можно реализовать на сетке посредством 6-и точечной схемы Д. Зидарова [1]. Такой подход позволяет требовать от плотности не более чем кусочной непрерывности в V: $\delta(\omega) \in C(\Omega)$.

Алгоритм концентрации включает задачу минимизиции квадрата невязки между заданной $\delta_\Gamma(s^*),\ \ s^* \in \Gamma$ и граничной плотностью рассчитанной посредством многократного вычисления плотности $\delta(\omega),\ \omega \in \Omega$ методом Монте-Карло и ее выметания на границу ∂V. При этом Ω определяется на первом этапе алгоритма на основании целевого условия. Задача минимизации квадрата невязки решается для системы вложенных компактов:

$$\hat{p} = \arg\inf \rho^2(Ap, \delta_\Gamma(s^*)),\ \ V \to \hat{V}\ \ ? \tag{2}$$

где $\rho^2(Ap, \delta_\Gamma(s^*)) = \left\| Ap - \delta_\Gamma(s^*) \right\|_{L_2}^2$.

Задачу решаем на компакте с использованием априорной информации. С точки зрения разведочной геофизики куб V более информативен, чем ограниченная плоскостью область.

В случае большой погрешности во входных данных и недостатке априорной информации наряду с квадратом невязки мы используем тихоновский функционал.

Мы решаем задачу концентрации по априорной информации о $\delta_{\Gamma}(s^*)$ для случая когда частично заданы Ω и $\delta(\omega)$ ($\delta(\omega) \in [0.4\,г/см^3, 1\,г/см^3]$). Задача решается в два этапа. На первом – по изолиниям на гранях V мы определяем морфологию области Ω. На втором - $\delta(\omega)$ в рамках статистической регуляризации.

В проведенных вычислительных экспериментах

$V = [0,1км] \times [0,1км] \times [1/3км, 4/3км]$.

Посредством интерпретации рассчитанных карт, мы локализуем топологию области Ω в виде: шара малого радиуса расположенного на глубине 1 км (модель 1); двух шаров на различных глубинах (модель 2); двух горизонтальных круговых цилиндров (модели 3,4); топологического произведения шара на два перпендикулярных отрезка параллельных осям абсцисс и ординат. Для более мелкого шага локализуется морфология области Ω, как: куб в центре области V; параллелепипед (модель 7); две связных области в форме кубов (модель 8).

На втором этапе концентрации мы определяем плотности локализованных объектов как постоянные, но для некоторых связных областей расположенных на разных глубинах различные величины.

Для точных значений плотности $\bar{\delta}_{\Gamma}(s^*)$ погрешность результата $\varepsilon = \left\| \delta(\omega) - \bar{\delta}(\omega) \right\|_{l_2}^2 \leq 1.5\%$. Для заданных с погрешностью значений плотности $\tilde{\delta}_{\Gamma}(s^*)$: $\delta = \left\| \tilde{\delta}_{\Gamma}(s^*) - \bar{\delta}_{\Gamma}(s^*) \right\|_{l_2}^2 \leq 5\%$ $\varepsilon \leq 5\%$.

Алгоритм включен в комплекс программ интерпретации для нефтяных месторождений.

Литература

1. Зидаров Д. О решении некоторых обратных задач потенциальных полей и их применение к вопросам геофизики. София: Издательство Болгарской АН. 1968. 143 с.

2. Страхов В.Н. О выметании масс по Пуанкаре и его использовании при решении прямых и обратных задач гравиметрии // ДАН СССР. 1977. Т.236. №1. С. 54-57.

3. Мегеря В. М., Филатов В. Г., Старостенко В. И., Корчагин И. Н., Лобанов А. М., Гласко Ю. В., Волоцков М. Ю., Скачков С. А. Возможности и перспективы применения несейсмических методов для поисков скоплений углеводородов и геосолитонная концепция их образования // Геофизический журнал. 2012. Т. 34. № 3. С. 4-21.

4. Гласко Ю.В. Одна задача эквивалентного перераспределения масс// Физика Земли. 2012. Т.48. №2. С. 88-93.

АВТОПОДБОР ПАРАМЕТРОВ СИНТЕЗА РАДИОЛОКАЦИОННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ, ПОЛУЧЕННОГО С РАДИОЛОКАТОРА С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ

Гурьянов М.А., Прокофьев А.А.

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

124498, Москва, Зеленоград, проезд 4806, дом 5

Тел.: 89263433182, e-mail: semioto@gmail.ru

Технология радиолокации с синтезированием апертуры (РСА) является одним из способов получения визуального изображения местности. В отличие от основного конкурента – оптической съёмки – радиолокация обладает рядом неоспоримых преимуществ. Например, радиолокационная съёмка не зависит от погодных условий и времени суток.

Процесс автофокусировки радиолокационного изображения (РЛИ) представляет собой автоматическое вычисление параметров синтеза. Обычно данных бортовых приборов достаточно для обеспечения требуемой разрешающей способности. Однако для высокоточных РСА, разрешающая способность которых меньше метра, информации, получаемой с бортовой аппаратуры бывает недостаточно [1].

Для решения задачи получения РЛИ с разрешением менее метра предлагается перед использованием классических алгоритмов автофокусировки [2] использовать процедуру автоподбора параметров, которая решает сразу две задачи:

1) получение обзорного РЛИ низкого разрешения;
2) получение первого приближения траектории полета для дальнейшей обработки.

В работе рассматривается модифицированная модель полета малого летательного аппарата (ЛА) в момент излучения и приема информации. За основу модифицированной математической модели взята классическая модель [3] и дополнена информацией о траекторных нестабильностях Y(t) и Z(t) в любой момент времени съемки, представляющих собой отклонения траектории полета ЛА от расчетной в плоскости, перпендикулярной направлению полета. Вектор скорости раскладывается на составляющие $\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k}$.

В рамках математической модели показано, что ошибка в знании квадратичного набега фазы на протяжении набора апертуры зависит от изменения наклонной дальности до зондируемого участка поверхности: $d\phi = \dfrac{4\pi \cdot dL}{\lambda}$. Изменение наклонной дальности выражается через скорость V_x и траекторные нестабильности: $dL = \sqrt{D^2 + \left(V_x \cdot \dfrac{1}{f_{PRF}}\right)^2} - D$, где $D = \sqrt{\left(H - Z(n)\right)^2 + \left(\left(H - Z(n)\right)\operatorname{tg}\left(\beta\right) - Y(n)\right)^2}$, n – время излучения зондирующего импульса, β – угол между вертикалью и направлением на снимаемый участок поверхности, H – высота над поверхностью Земли. Однако, фазовая ошибка может быть компенсирована изменением скорости полета ЛА вдоль оси полета (азимутальной скорости). Итоговая зависимость набега фазы иллюстрируется формулой $\phi(n) = \dfrac{2\pi \hat{V}_x^2}{\lambda \cdot D \cdot \left(f_{PRF}\right)^2}$, где $\hat{V}_x$ – эквивалентная составляющая скорости, λ – длина волны зондирующего излучения, D – наклонная дальность до регистрируемой голограммы H, и f_{PRF} – частота повторений зондирующих импульсов.

Траекторные нестабильности более высокого порядка (порядка N) могут быть компенсированы следующим образом: апертура разбивается на N+1 подапертуру, для каждой из которых проводится оценка оптимальной азимутальной скорости. Важно отметить, что согласно полученным формулам, оценочная азимутальная скорость и реальная скорость полета могут существенно отличаться. Первая является лишь параметром оптимизации для получения качественного РЛИ.

Таким образом, в исследовании поставлена задача оценки азимутальной скорости полета ЛА в рамках отсутствия информации о траектории. Распространенные методы оценки азимутальной скорости, например Coherent MapDrift (CMD) [2] требуют в той или иной степени точного знания высоты полета ЛА и отсутствия смещения доплеровского спектра сигнала (центр диаграммы направленности антенны в процессе съемки должен быть направлен перпендикулярно направлению движения). Для малых ЛА указанные методы подходят плохо и требуют вычислительно сложной предобработки голограммы [4].

В работе предложен метод поиска оптимальной скорости полным перебором. Границы и шаг полного перебора выводятся из параметров ЛА и зависят от точности бортовой навигационной системы. Проблемой является целевая функция.

В процессе исследования разработана модификация известной меры качества оптического изображения Tenengrad Focus Measure [3]: $TG(I) = \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-1} K_{i,j}(I,p)\cdot S_{i,j}^2$, где $K_{i,j}(I,p) = 1,$ если $\left|I(i,j)\right| \ge p\cdot \max_{i,j}\left(\left|I(i,j)\right|\right),$ и 0 в противном случае. Параметром формулы является p, который выбирается по уровню 0,7 (получено экспериментально) от максимальной амплитуды сигнала: $p = 0.7\cdot\max\left(\left|I\right|\right)$. Выбранная модификация зарекомендовала себя лучшим образом.

Предложенный метод имеет высокую вычислительную сложность и уступает по быстродействию другим алгоритмам автофокусировки. Однако, он более устойчив и пригоден к применению на голограммах с малых ЛА без их предварительной обработки.

Реализованная и оптимизированная процедура подбора скорости применена в реальной системе РСА в качестве способа получения обзорных РЛИ и хорошо себя зарекомендовала.

Литература

[1] B. Dawidowicz, P. Samczyński, M. Smolarczyk, M. Kuźmiuk, Analysis of SAR Images Quality Degradation Factors // Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments IV – Proc. of SPIE, Vol. 6159 (SPIE, Bellingham, WA, 2006).

[2] Samczyński P., Kulpa K., *Coherent MapDrift technique*, in IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol.48, no.3, 2010, pp.1505–1517.

[3] Zoran Sjanic, *Navigation and SAR Auto-focusing in a Sensor Fusion Framework* // Division of Automatic Control Department of Electrical Engineering Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden, 2011.

[4] Горячкин О.В., *Автоматическая фокусировка изображений в радиолокаторе с синтезированной апертурой.* // ТУЗС «Анализ сигналов и систем связи». СПБ., 1996, №161, с.128-134.

РЕШЕНИЯ С ВНУТРЕННИМИ СЛОЯМИ В МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ

Давыдова М.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2, Физический факультет.

Тел.: 89160821119, e-mail: m.davydova@bk.ru

Рассмотрим краевую задачу для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \Delta u - f(\varepsilon \nabla u, u, x) = 0, \quad x = (x_1, ..., x_N) \in D \subset R^N, \\ &u(x, \varepsilon) = g(x), \quad x \in \partial D, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции f, $g(x)$ и граница ∂D предполагаются достаточно гладкими, $\Delta = \sum_{k=1}^{N} \partial^2 / \partial x_k^2$ – оператор Лапласа. Под обозначением $\varepsilon \nabla u$ подразумевается зависимость функции f от аргументов $v_1 \equiv \varepsilon\, \partial u / \partial x_1$, $v_2 \equiv \varepsilon\, \partial u / \partial x_2$,..., $v_N \equiv \varepsilon\, \partial u / \partial x_N$. Предполагается также, что функция f удовлетворяет стандартному условию не более чем квадратичного роста по ∇u. Соответствующая зависимость от нелинейно входящей адвекции и диффузии определяет важный для приложений и более сложный случай по сравнению с ранее изученным случаем, для которого функция f не зависела от градиента [1].

1. Существование решений с пограничными слоями. Исследование решений задачи (1) с пограничными слоями непосредственно связано с изучением вопроса о существовании решений с внутренними слоями (контрастных структур) в системах типа реакция-диффузия-адвекция [2], [3].

Асимптотику решения погранслойного типа задачи (1) ищем в виде

$$u(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi u(\rho, \bar{\theta}, \varepsilon), \tag{2}$$

где $\bar{u}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + ...$ – регулярный ряд, $\Pi u(\rho, \eta, \varepsilon) = \Pi_0 u(\rho, \eta) + \varepsilon \Pi_1 u(\rho, \eta) + ...$ – пограничный ряд, описывающий пограничный слой в окрестности границы ∂D; $\rho = \bar{r} / \varepsilon$, $(\bar{r}, \bar{\theta})$ – локальные координаты, введенные в окрестности ∂D [2].

Члены регулярного разложения определяются как решения конечных уравнений. Для определения функции $\Pi_0 u$ получаем разрешимую нелинейную дифференциальную задачу. В следующих приближениях относительно членов погранслойного разложения приходим к линейным дифференциальным задачам с решениями в явном виде.

Существование решения с построенной асимптотикой обусловлено свойствами нелинейной функции f и доказывается на основе асимптотического метода дифференциальных неравенств (см. напр. [4]). При $x \in D \cup \partial D$ имеет место равномерная оценка

$$\left|u(x,\varepsilon)-U_n(x,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon^{n+1}, \tag{3}$$

где $U_n(x,\varepsilon)-$ частичная сумма $n-$го порядка ряда (2), константа C не зависит от ε.

Если рассмотреть решение с пограничным слоем задачи (1) как стационарное решение соответствующей параболической задачи, то его устойчивость по Ляпунову следует из известных результатов (см. напр. [4]).

2. Существование контрастных структур. Исследование многомерной задачи (1) на наличие решений с внутренними слоями существенно сложнее описания одномерного варианта этой задачи, который рассматривался ранее. Основная трудность связанна с определением положения поверхности перехода, в окрестности которой происходит резкое изменение решения $u(x,\varepsilon)$ (локализован внутренний слой).

Асимптотическое разложение решения типа контрастной структуры имеет вид

$$u^-(x,\varepsilon)=\overline{u}^-(x,\varepsilon)+Qu^-(\xi,\theta,\varepsilon),\quad u^+(x,\varepsilon)=\overline{u}^+(x,\varepsilon)+\Pi u(\rho,\eta,\varepsilon)+Qu^+(\xi,\theta,\varepsilon) \tag{4}$$

где $Qu^{\pm}(\xi,\theta,\varepsilon)=Q_0u^{\pm}(\xi,\theta)+\varepsilon Q_1u^{\pm}(\xi,\theta)+...$ ряды, описывающие внутренний слой в окрестности поверхности перехода, уравнение которой ищется в виде асимптотического разложения по параметру ε, $\xi=r/\varepsilon$, $\rho=\overline{r}/\varepsilon$, (r,θ), $(\overline{r},\eta)-$ локальные координаты [2].

Члены регулярных разложений в (4) определяются как решения конечных уравнений. При описании внутреннего слоя в нулевом приближении имеем разрешимые нелинейные дифференциальные задачи. В следующих приближениях приходим к линейным дифференциальным задачам с решениями в явном виде. Коэффициенты ряда для уравнения поверхности перехода являются решениями конечных уравнений, которые получаются с использованием условия C^1-сшивания асимптотик (4) на поверхности перехода. Описание пограничного слоя в окрестности границы области ∂D выполняется в соответствии с п. 1.

С использованием асимптотического метода дифференциальных неравенств доказана теорема существования решения задачи (1) с асимптотикой (4), для которого в области $D\cup\partial D$ справедлива равномерная оценка типа (3).

Если рассматривать решение с внутренним слоем задачи (1) как стационарное решение соответствующей параболической задачи, то его устойчивость по Ляпунову следует из известных результатов (см. напр. [4]).

Определенное значение для приложений имеют два частных случая задачи (1), которые изучены отдельно: 1) $f=A(u,x)(\varepsilon\nabla u)^2+B(u,x)$; 2) $f=\varepsilon(\mathbf{A}(x),\nabla u)+B(u,x)$ [2,3].

Литература.

1. *Н.Н. Нефедов.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями.// Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, №7. С. 1142-1149.
2. *Н.Н. Нефедов, М.А. Давыдова.* Контрастные структуры в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция. // Дифференц. уравнения. Т. 48, № 5, с. 738–748, 2012.
3. *Н.Н. Нефедов, М.А. Давыдова.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных квазилинейных уравнениях реакция-диффузия-адвекция. // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, №6. С. 715-733.
4. *А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, 2010, т. 268, с. 268-283.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, пр. №13-01-00200.

Математическое моделирование распределения давления в микротвэлах

А. И. Дрегля
Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
e-mail: adreglea@gmail.com

Изучается математическая модель распределения давления потока воды в микротвэле заполненном шарами радиуса R. В основе модели лежит уравнение Эргуна:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{150\eta u(1-\varepsilon)^2}{d^2\varepsilon^3} + \frac{1{,}75\rho u^2(1-\varepsilon)}{d\varepsilon^3},$$

где p — давление, $\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, η — вязкость среды, ε — пористость среды, ρ — плотность среды, d — характерный размер частиц (диаметр шара), u — скорость распределения потока воды на поверхности шара. Решение уравнения Эргуна строится в многосвязной области учитывая колличество шаров в слое. Уравнение Эргуна решается с условиями Дирихле на многосвязной границе. Функция u в первом приближении определяется по формуле:

$$u = \frac{3U_\infty}{2R} x f'(\eta),$$

$$\eta = \frac{y}{R}\sqrt{\frac{3U_\infty R}{\nu}}$$

где U_∞ — параметр характеризующий скорость потока воды, f вычисляется как решение уравнения краевой задачи Блазиуса в первом приближении:

$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) - \frac{1}{2}f'^2(\eta) = -\frac{1}{2},\ 0 < \eta < \infty$$

$$f(0) = f'(0) = 0,\ \lim_{\eta\to\infty} f'(\eta) = 1.$$

Далее функция u подставляется в правую часть уравнения Эргуна и искомое давление определяется как решение задачи Дирихле.

[1] *Дрегля, А. И.* Некоторые аналитические и точные решения систем уравнений в теории моделирования полимеров / А.И. Дрегля // Сиб. журн. индустр. матем., 2008, Новосибирск, т. 11, – С. 61–70.

[2] *Дрегля, А. I.* Краевые задачи в моделировании формования волокон аналитические и численные мотоды /А. Дрегля // Saarbrucken: Lambert Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. – 110 С.

[3] *Glauert M. B., Lighthill M. J.*, The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder, // Proc. R. Soc. London, 1955, 320.- P. 188–203.

АЛГОРИТМ ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Жээнтаева Ж.К.

Кыргызско-Узбекский университет

Кыргызская Республика, г. Ош, ул. Айтиева 27

Тел. (9963222)74522, e-mail: jjk_kuu@mail.ru

В работе описывается алгоритм для выдвижения гипотез о существовании асимптотического разложения решения начальной задачи для линейного дифференциального уравнения с ограниченным запаздыванием аргумента по относительно все более быстро затухающим решениям.

Рассматривается уравнение вида

$$x'(t)=A(t)x(t-h),\ \ t \in R_+,\ h=const>0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t)= \varphi(t),\ t\in [-h,0], \tag{2}$$

где $\varphi(t)\in C[-h,0]$ и $A(t) \in C(R_+)$ – заданные функции, $|A(t)|\le a_0=const.$

В случае автономного уравнения $(A(t)=a=const)$ асимптотическое представление решений $X(t;\varphi(\cdot))$ начальной задачи (1)-(2) при $t\to\infty$ дает теория Флоке (см. например, [1], [2]): характеристическое уравнение

$$\lambda=a\ exp(-\lambda h) \tag{3}$$

имеет бесконечное количество решений $\lambda_1,\ \ \lambda_2,\ \ \lambda_3,\ \dots$ в комплексной плоскости, таких, что $lim_{\,k\to\infty} Re\lambda_k=-\infty$, и решение представимо в виде сходящегося ряда

$$X(t,\varphi(\cdot))=\sum_{k=1}^{\infty} C_k\varphi(\cdot)\exp(\lambda_k t),\ t\in R_+, \tag{4}$$

где C_k - линейные функционалы от начальной функции.

Отсюда следует, что в автономном случае существуют такие «базовые» решения $\xi_k(t)$, $k=1,2,3,\dots$, и константы $\mu_k\to-\infty$, $k=1,2,3,\dots$, что

$$X(t,\varphi(\cdot))=\sum_{k=1}^{\infty} C_k\varphi(\cdot)\xi_k(t),\ t\in R_+, |\ \xi_k(t)|=O(\exp(\mu_k t)), t\to\infty, k=1,2,3,\dots \tag{5}$$

В [3] было установлено, что определяющим для асимптотического поведения является произведение коэффициента и запаздывания, поскольку оно является безразмерным и не меняется при линейной замене аргумента, и доказано, что при ограниченном коэффициенте и достаточно малом запаздывании: $a_0h<exp(-1)$ решение представляется в виде

$$X(t,\varphi(\cdot))=C_1\varphi(\cdot)\xi_1(t)+C_2\varphi(\cdot)\xi_2(t),\ t\in R_+, \tag{6}$$

где $\mu_2<\mu_1$ в (5) – вещественные корни мажорирующего характеристического уравнения

$$\mu=a_0\ exp(\mu h). \tag{7}$$

Отметим, что из соотношений (5) не следуют соотношения вида

$$\lim_{t\to-\infty}|\xi_{k+1}(t)/\ \xi_k\ (t)|=0\ , \tag{8}$$

поскольку, кроме, возможно, λ_1 и λ_2, числа λ_k являются комплексными, и, соответственно, вещественные компоненты функций $exp(\lambda_k\ t)$ – колеблющимися. Поэтому мы выдвигаем гипотезу о том, что для некоторого числа $M=const>0$ будет

$$\lim\sup_{t\to-\infty}|\xi_{k+1}(t)|/\max\{\ |\xi_k\ (s)|:t\le s\le t+M\}=0 \tag{9}$$

хотя бы до третьего слагаемого при достаточно малом запаздывании.

Для подтверждения этой гипотезы был построен следующий алгоритм. Рассмотрим гипотезу для трех слагаемых. Возьмем три случайно выбранных начальных функции $\varphi_k(t),$ $k=1,2,3,$ и, соответственно, три решения

$$X_k(t)=c_{k1}\xi_1(t)+\ c_{k2}\xi_2(t)+\ c_{k3}\xi_3(t),\ k=1,2,3. \tag{10}$$

Поскольку эти решения выбраны случайно, должны быть $c_{k1}\ne\ 0,\ \ k=1,2,3.$Тогда должны выполняться соотношения

$$\lim_{t\to\infty}\{X_k(t)/X_1(t):\ |X_1(t)|>\ \Omega_1(t)\ \}\ =\ p_{k1}\ =const\ne 0,\ k=2,3, \tag{11}$$

где $\Omega_1(t)$ – некоторая положительная функция такая, что сколь угодно далеко вправо существуют такие точки, для которых $|X_1(t)|>\Omega_1(t)$. Если это подтверждается, тогда находим: $c_{k1}\ =\ p_{k1}c_{11},\ k=2,3.$ Обозначим

$$Y_k(t):=\ X_2(t)\ -p_{k1}\ X_1(t)=(\ c_{k2}-p_{k1}\ c_{12})\xi_2(t)+\ (c_{k3}-p_{k1}\ c_{13})\ \xi_3(t),\ k=2,3,$$

тогда должно быть

$$\lim_{t\to\infty}\{Y_k(t)/\ X_1(t):\ |X_1(t)|>\ \Omega_1(t)\}\ =\ 0,\ k=2,3, \tag{12}$$

Поскольку решения были выбраны случайно, должно быть $c_{k2}-p_{k1}\ c_{12}\ne 0,\ k=2,3.$ Тогда должно выполняться соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\{Y_3(t)/\ Y_2(t):\ |Y_1(t)|>\ \Omega_2(t)\}\ =\ p_{32}\ =const\ne 0. \tag{13}$$

Для приближенного решения начальной задачи и проверки соотношений вида (11)-(12)-(13) был составлен алгоритм (вместо “$t\to\infty$” выбирается некоторое большое число T и проверяется, что соответствующие переменные являются «почти постоянными» на интервале $[T/2,\ T]$), и написана программа на языке *pascal.* Исходными данными для нее является диапазон значений функции $A(t)h.$

Приближенные вычисления для решения начальной задачи при случайно выбираемых значениях функции $A(t)$ в соответствующих диапазонах и случайных начальных функциях подтвердили гипотезу для следующих ограничений: $-0.3\le A(t)h\le -0.1.$

Литература

1. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения, пер. с англ. - Москва: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 248 с.
2. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – Москва: Наука, 1972. – 351 с.
3. Панков П.С. Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения, 1977, том 13, № 4. – С. 455-462.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ В МОЛЕКУЛЕ ДНК

Замышляева А.А, Бычков Е.В.

ФГБОУ ВПО Южно-Уральский государственный университет (НИУ)

454080, Челябинск, проспект Ленина, 76

Тел.: 8(351)267-93-39, e-mail: zamyshliaevaaa@susu.ac.ru, bychkov42@gmail.com

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; \dot{u}(x,0) = u_1(x), \;\; v(x,0) = v_0(x), \;\; \dot{v}(x,0) = v_1(x), \quad x \in \Omega \tag{1}$$

с краевыми условиями Дирихле

$$u(x,t) = v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \tag{2}$$

для системы уравнений Буссинеска

$$\begin{cases} (b+\Delta)\ddot{u} = a\Delta u - \Delta f(u,v), \\ (b+\Delta)\ddot{v} = d\Delta v - \Delta g(u,v), \end{cases} \tag{3}$$

где $u, v \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$, f, g – класса C^∞, $a^2 + d^2 \neq 0$. Система уравнений (3) при $n = 1$ и определенном наборе коэффициентов моделирует колебания в молекуле ДНК [1] в этом случае u и v определяют величину отклонения от положения равновесия, f и g силы межмолекулярного взаимодействия.

Введем пространства

$$\mathfrak{U} = \{w \in W_2^{l+2}(\Omega) \times W_2^{l+2}(\Omega) : w(x,t) = 0, \, (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}\} \text{ и } \mathfrak{F} = \{w \in W_2^{l}(\Omega) \times W_2^{l}(\Omega)\}.$$

Сделаем замену

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} b+\Delta & 0 \\ 0 & b+\Delta \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a\Delta & 0 \\ 0 & d\Delta \end{pmatrix}, \quad N(w) = \begin{pmatrix} \Delta f(u,v) \\ \Delta g(u,v) \end{pmatrix},$$

тем самым редуцируем задачу (1)–(3) к задаче Коши

$$w(0) = w_0, \quad \dot{w}(0) = w_1 \tag{4}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\ddot{w} = Mw - N(w). \tag{5}$$

Определение. *Множество $\mathfrak{P}$ называется фазовым пространством уравнения (5), если*
(i) для любых $(w_0, w_1) \in T\mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (4), (5);
(ii) любое решение $w = w(t)$ уравнения (5) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория, т.е. $w(t) \in \mathfrak{P}$ при $t \in (-\tau, \tau)$ [2].

Операторы $R^L_\lambda(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\lambda(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называются, соответственно, правой и левой L-резольвентами оператора M.

Операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\lambda(M)d\lambda \text{ и } Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\lambda(M)d\lambda$$

являются проекторами, причем Γ – контур, ограничивающий относительный спектр оператора M.

Обозначим $\ker P = \mathfrak{U}^0$, $\operatorname{im} P = \mathfrak{U}^1$, $\ker Q = \mathfrak{F}^0$, $\operatorname{im} Q = \mathfrak{F}^1$.

Теорема 1. *Пусть* $(\mathbb{I} - Q)(M - N'_{w_0}) : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0$ *топлинейный изоморфизм, тогда непустое множество* $\mathfrak{M} = \{w \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mw - N(w)) = 0\}$ *является фазовым пространством уравнения (5) в окрестности точки* w_0.

На основе теоремы 1 можно доказать локальную разрешимость задачи (1)–(3).

Литература

1. *Chen G.* Initial boundary value problem for a system of generalized IMBq equations / G. Chen, H. Zhang // Mathematical methods in the applied sciences. – 2004. – Vol. 27, № 5. – P. 497–518.

2. *Замышляева, А.А.* Фазовое пространство полулинейного уравнения Буссинеска / А.А. Замышляева, Е.В. Бычков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 18 (277), вып. 12. – С. 13–19.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ВОДА-ВОЗДУХ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ КОНТРАСТНЫХ СТРУКТУР

Левашова Н.Т., Николаева О.А.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Физический факультет

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

89161341148, natasha@npanalytica.ru; 89859667177, o.a.nikolaewa@gmail.com

Введение. Изучение параметров среды в приповерхностном слое океана представляет большой интерес для современной науки, поскольку тепло- и массообмен между океаном и атмосферой является одним из основных факторов, определяющих климатическую систему Земли. В настоящей работе представлена модель для описания распределения температуры в переходном слое на границе вода-воздух.

Система вода-воздух представляет собой бистабильную среду с диссипацией. Переход от одного стабильного состояния к другому происходит за счет притока в систему внешней энергии, роль источника которой играет тепловое излучение в окружающей среде. Таким образом, образуется внутренний переходный слой. Для моделирования изменения температуры в данной системе воспользуемся теорией контрастных структур.

Модель. В общем виде постановка задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\left(k(z)\dfrac{dT}{dz}\right) = f(T,z), \quad z \in (-a,a) \\ \left.\dfrac{dT}{dz}\right|_{z=-a} = 0; \ \left.\dfrac{dT}{dz}\right|_{z=a} = 0; \end{cases}$$

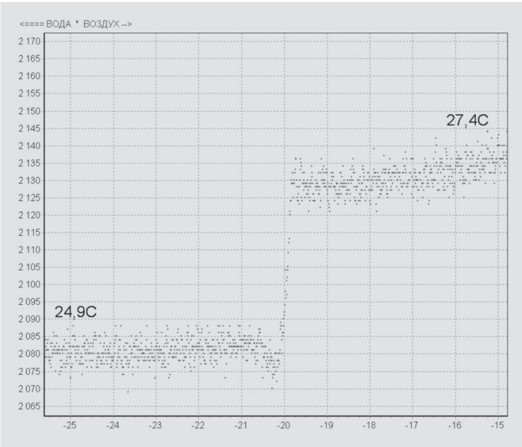
где $a \quad 5см,$ $k(z)$ - коэффициент теплообмена. Вне переходного слоя теплообмен является турбулентным, а внутри слоя – молекулярным. Коэффициент теплообмена при молекулярном взаимодействии значительно меньше, чем при турбулентном. Кроме того, турбулентный обмен в воздухе происходит интенсивнее, чем в воде. Одним из требований к модели является учет резкого изменения коэффициента теплообмена от слоя к слою в стратифицированной жидкости: $k(z) = \begin{cases} k_w, & z \le z_1; \\ k_{trans}, & z_1 < z \le z_2; \\ k_a, & z > z_2. \end{cases}$ Здесь z_1, z_2 - границы переходного слоя. Граничные условия Неймана означают, что тепловой поток на границе области равен нулю. Для описания устойчивого стационарного перехода между двумя состояниями диссипативной контрастной структуры используется уравнение с нелинейностью кубического вида $f(T,z) = (T-T_a)(T-T_w)(T-\varphi(z))$ [1], где T_a и T_w - известные значения температуры в воде и в воздухе. Функция $\varphi(z)$ выбирается специальным образом так, чтобы решение образовывало устойчивую стационарную контрастную структуру [2,3].

На некотором расстоянии z_3 от границы раздела в воде в результате дополнительного притока тепла за счет конденсации возникает отклонение значения температуры от T_w на величину δW (порядка 1К). Внутри переходного слоя за счет испарения происходит отклонение значения T_a на величину δA, поэтому неоднородность в правой части имеет вид кусочно-непрерывной функции.

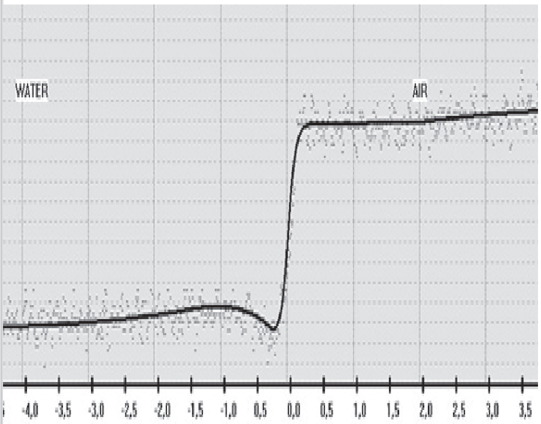
$$f(T,z) = \begin{cases} (T - T_a)(T - (T_w + \delta W))(T - \varphi(z)), & z_3 \le z < z_1; \\ (T - (T_a + \delta A))(T - T_w)(T - \varphi(z)), & z_1 \le z < z_2; \\ (T - T_a)(T - T_w)(T - \varphi(z)), & z \le z_3 \bigcup z \ge z_2. \end{cases}$$

Результаты:

Экспериментальный график:



График, полученный с помощью численного моделирования:



Заключение. Была построена математическая модель, описывающая изменение температуры в переходном слое на границе раздела вода-воздух с использованием теории контрастных структур. Модель позволяет, рассматривая переходный слой в целом, учитывать каждый из слоев стратифицированной среды. Результаты численных расчетов, проведенных на основании этой модели, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Литература:

(1) Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.

(2) Н.Н. Нефедов, М.А. Давыдова. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных квазилинейных уравнениях реакция-диффузия-адвекция, Дифференциальные уравнения, Т.49, №6, с.715-733.

(3) Н.Т. Левашова, Н.Н. Нефедов, А.В. Ягремцев. Контрастные структуры в уравнениях реакция–диффузия–адвекция в случае сбалансированной адвекции. Ж. вычисл.матем. и матем. физ., 2013, Т.53 №3, с. 35-45.

ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПОЛЫХ СТРУКТУРАХ

[1]Львович И.Я., [2]Преображенский А.П., [2]Чекмарев Р.С.

[1]Панъевропейский университет, г.Братислава
[2]Воронежский институт высоких технологий, г.Воронеж
394043, Воронеж, ул.Ленина, 73а
Тел.: (473)272-73-98, email: komkovvivt@yandex.ru

Полые структуры входят в состав многих объектов техники. Анализ их характеристик рассеяния представляет собой сложную электродинамическую задачу. К настоящему времени уже созданы и активно применяются большое число методов, которые дают возможности исследования электродинамических характеристик рассеяния электромагнитных волн для полых структур определенных классов, которые характеризуются по заданным размерам, формам и видам поперечного сечения.

Если рассматривать низкочастотную область, где полые структуры имеют размеры апертуры, сравнимые с длиной волны, то применяют строгий метод – метод интегральных уравнений. При этом не обязательно, что будет требоваться большие машинные ресурсы. Когда анализируют полые структуры, которые имеют размеры апертуры, размером в несколько длин волн, в определенных случаях привлекают высокочастотную аппроксимацию [1, 2]. Развиваются разные высокочастотные методы для проведения анализа характеристик рассеяния электромагнитных волн для таких структур. Одним из них является модальный метод [3].

В данной работе нами проводится анализ характеристик рассеяния двумерных полых структур. Плотности токов на поверхности объекта можно определить исходя из уравнения Фредгольма первого рода, в которое входит плотность неизвестного электрического тока для случая *E*-поляризации [4].

В данной краевой задаче уравнение решается на основе метода моментов [5], затем в рамках приближения Кирхгофа определяется поле в дальней зоне.

На рис. 1 приведена схема рассеяния электромагнитных волн на полой структуре.

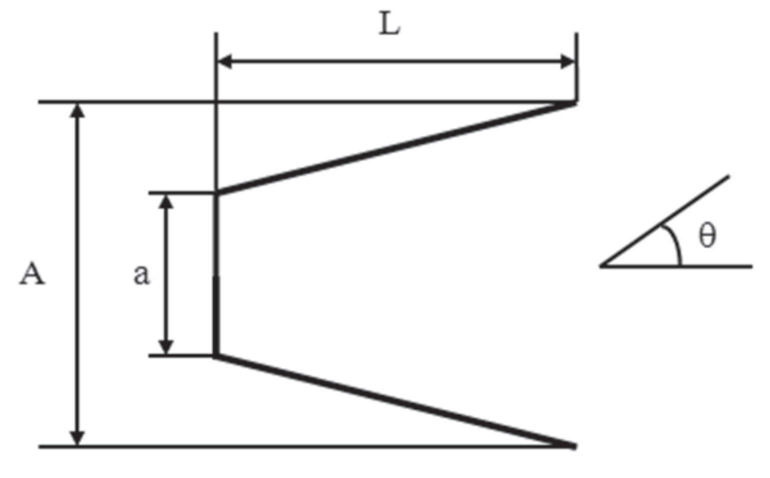


Рис. 1

На основе использования метода оптимизации - метода золотого сечения, проводилось определение размеров полой структуры, при которых значения характеристик рассеяния не превышали заданной величины, например 3 дБ.

На рис. приведен пример зависимости эффективной площади рассеяния структуры со следующими размерами: L=10λ, A=5λ, кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют размерам a=1λ, 2λ, 3λ, 4λ, 5λ, соответственно, где λ - длина падающей электромагнитной волны.

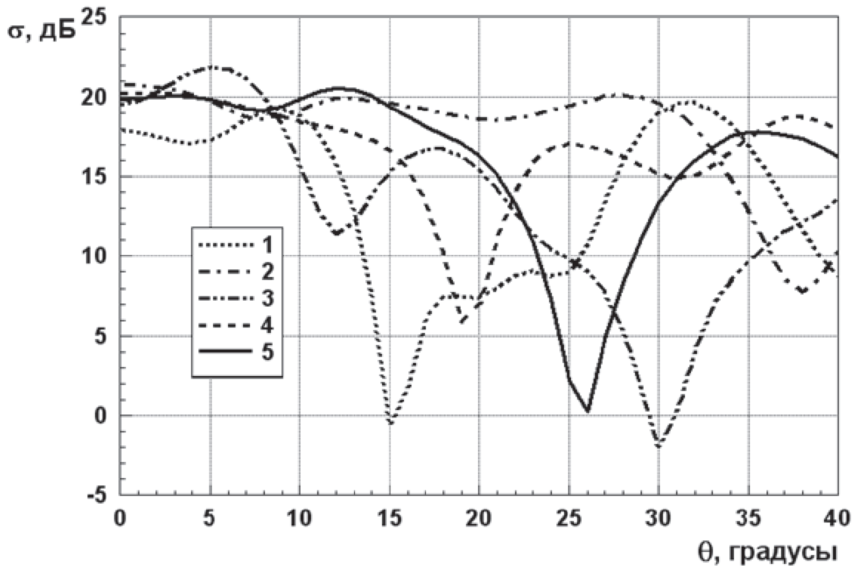


Рис. 2

Таким образом, показана возможность создания полых структур с требуемыми значениями характеристик рассеяния.

Литература

1. Нотт Ю. Ф. Развитие методов расчета эффективной площади отражения радиолокационных целей // ТИИЭР, 1985. – Т. 73. – № 2. – С. 90-105.

2.Ling H. Shooting and bouncing rays: calculating the RCS of an arbitrarily shaped cavity. / H. Ling, R. C. Chou, S. W. Lee // IEEE Trans. Antennas Propagat., 1989, vol. AP–37, no. 2. – Pp. 194–205.

3. Lee C. S. Normal modes in an overmoded circular waveguide coated with lossy material. / C. S. Lee, S. W. Lee, S. L. Chuang // IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1986, vol. MTT–34, no. 7. – Pp. 773–785.

4.Захаров Е. В. Численные методы решения задач дифракции / Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов. – М.: Радио и связь, 1986. – 184 с.

5. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. – М.: Мир, 1977. – 485 с.

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Манакова Н.А, Богатырева Е.А.

ФГБОУ ВПО Южно-Уральский государственный университет

454080, Челябинск, проспект Ленина, 76

Тел.: 8(351)267-93-39, e-mail: manakovana@susu.ac.ru, bogatyrevaea@susu.ac.ru

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0, \tag{1}$$

для квазилинейного уравнения соболевского типа

$$\frac{d}{dt}(L(u)) + M(u) = 0, \tag{2}$$

где $L(u) = Au + \lambda M(u)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*)$ и $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^*)$ – дуальные (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{P} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{P}^* \hookrightarrow \mathfrak{U}^*$ плотны и непрерывны. Кроме того, пространство $\mathfrak{U}$ сепарабельно, а вложение $\mathfrak{U} \Subset \mathfrak{P}$ компактно.

Пусть оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{P}; \mathfrak{P}^*)$ симметричен, положительно определен.

Пусть оператор $M \in C^{r+1}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$, $r \in \mathbb{N}$, s-монотонен, однороден порядка $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$, причем производная Фреше оператора M симметрична.

(A)Пусть $\exists F(s) \geq 0$ при п.в. $s \in [0, \infty)$, такая что $F \in C[0, \infty)$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль, и для п.в. $s \in [0, \infty)$, для любых $u = u(s)$, $v = v(s) \in \mathfrak{U}$ выполняется

$$\|M(u) - M(v)\|_* \leq F(s)\|u - v\|.$$

(B)Пусть $\exists\, C^M > 0$, и $\exists\, p \geq 2$ такие, что $\|M(u)\|_* \leq C^M \|u\|^{p-1}\ \forall u \in \mathfrak{U}$ и $\langle M(u), u\rangle \geq 0$.

Выберем в $\mathfrak{U}$ счетную всюду плотную ортонормальную систему $\{w_k\}$. Построим галеркинские приближения обобщенного решения задачи (1), (2) в виде $u_m = \sum\limits_{i=1}^{m} c_{mi}(t) w_i$, где коэффициенты $c_{mi} = c_{mi}(t) \in C^1[0, T_{m0}]$, $i = 1, ..., m$, определяются задачей

$$\int_0^T \Big(\frac{d}{dt}\langle Au_m + \lambda M(u_m), w_k\rangle + \langle M(u_m), w_k\rangle\Big)\varphi(t)dt = 0,$$

$$\forall \varphi \in L^2(0, T), k = 1, ..., m,$$

$$u_{m0} = \sum_{i=1}^{m} c_{mi}(0) w_i \to u_0 \text{ сильно в } \mathfrak{U}.$$

Теорема 1. *Для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ и для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2).*

В доказательстве теоремы используются методы, схожие с методами в [1].

Рассмотрим математическую модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки Баренблатта – Гильмана [2]:

$$u_t - \lambda\alpha(\Delta\Phi(u))_t = \alpha\Delta\Phi(u), \tag{3}$$

$$u(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \tau), \tag{4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \qquad (5)$$

здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞, $\Phi(u) \equiv |u|^{p-2}u, p \geq 2$ – монотонно возрастающая и гладкая функция, параметры $\tau, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$.

Положим $\mathfrak{H} = W_2^{-1}(\Omega)$, $\mathfrak{P} = L_p(\Omega)$, $\mathfrak{U} = \overset{0}{W}{}_q^1(\Omega)$, в качестве $\mathfrak{U}^*$ и $\mathfrak{P}^*$ возьмем пространства, сопряженные к $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{P}$ относительно двойственности в $W_2^{-1}(\Omega)$. Определим операторы A и M:

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, v\rangle = \int\limits_\Omega u(-\Delta)^{-1}v\,dx, u, v \in \mathfrak{P}$$

$$\langle M(u), v\rangle = \alpha \int\limits_\Omega |u|^{p-2}uvdx, \quad u,\, v \in \mathfrak{U}.$$

В работах [3], [4] доказано, что оператор $M \in C^{r+1}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$, $r \in \mathbb{N}$, s-монотонен, p-коэрцитивен, однороден порядка $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$, причем производная Фреше оператора M симметрична, а оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{P}; \mathfrak{P}^*)$ симметричен, положительно определен. Оператор M удовлетворяет условиям (A) и (B).

Теорема 2. *Пусть* $1 \leq q \leq n$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$, *если* $n > q$, *то* $2 \leq p < \frac{2q}{n-q}$, *если* $n = q$, *то* $p \in [2, +\infty)$. *Тогда для любого* $u_0 \in \overset{0}{W}{}_q^1(\Omega)$ *и для любого* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *существует единственное обобщенное решение задачи (3) – (5).*

Литература

1. *Свешников, А. Г.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

2. *Баренблатт, Г. И.* Математическая модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки / Г. И. Баренблатт, А. А. Гильман // Инженерно-физический журнал. – 1987. – Т. 52, № 3. – С. 456–461.

3. *Манакова, Н. А.* О решении задачи Дирихле–Коши для уравнения Баренблатта–Гильмана / Н. А. Манакова, Е. А. Богатырева // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2014. – Т. 7. – С. 52–60.

4. *Манакова, Н. А.* Численное исследование процессов в модели Баренблатта–Гильмана / Н. А. Манакова, Е. А. Богатырева // Вестник МаГУ. Математика. – 2013. – Вып. 15. – С. 58–67.

Особенности прохождения эллиптически поляризованной электромагнитной волны через просветляющий слой при наклонном падении.

А.В. Митин, Ю.И. Худак

Рассматривается математическая модель для классической задачи о прохождении эллиптически поляризованной плоской электромагнитной волны через оптическую систему из диэлектрических материалов с плоскими параллельными друг другу границами, описываемая уравнениями Максвелла и материальными соотношениями простейшего вида.

Система состоит из двух полупространств разделённых одним промежуточным (*просветляющим*) слоем. Плоская волна с частотой ω, вообще говоря, эллиптически поляризованная, падает на систему под некоторым фиксированным углом к нормали.

Как известно, плоская эллиптически поляризованная волна может быть представлена как линейная комбинация взаимно ортогональных ТЕ- и ТМ-волн, с некоторыми заданными положительными постоянными $\overset{\vee}{w}$ и $\hat{w}$, определяющими энергетические интенсивности ТЕ- и ТМ-составляющих в падающей волне.

Решается задача о выборе параметров среднего (просветляющего) слоя: D – толщина слоя, $p_1 = \sqrt{\varepsilon/\mu}$ – величина обратная волновому сопротивлению и $n_1 = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – коэффициент преломления, где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости материала, при которых энергетический коэффициент отражения $R(\omega, D, p_1, n_1)$ минимален в диапазоне частот от Ω_1 до Ω_2:

$$\max_{\omega\in[\Omega_1,\Omega_2]} R(\omega, D, p_1, n_1) \xrightarrow[D,p_1,n_1]{} \min\ . \tag{1}$$

Примем следующие обозначения: β_0 – угол отклонения от нормали волнового вектора набегающей на систему волны, p_0, p_1, p_2 и n_0, n_1, n_2 – величины обратные волновым сопротивлениям и показатели преломления сред соответственно, где индекс 1 – выбран для среднего слоя, $s = \sin^2\beta_0$, $\theta = \frac{p_2}{p_0}$; $\theta_1 = \frac{p_1}{p_0}$; $\theta_2 = \frac{p_2}{p_1}$, $h_1 = \sqrt{\frac{n_1^2-n_0^2 s}{n_1^2-n_1^2 s}}$, $h_2 = \sqrt{\frac{n_1^2 n_2^2-n_1^2 n_0^2 s}{n_1^2 n_2^2-n_2^2 n_0^2 s}}$, $h = \sqrt{\frac{n_2^2-n_0^2 s}{n_2^2-n_2^2 s}}$,

Доказана следующая теорема:

Теорема.

1. Для каждого значения параметра p_1 из диапазона $[p_0, p_2]$ найдётся конечное число значений D, определяемых формулой

$$D^{min} = \frac{\pi + 2\pi k}{(\Omega_1+\Omega_2)\sqrt{n_1^2 - n_0^2 s}}\ , (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{2}$$

и неравенством:

$$(\Omega_2 - \Omega_1) D \sqrt{n_1^2 - n_0^2 s} < \pi\ , \tag{3}$$

при которых функционал $\max\limits_{\omega\in[\Omega_1,\Omega_2]} R(\omega)$ имеет локальный минимум.

2. Для любого $p_1 \in [p_0, p_2]$ точки минимума функционала $\max\limits_{\omega\in[\Omega_1,\Omega_2]} R(\omega)$ строго упорядочены по величине, и среди них есть единственный глобальный минимум, определяемый условием $k = 0$ в формуле (2).

3. Глобальный минимум функционала (1) будет лучшим из возможных когда p_1 удовлетворяет условию:

$$p_1^{min} = \sqrt{p_0 p_2} \ \cdot \ \sqrt[4]{\frac{\overset{\vee}{w} h_2^2 + \frac{\hat{w}}{h_2^2}}{\overset{\vee}{w} h_1^2 + \frac{\hat{w}}{h_1^2}}} \tag{4}$$

4. В частном случае $\Omega_1 = \Omega_2$ наилучшее значение n_1 определяется формулой:

$$n_1^{min} = n_0 \sqrt{s} \Bigg/ \left(1 - \sqrt{\frac{\overset{\vee}{w}\theta_2^2 \xi + \hat{w}\theta_1^2 \eta}{\overset{\vee}{w}\theta_1^2/\xi + \hat{w}\theta_2^2/\eta}} \right) \ , \tag{5}$$

где $\xi = 1 - s\left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2$ и $\eta = 1 - s$.

Замечание: Отличием случая наклонного падения является существенная зависимость функции R от обоих параметров p_1 и n_1, и невозможность скомпенсировать изменение n_1, подбором D, как это было в случае нормального падения. В отличие от линейной ТЕ- или ТМ-поляризации, в случае эллиптической поляризации коэффициент отражения ни при какой частоте не обращается в нуль. Это доказывает невозможность сведения задачи о наклонном падении при эллиптической поляризации к задаче нормального падения заменой параметров, как это было для линейной поляризации.

Формула (4) справедлива только при условии постоянства параметра n_1, что для оптических систем не характерно. В обычных оптических средах $n \approx p$, так как магнитная проницаемость среды – почти единица.

References

1. Born M., Wolf E. Principles of Optics. 7th ed – Cambridge, 2002.

2. Худак Ю.И. О наилучшем однослойном просветляющем покрытии для интервала частот. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1990. – 30:2. – с.325–327.

3. Митин А.В. Худак Ю.И. Об оптической задаче наилучшего просветления при наклонном падении. // Труды конференции International Society for Analisis, and Computations (ISAAC) – М.: 2011.

О РАЗВИТИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРИНЦИПА СРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ[1]

Нефедов Н.Н. ,
Московский государственный университет, физический факультет,
кафедра математики, 119991 Москва, Россия
Тел.: (495)9394859, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Для нескольких классов начально-краевых задач для уравнения

$$\varepsilon^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, \nabla u, x, \varepsilon), \quad x \in \mathcal{D} \subset R^N,\ t > 0, \tag{1}$$

которое играет важную роль во многих приложениях и носит название уравнения реакция-диффузия-адвекция, были исследованы воросы существования, устойчивости стационарных решений с пограничными и внутренними слоями, а также получены асимптотики движущихся фронтов. В частности, рассмотрены следующие случаи уравнения (1):

1. Уравнение реакция-диффузия

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x, t, \varepsilon), \quad x \in (0,1), t > 0.$$

2. Уравнение реакция-диффузия-адвекция

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A(u,x)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x, t, \varepsilon), \quad x \in (0,1), t > 0.$$

Для начально-краевых задач для этих уравнений были доказаны теоремы существования фронтов и построена их асимптотика.

Мы также распространили наш подход на системы уравнений реакция-диффузия вида

$$\begin{aligned} &\varepsilon^q \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = f(u, v, x, \varepsilon), \\ &\varepsilon^p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = g(u, v, x, \varepsilon), \quad x \in (0,1), t > 0. \end{aligned}$$

Наши исследования базируются на асимптотическом принципе сравнения, использующем свойство сохранения порядка операторов, производящих формальную асимптотику, и являются дальнейшим развитием результатов работ [1] - [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями. //Дифференц. уравнения. 1995. Т.31. *N*7. С. 1142–1149.

2 *Н.Н. Нефедов, Ю. В. Божевольнов.* Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия. *Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ.*, 2010, том 50, N2, сс. 276–285.

3 *Н.Т. Левашова, Н.Н. Нефедов, А.В. Ягремцев* Контрастные структуры в уравнениях реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной адвекции. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2013, том 53, № 3, с. 365-376.

4 *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах, Фундаментальная и прикладная математика 1998, т.4, N3, с.799-851.

[1]Работа частично поддержана РФФИ, пр. 13-01-00200.

5 *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур, //Автоматика и телемеханика, 1997, N7, С. 4–32, Наука, Москва

6 *Нефедов Н.Н.* Общая схема асимптотического исследования устойчивых контрастных структур. //Нелинейная динамика. 2010. Т.6. N1. С.181–186.

7 *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, 2010, т. 268, с. 268-283.

8 *Nefedov N.N., Recke L., Schnieder K.R.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 405 (2013), pp. 90-103.

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ Si/SiGe

Орлов А.О.[1] Левашова Н.Т.[2]

[1,2]*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет*

119991, ГСП-1, Москва Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова Дом 1, строение 2

[1]Тел.: 89197651396, e-mail:orlov.andrey@physics.msu.ru

[2]Тел.:89161341148, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Введение

В настоящей работе исследуются гетероструктуры $Si/Si_{1-x}Ge_x/Si$ II типа, то есть такие, в которых напряженный слой $Si_{1-x}Ge_x$ образует на зонной диаграмме довольно глубокую потенциальную яму для дырок и невысокий барьер для электронов, высота которого растет с увеличением содержания германия x. В работе моделируется поведение волновых функций носителей заряда при изменении параметров барьера.

Модель

Для описания вида волновых функций носителей заряда поставим одномерную краевую задачу для системы из трех уравнений: двух одночастичных уравнений Шредингера и уравнения Пуассона для кулоновской энергии:

$$\frac{\hbar^2}{m}\frac{d^2}{dz^2}=\left(V_e(z)-\varphi(z)-E_e\right)\Psi e+E_{Ce}\Psi e,$$

$$\frac{\hbar^2}{m}\frac{d^2\Psi h}{dz^2}=\left(V_h(z)+\varphi(z)-E_h\right)\Psi h+E_{Ch}\Psi h,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\frac{e^2 n_0}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(\left|\Psi e\right|^2-\left|\Psi h\right|^2\right),\quad -A\le z\le A \qquad (1)$$

Здесь $\hbar$-постоянная Планка, ε-диэлектрическая проницаемость, ε_0-электрическая константа, m-эффективная масса носителей; e-заряд электрона; n_0-плотность носителей, возникающих в системе за счет внешнего облучения; $\Psi e, \Psi h$-волновые функции электронов и дырок соответственно, φ - кулоновская потенциальная энергия.

Потенциальный барьер для электронов $V_e(z)$ и потенциальная яма для дырок $V_h(z)$ имеют вид:

$$V_e(z)=\begin{cases}0, & |z|>\dfrac{L}{2},\\ V_e, & |z|<\dfrac{L}{2};\end{cases}\qquad V_h(z)=\begin{cases}0, & |z|>\dfrac{L}{2},\\ -V_h, & |z|<\dfrac{L}{2}.\end{cases}$$

Здесь L – ширина слоя в нм.

В настоящей модели учтено корреляционное взаимодействие согласно методу функционала плотности [1]. Для этого в уравнения Шредингера в системе (1) добавлены слагаемые $E_{Ce}\Psi e$ и $E_{Ch}\Psi h$. Согласно работе [2] корреляционная энергия носителей связана с их волновыми функциями $\Psi_{carrier}$ следующим образом: $E_C \quad (n_0)^{1/4} \quad (\Psi_{carrier})^{1/2}$. Система (1) рассматривается на отрезке $-A\le z\le A$, где A – величина превышающая ширину напряженного слоя. На краях отрезка заданы однородные краевые условия второго рода.

Методика расчета.

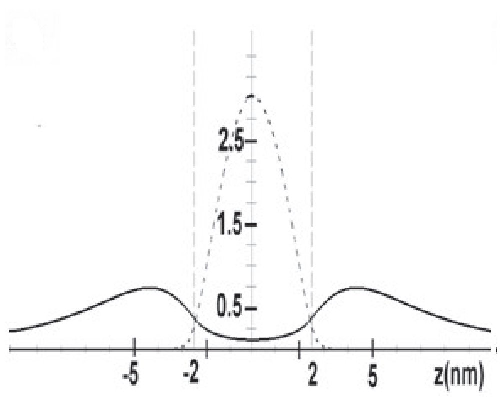
Проведем обезразмеривание системы (1). За единицу энергии выберем величину $E_x = \dfrac{me^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \varepsilon^2\hbar^2}$ 76 Мэв, а за единицу длины величину $\dfrac{a_x}{\mu}$, где $a_x = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\hbar^2}{me^2}$ 1,6 нм, μ 0,01 - малый параметр, искусственно вводимый в систему для получения решения с внутренними переходными слоями. После обезразмеривания система уравнений принимает следующий вид:

$$\mu^2 \frac{d^2\Psi e}{dz^2} = \left(V_e(z) - \varphi(z) - E_e\right)\Psi e + N\left|\Psi e\right|^{1/2}\Psi e,$$
$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = K\left(\left|\Psi e\right|^2 - \left|\Psi h\right|^2\right). \qquad (2)$$
$$\mu^2 \frac{d^2\Psi h}{dz^2} = \left(V_h(z) + \varphi(z) - E_h\right)\Psi h + N\left|\Psi h\right|^{1/2}\Psi h,$$

N - константа, зависящая от параметров напряженного слоя, K 1.

Методика исследования систем уравнений с малым параметром при производной предложена в [3]. Асимптотика решения уравнений Шредингера системы (2) ищется в виде $\Psi e = \bar{\Psi} e + Qe;\quad \Psi h = \bar{\Psi} h + Qh$. Потенциальная энергия в нулевом приближении (по степеням малого параметра μ) может быть определена из третьего уравнения системы (2), в правую часть которого подставляются квадраты функций $\bar{\Psi} e$ и $\bar{\Psi} h$. Используя нулевое приближение для кулоновской энергии, можно определить энергетические уровни электронов E_e. Энергетические уровни дырок - E_h рассчитываются с помощью обычной техники расчета уровней энергии частиц в потенциальной яме.

Результаты численных экспериментов.



На рисунке представлено численное решение системы (2) для нормированных плотностей распределения электронов (сплошная линия) и дырок (штриховая линия) поперек слоя SiGe. Волновая функция для дырок хорошо локализована в квантовой яме, образованной слоем SiGe в валентной зоне, однако, распределения электронной и дырочной плотностей поперек слоя не совпадают. Распределение электронов имеет двухгорбый вид и реализуется диполярная электронно-дырочная система.

Заключение.

Предложенная модель учитывает влияние корреляционного взаимодействия на волновые функции и плотность распределения носителей поперек слоев. Этот учет оказывается существенным при высокой плотности неравновесных носителей (т.е. при высоком уровне возбуждения). Модель позволяет описывать двухгорбые волновые функции для электронов и дырок в зависимости от толщины слоя и параметра корреляции носителей. С помощью построения нулевого приближения для кулоновской энергии удается рассчитать энергию для электронов внутри и вне слоя.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 13-02-00853, 13–01–00200).

Литература

1. W Kohn, L.J. Sham Phys. Rev. B V 140, N4A(1965).
2. А.П. Силин. Краткие сообщения по физике 5 (1983).
3. В.Ф. Бутузов, Н.Т. Левашова, А.А. Мельникова. ЖВМ Т.53. N9. (2013).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ КОНТРОЛЯ НАД ИЗМЕНЕНИЕМ ДАВЛЕНИЯ

Покладова Ю.В., Серебрянникова Е.С.

Ульяновский государственный технический университет

432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, д.32

Тел.: 89176064265, 89051834551, e-mail: pokladovau@inbox.ru, serebr_k@mail.ru

Характерной особенностью эксплуатации датчиков давления в авиационных и ракетных двигателях является влияние на них высокой температуры и повышенных уровней виброускорений. Отрицательное воздействие этой особенности в наибольшей степени проявляется в переходных режимах работы двигателя, например, при взлете и посадке аппарата, когда температура носит нестационарный характер.

Размещение датчика давления непосредственно на двигателе принципиально обеспечивает более высокую достоверность измерения, но, как правило, сопровождается воздействием на датчики высоких нестационарных температур и больших виброускорений, что приводит к погрешности измерений, а в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика. В связи с вышесказанным, возникает задача проектирования механической системы "трубопровод - датчик давления", в которой датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие высоких температур и виброускорений.

Рассматриваются математические модели механической системы, включающей в себя трубопровод с рабочей средой и датчик, содержащий в качестве составного элемента упругую пластину. Датчик давления расположен на боковой стенке трубопровода.

Рассматриваются плоские модели для бесконечно длинного трубопровода и трубопровода конечной длины. Аналогичные математические модели системы "трубопровод - датчик давления" рассматривались в [1-7]. В работах [1,2,5,6] авторами рассматривались математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления», когда динамика жидкости (газа), а также динамика чувствительного элемента датчика описываются линейными уравнениями. В работах [3,4,7,8] предложены модели системы «трубопровод – датчик давления», отличающиеся уравнениями, описывающими колебания упругого элемента датчика (нелинейные модели). Отличие предложенных в данной работе моделей от рассмотренных ранее заключается в измененной геометрии трубопровода. Задачи решаются в линейной постановке, соответствующей малым деформациям упругого элемента (пластины) и малым возмущениям потенциала скорости среды. Под рабочей средой понимается идеальная несжимаемая жидкость.

С помощью методов теории функций комплексного переменного или методов Фурье получены уравнения, связывающие закон изменения давления на входе в трубопровод и деформацию упругого элемента датчика. Начально-краевая задача для этих уравнения решается методом Галеркина. Рассматриваются различные способы закрепления концов упругого элемента датчика давления. Проведено численное моделирование на ЭВМ динамики упругого элемента датчика в зависимости от закона изменения давления в двигателе. Исследовалась деформация элемента как функция времени (в фиксированных точках элемента) и как функция координаты (в фиксированные моменты времени) для различных параметров механической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анкилов А.В.. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Математические модели механической системы «трубопровод-датчик давления» // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2007. – № 3. – С. 7-14.

2. Анкилов А.В.. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод-датчик давления» / А.В. Анкилов, П.А. Вельмисов, В.Д. Горбоконенко, Ю.В. Покладова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 188с.
3. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Математическое моделирование систем измерения давления // Избранные труды международной научной конференции (Армения, Ереван, 26.09.11 – 30.09.11). – Ереван, 2012. – С. 113-123
4. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод-датчик давления» // Вестник Самарского государственного технического университета. – 2011. – № 1 (29). – С. 137-144.
5. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Математические модели одной гидроупругой системы // Журнал Средневолжского математического общества. – 2006. – Т. 8. – № 2. – С. 93.
6. Вельмисов П.А., Решетников Ю.А., Ходзицкая Ю.В., Горбоконенко В.Д. Математические модели механической системы «трубопровод-датчик давления» // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – 2003. – № 1-2 (21-22). – С. 22-24.
7. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., Серебрянникова Е.С. Математическое моделирование систем динамического контроля за изменением давления // Журнал Средневолжского математического общества. 2012. – Т. 14. – № 2. – С. 22-33.
8. Покладова Ю.В., Серебрянникова Е.С. Исследование нелинейных систем динамического контроля за изменением давления // Тезисы докладов 4-й международной конференции (Москва, РУДН, 25-29 марта 2013г.). – М.: РУДН, 2013. – С.318-319.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПИ ФОТОСИНТЕТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО И ПРОТОННОГО ТРАНСПОРТА В ХЛОРОПЛАСТАХ

Приклонский В.И., Вершубский А.В., Тихонов А.Н.

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова,119992, Москва, ГСП-2, Россия

Тел.: 89055730452, e-mail: priklonsky@phys.msu.ru

Представлена обобщенная математическая модель, описывающая ключевые стадии переноса электронов вдоль фотосинтетической цепи электронного транспорта хлоропластов, а также сопряженные с ними процессы трансмембранного переноса протонов. В общем случае, если рассматриваются фотосинтетические процессы в клетках цианобактерий, необходимо также учитывать работу дыхательной цепи электронного транспорта, имеющей общие участки с фотосинтетической цепью переноса электронов.

Проведено численное моделирование электронного и протонного транспорта в хлоропластах с учетом регуляции электронного транспорта на акцепторном и донорном участках ФС1. Изучено влияние pH-зависимой активации ферментов цикла Кальвина и диссипации энергии в ФС2 (нефотохимическое тушение) на кинетику фотоиндуцированных редокс-превращений P_{700}, пластохинона, НАДФН, а также изменений внутритилакоидного pH и концентрации АТФ. Показано, что pH-зависимые процессы регуляции электронного транспорта влияют на распределение потоков электронов на акцепторной стороне ФС1 и общую скорость электронного транспорта между ФС2 и ФС1. При активации ферментов цикла Кальвина существенно ослабляется отток электронов на кислород и усиливается потока электронов к НАДФ$^+$.

Численное моделирование электронного и протонного транспорта в хлоропластах с учетом pH-зависимой регуляции электронного транспорта на акцепторном и донорном участках ФС1 обобщает предыдущие модели авторов [1-3]. Результаты «численных экспериментов», выполненных в рамках данной модели, позволили оценить возможный вклад pH-зависимых факторов в проявление индукционных явлений в кинетике световых стадий фотосинтеза. Для количественного анализа кинетики электронного транспорта в разных метаболических состояниях мы провели моделирование световых стадий фотосинтеза. Были выполнены «численные эксперименты», описывающие фотоиндуцированные превращения P_{700}, ферредоксина, НАДФ, изменения внутритилакоидного pH и синтез АТФ при функционировании различных цепей фотосинтетического транспорта электронов.

Результаты математического моделирования, выполненного в настоящей работе, позволили проанализировать влияние различных факторов на регуляцию электронного транспорта на акцепторном и донорном участке ФС1, а также выделить их вклад в появление сложной кинетики электронного транспорта в хлоропластах.

Литература

1. *А.В. Вершубский, В.И.Приклонский, А.Н. Тихонов* // Журн. физ. химии. 2006. Т. 80. № 3. С. 552.
2. *А.В. Вершубский, В.И.Приклонский, А.Н. Тихонов* // Российский хим. журн. 2007. Т. 51. № 1. С. 59.
3. *И.В Кувыкин, А.В. Вершубский, В.И. Приклонский, А.Н. Тихонов* // Биофизика. 2009. Т. 54. № 4. С. 647.

СУБЪЕКТИВНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Пытьев Ю.П. Фаломкина О.В.

Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2, Физический факультет

yuri.pytyev@gmail.com olesya.falomkina@gmail.com

+7(916)755-45-81 +7(916)771-31-09

В работе[1] рассмотрены математические методы моделирования субъективных суждений модельера-исследователя (м.- и.) об истинности как предложенной им (субъективной) модели объекта исследования, так и любых, основанных на ней выводов. Методы позволяют моделировать и эволюцию модальностей его суждений, обусловленную поступлением новых данных наблюдений за объектом.

Использован формализм математического моделирования субъективных суждений м.-и. о возможных значениях неизвестного параметра $x \in X$, определяющего модель $M(x)$ объекта исследования [1].

Основой формализма является предложенное м.- и. пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ с мерами правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$, где *неопределенный элемент* (н. э.) $\widetilde{x}$ характеризует модальности субъективных суждений м.-и. об истинности каждого значения $x \in X$ правдоподобием $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ равенства $\widetilde{x} = x$ и доверием $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$ неравенства $\widetilde{x} \neq x$ [1, 2]. Пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ является основой «интеллектуального компьютерного диалога» м.-и. с моделью объекта исследования, в котором м.-и. может *вычислить* правдоподобие и доверие истинности *любых* своих *суждений* о *любых свойствах объекта исследования*, обусловленных его моделью $M(x)$, $x \in X$.

В докладе рассмотрены:

- Математические конструкции неопределенного элемента $\widetilde{x}$ и мер правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$.
- Группы $\overline{\Gamma}$ автоморфизмов шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ значений мер правдоподобия и доверия и $\overline{\overline{\Gamma}}$ изоморфизмов.
- Интегрирование относительно мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, pl- и bel-интегралы.
- Интерпретация неопределенного элемента как неопределенной высказывательной переменной.
- Модели «абсолютного незнания» и «абсолютного знания» модели объекта исследования, в любом случае позволяющие м.-и. предложить его (объекта) субъективную модель.
- Методы анализа и интерпретации данных измерений на основе *субъективной модели* измерительного эксперимента.

[1]Работа поддержана РФФИ, проект 14-07-00441.

- Модель неопределенного случайного элемента и решение задачи статистической идентификации состояния неопределенного стохастического объекта.

Формализм, основанный на теории мер правдоподобия и доверия и интегрирования относительно этих мер [1], позволяет:

- построить универсальную модель «полного незнания» свойств модели объекта исследования, в частности, не зависящую от модели измерений и от мощности множества элементарных событий, в отличие от моделей «полного незнания» в [4, 5];
- разработать методы эмпирического построения и верификации модели субъективных суждений, предложенной м.-и., в отличие от формализма модальной логики [6];
- сформулировать модель субъективных суждений на основе упорядоченности значений правдоподобий элементарных высказываний, а не их численных значений [4–9].

В докладе рассмотрены математические методы субъективного моделирования, существенно отличающиеся от предложенных в [4–9], приведены результаты численного моделирования решений некоторых из рассмотренных задач. Методы эмпирического построения и проверки адекватности субъективной модели цели исследования рассмотрены в [3].

Литература

[1] Пытьев Ю. П. Математическое моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 4. – С. 102-125. – doi: 10.1134/S2070048213060094.

[2] Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности. – 2 изд. – М. : Физматлит, 2014.

[3] Балакин Д.А., Нагорный Ю.М., Пытьев Ю.П. Эмпирическая верификация, восстановление и коррекция субъективной модели. // Всероссийская конференция «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы». Москва, 2014.

[4] Cowell R. G., Dawid A. P., Lauritzen S. L. and Spiegelhalter D. J. (1999) Probabilistic Networks and Expert Systems. New-York: Springer-Verlag.

[5] Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В. Байесовские сети. Логико-вероятностный подход. – М.: Наука, 2006. – 608 с.

[6] Bhavsar V.C. , Mironov A.M. Fuzzy modal logics. // Proceedings of Workshop on Multi-Valued Logic Programming and Applications, MVLPA 2006, Seattle, WA, August 21, 2006, pp. 73-88.

[7] Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence. – Princeton University Press, 1976.

[8] Josang A.. Multi-Agent Preference Combination using Subjective Logic. 11th Workshop on Preferences and Soft Constraints (SofT'11), Perugia, September 2011.

[9] Josang A., Hankin R. Interpretation and Fusion of Hyper Opinions in Subjective Logic. 15th International Conference on Information Fusion (FUSION 2012). Singapore, July 2012.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЙРОНА

Розов Н.Х.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

119991 Москва, Ленинские горы, МГУ

E-mail: fpo.mgu@mail.ru

Релаксационный колебанием называют периодический по времени процесс, при котором плавное, медленное, непрерывное изменение физического состояния объекта чередуется со скачкообразным, быстрым, практически разрывным. Такие процессы достаточно часто наблюдаются в реальных ситуациях в механике, технике, радиофизике, химии, биологии и других областях науки и техники. Однако строгое математическое определение релаксационного колебания отсутствует.

Этот феномен впервые описал Б. ван дер Поль [1], рассматривая физический объект с одной степенью свободы, который моделируется дифференциальным уравнением с большим параметром $\lambda > 0$:

$$\ddot{z} - \lambda(1 - z^2)\dot{z} + z = 0, \qquad \dot{} = d/dt.$$

Позже оказалось, что более удобной и естественной эквивалентной моделью является сингулярно возмущённая система 2-го порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при одной производной:

$$\varepsilon\dot{x} = f(x, y), \qquad \dot{y} = g(x, y). \tag{1}$$

При определённых предположениях относительно правых частей этой системы «быстрая» компонента $x = x(t, \varepsilon)$ её решения представляет собой «почти разрывную» ограниченную функцию времени, причем «время перехода» с одного «плавного» участка решения на другой неограниченно убывает при $\varepsilon \to 0$, а движение по этим «плавным» участкам занимает конечное время (рис. 1). Что же касается «медленной» компоненты решения $y = y(t, \varepsilon)$, то она изменяется с ограниченной скоростью и изображается непрерывной ограниченной функцией времени (рис. 2). Классическому релаксационному колебанию в системе (1) отвечает предельный цикл Z_ε в фазовой плоскости (x, y), при $\varepsilon \to 0$ неограниченно приближающийся к замкнутой кривой Z_0 специального вида; см. рис. 3 [2].

Однако в сингулярно возмущенных системах вида (1) возможно и качественно иное, неклассическое релаксационное колебание, также моделирующие реальные процессы. Для неклассического релаксационного колебания характерно следующее: его «медленная» компонента $y = y(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ приближается к разрывной ограниченной функции времени, а его «быстрая» компонента $x = x(t, \varepsilon)$ является δ-образной [3]. Именно наличие такого колебания обнаруживается в математической модели функционирования отдельного нейрона.

Давно известна простейшая модель функционирования отдельного нейрона ФитцХью – Нагумо [4]:

$$\varepsilon\dot{x} = y + x - x^3/3 + c, \qquad \dot{y} = a - x - by, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $a, b = const > 0$, $c = const$. В этой системе, являющейся частным случаем системы (1), реализуется (при подходящих значениях параметров a, b, c) классическое релаксационное колебание, причём быстрая компонента $x = x(t, \varepsilon)$ должна была бы описывать поведение во времени мембранного потенциала нейрона. Но описанное выше изменение быстрой компоненты системы (2) (см. рис. 1) не соответствует наблюдаемому в действительности поведению мембранного потенциала реального нейрона, для которого характерно периодическое чередование кратковременных, «почти мгновенных» значительных по высоте «всплесков» и участков «плавного» изменения. Поэтому возникает задача модификации модели (2), чтобы добиться нужного поведения компоненты $x = x(t, \varepsilon)$.

Не будем здесь описывать соображения, руководствуясь которыми строится новая модель функционирования отдельного нейрона; эти соображения носят, как часто бывает, феноменологический характер. Рассмотрим саму эту модель (которая остаётся в классе сингулярно возмущённых систем вида (1)):

$$\varepsilon \dot{x} = y - F(x), \qquad \dot{y} = a - x - y, \tag{3}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $a = const > 0$, а эскиз графика функции $F(x)$ представлен на рис. 4. Существенные для дальнейшего свойства функции $F(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ таковы:

1. Существует такое значение $x = x_* > 0$, что

$$F(0) = 0, \qquad F'(x) > 0 \text{ при } x \in (-\infty, x_*), \qquad F'(x) < 0 \text{ при } x \in (x_*, +\infty),$$
$$F'(x_*) = 0, \qquad F''(x_*) < 0, \qquad a - x_* - F(x_*) > 0.$$

2. Справедливо асимптотическое представление при $x \to +\infty$:

$$F(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{u^k}, \qquad \alpha_0 > 0,$$

сохраняющее силу при дифференцировании по x любое число раз.

Указанными свойствами обладает, например, функция

$$F(x) = c_1 x \exp(-x) + c_2(1 - \exp(-x)), \qquad c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0.$$

Неклассическим релаксационным циклом в фазовой плоскости (x, y) сингулярно возмущённой системы (3) назовём замкнутую кривую $W_\varepsilon =$ $= (x = x^*(t, \varepsilon), y = y^*(t, \varepsilon))$, где x^* и y^* – $T^*(\varepsilon)$-периодические функции времени t, такую, что при $\varepsilon \to 0$:
– величина $T^*(\varepsilon)$ стремится к конечному пределу $T^* > 0$;
– медленная компонента $y^*(t, \varepsilon)$ сходится поточечно к некоторой разрывной ограниченной функции времени;
– быстрая компонента $x^*(t, \varepsilon)$ представляет собой δ-образную функцию времени, причём её «всплески» неограниченно растут.

Обозначим через $x = \varphi(y), y \in (-\infty, F(x_*)$, (единственную) функцию, обратную функции $y = F(x), x \in (-\infty, x_*)$, и введём (положительную) константу

$$T^* = \int\limits_{\varphi(2\alpha_0 - F(x_*))}^{x_*} \frac{F'(x)dx}{a - x - F(x)}.$$

Определим функцию $y^*(t)$ как решение задачи Коши

$$\dot{y} = a - \varphi(y) - y, \qquad y|_{t=0} = 2\alpha_0 - F(x_*),$$

и пусть $x^*(t) = \varphi(F(y^*(t))$. Две последние функции продолжим с отрезка $0 \le t \le T^*$ на всю ось t по закону T^*-периодичности; эти продолжения оказываются разрывными в каждой точке $t = kT^*$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема. Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ у системы (3) существует единственный экспоненциально орбитально устойчивый неклассический релаксационный цикл

$$W_\varepsilon = \{(x, y) : \ x = x^*(t, \varepsilon), \ y = y^*(t, \varepsilon), \ 0 \le t \le T^*(\varepsilon)\}$$

периода $T^*(\varepsilon)$, причем:

$$x^*(0, \varepsilon) \equiv x_* + 1;$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T^*(\varepsilon) = T^*;$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{t_*(\varepsilon)} x^*(t, \varepsilon)dt = 2F(x_*) - 2\alpha_0, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \max_t(\sqrt{\varepsilon}\, x^*(t, \varepsilon)) = F(x_*) - \alpha_0;$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \max_{\delta_1 \le t \le T^*(\varepsilon) - \delta_2} \Big(|x^*(t, \varepsilon) - x^*(t)| + |y^*(t, \varepsilon) - y^*(t)|\Big) = 0.$$

Здесь $t_*(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$ – первый положительный корень уравнения $x^*(t, \varepsilon) =$

$= x_* + 1$, а константы $\delta_1, \delta_2 \in (0, T^*/2)$ фиксированы произвольным образом [5].

Наглядное представление о свойствах неклассического релаксационного колебания дают рис. 5 и 6, где приведены эскизы графиков зависимости от времени его компонент, а сам неклассический релаксационный цикл на фазовой плоскости изображён на рис. 7.

Литература

1. van der Pol B. On relaxation oscillations // Philos. Mag. (7) V. 2. № 11. P. 978-992.

2. Мищенко Е.Ф.,Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М: Наука, 1975.

3. Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.

4. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane //Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445-466.

5. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Об одной модификации нейронной модели ФитцХью – Нагумо // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 3. С. 430-449.

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНОГО РЫНКА

Хацкевич В.Л.

Воронежский государственный университет,

Институт заочного экономического образования

394036 г. Воронеж, ул. Никитинская, д.14

Тел.: 89103458516, e-mail: vlkhats@mail.ru

Рассматривается рынок n-товаров с конечным числом производителей и потребителей. Согласно модели конкурентного рынка Эрроу-Дебре каждому вектору цен $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$ набора товаров соответствует совокупный вектор спроса $\vec{x}(\vec{p})$, и совокупный вектор производства (предложения) $\vec{y}(\vec{p})$, обладающие соответствующими свойствами оптимальности. Такие векторы $\vec{x}(\vec{p})$ и $\vec{y}(\vec{p})$, вообще говоря, не единственные. Они пораждают соответственно, многозначные функции спроса $\phi(\vec{p})$ и предложения $\psi(\vec{p})$, а их разность порождает многозначную функцию избыточного спроса:

$F(\vec{p})=\phi(\vec{p})-\psi(\vec{p})$.

В предположении, что скорость изменения цены на каждый товар пропорциональна размеру избыточного спроса или избыточного предложения на этот товар, динамическая модель рынка может быть записана в виде дифференциального включения в евклидовом пространстве R^n

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\in F(\vec{p}). \qquad (1)$$

Равновесная цена $\vec{p}^{\,*}$ в этой ситуации удовлетворяет операторному включению

$$0\in F(\vec{p}^{\,*}). \qquad (2)$$

Стандартные предположения на модель конкурентного рынка, предложенные Эрроу и Дебре, обеспечивают полунепрерывность сверху мультифункции F в конусе неотрицательных векторов R^n_+, непустоту выпуклость замкнутость и ограниченность ее образов, а также выполнение закона Вальраса

$$(\vec{p},\vec{f})\le 0\ (\forall\vec{f}\in F(\vec{p}),\forall\vec{p}\in R^n_+). \qquad (3)$$

Здесь и ниже скобки (,) обозначают скалярное произведение векторов в R^n, а $\|\ .\ \|$ - норму соответствующего вектора.

Теорема 1. *Пусть многозначная функция F полунепрерывна сверху, имеет непустые выпуклые замкнутые и ограниченные образы и выполнен закон Вальраса (3). Пусть дополнительно выполнено условие «внедиагональной неотрицательности»:*

$$\textit{если } \vec{p}\ge 0 \textit{ и } p_i=0, \textit{то } f_i\ge 0 \textit{ для } \forall\vec{f}\in F(\vec{p}). \qquad (4)$$

Тогда задача Коши для включения (1) с начальным условием

$$\vec{p}(0)=\vec{p}^{\,0} \qquad (5)$$

для всякого $\vec{p}^{\,0}\ge 0$ имеет хотя бы одно решение в конусе R^n_+, для всех $t>0$. При этом

$$\left\|\vec{p}(t)\right\| \leq \left\|\vec{p}^{\,0}\right\| \qquad (\forall t > 0). \tag{6}$$

Отметим, что с экономической точки зрения условие (4) означает, что если цена на i-тый товар $p_i = 0$, то спрос на этот товар не меньше предложения.

По лемме Гейла стандартные предположения обеспечивают разрешимость операторного включения (2) в R_+^n, причем множество неотрицательных равновесных цен (стационарное множество) Z замкнуто в R_+^n.

Рассмотрим условие слабой аксиомы выявленного предпочтения в виде:

$$(\vec{q}, \vec{f}) > 0 \;\; (\forall \vec{f} \in F(\vec{p}), \forall \vec{p} \in R_+^n : \vec{p} \notin Z) \tag{7}$$

для всякого неотрицательного вектора равновесия $\vec{q} \in Z$.

Это условие является обобщением известного на многозначный случай.

Теорема 2. *Пусть многозначная функция избыточного спроса полунепрерывна сверху, выполнен закон Вальраса (3), условие «неотрицательности» (4) и слабая аксиома выявленного предпочтения (7). Тогда рынок устойчив, т.е. при любой начальной цене $\vec{p}^{\,0} \geq 0$ каждое решение задачи (1), (5) стремится к некоторому равновесному состоянию при возрастании времени.*

Теорема 3. *В предположениях теоремы 2 множество равновесных векторов $Z \subset R_+^n$ выпукло и замкнуто.*

Рассмотрим вопрос об устойчивости стационарного множества Z. Обозначим через $\rho\left[\vec{p}, Z\right] = \inf\limits_{\vec{z} \in Z}\left\|\vec{p} - \vec{z}\right\|$ - расстояние между точкой $\vec{p}$ и множеством Z.

Теорема 4. *В условиях теоремы 2 множество равновесных состояний Z устойчиво по Ляпунову. А именно, по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\rho\left[\vec{p}(t), Z\right] < \varepsilon$ при $t > 0$ для любого решения $\vec{p}(t)$ дифференциального включения (1), удовлетворяющего условию $\rho\left[\vec{p}^{\,0}, Z\right] < \delta$.*

Следствие 1. Если $\rho(B, Z) < \varepsilon$, то $\rho(P_B(t), Z) < \varepsilon$ при $\forall t > 0$.

В случае единственности вправо решения задачи (1), (5) при $\forall \vec{p}^{\,0} \in R_+^n$ включение (1) порождает динамическую систему в R_+^n, а с учетом (6) для всякого $r > 0$, разрешающие операторы V_t, $t \in R_+$ образуют полугруппу в фазовом метрическом пространстве $X = X_r := \left\{x \in R_+^n : \left\|x\right\| \leq r\right\}$.

Теорема 5. *Пусть многозначная функция избыточного спроса полунепрерывна сверху, выполнено условие (4) и обеспечена единственность вправо решений задачи (1), (5) при $\forall \vec{p}^{\,0} \geq 0$, а также закон Вальраса (3) и условие (7).*

Тогда динамическая система, порождаемая задачей (1), имеет при любом $r > 0$ минимальный глобальный B-аттрактор A в X_r, совпадающий с равновесным множеством $Z_r := Z \bigcap X_r$.

Литература

1. Хацкевич В.Л. Об устойчивости модели конкурентного рыночного равновесия. – Эконом.матем.методы, 2005, т.41,№4, с. 103-107.
2. Хацкевич В.Л. Об асимптотике траекторий динамической модели конкурентного рынка. – Обозрение прикл. и пром. математики, 2009, т.16, Вып.2, с. 239-244.

Секция 7

ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАТИКИ

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Белопольская Я.И., Немченко Е.И.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

194005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская 4.

Тел.:(812) 3164930, e-mail. yana@YB1569.spb.edu, nemchenko_ekaterina@mail.ru

Стохастические модели, позволяющие построить вероятностные представления различных классов решений как прямой, так и обратной задачи Коши для семилинейных параболических уравнений существенно отличаются друг от друга. Мы рассмотрим три вида стохастических моделей, описывающих случайные процессы, участвующие в вероятностных представлениях классических, обобщенных и вязкостных решений соответствующей задачи Коши для квазилинейных уравнений, позволяющих построить вероятностные представления этих решений. Наряду с этим мы обсудим также алгоритмы построения соответствующих численных решений, полученных на основе этих моделей.

Рассмотрим обратную задачу Коши

$$\partial_s u + \frac{1}{2} Tr A^*(x,u) u_{xx} A(x,u) + a(x,u)\cdot\nabla u + g(x,u) = 0, \quad u(T,x) = u_0(x) \in R,\ x \in R^d. \quad (1)$$

Обозначим $a^u(x) = a(x,u(x))$ и $a\cdot\nabla u = \sum_{k=1}^d a_k \nabla_k u$. Стохастическая модель, соответствующая классическому решению задачи Коши (1) при $g = g(x,u)$, имеет вид

$$d\xi(\theta) = a^u(\xi(\theta))d\theta + A^u(\xi(\theta))dw(\theta), \quad \xi(s) = x, \quad (2)$$

$$u(s,x) = E\left[u_0(\xi(T)) + \int_s^T g^u(\xi(\theta))d\theta\right]. \quad (3)$$

Здесь $w(t) \in R^d$ – стандартный винеровский процесс, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Стохастическая модель, соответствующая обобщенному решению задачи Коши

$$\partial_t v = \frac{1}{2} Tr A^*(x,v) v_{xx} A(x,u) + a(x,v)\cdot\nabla v + g(x,v), \quad v(0,x) = v_0(x) \in R,\ x \in R^d, \quad (5)$$

имеет вид

$$d\xi(\theta) = -a^v(\xi(\theta))d\theta - A^v(\xi(\theta))dw(\theta), \quad \xi(0) = y, \quad (6)$$

$$d\hat{\xi}(\theta) = \tilde{a}^v(\hat{\xi}(\theta))d\theta + A^v(\hat{\xi}(\theta))d\tilde{w}(\theta),$$

где $\tilde{a} = a - A\nabla A$, $\tilde{w}(t) = w(T-t) - w(T)$, $\hat{\xi}(\theta) = \xi(t-\theta)$,

$$u(t,x) = E\left[u_0(\hat{\xi}_{0,x}(T)) + \int_s^T g^u(\hat{\xi}_{0,x}(\theta))d\theta\right]. \quad (7)$$

Наконец, стохастическая модель, соответствующая вязкостному решению задачи Коши (1), описывается соотношениями, состоящими из СДУ (2) и соотношения

$$y(t) = u_0(\xi_{s,x}(T)) + \int_t^T g(\xi(\theta), y(\theta))d\theta - \int_t^T z(\theta)\cdot dw(\theta), \quad (8)$$

называемого обратным стохастическим уравнением (ОСДУ).

Заметим, что для случайного процесса, удовлетворяющего (2), соотношение (8) легко выводится с помощью формулы Ито в предположении, что $u(s,x)$ – классическое решение задачи (1) и приняты обозначения $y(\theta) = u(\theta, \xi(\theta)), z(\theta) = [A^u]^*(\xi(\theta))\nabla u(\theta, \xi(\theta))$. Отказавшись от этого предположения, мы приходим к системе ПОСДУ (2),(8), содержащей три неизвестных процесса $\xi(\theta), y(\theta), z(\theta)$. Соответствующее замыкающеее соотношение вытекает из теоремы Ито о мартингальном представлении квадратично интегрируемой случайной величины $u_0(\xi(T))$.

Аналогичные результаты можно получить и для квазилинейных параболических уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта Минобрнауки N 2074 и гранта РФФИ 12-01-00457.

МЕТОДЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ СЛАБОСТРУКТУРИРОВАННЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТАРИФОВ НА ТРАНСПОРТЕ

Денежкина И. Е., Набатова Д.С.

Финансовый университет при Правительстве РФ

119526, Москва, Ленинградский пр-т, д. 49

Тел.: 84992772102, e-mail: DSNabatova@fa.ru

Оптимизация формирования тарифов на проезд в общественном транспорте – это серьезная проблеме, имеющая множество аспектов. Экономическое обоснование является важным, но далеко не единственным критерием.

Отдельного внимания заслуживает проблема формирования тарифов на пригородное сообщение. Справедливые нарекания пассажиров вызывает отсутствие системы оплаты по правилу: дальше едешь – меньше платишь. Стоимость для каждой зоны пригородного сообщения, независимо от расстояния, остается одинаковой. Поэтому жители, например, дальнего Подмосковья пополняют ряды безбилетников. Для них проще приобрести билет на выход за 130 руб., чем платить за проезд до 11, 12 зоны свыше 200 руб.

По некоторым позициям ситуация со временем изменяется в худшую сторону. Так, например, долгое время стоимость «билета выходного дня» приблизительно была равна стоимости трех поездок «туда и обратно». Затем руководство РЖД подняло цены и приравняло стоимость такого билета почти к пяти поездкам. Редко на какой месяц попадает пять выходных. Целесообразность и экономическая обоснованность такого решения никак не приводится для публичного обсуждения. Результатом является увеличение количества безбилетников.

Очевидно, что при изменении тарифных планов, было бы полезно предварительно оценивать последствия таких изменений, пользуясь методами теории принятия решений.

Критерии, по которым нужно оценивать предлагаемые тарифные планы, различны. Это может быть, например, прибыльность, популярность у пассажиров, социальная ориентированность и т.д. Для таких задач невозможно составить функциональную зависимость для критерия эффективности и параметров. В таком случае необходимо использовать методы многокритериальной оптимизации для слабоструктурированных моделей. Для слабоструктурированных моделей на первое место выходит субъективный фактор экспертной оценки. В задачах многокритериальной оптимизации с помощью таких методов можно организовать направленный перебор существующих решений, чтобы выбрать либо наилучшее решение, либо расположить их в порядке перспективности.

Рассмотрим применение метода аналитической иерархии (AHP - Analytic Hierarchy Process) для решения задачи выбора наилучшего варианта проездных абонементов из нескольких предложенных. Для применения этого метода необходимо определить цель, перечень критериев - $C_1, C_2, ..., C_i, ..., C_m$; перечень альтернатив, влияющих на каждый из критериев - $A_1, A_2, ..., A_s, ...A_d$. Процесс принятия решений представляется в виде иерархической структуры: на первом уровне находится цель, на втором уровне – критерии, на третьем уровне – множество альтернатив. Эксперт должен выполнить попарное сравнение альтернатив и критериев и ответить на вопрос о том, какая альтернатива предпочтительна, имеет большее воздействие или более вероятна для данного критерия C_i. Предпочтениям экспертов сопоставляется численная шкала.

Рассмотрим применение метода аналитической иерархии для решения задачи выбора наилучшего варианта проездных абонементов из нескольких предложенных. В качестве исходных данных рассмотрим 4 вида абонементных билетов на 10 поездок:

1. с фиксированной датой и минимальной стоимостью поездки S_1 – альтернатива A_1;
2. на 30 дней со стоимостью поездки $S_2>S_1$ - альтернатива A_2;
3. на 90 дней со стоимостью $S_3>S_2$ - альтернатива A_3;
4. с возможностью поездки в любом направлении, на 10 дней и стоимостью поездки $S_4>S_1$ - альтернатива A_4.

Будем их оценивать по трем критериям:

1. экономическая выгода - C_1;
2. популярность среди пассажиров – C_2;
3. поддержка местных властей – C_3;

Для сравнения критериев и альтернатив используются экспертные оценки.

Схема принятия решения для задачи изображена на рис.1

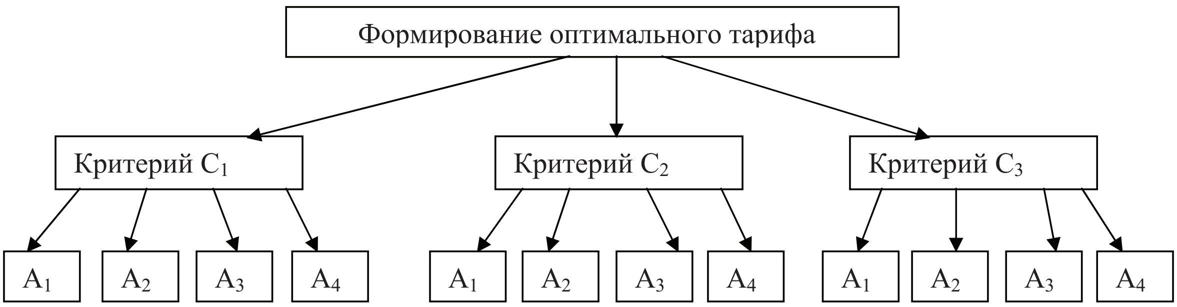


Рис.1

На предварительном этапе эксперты должны оценить значимость или приоритетность каждого критерия по сравнению с остальными критериями. В соответствии с методом AHP экспертные оценки сводятся в таблицу сравнения критериев. Далее, по каждому критерию сравниваются заданные альтернативы, заполняются аналогичные таблицы для каждого критерия.

После того, как для каждого критерия вычислены таблицы количественного предпочтения альтернатив, определяется величина нормируемого веса альтернативы A_s по критерию C_i – v_{is}, $i=1,2,3$; $s=1,...4$. Значения весов v_{is} указываются в последнем столбце каждой из таблиц и вычисляется интегральный показатель E_s для каждой альтернативы A_s, $s=1,...4$: $E_s=\sum_{i=1}^{d} w_i v_{is}$. В качестве оптимальной выбирается альтернатива A_k, для которой $E_k=\max_s E_s$. В данной задаче наиболее предпочтительным является абонемент на 30 дней.

Метод AHP отличается практической направленностью на сравнение реальных альтернатив. При этом, введение новой альтернативы в рассмотрение требует пересчета всех таблиц и может привести к существенному изменению предпочтений между ранее заданными альтернативами. Применение метода ELECTRE (Метод ранжирования многокритериальных альтернатив Elimination Etchoix Traduisant la Realite*)* позволяет включать в рассмотрение новые альтернативы, учитывая результаты предыдущих сравнений на основе не абсолютных, а относительных оценок. Идея метода отражена в названии, перевод которого звучит как исключение и выбор, отражающие реальность. Метод ELECTRE направлен на решение задач с уже заданными многокритериальными альтернативами. В этом методе не определяется количественно показатель качества каждой из альтернатив, а устанавливается лишь условие превосходства одной альтернативы над другой.

Доклад подготовлен по результатам исследований, выполненных за счет бюджетных средств по Государственному заданию Финуниверситета 2014 года.

PRIORITIES IN THE VALUE HIERARCHY AMONG YOUTH

Kramer Y.S., Semenovykh D.N., Lapteva N.A.

Russian State Social University

129226, Vilgelma Pika str. 4, Moscow, Russia

8(968)9455315, email yari.kramer@gmail.com

8(916)8393492, email semjonovych@mail.ru

8(916)1803002, email nadlapteva@yandex.ru

Mathematical model which can predict the probability of aggression induced by relative deprivation and frustration was developed in [1, 2, 3, 4, 5].

With the aim of testing the model above the survey among students of Russian Social State University (RSSU) and Moscow Institute (MI) was made.

Respondents evaluated two linguistic variables, values of social tension: L_{RD} - the level of relative deprivation as the difference between the level of claims and achievements, and L_F - the level of frustration as the difference between the level of claims and the level of expectations. Term set $T = \{$not quite, not much, not essential, not significant, more or less, quite, much, very much, significant, extremely$\}$ was used in scale from 1 to 10 points for each category of valuable needs: self-realization, inter-ethnic relations, speech freedom, education, financial state, interpersonal skills.

The unique modification of the algorithm of compiling of matrix of pairwise comparisons in software MPRIORITY 1.0 was used. Results are shown in the diagrams (figures 1, 2, 3).

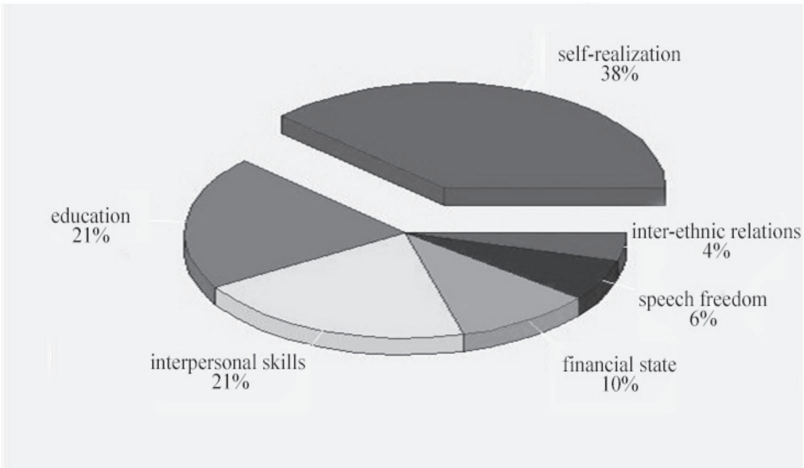


Figure 1. Priorities in the value hierarchy integrated at both universities

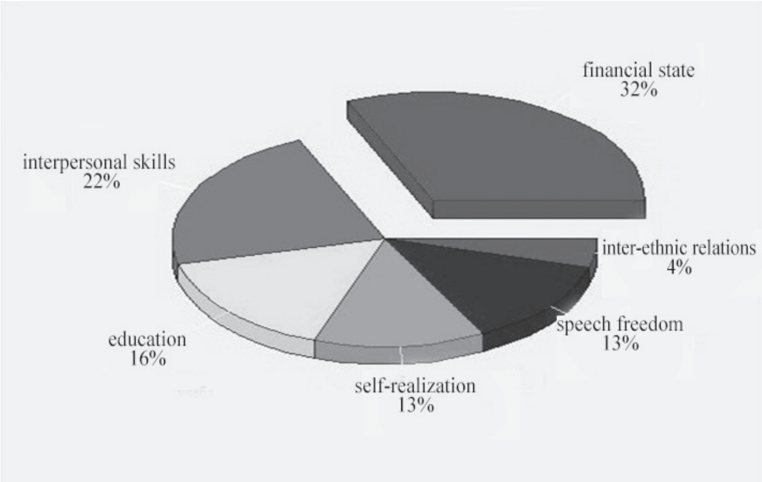


Figure 2. Priorities in a hierarchy of levels of intensity of L_{RD} - relative deprivation - integrated at both universities

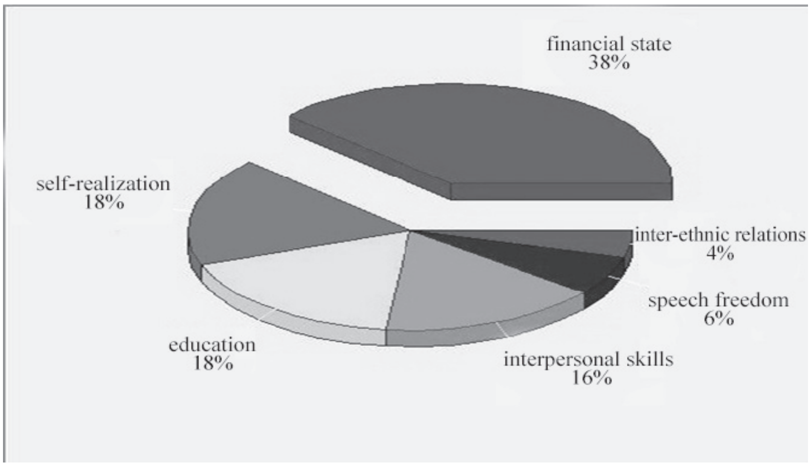


Figure 3. Priorities in a hierarchy of levels of intensity of L_F - frustration - integrated at both universities

Bibliography

1. Орлик Л.К. Вероятностная мультипликативная модель агрессивного отклика на фрустрацию и относительную депривацию/Учёные записки РГСУ, 2008. –№6. – С.159–168.
2. Орлик Л.К. Модифицированная математическая модель дихотомии «фрустрация-агрессия»/Учёные записки РГСУ,2010.- №8(84). -С.115-120.
3. Orlik L.K., Lazareva N.M. Forecasting of social tension in the student environment //Social policy and sociology: interdisciplinary theoretical and practical magazine. M: Russian State Social University, Union Sociologists of Russia. – 2012. –№ 12(90).– p.159 – 172.
4. Орлик Л.К. ,Лазарева Н.М. Прогностическая модель социальной напряженности в студенческой среде/Учёные записки РГСУ, 2013 т. 2. – №5 (120). – С.51–58.
5. Урнов М.Ю. Эмоции в политическом поведении. – М.: Аспект Пресс, 2008. – 240с.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЯ СОЦИАЛЬНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ. ДЕПРИВАЦИОННО-ФРУСТРАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Маругина Д.В., Семеновых Д.Н., Крамер Я.С.

Российский государственный социальный университет

129226, г. Москва, ул. Вильгельма Пика, д. 4

Тел. 8(961)1205323, e-mail:dashamar200@rambler.ru

Тел. 8(916)8393492, e-mail: semjonovych@mail.ru

Тел. 8(968)9455315, email: yari.kramer@gmail.com

Методологическим инструментом изучения социально-психологических общественных процессов является категория социального поля, введенная в научный оборот Куртом Левиным в [1] и закрепленная Петром Штомпки в [2]. «Ситуационный анализ» Левина связан с исследованием социального контекста, побуждающего к жизни мощные силы – «канальные факторы», способные активизировать или затормозить поведение людей, развить действие причины, локализовать или блокировать её.

Рассматривается поле социальной напряженности $L(L_{RD};L_F)$, создаваемое относительной депривацией (Relative Deprivation) и фрустрацией (Frustration). Относительная депривация – это расхождение между уровнем притязаний и уровнем достижений («хочу» выше, чем «имею»): $L_{RD} = L_{aspir} - L_{fact}$. Фрустрация – это расхождение между уровнем притязаний и уровнем ожиданий («хочу» выше, чем «могу»): $L_F = L_{aspir} - L_{\exp ect}$ [3]. Математическая модель «RD-Эффекта» - агрессивного отклика на относительную депривацию и фрустрацию в поле социальной напряженности разработана в [4,5,6,7,8].

Рассмотрим стохастическую дифференциальную модель поля социальной напряженности $L(t)(L_{RD}(t);L_F(t))$. Будем считать, что начальное поле L_0 является случайной величиной с вероятностным пространством $\langle \Omega_0, P_0 \rangle$. Модельное уравнение имеет вид

$$\frac{dL}{dt} = kL + \xi \qquad (1)$$

где $\xi(t)$ - случайное воздействие СМИ на уровни интенсивности относительной депривации и фрустрации, действующее на социальную систему. В таком случае $L(t)=[L(t)](w,v)$ - случайная величина с вероятностным пространством $\left\langle \Omega_{\xi(t)} \times \Omega_0, P_{\xi(t)} \times P_0 \right\rangle$, где элементарное событие $\omega \in \Omega_{\xi(t)}, v \in \Omega_0$. Из (1) следует

$$L(t) = L_0 e^{kt} + \int_0^t e^{k(t-\tau)} \xi(\tau) d\tau \qquad (2)$$

Усредняя (2), получаем

$$\left\langle L \right\rangle(t) = \int_{E_{\xi(t)} \times E_0} [L(t)](w,v) dP_{\xi(t)}(w) \times P_0(v) =$$
$$= \int_{E_0} L_0(v) e^{kt} dP_0(v) + \int_0^t e^{k(t-\tau)} \left(\int_{E_{\xi(\tau)}} [\xi(\tau)](\omega) dP_{E_{\xi(\tau)}}(w) \right) d\tau = \left\langle L_0 \right\rangle e^{kt} + \int_0^t e^{k(t-\tau)} \left\langle \xi \right\rangle(\tau) d\tau .$$

Среднее значение случайного процесса $\xi(t)$ вычисляется по формуле:

$\left\langle \xi \right\rangle(t) \equiv M(\xi(t)) = \int_{\Omega_{\xi(t)}} [\xi(t)](w) dP_{\xi(t)}(w)$, где $\left\langle \Omega_{\xi(t)}, P_{\xi(t)} \right\rangle$ - вероятностное пространство случайного процесса, элементарное событие $w \in \Omega$ [9].

Сценарий 1. Пусть управляющий параметр $k<0$, и среднее значение случайного процесса $\left\langle \xi(t) \right\rangle = M(\varsigma(t)) = 0$. Модельное уравнение (1) представляет собой уравнение Ланжевена. Формализованный результат $\left\langle L \right\rangle(t) = \left\langle L_0 \right\rangle e^{kt}$ означает, что стохастический процесс $L(t)$ при $t \to +\infty$ становится квазистационарным, близким к равновесию $L=0$.

Сценарий 2. Пусть управляющий параметр $k<0$, и двумерная плотность случайного процесса $\xi(t)$ задана в виде

$$f_2(L_{RD}, L_F / t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{(L_{RD} + \sin t_1)^2 + (L_F + \sin t_2)^2}{2} \right\}.$$

Наличие синусов отражает периодический эффект воздействия СМИ на уровни интенсивности относительной депривации и фрустрации. Среднее значение случайного процесса $\left\langle \xi(t) \right\rangle = M(\varsigma(t)) = -\sin t$. Формализованный результат

$$\left\langle L \right\rangle(t) = \left\langle L_0 \right\rangle e^{kt} + \frac{k \sin t + \cos t}{k^2+1}$$

означает, что имеет место осциллирующее поле социальной напряженности с амплитудой, определяемой управляющим параметром k .

Сценарий 3. Пусть управляющий параметр $k > 0$. Тогда имеет место экспоненциальный рост поля социальной напряженности.

Дальнейшая модификация модельного уравнения связана с дополнительным слагаемым $F(t)$ в правой части уравнения. Его интерпретация связана с экспоненциальным ростом напряженности социального поля, например, за счет беженцев. Прогнозные сценарии связаны с ответом на вопрос: каким наименее жестким условиям подэкспоненциального роста отвечает правая часть уравнения, чтобы решение имело тот же или меньший экспоненциальный рост. Строится так называемая экспоненциальная характеристика модифицированной модели [10].

Литература

1. Левин К. Теория поля в социальных науках /Пер. с англ. –СПб.:Сенсор,2000. –368с.
2. Штомпка П. Социология социальных изменений /Пер. с англ. , под. ред. В.А. Ядова. –М.: Аспект Пресс,1996. – 416с.
3. Урнов М.Ю. Эмоции в политическом поведении. – М.: Аспект Пресс, 2008. – 240с.
4. Орлик Л.К. Математическое моделирование фрустрационных процессов в диаде «элита - массы» /Учёные записки РГСУ, 2009. –Т.2. –№7. – С.240–244.
5. Орлик Л.К. Модифицированная математическая модель дихотомии «фрустрация-агрессия»/Учёные записки РГСУ,2010. – №8(84). –С.115–120.
6. Orlik L.K. , Lazareva N.M. Forecasting of social tension in the student environment/ Social policy and sociology: interdisciplinary theoretical and practical magazine. M: Russian State Social University, Union Sociologists of Russia. – 2012. –№ 12(90).– p.159 – 172.
7. Орлик Л.К., Лазарева Н.М. Прогностическая модель социальной напряженности с студенческой среде /Учёные записки РГСУ,2013. –т.2 №5 (120). –С.51–58.
8. Орлик Л.К., Лазарева Н.М. Социальная завись и протестный потенциал/Сплоченность общества и социальная справедливость: мировые тренды и российская реальность: сб. материалов 13 Международного социального конгресса(25-26 ноября 2013г.) – М.: Издательство РГСУ,2014.– С.277–281
9. Гуц А.К.,Коробицин В.В., Лаптев А.А. Математические модели социальных систем: Учебное пособие. – Омск. гос. ун–т,2000. –256 с.
10. Орлик Л.К. Об экспоненциальной характкристике линейного дифференциального уравнения 1-го порядка в банаховом пространстве/украинский математический журнал,1989. – т.41. –№9. –С.1288–1289

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

Матвеев Е.М.

Московский государственный педагогический университет

107140, Москва, ул. Краснопрудная, 14

Тел.: 8-905-797-93-02. E-mail: matemix@mail.ru

Полиномом Бернштейна для функции $f(x)$ называют выражение

$$B_n(f,x) = f(x_{n,0})b_{n,0}(x) + \cdots + f(x_{n,m})b_{n,m}(x) + \cdots + f(x_{n,n})b_{n,n}(x),$$

где $x_{n,m} = m/n$, $b_{n,m}(x) = C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$ – базисные полиномы Бернштейна, C_n^m – биномиальные коэффициенты. В 1912 году С.Н. Бернштейн показал, что эти многочлены равномерно стремятся на отрезке $[0,1]$ к непрерывной функции $f(x)$. Хотя соответствующая теорема о равномерном приближении многочленами непрерывных на отрезке функций была ранее доказана Вейерштрассом, но простая явная конструкция вместе с эффектным доказательством сделали результат Бернштейна широко известным, а интерес к этой теме стал постоянным.

У полиномов Бернштейна обнаружилось много дополнительных свойств. Так, для функций модульного типа было сделано неочевидное наблюдение о так называемом эффекте «попарного склеивания», когда для некоторой последовательности значений n получается $B_{n+1}(f,x) = B_n(f,x)$. Итогом стала следующая теорема:

ТЕОРЕМА. *Если $f(x)$ – непрерывная кусочно-линейная на отрезке $[0,1]$ функция с узловыми точками $x_{n,m} = m/n$, $m = 0,\dots,n$, то для любого натурального k выполняется равенство $B_{nk+1}(f,x) = B_{nk}(f,x)$.*

По-видимому, первая явная формулировка и доказательство этого результата, правда, в контексте теоремы о выпуклых функциях, появились в работе [1]. Позднее различные авторы возвращались к этой теореме, упрощая доказательство, например, в [2], но основой всех рассуждений обычно служит некоторая формула для $B_{n+1}(f,x) - B_n(f,x)$, полученная в работе [3]. Такие рассуждения нетривиальны, зато приведенный выше результат получается попутно с выводом монотонной сходимости полиномов Бернштейна для выпуклых функций. Возможны и комбинаторные доказательства, как в [4], но они также непрозрачны. В данном сообщении приводится простое короткое доказательство указанной теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что кусочно-линейная непрерывная функция не обязана иметь именно изломы во всех данных точках, поэтому при расширении множества узлов $x_{n,m}$ (это происходит при переходе от n к kn) функция сохраняет свой тип. Значит, можно ограничиться случаем $k = 1$.

Далее заметим, что рассматриваемые функции полностью определяются векторами $Y(f) = (y_j = f(x_{n,j}))_{j=0,\dots,n}$ – наборами своих значений в узлах, при этом отображение $Y(f) \to f(x)$ линейно, равно как линейно при любом N и отображение $f(x) \to B_N(f,x)$. Отсюда видно, что достаточно проводить доказательство для стандартных базисных векторов $Y_m = (y_{m,j})_{j=0,\dots,n}$, $m = 0,\dots,n$, ($y_{m,j} = 1$ при $m = j$ и $y_{m,j} = 0$ при $m \neq j$). Соответствующие им кусочно-линейные функции можно записать, опуская индекс n, в виде $f_m(x) = 1 - |nx - m|$ при $x \in (x_{n,m-1}, x_{n,m+1})$ и $f_m(x) = 0$ – в противном случае (применение такого рода функций в прикладной математике имеет название «метод конечных элементов»). Очевидно, $B_n(f_m,x) = b_{n,m}(x)$.

Найдём $B_{n+1}(f_m,x)$. Мы имеем для $0 \le m \le n$ цепочку неравенств

$$\frac{m-1}{n} < \frac{m}{n+1} \le \frac{m}{n} \le \frac{m+1}{n+1} < \frac{m+1}{n},$$

причём левое равенство возможно только при $m = 0$, а правое – при $m = n$. Значит, $x_{n+1,m} \in (x_{n,m-1}, x_{n,m})$ при $0 < m < n$, а при $0 \leq m \leq n$ выполняется условие $x_{n+1,m}, x_{n+1,m+1} \in (x_{n,m-1}, x_{n,m+1}) \cap [0,1]$, и других узлов $x_{n+1,j}$ там нет. Поэтому

$$B_{n+1}(f_m, x) = f_m(x_{n+1,m}) b_{n+1,m}(x) + f_m(x_{n+1,m+1}) b_{n+1,m+1}(x) =$$

$$= \left(1 - \left|\frac{nm}{n+1} - m\right|\right) b_{n+1,m}(x) + \left(1 - \left|\frac{n(m+1)}{n+1} - m\right|\right) b_{n+1,m+1}(x) =$$

$$= \frac{n+1-m}{n+1} C_{n+1}^{m} x^m (1-x)^{n+1-m} + \frac{m+1}{n+1} C_{n+1}^{m+1} x^{m+1} (1-x)^{n-m} =$$

$$= (1-x) b_{n,m}(x) + x b_{n,m}(x) = B_n(f_m, x).$$

Теорема доказана.

Литература

1. Temple W.B., Stieltjes integral representation of convex functions. //Duke Mathematical Journal, 1954, V. 21, № 3, P. 527-531.
2. Schoenberg I.J., On variation diminishing approximation methods. //On Numerical Approximation. Proceedings of a Symposium conducted by the Math. Research Center of the US Army, University of Wisconsin, Madison, April 21-23, 1958. Ed.: R.E. Langer, – Madison: University of Wisconsin Press, 1959. P. 249-274.
3. Passow E., Deficient Bernstein polynomials, //Journal Approximation Theory, 1989, V. 59, P. 282-285.
4. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Приближение модуля полиномами Бернштейна, //Вестник Челябинского университета. Математика. Механика. Информатика, 2012, Вып. 15, № 26, 5-39.

К ВОПРОСУ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Москалева Э.Ф.

ГБОУ гимназия №1593, г. Москва

121614, Москва, Крылатские холмы д. 30, корп. 6

Тел.: 89670490833, e-mail: moskaleva1001@mail.ru

Содержательная линия моделирования является теоретической основой всего курса информатики. Моделирование – это метод научного познания окружающего мира, заключающийся в замене объекта, явления, некой системы или процесса его копией (моделью), которая сохраняет все существенные свойства исходного объекта. Таким образом, опираясь на элементы моделирования можно изучать объекты (явления, системы и процессы материального мира) из разных научных областей.

Многие педагоги и учащиеся отмечают, что моделирование является одной из самых сложных тем курса. На наш взгляд, это обусловлено тремя причинами. Во-первых, компьютерное моделирование, как и многие разделы информатики, является междисциплинарным курсом. А это требует от учащихся наличия определенного уровня знаний в смежных дисциплинах (знай по физике, если мы моделируем свободное падение тела; знаний по биологии для моделирования динамики численности популяции животных; знаний в математической области для моделирования случайных процессов; знаний законов экономики при моделировании системы массового обслуживания; знаний геометрического проектирования при моделировании архитектурных объектов и т.д.). Во-вторых, построение модели, требует от учащихся основательных математических знаний и свободных навыков составления программ (знания языков программирования). И, наконец, в-третьих, большая часть учебников и курсов по данной теме включает стандартный набор задач по компьютерному математическому моделированию (траектория движения тела, движение небесных тел, приближенное решение уравнений, случайные процессы, развитие популяций и др.). И этот факт является вполне закономерным. Исторически сложилось так, что первые задачи, решаемые при помощи компьютерного моделирования, были связаны с физикой (задачи на гидравлику, теплообмен, механику твердого тела и др.). Затем моделирование использовали в основном для решения задач математической физики. А в дальнейшем, результаты компьютерного моделирования распространились на биологию, экономику, химию и экологию, но решались задачи, в которых были сложные математические вычисления, т.е. все сводилось к математическому описанию и программированию. И все это, очевидным образом, привело к тому, что современные учебные материалы преимущественно направлены на изучение именно математического моделирования.

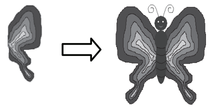
И если первую причину может корректировать только сам учащийся, то две последние можно решить путем включения в курс графического и вербального (текстового) моделирования. Конечно, некоторые авторы на страницах своих учебников рассматривают данный вид моделей, но набор заданий либо совсем отсутствует (идет лишь описание моделей), либо настолько скуден, что у учащихся складывается впечатление, что моделирование – это решение сложных физических задач с помощью математических формул и программирования.

Приведем несколько примеров заданий на графическое и вербальное моделирование, которые, на наш взгляд, существенно разнообразят стандартный набор задач компьютерного математического моделирования. И, наряду с этим, не требуют глубоких знаний математических формул и программирования. Данные задания можно видоизменять, адаптируя их к конкретным дисциплинам; и использовать на занятиях в классах любого профиля (от физико-математического до гуманитарного). При составлении данного набора заданий мы опирались на разработки Н.В.Макаровой [1].

Моделирование в среде графического редактора Paint.

«Моделирование картинок»

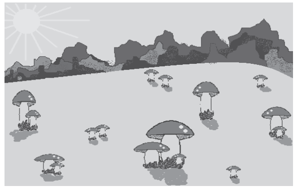
Задача 1. Нарисуйте семью Снеговиков, используя один шаблон снежной фигуры.



Задача 2. Нарисовав одно крыло, изобразите портрет бабочки.

Задача 3. Изобразив один гриб, создайте пейзаж грибной полянки.

«Моделирование геометрических операций»



Задача 4. Дан отрезок. Разделить его пополам. Разделить его на три равные части.

Задача 5. Дан отрезок. Построить равносторонний треугольник (правильный шестиугольник).

Задача 6. Дан угол. Построить биссектрису.

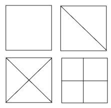
«Моделирование – конструирование из плоских фигур»

Задача 7. На основе заданного набора фигур составить симметричный орнамент.

Задача 8. Из заданного набора фигур составить мозаику (льва и львицу).

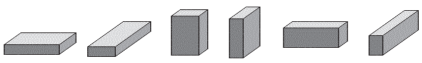
«Моделирование – конструирование из объемных фигур»

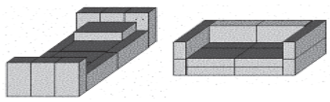
Задача 9. Из заданного набора кирпичей построить мебель (кровать, диван, шкаф).

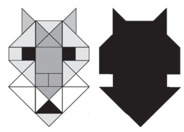


Задача 10. Из полученных моделей мебели (см. предыдущее задание) спроектировать план своей комнаты.

Задача 11. Используя макет предыдущего задания, спланировать 2-3 варианта перестановки мебели в вашей комнате.







«Моделирование и межпредметные связи»

Задача 12. Изобразить схему расположения планет в солнечной системе, подписав названия планет и спутников.

Задача 13. Начертить план класса, в котором сейчас находитесь, и подписать, кто где находится.

Задача 14. Построить таблицу химических элементов Менделеева, соблюдая цветовую схему.

Задача 15. Поэтапно изобразить процесс развития семечки подсолнуха; жизненный цикл гусеница – куколка – бабочка.

Задача 16. Изобразить правило перехода улицы (с использованием светофора, дорожных знаков).

Задача 16. Изобразить правило русского языка (написание мягкого знака после шипящих в конце слова; написание слога «ци» с исключениями и др.).

Моделирование в среде текстового редактора.

Задача 1. Составьте словесную модель (набрать и отформатировать): словесный портрет литературного героя или своего одноклассника; алгоритм проверки написания глухих согласных в конце слова; алгоритм выполнения химического опыта; описание процесса «круговорот воды в природе» и др.

Задача 2. Составьте структурную модель (не менее n уровней) классификации видов изобразительного искусства.

Задача 3. Составьте информационную модель: таблицу кислот и их солей.

Задача 4. Составьте алгоритмическую модель по определению частей света (в разных условиях).

Задача 5. Составьте семантическую модель: представьте в виде графа систему власти России в начале XIX века.

Литература

1. Информатика. 7-9 класс. Базовый курс. Практикум-задачник по моделированию / Под. ред. Н.В.Макаровой. – Спб.: Питер, 2007. – 176 с.

САМООРГАНИЗУЮЩИЕСЯ КАРТЫ В ЗАДАЧАХ БИОМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Овакимян А.С.

Ереванский государственный университет

0025, Ереван, ул.А.Манукяна, 1

Тел.: + 374 77 02 32 58, e-mail: ahovakimyan@ysu.am

Саркисян С.Г.,

Ереванский государственный университет

0025, Ереван, ул.А.Манукяна, 1

Тел.: + 374 93 81 64 81, e-mail: siranushs@ysu.am

Зироян М.А.

Российский государственный социальный университет

129226 Москва, ул. В.Пикад.4, ст.1

Тел.:+495 748 67 67 , e-mail: zirmanya@mail.ru

За последние два десятилетия технологии биометрической идентификации сделали большой шаг вперед и заняли прочные позиции на рынке систем безопасности. Системы безопасности пользуются большим спросом со стороны различных учреждений и организаций: банков, аэропортов, библиотек и др. В биометрических системах идентификация человека производится по его биометрическим параметрам, а не по ключу или карточке. По прогнозам экспертов, доля биометрических систем в ближайшие годы будет составлять значительную часть от общего рынка систем безопасности[1] .

Методы биометрической идентификации многообразны. Они основаны как на статических биометрических характеристиках, таких как отпечатки пальцев, геометрия лица, сетчатка глаза, радужная оболочка глаза, рисунок вен руки, так и на динамических характеристиках, таких как голос, почерк, сердцебиение, походка. Что касается экспертов, их мнения в вопросе выделения основных биометрических характеристик совпадают. По их мнению это отпечатки пальцев рук, геометрия лица и радужная оболочка глаза [2,3].

Радужная оболочка является уникальной характеристикой человека. Метод идентификации по радужке является наиболее точным в биометрических технологиях. Но этот метод сегодня на международном рынке составляет всего 6-9%, в то время как технология биометрического распознавания по отпечаткам пальцев составляет более половины рынка.

В настоящее время для реализации задач биометрической идентификации на помощь приходят инфомационные технологии, обеспечивающие эффективную и оперативную обработку биометрической информации.

Биометрические задачи идентификации принадлежат классу задач распознавания образов, среди которых особое место занимают задачи классификации. В этих задачах образ должен быть классифицирован, то есть соотнесен к одному из классов объектов на основе данных об уже существующих образах.

Существует много способов решения задач распознавания образов среди которых особое место занимают искусственные нейронные сети (ИНС) [4]. ИНС является математической моделью биологического нейрона. Она состоит из нейронов, которые связаны друг с другом. Нейронная сеть подвергается обучению путем представления ей входной информации в виде числовых последовательностей. В ходе обучения настраиваются внутренние связи между нейронами, благодаря которым сеть наделяется способностью распознать незнакомые образы. Корректность и эффективность работы сети проверяется на контрольных входных векторах.

Существуют различные типы нейронных сетей, которые различаются как топологией, так и алгоритмами обучения. В задачах классификации образов одними из наиболее эффективных являются самоорганизующиеся карты, в которых нейроны расположены на сетке, а в ходе обучения близкие по назначению нейроны собираются в связных областях сетки [4].

В работе рассмотрена задача построения и реализации нейронной сети типа самоорганизующейся карты для решения задачи биометрической идентификации личности по радужной оболочке глаза. Построенная нейронная сеть получает на входе образ фотографии человеческого глаза, выполняет предварительную обработку по выделению радужной оболочки с помощью алгоритма Собеля и трасформации Хаффа, выделяет существенные компоненты во входных данных, и затем решает задачу классификации радужки [5,6]. Для программной реализации сети разработана библиотека специальных Java-классов, обеспечивающая параллельную обработку данных.

Самоорганизующаяся карта имеет четыре параметра, от значений которых зависит эффективность работы сети. Этими параметрами являются количество внутренних нейронов сети, характеристика сетки, выражаемая отношением ширины сетки, на которой расположены нейроны, к ее высоте, начальный коэффициент обучения, число итераций обучения [4]. На основе экспериментов найдены значения параметров сети, при которых для классификации радужки сеть работает наиболее эффективно, то есть выдает удовлетворительные результаты на контрольных входных данных

Сеть была апробирована и для решения других задач классификации. Оказалось, что найденные значения параметров сети также являются удовлетворительными для этих задач.

Литература

1. Кухарев, Г.А. Биометрические системы: методы и средства идентификации личности человека. СПб., 2001
2. Дегтярева А. Методы идентификации личности по радужной оболочке глаза. Компьютерная графика и мультимедиа2004. – Вып. № 2 (6) http://www.cgm.computergraphics.ru/content/view/61
3. Матвеев, И. Распознавание человека по радужке . Системы безопасности. – 2004.Вып. №5. http://www.secuteck.ru/articles2/sys_ogr_dost/human_recogn_ss_5_2004.
4. Anil K. Jain, Jianchang Mao, K. M. Mohiuddin. Artificial Neural Networks: A Tutorial. Computer – Special issue: neural computing: companion issue to Spring 1996 IEEE Computational Science & Engineering, Volume 29, Issue 3, March 1996.
5. Samta Gupta, Susmita Ghosh Mazumda. Sobel Edge Detection Algorithm. International Journal of Computer Science and Management Research. Vol 2, Issue 2, February 2013
6. Just Kjeldgaard Pedersen, Simon. Circular Hough Transform. Aalborg University, Vision, Graphics, and Interactive Systems. November, 2007.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ В МОДЕЛЯХ МОНОПОЛИСТИЧЕСКОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Радионов С.А.

Высшая школа экономики

Мы рассматриваем модели монополистической конкуренции (Dixit–Krugman–Melrz) с предпочтениями агрегированного потребителя, заданными двумя хорошо известными функциями полезности — функцией Кимбалла и функцией с переменной эластичностью замещения. Известно, что рыночное равновесие эффективно только для специального случая, когда функция полезности имеет постоянную эластичность замещения, но мы обнаружили, что в обоих случаях может быть введен специальный налог на выпуск, такой что рыночное равновесие становится эффективным.

Работа выполнена при поддержке и РФФИ (проект № 12-01-00916) и РНФ (проект № 14-11-00432)

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОМЕХ В СИСТЕМАХ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ВЕСОВУЮ ОБРАБОТКУ И АЛГОРИТМЫ БПФ

Свистова С.Ф.

Московский государственный технический университет

радиотехники, электроники и автоматики

119454, Москва, пр-т Вернадского д.78

Тел. 89031281891, e-mail: svistova@mail.ru

Рассматривается система выделения сигналов на фоне помех, использующая сглаживающие весовые функции (окна) и фильтрацию на основе алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Приводятся результаты разработки новых окон, которые позволяют эффективнее подавлять помехи и выделять сигналы без дополнительного ухудшения разрешающей способности и увеличения потерь в отношении сигал/шум по сравнению с известными.

Разработаны компенсационный способ и способы односторонней и селективной компенсации боковых лепестков частотных характеристик фильтров БПФ, обеспечивающие лучшее выделение сигналов на фоне помех и меньшие потери в отношении сигнал/шум по сравнению с достигнутыми в известных системах.

Показана возможность совместного использования окон и компенсационного способа, что облегчает создание адаптивных систем выделения сигналов на фоне помех.

Предложены способы уменьшения потерь в отношении сигнал/шум, вызванных неравномерностью частотных характеристик систем на основе алгоритмов БПФ, основанные на использовании двух БПФ сигналы на вход которых поступают со смещением по частоте, или одного БПФ с попарным объединением выходных каналов.

Эффективность предложенных способов выделения сигналов на фоне помех по сравнению с известными подтверждена методами статистического моделирования на ЭВМ.

ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ НА ПОЛЕ $\mathbb{F}_p((t))$

Фарков Ю. А.

Российская академия народного хозяйства и государственой службы при Президенте Российской Федерации

119571, Москва, пр-т Вернадского д. 82, стр. 1

Тел.: 84959338030, e-mail: farkov@list.ru

Для данного простого числа p через $\mathbb{F}_p((t))$ обозначают поле формальных рядов Лорана вида

$$\sum_{n \geq n_0} a_n t^n, \quad n_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_n \in \mathbb{F}_p,$$

с обычными операциями сложения и умножения. Это поле может быть получено как пополнение поля $\mathbb{F}_p(t)$ рациональных функций с коэффициентами из конечного поля $\mathbb{F}_p$ относительно абсолютного значения $|a| = p^{-\operatorname{ord}_0(a)}$ (см., например, [1, с. 433]). Открытая компактная подгруппа U совпадает с замыканием кольца полиномов $\mathbb{F}_p[t] \subset \mathbb{F}_p((t))$. Меру Хаара μ на аддитивной группе G поля $\mathbb{F}_p((t))$ нормируем условием $\mu(U) = 1$ и стандартным образом определим по этой мере пространство $L^2(G)$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$. Преобразование Фурье функции f обозначается через $\widehat{f}$. Формальные суммы вида

$$\sum_{n=n_0}^{-1} a_n t^n, \quad n_0 \leq -1, \quad a_n \in \mathbb{F}_p,$$

образуют дискретную подгруппу H в G. Отображение $\lambda : G \to [0, \infty)$ определим по формуле

$$\lambda \left(\sum_{n \geq n_0} a_n t^n \right) = \sum_{n \geq n_0} a_n p^{-n-1}.$$

Образом подгруппы H при отображении λ является множество целых неотрицательных чисел: $\lambda(H) = \mathbb{Z}_+$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ через $h_{[\alpha]}$ обозначим элемент из H такой, что $\lambda(h_{[\alpha]}) = \alpha$. Элементы $\delta_l \in G$ определим из условия $\lambda(\delta_l) = l/p$, $l \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Произвольный характер $\chi : G \to \mathbb{C}$ может быть задан по формуле

$$\chi \left(\sum_{n \geq n_0} a_n t^n \right) = \exp(2\pi i a_{-1} p^{-1}).$$

Относительно соотношения двойственности $(x, \omega) = \chi(x\omega)$ группа G самодвойственна: $\widehat{G} = G$. Обобщенные функции Уолша определяются равенством $W_\alpha(x) = (x, h_{[\alpha]})$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+,\ x \in G$. Ортогональные и биортогональные всплески (вейвлеты) на поле $\mathbb{F}_p((t))$ конструируются с помощью функций $W_\alpha(x)$ как на p-адической группе Виленкина (см. [2, 3]).

Автоморфизм A группы G определим равенством $A(x) = t^{-1}x$ для $x \in G$. Для произвольной функции $\psi \in L^2(G)$ положим

$$\psi_{j,k}(x) = p^{j/2} \psi(A^j x - h_{[k]}), \quad j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Функции $\psi^{(1)},\dots,\psi^{(r)}$ *порождают фрейм Парсеваля* в $L^2(G)$, если для любой функции $f\in L^2(G)$ выполнено равенство

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\sum_{\nu=1}^{r}|\langle f\,,\psi_{j,k}^{(\nu)}\rangle|^2=\|f\|^2.$$

Доказано, что при $r\ge p$ функции $\psi^{(1)},\dots,\psi^{(r)}$ порождают фрейм Парсеваля в $L^2(G)$, если они определены по следующему алгоритму:

1. Принять $N=p^n$, $N_1=p^{n-1}$ и выбрать вектор $(b_0,b_1,\dots,b_{N-1})$ в $\mathbb{C}^N$ такой, что

$$b_0=1,\quad |b_l|^2+|b_{l+N_1}|^2+\ldots+|b_{l+(p-1)N_1}|^2\le 1,\quad 0\le l\le N_1-1. \tag{1}$$

2. Вычислить коэффициенты $c_0,c_1,\dots,c_{N-1}$ по формуле

$$c_\alpha=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}b_sW_\alpha(A^{-n}h_{[s]}),\quad 0\le\alpha\le N-1,$$

и определить полином Уолша

$$m_0(\omega)=\sum_{\alpha=0}^{N-1}c_\alpha\overline{W_\alpha(\omega)}. \tag{2}$$

3. Определить функцию $\varphi\in L^2(G)$, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\varphi}(\omega)=\prod_{j=1}^{\infty}m_0(A^{-j}\omega),\quad \omega\in G.$$

4. Найти полиномы Уолша $m_1,\dots,m_r$ вида (2) такие, что строки матрицы

$$\begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) & \dots & m_r(\omega)\\ m_0(\omega+\delta_1) & m_1(\omega+\delta_1) & \dots & m_r(\omega+\delta_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ m_0(\omega+\delta_{p-1}) & m_1(\omega+\delta_{p-1}) & \dots & m_r(\omega+\delta_{p-1})\end{pmatrix}$$

при каждом $\omega\in G$ образуют ортономированную систему.

5. Определить функции $\psi^{(1)},\dots,\psi^{(r)}$ так, чтобы $\widehat{\psi}^{(\nu)}(\omega)=m_\nu(A^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(A^{-1}\omega)$, $\nu=1,\dots,r$.

При некоторых дополнительных условиях функция φ, определенная шагами 1-3, представима лакунарным рядом Уолша как в [2, с.198]. Шаг 4 реализуется методом, изложенным в [3, § 2], а если в условии (1) для всех l выполнены равенства, то этот алгоритм применим и для $r=p-1$. Для случая $p=2$ изложенный метод обоснован в [4, Теорема 3.4]. Отметим, что на поле $\mathbb{F}_p((t))$ могут быть распространены и другие результаты из [4] о построении фреймов на группе Кантора.

Литература

1. *Benedetto J.J., Benedetto R.L.* A wavelet theory for local fields and related groups // J. Geometric Analysis. 2004. V.14. P.423-456.

2. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Известия РАН. Сер. матем. 2005. Т.69. № 3. С.193–220.

3. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. 2011. V. 3, № 3. P. 181–195.

4. *Farkov Yu. A.* Examples of frames on the Cantor dyadic group // J. Math. Sciences. 2012. V. 187, № 1. P. 22–34.

Секция 8

ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК В СОВРЕМЕННОМ ОБЩЕСТВЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MAPLE НА ОСНОВЕ НАГЛЯДНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Афанасьев В.В.

ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского»

150000, г. Ярославль, ул. Республиканская,108

Тел.: 84852726235, e-mail: e.smirnov@yspu.org

Чистяков В.В.

ФГБОУ ВПО «Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д.Ф. Устинова»

190005, г. Санкт-Петербург, ул. 1-я Красноармейская, д.1,

e-mail: v.chistyakov@yarcx.ru

Смирнов Е.И.

ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского»

150000, г. Ярославль, ул. Республиканская,108

Тел.: 84852726235, e-mail: e.smirnov@yspu.org

Аннотация. Представлен дидактический материал для исследовательской студенческой деятельности с использованием системы Maple 15 в области динамических систем. Исследовано дифференциальное уравнение реального процесса из негладкой механики на примере уравнений 2-го порядка с иррациональной или разрывной правой частью, зависящей от одного либо нескольких параметров на основе наглядного моделирования исследовательских процедур. Вместе с решениями качественно исследуются и фазовые портреты, демонстрируя предельные циклы множественных причудливых форм и с самопересечениями. Основным средством и механизмом формирования исследовательской деятельности студента в процессе обучения учебному предмету нами предлагается *комплекс исследовательских профессионально - прикладных задач* , реализуемый в специально организованной среде ресурсных занятий на фоне мотивов самоактуализации и ценностных ориентаций. Материал может быть использован в исследовательском сегменте образовательного процесса профессиональной подготовки студентов.

Ключевые слова: наглядное моделирование, динамические системы, Maple, бифуркация, предельный цикл, изменение периода, исследовательская деятельность студентов

Изучение дисциплин естественно-математического цикла в ВУЗе обречено на повсеместное использование профессионального математического софта уже в недалеком будущем. Но и сейчас в передовых российских учебных заведениях, таких как, например, Высшая школа экономики практикум по алгебре, геометрии, математическому анализу и др. разделам математики осуществляется с использованием продуктов Maple, Statistica, Wolfram Matematica и др. Последние версии продукта Maple представляются наиболее подходящими для таких целей по причине его уникальной, длинной до 20-ти знаков арифметики (не случайно она используется в продукте MatLab) и простого интерфейсного языка, команды которого можно непосредственно брать в опции Help, меняя их наполнение [3-4]. Продукт незаменим в исследовательской деятельности в рамках студенческих математических проектов, в особенности касающихся понятий, явлений и фактов, не находящих простого аналитического выражения, но только путем численной реализации притом с громадным объемом вычислений. *Возможность компьютерного интерактивного взаимодействия с учебным предметом и внедрение современных научных достижений в учебный процесс* *усиливает развивающий эффект и повышает учебную мотивацию и связь с реальной жизнью и практикой.* Именно эти направления предоставляют уникальную возможность мотивированного вовлечения интеллектуальных операций мышления обучающихся в процесс анализа математического содержания на основе управляющего воздействия актуализированной исследовательской деятельности студентов [7]. Именно эти направления предоставляют уникальную возможность мотивированного вовлечения интеллектуальных операций мышления обучающихся в процесс анализа предметного содержания, прогноза предстоящей когнитивной деятельности, сравнения и различения познавательных ситуаций, оценки и динамики текущего состояния личностных изменений , развития надситуационной активности и наглядного моделирования как в учебной , так и в проектной деятельности. Прежде всего, возрастает потребность в актуализации обобщенных конструкций и отношений в предметном содержании профессионального образования. Как отмечал С.Л. Рубинштейн, «...генерализация отношений предметного содержания выступает затем и осознается как генерализация операций, производимых над обобщенным предметным содержанием; генерализация и закрепление в индивиде этих генерализованных операций ведут к формированию у индивида соответствующих способностей» [6]. Данный подход особенно важен для математического образования, где естественным образом возникающие многоступенчатые абстракции предметного содержания создают условия для таких обобщений как фундирующих конструктов личностного опыта [5]. Вышесказанное распространяется и на исследовательскую деятельность в рамках *теории динамических систем*, находящей все большее применение в качестве инструмента наглядного моделирования не только в естественнонаучных , но и гуманитарных дисциплинах, таких как социодинамика, чаще называемая *эконофизикой* [1]. Настоящая работа посвящена наглядному моделированию вычислительных процедур изучения общих свойств динамических систем на примере уравнений 2-го порядка с иррациональной или разрывной правой частью, зависящей от одного либо нескольких параметров, при помощи программного продукта Maple15.

Методы и результаты

Поэтому основным средством и механизмом формирования исследовательской деятельности студента в процессе обучения учебному предмету нами предлагается *комплекс исследовательских профессионально - прикладных задач* , реализуемый в специально организованной среде ресурсных занятий на фоне мотивов самоактуализации и ценностных ориентаций . Следует отметить, что из результатов психологических исследований вытекает недостаточность использования комплексов нестандартных задач как таковых для формирования творческой активности обучаемых. Подлинно творческая деятельность студента (именно, надситуативная активность) возникает лишь в процессе самостоятельного поиска новых путей и способов решения задачи в условиях высокой степени неопределенности и потенциальной многовариантностью возможностей для поиска решения на фоне высокого развития мотивации самоактуализации (Ф.Маслоу, Г.Олпорт, К. Роджерс, А.М.Матюшкин, М.М.Кашапов и др.). К тому же рассмотрение и реализация комплекса исследовательских профессионально - прикладных задач может не только устанавливать межпредметные связи (механизм - графы согласования), но и аккумулировать предметные знания в единую целостность , способствовать формированию интеллектуальных операций мышления, предметных умений и навыков, а также моделировать исследовательскую деятельность ученого [8].

В качестве примера проектирования исследовательской деятельности студентов рассмотрим *астатичный ротатор* с неглавной осью вращения, т. е. твердое тело, насаженное на неподвижную ось с двумя опорами, проходящую через центр его масс C, но не являющуюся *осью свободного вращения* [2]. Например, это может быть однородный эллипсоид с просверленным через центр масс каналом (рис. 1). При вращении из-за динамической неуравновешенности в вертикальных плоскостях возникают инерционные пары сил M_x и M_y, приводящие к поперечным силам реакции и как следствие к осевому моменту сил сухого трения M_{fr}, уменьшающим угловую скорость $\omega = \dot{\varphi}$ наряду с квадратичным аэродинамическим сопротивлением. Изучалось колебательное поведение ротатора под действием упругого возвращающего $M_{el} = -\kappa\varphi$ и гармонического вынуждающего $M(t) = A_0 \sin\left(\Omega t + \gamma\right)$ моментов

Динамическое уравнение выглядит как [3]

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = -\alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} - c\left|\dot{\varphi}\right|\dot{\varphi} - \kappa\varphi + A_0 \sin\left(\Omega t + \gamma\right) \quad (1),$$

где $J_{zz}, \alpha, c, \kappa$ — параметры инерции, сопротивления и упругости.

Разрешенное относительно старшей производной уравнение имеет иррациональный вид

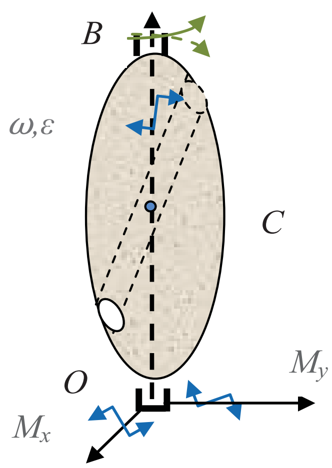
$$\ddot{\varphi} = \frac{-J_{zz}\left(\kappa\varphi - A_0 \sin \Omega t\right) - sign\left(\dot{\varphi}\right)\alpha\sqrt{-2\kappa A_0 \varphi \sin \Omega t + A_0^2 \sin^2 \Omega t + \dot{\varphi}^4\left(J_{zz}^2 - \alpha^2\right) + \kappa^2\varphi^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \quad (2).$$

$J_{zz}^2 - \alpha^2 > 0$

Примечательно, что при выполнении условия $J_{zz} = \alpha = c$ иррациональность (2) исчезает, но появляется потенциальная разрывность из-за обращающегося в нуль знаменателя [4]

$$\ddot{\varphi} = \frac{2J\left|\dot{\varphi}\right|\dot{\varphi} \cdot A_0 \sin\left(\Omega t + \gamma\right) + 2\kappa\varphi A_0 \sin\left(\Omega t + \gamma\right) - 2\kappa\varphi \cdot J\left|\dot{\varphi}\right|\dot{\varphi} - \kappa^2\varphi^2 - A_0^2 \sin^2\left(\Omega t + \gamma\right)}{2J\left(\kappa\varphi + J\left|\dot{\varphi}\right|\dot{\varphi} - A_0 \sin\left(\Omega t + \gamma\right)\right)} \quad (3).$$

Оба уравнения не интегрируются аналитически, но хорошо, хотя и не без проблем, решаются численно, причем различные разностные схемы (*rk45, gear* и др.) дают совпадающие результаты. Отличие правых частей проявляется в качественно различных угловых кинетиках, одна из которых характеризуется быстрым выходом на периодический режим с наличием изломов на кривой ω(t), другая же наоборот— гладкостью, апериодичностью, и сильной модуляцией амплитуды колебаний. Вследствие этого в первом случае имеет место быстрый выход на «угловатый» предельный цикл в фазовой плоскости, тогда как во втором — траектория, вероятно, заполняет всюду плотно эллипс с центром в начале координат (рис. 2, 3).



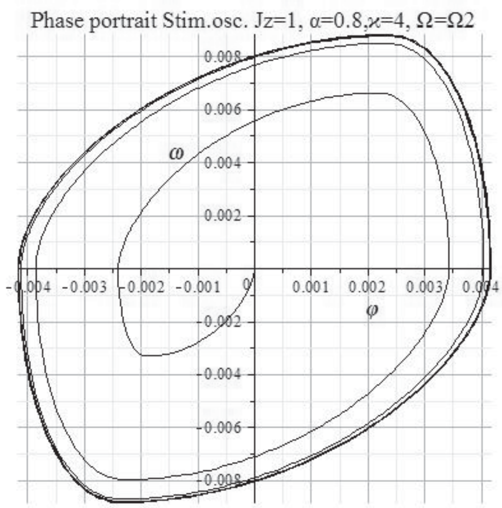
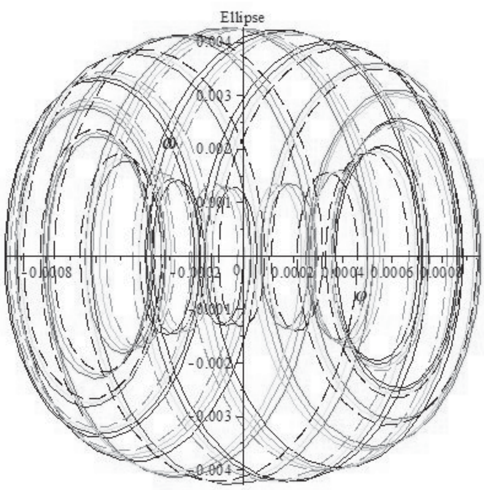


Рис. 1. Рис. 2.



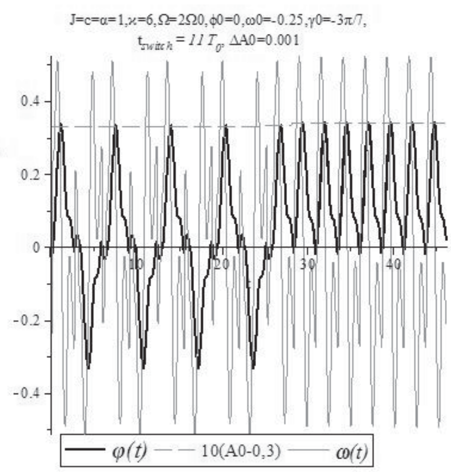


Рис. 3. Рис. 4.

Таким образом, выполнение условия $J_{zz}=\alpha=c$ на параметры динамики резко меняет картину кинетики, делая ее в значительной мере стохастической.

Гомотопия прототипа

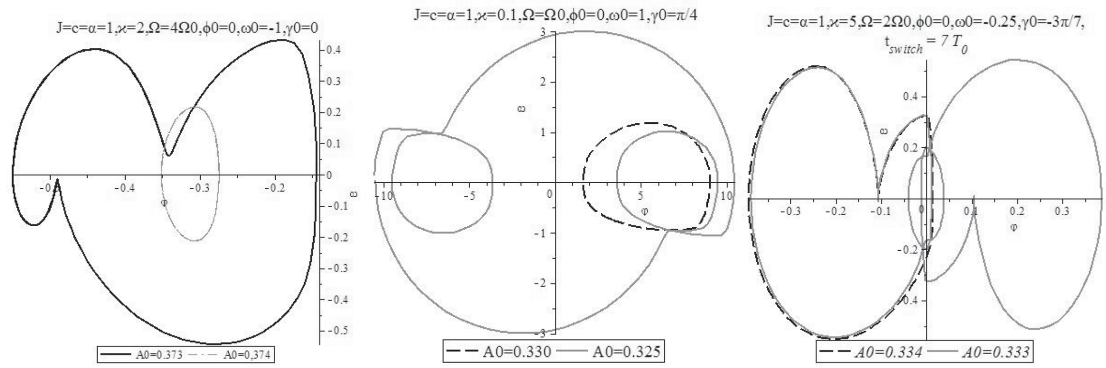
Если слегка изменить числитель правой части (3) как

$$\ddot{\varphi}=\frac{2J\left|\dot{\varphi}\right|\dot{\varphi}\cdot A_0\sin\left(\Omega t+\gamma\right)+2\kappa\varphi A_0\sin\left(\Omega t+\gamma\right)-2\kappa\varphi\cdot J\left|\dot{\varphi}\right|\dot{\varphi}-\kappa^2\varphi^2-\sin^2\left(\Omega t+\gamma\right)}{2J\left(\kappa\varphi+J\left|\dot{\varphi}\right|\dot{\varphi}-A_0\sin\left(\Omega t+\gamma\right)\right)}\quad(4),$$

убрав амплитудный множитель A_0^2, то решения $\varphi(t)$ получающегося уже нефизического уравнения приобретают необычное поведение.

Прежде всего, они приобретают свойства смещенности от нулевого положения при определенных значениях параметров (Рис. 4).

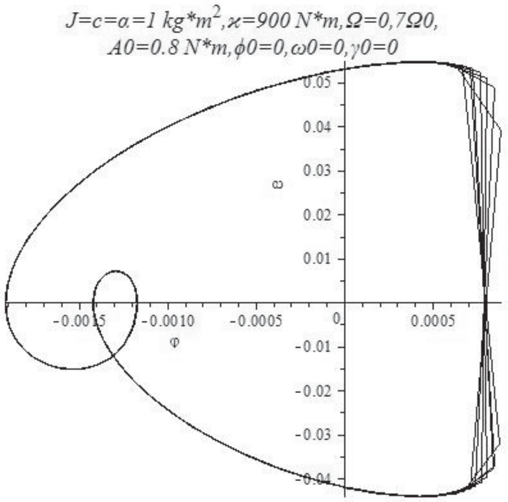
Вместе с решениями качественно меняются и фазовые портреты, демонстрируя предельные циклы множественных причудливых форм и с самопересечениями (Рис. 5,а—в).



а) б) в)

Рис. 5.

Необычным моментом также представляется возможность реализации *частичных* предельных циклов, замыкание которых до полного «подпорчено» стохастической модуляционной компонентой (Рис. 6).



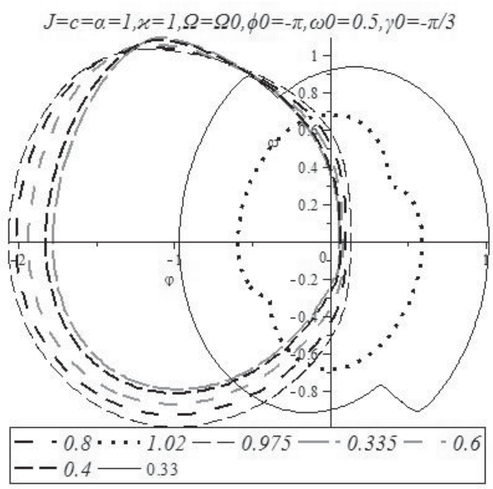


Рис. 6. Рис. 7.

Изменение амплитудного параметра A_0 от малых значений к большим приводит к множественным бифуркациям , неоднократно меняющим форму, размер и смещенность от начала координат предельного цикла (рис. 7). Из картины кинетики видно (рис. 4), как антипериодическое , а потому несмещенное решение всего лишь при микроскопическом изменении параметра ΔA_0=0.001 переходит в смещенное в верхнюю полуплоскость, но просто периодическое. В общем случае направление смещения зависит от начальной фазы γ.

Достойно внимания бифуркационное уменьшение периода решения в целое либо рациональное (5/2, 3/2) число раз, либо в частном случае его неизменность. Такого рода дискретность всегда представляет повышенный интерес, особенно для исследователей нелинейных колебательных систем и явления резонанса в них, а также тех, кто практикует симметрийный и алгебраический подходы в изучении дифференциальных уравнений.

Выводы

Таким образом, предложенный авторами образец проектирования и исследования профессионально-прикладной задачи хорошо демонстрирует многие реальные свойства динамических систем, такие как предельный цикл , стохастичность, бифуркации, изменение свойств периодичности решения в ходе исследовательской деятельности студентов может быть взят в модельного образца в освоении соответствующих курсов.

Реализация предметной деятельности при использовании продукта Maple, с помощью которого может быть осуществлено дальнейшее исследование динамического поведения реальных процессов, позволяет обнаружить их новые необычные явления и особенности на основе наглядного моделирования.

Литература

[1] Эконофизика и эволюционная экономика (Научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук, 2 ноября 2010 г.) // Успехи Физических Наук. — 2011. — Т. 181. — С. 753-786

[2] А.П. Маркеев, Теоретическая механика: Учебник для университетов.— Москва: ЧеРо, 1999, 572 с

[3] Чистяков В.В. О динамике вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, при сухом трении в опорах//Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика.—2014/—№ 22(2) ,С. 3—16

[4] Чистяков В.В. О частных случаях динамики вращения твердого тела вокруг неглавной центральной оси инерции при сухом трением в опорах //Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.—2014,— № 2.— С. 153-163

[5] Смирнов Е.И. Фундирование в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога. Монография.: Ярославль, Изд-во «Канцлер», 2012.-654 с

[6] Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования. М.: АН СССР, 1958

[7] Смирнов Е.И., Афанасьев В.В. Экспериментальное исследование творческой активности студентов в процессе обучения математике // Ярославский педагогический вестник.-1996.-№3.-С.110-115

[8] Смирнов Е.И., Осташков В.Н., Зубова Е.А. Критерии отбора исследовательских профессионально-ориентированных задач при обучении математике студентов технических вузов // Ярославский педагогический вестник. -2008, №4. – С.16-22

К ВОПРОСУ О ПОВЫШЕНИИ МОТИВАЦИИ БУДУЩИХ ЭКОНОМИСТОВ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ

Байгушева И. А.

Астраханский государственный университет

414045, Астрахань, ул. Татищева, 20а

Тел.: 88512485104, e-mail: iabai@mail.ru

На современном этапе развитие экономической науки тесно связано с применением математики к исследованию научных и производственных задач. Не случайно 80 % лауреатов Нобелевской премии в области экономики, присуждаемой с 1969 года, получили её за успешное применение математического аппарата в исследованиях экономических процессов. Математика заняла важное место в экономической науке, а математическая подготовка – в системе экономического образования. Претерпело существенные изменения содержание математической подготовки экономистов в высшей школе: увеличился её объем, появились новые дисциплины как фундаментального, так и прикладного характера.

В связи с этим во ФГОС ВО по экономическим направлениям подготовки количество учебного времени, отведенного для изучения дисциплин математического цикла, возросло на 48,7 % по сравнению со стандартами второго поколения. При этом увеличена доля самостоятельной учебной деятельности студентов в общей трудоемкости образовательных программ.

И сказанного выше следует, что без высокой положительной мотивации студентов к изучению математики невозможно подготовить экономиста новой формации, отвечающего современным требованиям общества. В работах отечественных ученых (П. Я. Гальперин, В. Д. Давыдов, И. А. Зимняя, А. К. Маркова, Н. Ф. Талызина, Д. Б. Эльконин и др.) мотивация признана первым и обязательным компонентом учебной деятельности. Под учебной мотивацией мы понимаем психологическую структуру, состоящую из потребности в учении, смысла учения, мотивов учения, цели, эмоций, отношений и интересов [1].

Как показало наше исследование и исследования других авторов (Н. А. Бурмистрова, Р. Л. Исакова, Э. Л. Локтионова, Т. П. Монако, И. Г. Худякова и др.) достаточно большой процент студентов экономических направлений подготовки не имеет развитой мотивации к изучению математики. Это связано, прежде всего, с несформированным в школе интересом к математике, непониманием значимости математических знаний для будущей профессиональной деятельности. Решение этой острейшей проблемы мы связываем с профессиональной направленностью математической подготовки экономистов в вузе [2].

Под *профессиональной направленностью математической подготовки будущих экономистов* мы понимаем ориентацию математической подготовки в её целевом, содержательном и процессуальном аспектах на динамическое моделирование профессионального труда экономиста. Как показывает практика, бессистемное использование задач профессиональной направленности при изучении математики несколько повышает учебную мотивацию студентов, но не формирует у них способности самостоятельно решать профессиональные задачи с использованием математических знаний.

В качестве ведущей идеи реализации профессиональной направленности нами была выбрана идея Н.Ф. Талызиной: «При разработке целей обучения конкретному предмету, прежде всего, необходимо выделить основную систему задач, для решения которых готовится обучаемый» [3, с. 275]. Опираясь на эту идею, мы уточнили цель математической подготовки будущих экономистов как формирование обобщенных методов решения типовых профессиональных задач экономиста, требующих использования математических знаний. Здесь типовая профессиональная задача экономиста (ТПЗ) – это цель, которая многократно ставится в процессе его профессиональной деятельности.

Анализ квалификационных характеристик и метод экспертных оценок позволили определить типологию профессиональных задач экономиста, решение которых требует использования математических знаний: 1) сбор и обработка экономической информации; 2) нахождение или оценка значений показателей, характеризующих экономическую деятельность; 3) выявление зависимости, её вида и свойств между показателями экономической деятельности; 4) прогнозирование будущих значений показателей экономической деятельности; 5) планирование экономической деятельности.

Типология профессиональных задач экономиста позволяет систематизировать множество частных примеров применения математики в экономике, разработать обобщенные методы решения ТПЗ [2], опираясь на которые можно составить план решения любой конкретной задачи, относящейся к одному из данных типов.

Модель непрерывного формирования обобщенных методов решения ТПЗ в процессе математической подготовки бакалавров экономики в вузе представлена в таблице.

Таблица

Модель профессионально направленной математической подготовки будущих экономистов в высшей школе

Этап учебного процесса	**Цель этапа**	**Средства обучения**	**Учебные дисциплины**
Адаптационный (1 семестр)	Формирование действий выделения цели и планирования деятельности по решению задач	Учебные задачи курса школьной математики	Практикум по математике
Дисциплинар-ный, (2-4 семестры)	Формирование отдельных действий обобщенных методов решения ТПЗ	Учебные задачи вузовского курса математики	Фундаментальные математические дисциплины
Междисципли-нарный, (3-7 семестры)	Формирование обобщенных методов решения ТПЗ	Псевдопрофес-сиональные задачи	Фундаментальные и прикладные математические дисциплины
Профессиональ-ный, (7-8 семестры)	Формирование навыка самостоятельного применения обобщенных методов решения ТПЗ	Профессиональ-ные задачи	Профильные дисциплины, производственная практика, дипломное проектирование

Для устойчивости учебной мотивации студентов методика формирования обобщенных методов решения ТПЗ при изучении конкретной темы должна включать следующие этапы:

1) *Мотивационный этап*: предложить решить несколько конкретных ТПЗ одного типа. Поскольку метод решения не сформирован, возникает проблемная ситуация.

2) *Методологический этап*: студенты самостоятельно (под руководством преподавателя) выделяют содержание и последовательность действий метода решения.

3) *Обучающий этап*: студенты решают сформулированные ранее и другие ТПЗ с опорой на разработанный обобщенный метод решения задач данного типа.

4) *Этап контроля* сформированности обобщенного метода решения ТПЗ данного типа.

Литература

1. Маркова А. К. Психология профессионализма. – М.: Знание, 1996. – 308 с.
2. Байгушева И. А. Профессионально направленная математическая подготовка экономистов в вузе. - Астрахань: Изд. Астраханский ун-т, 2013. - 172 с.
3. Талызина Н. Ф. и др. Пути разработки профиля специалиста. – Саратов: СГУ, 1987.– 176 с.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧИСЛОМ УРАВНЕНИЙ, ПРЕВОСХОДЯЩИМ ЧИСЛО НЕИЗВЕСТНЫХ

Балыко И.А.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики

141196, Московская область, г. Фрязино, ул. Вокзальная, д. 2а

Тел. 8 926 180 62 69, e-mail: balyko1985@mail.ru

При обработке экспериментальных данных, как правило, заранее известен вид функции, связывающей между собой переменные величины. Если число измерений и число уравнений меньше или равно числу неизвестных параметров, то используются известные методы линейной алгебры [1]. Часто число измерений может существенно превышать число переменных параметров.

Рассматривается метод, когда из избыточной системы уравнений последовательно выбирают число уравнений, равное числу неизвестных параметров. Рассмотрим простейший случай двух неизвестных параметров (x, y) и трех линейных уравнений, а затем обобщим его на произвольное число уравнений и параметров. Пусть в процессе измерений получены три совокупности параметров (a_i, b_i, c_i), где i - номер измерения, i = 1,2,3. Из полученной системы трех уравнений

$$\begin{aligned} &a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1, \\ &a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2, \\ &a_3 \cdot x + b_3 \cdot y = c_3. \end{aligned} \tag{1}$$

необходимо получить значения x и y. Возьмем из нее два первых уравнения

$$\begin{aligned} &a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1, \\ &a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение этой системы запишем также в виде формул Крамера $x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta_1}, y_1 = \frac{\Delta_{y1}}{\Delta_1}$,

$\Delta_1 = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1, \Delta_{x1} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1, \Delta_{y1} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$.

Возьмем теперь из системы (1) первое и третье уравнения. Решение системы $x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta_2}, y_2 = \frac{\Delta_{y2}}{\Delta_2}$, $\Delta_2 = a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1, \Delta_{x2} = c_1 \cdot b_3 - c_3 \cdot b_1, \Delta_{y2} = a_1 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_1$.

Для второго и третьего уравнений решение будет: $x_3 = \frac{\Delta_{x3}}{\Delta_3}, y_3 = \frac{\Delta_{y3}}{\Delta_3}$,

$\Delta_3 = a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1, \Delta_{x3} = c_1 \cdot b_3 - c_3 \cdot b_1, \Delta_{y3} = a_1 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_1$.

Оптимальное решение (x_0, y_0), дающее минимальное значение квадратичной ошибки, связано с парциальными решениями трех систем уравнений линейными формулами

$$\begin{aligned} &x_0 = x_1 \cdot \lambda_1 + x_2 \cdot \lambda_2 + x_3 \cdot \lambda_3, \\ &y_0 = y_1 \cdot \lambda_1 + y_2 \cdot \lambda_2 + y_3 \cdot \lambda_3, \end{aligned} \tag{3}$$

где весовые коэффициенты имеют вид $\lambda_i = \frac{\Delta_i^2}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}$, i = 1, 2, 3.

Для этого воспользуемся методом наименьших квадратов, согласно которому наилучшим является такое решение (x_0 , y_0), при котором достигает минимума сумма квадратов

$$S = \sum_{i=1}^{3} (a_i \cdot x + b_i \cdot y - c_i)^2.$$

Приравнивая к нулю частные производные S по переменным x и y, приходим к системе из двух линейных уравнений

$$x \cdot \sum_{i=1}^{3} a_i^2 + y \cdot \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot c_i,$$

$$x \cdot \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i + y \cdot \sum_{i=1}^{3} b_i^2 = \sum_{i=1}^{3} b_i \cdot c_i.$$

Решение системы представим в виде формул Крамера:

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta_0}, y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta_0}, \qquad (4)$$

$$\Delta_0 = (\sum_{i=1}^{3} a_i^2) \cdot (\sum_{i=1}^{3} b_i^2) - (\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i)^2,$$

$$\Delta_x = (\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot c_i) \cdot (\sum_{i=1}^{3} b_i^2) - (\sum_{i=1}^{3} b_i \cdot c_i) \cdot (\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i), \qquad (5)$$

$$\Delta_y = (\sum_{i=1}^{3} a_i^2) \cdot (\sum_{i=1}^{3} b_i \cdot c_i) - (\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i) \cdot (\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot c_i).$$

Развернув суммы в выражениях (5) и, используя известные тождества Коши и Лагранжа, получим выражения:

$$\Delta_0 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2,$$

$$\Delta_x = \Delta_{x1} \cdot \Delta_1 + \Delta_{x2} \cdot \Delta_2 + \Delta_{x3} \cdot \Delta_3,$$

$$\Delta_y = \Delta_{y1} \cdot \Delta_1 + \Delta_{y2} \cdot \Delta_2 + \Delta_{y3} \cdot \Delta_3.$$

Подставляя их в (4), приходим к окончательным выражениям (3).

Полученные выражения обобщаются на случай произвольного числа неизвестных переменных (m) и произвольного числа уравнений (n) при n >m. При этом решение задачи будет иметь общий вид

$$x_0 = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \lambda_i,$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \lambda_i,$$

$$\lambda_i = \frac{\Delta_i^2}{\sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2},$$

$$i = 1, 2, 3 \ldots N$$

Отметим, что у n уравнений с m неизвестными возможное число N систем определенных уравнений с квадратными матрицами m x m равно числу сочетаний n по m:

$$N = C_m^n = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра - М: Наука.- 1974.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука. – 1971.
3. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука. – 1980.
4. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз. - 1962.

ОБ ОПЫТЕ СОЗДАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ УЧАЩИМСЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКИХ УЧИЛИЩ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ИНТЕРЕСА К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ

Белова А.Д.

Профессионально-техническое училище г. Реутов Московской области

Юбилейный пр-т, 58

Тел.: 84957918384, 89104254491, e-mail: abelova37@yandex.ru

В общем объёме знаний, умений и навыков, получаемых учащимися в профессионально-технических училищах (ПТУ), важное место принадлежит математике, которая широко применяется при изучении других предметов и в практической деятельности будущих рабочих, в частности, при овладении новой техникой, при чтении специальной литературы. Математическое образование служит прочной основой повышения рабочей квалификации.

У большинства учащихся, пришедших в ПТУ, очень низкий уровень математических знаний. В 90-х годах приводилась печальная статистика в прессе: около 85% учащихся, пришедших в ПТУ, не подтверждают школьную оценку по математике. В настоящее время положение лучше не стало. Значит, если за 9 лет школе не удаётся дать этой группе учащихся удовлетворительные знания по математике, то стандартные школьные методы для этой группы необходимо совершенствовать. Нужны другие подходы к изучению математики в ПТУ.

Обратимся к нашему опыту. Безусловно, нельзя полностью его копировать, но многие педагогические приёмы можно применять с учётом специфики сегодняшнего дня.

Получив математическое образование в МГУ, и работая некоторое время в качестве инженера в Конструкторском бюро, мне пришлось совмещать основную деятельность с преподаванием математики в вечернем вузе и техникуме. Параллельная работа позволила заключить, что моё призвание – быть учителем математики. Этот важнейший вывод способствовал в дальнейшем успешной педагогической деятельности в Московском авиационном приборостроительном техникуме, где пришлось осваивать и преподавать впервые введённые в нескольких техникумах страны программирование на ЭВМ, теорию вероятностей и математическую статистику, математические методы в экономике. По предложению Учебно-методического комитета по среднему специальному образованию Министерства образования РСФСР пришлось составлять также программы по предметам, писать конспект лекций (учебник) по теории вероятностей и математической статистике, методические указания по основам экономики, методику экономического обоснования дипломных проектов, руководить предметной комиссией, преддипломной и дипломной практиками. Второй вывод, который пришлось сделать, если хочешь расти в профессиональном плане, это – необходимость непрерывного самообразования.

Третье, что стимулировало к творческой работе, это – изучить в какой-то степени психологию подростков, на которых стоит это обидное клеймо «пэтэушников», попытаться помочь им найти себя, попытаться как-то мотивировать их к полезной деятельности. Уверенность, что математика будет способствовать достижению успеха, предопределила переход на работу учителем математики в ПТУ.

Первые же занятия обнаруживают у учащихся слабые знания по арифметике, алгебре, геометрии, отсутствие внимания, «вбитая» убеждённость, что математику им не понять, да и не нужна им эта «кошмарная» математика. К сожалению, и в настоящее время картина здесь безрадостная.

После некоторых размышлений была поставлена задача попытаться освободить ребят от «атмосферы неверия» в себя, создать условия заинтересованности в профессионализме, важности математических знаний, решения более частных проблем - необходимости внедрения ТСО, конструировании наглядных пособий, оборудовании кабинетов. Создание этих кабинетов входило в обязанности педагогов, воспитателей и самих учащихся, всё это настраивает на получение хотя бы элементарных знаний по арифметике, геометрии, тригонометрии и т.д., а результат оказывает эмоциональное воздействие на учащихся, создаёт психологический настрой на дальнейший успех.

Технология здесь проста. Достаточно найти одного - двух энтузиастов и команда может создаваться. В нашем случае два старательных мальчика с желанием отнеслись к новым начинаниям. Из старых разломанных шкафов они сделали стенку, отгораживающую основной кабинет от небольшой «каморки», в которой стали храниться необходимые для учебного процесса материалы и книги. В этой каморке, приехав с каникул, мальчишки вдруг обнаружили настоящий турник, а девочки – зеркало. Во время перемен – кто больше – подтягиваются на турнике ребята: «Я, я…» В следующие дни перед первым уроком в кабинете несколько ребят показывают свою силу. Другим объясняется решение заданных на дом примеров.

К двум помощникам присоединились другие. После уроков мастерят, паяют, сваривают то, что задумывалось. Получился стенд «Репетитор» - 50 вопросов и 50 ответов с другими номерами. Около стенда обычно в перемену толпятся учащиеся. Нажмёшь кнопку «Вопрос», загорится синяя лампочка. Ответ отыскивают – кто-то, задумываясь, кто-то, нажимает каждую кнопку ответов, пока не загорится зелёная лампочка. Для мешающих вести урок возникла «игрушка-наказание»: « 4, 14, 24, 34, 44», - не задумываясь, предлагаю «нарушителю спокойствия» номера вопросов, отправляя его к «Репетитору». Найдёт и запомнит пять ответов, устно решит пример, получит тройку или даже четвёрку, удивившись довольно, что получил настоящую положительную оценку сам. Создаётся поисковая ситуация.

Мальчики создают уголок отдыха, который окружают берёзы с зелёными листьями (традесканция – дело девочек), с самодельными пуфиками и журнальным столиком, на котором появляются альбомы с интересной информацией. На сучке берёзы висит гитара, на которой можно поиграть в перемену. Не днями, а месяцами менялся кабинет и отношение учеников к нему. Сто лампочек у двери на стенде – и никто не выкрутит, не сломает. В кабинете столько разных стендов! И все сделаны учащимися.

Безусловно, заинтересованность ребят в результате необходимо поддерживать, необходимо мотивировать как на конечный результат, так и на промежуточные, индивидуальные.

Ещё один пример. «ТриО» - Отгадай, Обоснуй Ответ». На каждый из трёх вопросов три ответа и лишь по одному верному. Вопросы, как правило, связаны с математикой или профессией. При этом требуется дополнительная домашняя подготовка. Но она оправдана. Урок начинался с «леса рук»: «Я пойду, я…» Так появляется азарт, а это мотивирует к работе.

В то время, пока ученик думает, в классе идёт работа по проверке домашних заданий. Затем высвечиваются вопросы и включается установка «ТриО». Если загораются три зелёных лампочки, т.е. три верных ответа, ученик объясняет свой выбор. Объяснил - получает 5. Если вместо зелёной лампочки гудит сирена, ребята поднимают руки, хотят показать верный ответ. Шум, гам, споры, почему неверно. За неверные ответы двойка не ставится. Главное – активность, желание проявить себя, участвовать в коллективной работе.

Ещё стенд: «Математика в твоей профессии»: за стеклом установки, приборы, сваренные сварщиками детали, спаянные радиомонтажниками схемы. Всё подсвечивается, и видно, где что необходимо чертить или по каким формулам что-то считать, т.е. становится ясно: без математики не обойтись.

На протяжении многих лет дверь кабинета математики всегда открыта. Ребята перестали бояться слова «математика», поверили в то, что можно по-настоящему получить положительную оценку.

На уроки в математическом кабинете приезжали преподаватели города, области, а через некоторое время Институт повышения квалификации стал направлять учителей из других городов страны. Установился контакт с педагогами Германии, Англии, Франции. По существу это была Школа передового опыта, и министерские чиновники прекрасно это пропагандировали, направляя знакомиться с работой преподавания математики сотни педагогов со всей страны.

Очевидно, что приведённая технология мотивации слабоуспевающих по математике ребят к изучению её с большим интересом не является универсальной. Скорее она связана с конкретным педагогом, но она многих ребят может вывести на дорогу познаний, разбудить у них интерес, стремление изучать математику. Для этого необходимо его призвание, желание поиска методов, поддержка общества.

Литература

1. Белова А.Д. Трудно заинтересовать трудных подростков трудной наукой. (В кн. «Мы – математики с Ленинских гор», том 4 «О математике», М., МГУ, 2009) .

МОТИВАЦИЯ В ПОВЫШЕНИИ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Битнер Г.Г.

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева, филиал «Восток»

422981, Россия, г.Чистополь, ул. Энгельса 127-а

89872751675, e-mail: ggbitner@mail.ru

Все субъекты образовательного процесса в высшей профессиональной школе сегодня заинтересованы в качественной подготовке специалиста в обозначенные сроки и с минимальными затратами. С позиций обеспечения качества подготовки не менее важным является внедрение новых подходов к управлению образованием, внедрение новых технологий обучения.

Преподаватель-это специалист своего дела и эффективный менеджер образовательного процесса. Одно из определений менеджмента гласит: «Менеджмент- это умение добиваться целей организации, используя труд, интеллект и мотивы других людей». Главная цель преподавателя - это обучить учащихся сущности и методам своей дисциплины, выработать определенный комплекс представлений и умений, нужное поведение (делать с первого раза и точно в срок), обеспечить мотивацию к совершенствованию (самостоятельная работа).

Мотивация является важным элементом успешности процесса обучения и качества образования. К сожалению, этот фактор плохо учитывается и анализируется. Очевидно, что в большинстве случаев мы имеем студента, слабо мотивированного на изучение математики и, тем более, выполнение в срок всевозможных заданий. Преподавателю, как менеджеру образовательного процесса, необходимо знать основные теории мотивации, способы влияния на людей, их сильные и слабые стороны. Основная цель преподавателя- это вовлечь студента в учебный процесс, а не заставлять его участвовать в нем. Цели должны быть доведены до студента в ясной и четкой форме, а также реальными и достижимыми. Удовлетворенность студента образовательным процессом открывает студента для положительного и эффективного восприятия преподаваемого и изучаемого материала. Поэтому преподаватель должен знать факторы и то поведение, которые повышают их положительное восприятие учебного материала. Есть три группы факторов качества: 1) базовые, 2) ожидаемые, 3) восхищающие. Базовые показатели формируются, главным образом, программой курса и знаниями преподавателя, а ожидаемые и восхищающие формируются личностью преподавателя, умением заинтересовать студента и вовлечь его в процесс обучения.

При невысоком уровне мотивации студента акцент нужно делать не на самостоятельную работу, а, наоборот, на работу в аудитории. Наиболее эффективными следует признать 4-х часовые занятия по математике, позволяющие сконцентрировать внимание студента, соединить теорию и практику, не распылять силы студента и энергию преподавателя. Организация процесса обучения во времени требует планирования и оптимизации. Планирование – это определение процесса достижения целей и времени с использованием определенных технологий.

Познавательная мотивация к изучению математики достигается за счет:

- установление исходного уровня студентов и каждого студента;
- сознательное и планомерное педагогическое воздействие;
- отбор и структурирование содержания обучения;
- наглядного изложения учебного материала;
- проблемного изложения учебного материала;
- выбор сочетания методов, форм организации, средств обучения и самообучения;
- дифференцированного подхода в отношении задач, ставящихся перед студентами в процессе

обучения;

- индивидуализации заданий;
- планирование самостоятельной работы;
- проектирование контролирующих процедур и коррекцию в соответствии с полученными результатами.

Положительной мотивацией, создающей условие успеха является и мотивация профессионального успеха, которая предполагает аргументированное разъяснение значение математики для будущей профессиональной деятельности студентов. Необходимо раскрыть естественнонаучную сущность проблем в их профессиональной сфере. Постоянное развитие многоступенчатого интереса студентов не только к знаниям, но и к самому процессу получения знаний. (И.Ф.Герберт).

Следует отметить, что на этап естественнонаучной подготовки в вузе приходится адаптационный период обучения, который носит черты кризисного, что позволяет рассматривать состояние студента в этот период, как неустойчивое, неравновесное, а значит чувствительное к малым внешним воздействиям. Создание комфортных условий и условий успеха приводит к выводу о возможности за счет тщательно продуманных педагогических воздействий «подтолкнуть» начинающего студента на один из благоприятных путей развития. В вузовской педагогике этот «стартовый эффект» используется явно недостаточно.

Таким образом, мотивы создают установку к действию, а поиск и осмысление целей является показателем зрелости мотивационной сферы.

Разработка методик использования информационных технологий как эффективного механизма повышения мотивации в средних и высших учебных заведениях

Богун В.В.
ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского»
e-mailvvvital@yandex.ru

I. Разработана методика применения графического калькулятора или персонального компьютера в обучении математике для исследования основных объектов теории функций вещественного переменного в рамках лабораторного практикума, при этом графический калькулятор или персональный компьютер рассматривается как средство интеграции математических и информационных знаний при выполнении численных алгоритмов, суть которых заключается в построении и визуализации итерационных процессов, сходящихся к искомому решению. Создано программное обеспечение для реализации и сравнительного анализа численных методов решения математических задач в качестве информационной поддержки для проведении четырех лабораторных работ по исследованию пределов числовых последовательностей, решения алгебраических уравнений, нахождению значений определенных интегралов и решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Методика проведения лабораторных работ:

1. Актуализация знаний и контроль теоретических аспектов и практических навыков по использованию графического калькулятора.
2. Формулировка названия, цели и плана проведения лабораторной работы.
3. Рассмотрение реализации решения математической задачи на показательном примере.
4. Распределение студентов на малые группы (по 3-4 человека) с целью анализа различных вариантов исходных данных.
5. Наглядное моделирование и решение предлагаемой математической задачи с применением трех численных методов на основе интеграции математических и информационных знаний с использованием графического калькулятора.
6. Рефлексия и проведение сравнительного анализа полученных результатов с целью формулирования выводов и проверки гипотез.
7. Оформление лабораторной работы с последующим представлением преподавателю.
8. Презентация результатов.
9. Индивидуальные собеседования или проверочное тестирование.

II. Разработана дистанционная система динамических расчетных проектов для реализации студентами комплексных расчетных проектов на дистанционном уровне. Отличие информационной системы от применяющихся в учебном процессе систем дистанционного обучения заключается в возможности выполнения учащимися полноценных расчетных проектов согласно указываемому в рамках расчетного проекта программному алгоритму, в рамках которых по автоматически генерируемым комбинациям значений исходных данных студентам требуется вручную просчитывать и указывать в соответствующие текстовые поля значения всех необходимых значений промежуточных и итоговых результатов вычислений. В рамках системы реализована возможность многократной проверки вводимых значений расчетных параметров до тех пор, пока не будет казано корректное значение каждого из параметров. Расчетные проекты реализованы по разделам «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и «Численные методы исследования функций вещественного переменного».

Методика реализации учебной деятельности при использовании дистанционной системы динамических расчетных проектов:

1. Преподавателем формулируются необходимые методические и дидактические составляющие учебного процесса с использованием проектной деятельности (описание рассматриваемого курса в рамках учебной дисциплины, список наименований и описание соответствующих расчетных проектов в рамках каждого курса) с последующим отражением данных составляющих в рамках информационной системы.

2. Преподавателем или администратором совместно с преподавателем осуществляется разработка необходимых расчетных алгоритмов и соответствующих программных модулей для реализации решения задача в рамках расчетного проекта с отражением указанных составляющих в рамках информационной системы.

3. Преподавателем и студентами осуществляется генерирование независимых вариантов демо-версий рассматриваемого расчетного проекта для преподавателя и студента с возможностью просмотра демо-версий обоими представителями и администрирования только для одной из сторон. А также осуществляется получение автоматически рассчитанных значений промежуточных и итоговых результатов на основе генерирования значений исходных данных с использованием случайных чисел и сформированного исходного кода программного модуля решения задач проекта.

4. Каждым из студентов в индивидуальном порядке осуществляется генерирование соответствующего варианта расчетного проекта с возможностью просмотра преподавателем значений промежуточных и итоговых результатов (но без возможности редактирования) выполняемым студентом проекта, с возможностью для студента просмотра правильно указанных значений, просмотра и редактирования неправильно указанных ранее значений промежуточных и итоговых результатов на основе генерирования значений исходных данных с использованием случайных чисел и формулируемых условий на основе заданного исходного кода программного модуля решения задачи.

5. Преподавателем и студентами осуществляется мониторинг процесса выполнения студентом каждого расчетного проекта и обсуждение в индивидуальном порядке возникающих вопросов в рамках динамического форума с формированием дальнейшей стратегии реализации текущей проектной деятельности.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 14-26-20004

ПОВЫШЕНИЕ МОТИВАЦИИ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛАХ И ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ

Богун В.В.

В начальной школе информационно-коммуникационные технологии необходимо использовать при обучении математике для повышения наглядности представления учебного материала в силу визуализации процесса решения задач с применением различных цветовых схем и анимации, увеличения количества решаемых задач и повышения интереса и мотивации к обучению, индивидуализации обучения школьников при построении собственных планов учебной деятельности в соответствии с выбором обучаемым решаемых математических задач [1]. На данном этапе применяются обучающие образовательные программные продукты, компоненты пакета Microsoft Office и его аналоги, мультимедийные приложения для различных информационных средств (персональный компьютер, графический калькулятор, мобильные устройства), при этом используются технологии как для локальной работы, так и для реализации взаимодействия удаленных пользователей через локальные и глобальную компьютерную сети [2].

При обучении школьников в рамках средней школы применение информационно-коммуникационных технологий в обучении математике направлено на повышение мотивации к обучению школьников через проведение сравнительного анализа решения рассматриваемых задач при условиях варьировании значений исходных данных, что приводит к увеличению эффективности решаемых задач и глубокому осмыслению природы рассматриваемых математических объектов, то есть на данном этапе у учащихся формируются начальные навыки реализации научно-исследовательской деятельности. На данном этапе использование информационно-коммуникационных технологий подразумевает возможности проведения на начальном уровне математического анализа исследуемых явлений и процессов с использованием наглядного представления информации в менее красочном, но более информационно насыщенном виде без применения сложных комплексных расчетов, поэтому необходимо применение в процессе обучения математике различных компьютерных математических систем и расширенных возможностей иного прикладного программного обеспечения для различных вышеописанных информационных средств.

Реализация обучения математике в вузах подразумевает полноценную реализацию студентами научно-исследовательской деятельности, направленной на глубокое и всестороннее изучение рассматриваемых в учебном процессе математических объектов с применением различных информационно-коммуникационных технологий на пользовательском и программных уровнях. В частности, необходимо рассмотрение применения численных методов для приближенных решений математических задач с проведением сравнительного анализа вычислительных процедур с применением необходимых программных составляющих. Также в рамках вузовского изучения студентами математики целесообразно использовать расчетные проекты, подразумевающие реализацию взаимосвязанных комплексных вычислительных процедур на основе интеграции арифметических и логических операций с целью получения корректных значений определенного количества параметров промежуточных и итоговых результатов на основе комбинации значений исходных данных расчетного проекта [3…5].

При реализации образовательного процесса по математике вне зависимости от типа учебного заведения необходимо решать математические, информационные и личностные дидактические задачи, а в рамках вузов студентам также предлагается для решения прикладные и профессионально-ориентированные задачи для формирования необходимых умений и навыков для успешной реализации будущей профессиональной деятельности.

Дидактическая интегративная система математического и информационного образования студентов вузов с использованием различных средств информатизации должна быть основана на реализации принципа эффективного интегративного взаимодействия математических и информационных знаний на основе информационной насыщенности образовательной среды; принципа оперативного включения различных категорий информационных знаний в решение проблем понимания, коммуникации и освоения математических знаний и на основе имитационного моделирования реальных процессов и явлений; принципа наглядного моделирования математических объектов, реальных процессов и явлений посредством оперативного и интегративного взаимодействия математических и информационных знаний; принципа фундирования и становления личностного опыта студента на основе поэтапного развертывания знаниевых, процедурных и компетентностных структур; принципа реализации исследовательского подхода в формировании творческой активности студентов в процессе освоения математических и информационных структур через призму рефлексивного подхода; принципа реализации дистанционного обучения для решения студентами математических и прикладных задач; принципа реализации учащимися проектной деятельности при решении математических и прикладных задач; принципа объектно-ориентированного подхода для комплексного исследования необходимых математических объектов.

Очевидно, что вне зависимости от типа учебного заведения использование вышеуказанных принципов в процессе обучения математике может различаться как по составляющим каждого из принципов, так и по степени их реализации с точки зрения дидактических и методических составляющих организации учебного процесса.

Таким образом, решение проблем повышения мотивации при обучении математике с применением информационно-коммуникационных технологий напрямую зависит от методик использования различных информационных средств при организации учебного процесса на основе решения необходимых дидактических задач и реализации принципов интеграции математических, информационных и личностных компонентов обучения.

Литература:

1. Маркова А.К. и др. Формирование мотивации учения: Кн. для учителя/А.К. Маркова, Т.А. Матис, А.Б.Орлов. – М.: Просвещение, 1990. – 192 с.
2. Информационные и коммуникационные технологии в образовании: учеб.-метод. пособие / Роберт И.В., Панюкова С.В., Кузнецов А.А., Кривцова А.Ю. – М.: Дрофа, 2008 – 312 с.
3. Богун, В.В. Методика использования графического калькулятора в обучении математике студентов педагогических вузов [Текст]: дис. … канд. пед. наук. – Ярославль, 2006. – 245 с.
4. Богун, В.В., Смирнов, Е.И. Лабораторный практикум по математике с графическим калькулятором [Текст]: учеб. пособие. – Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2010. – 272 с.
5. Богун, В.В., Смирнов, Е.И., Кузнецов, А.А. Проблемы и перспективы реализации единой среды дистанционного обучения студентов педагогических вузов [Текст] / В.В. Богун, Е.И. Смирнов, А.А. Кузнецов // Информатика и образование. – 2010. – 7. – с. 74-82.

ЦЕНТР ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ НА ФАКУЛЬТЕТЕ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК КУБГУ В КОНТЕКСТЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ ШКОЛЬНИКАМИ

Боровик О.Г., Бочаров А.В., Колчанов А.В.

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет»

350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Тел: +79183500875, e-mail:kolchanov.andrei2009@yandex.ru

В настоящее время значение математики в системе человеческих знаний трудно оценить. Математика находится в центре нашей интеллектуальной жизни, а роль интеллектуальной составляющей в мире возрастает и позволяет расширять и обогащать научные знания во многих отраслях, совершенствовать технологии, делать новые открытия. Развитие современных технологий обуславливается уровнем математического образования населения, поскольку математические методы применяются повсюду: в производстве, машиностроении, медицине, физике, механике, химии, геологии, социологии и других науках.

Разумеется, возникает востребованность в специалистах, обладающих обширными фундаментальными математическими знаниями, практическими навыками, владеющими современными информационными и образовательными технологиями.

Происходящие сегодня изменения в общественной жизни повлекли за собой необходимость совершенствования математического образования.

В России принята и реализуется Концепция развития математического образования, которая представляет собой «систему взглядов на базовые принципы, цели, задачи и основные направления развития математического образования в Российской Федерации».

Проблема развития мотивации при изучении математики школьниками занимает, безусловно, одно из первостепенных мест. Как известно, понятие «мотивация» рассматривается в науке, как динамический процесс, побуждающий человека действовать специфическим образом для достижения определенной цели.

В контексте указанной проблемы мотивы можно рассматривать, как многообразные формы работы с учащимися независимо от их текущих успехов в математике. Мотивом для повышения интереса к изучению математики у школьников может быть участие их в работе математических кружков при факультетах вузов, увлекательные и творческие беседы с преподавателями, приобщение к участию в научных студенческих конференциях.

Как показывает анализ, в последнее время имеет место снижение уровня математической подготовки школьников. Это подтверждается следующими факторами. Во-первых, на изучение математических дисциплин отводится значительно меньшее количество часов, что, естественным образом влияет на уровень подготовки школьников. Во-вторых, к сожалению, рейтинг профессии математика, математика-педагога в нашей стране все еще не очень высок, что существенно снижает мотивацию учащихся. В-третьих, введение ЕГЭ нарушило традиционные связи вузов и школ, снизилось до минимума участие вуза в процессе профессионального самоопределения учащихся.

Кроме того, для овладения математическими знаниями необходимы высокие трудозатраты, что требует от школьников максимального внимания, определенных усилий для овладения знаниями, усидчивости, трудолюбия и др.

Одним из важных направлений решения проблемы повышения уровня математической подготовки школьников, привлечения их на математические специальности и направления вузов мы видим эффективную организацию профессионально-математической ориентационной работы, а также системы внешкольного обучения математике и информатике на основе развития технологий, а также очно-дистанционных математических школ. В силу выше сказанного, организация очно-дистанционной математической школы («Малого матфака» воссозданного в КубГУ в 2009 году) на факультете математики и компьютерных наук (ФМ и КН) с целью привлечения к обучению математике и информатике, в том числе, и для углублённого изучения, способствует развитию мотивации у большого числа школьников Краснодарского края.

В первую очередь работа «Малого матфака» ориентирована повышение общей математической подготовки, выявление и развитие математических способностей школьников посредством дополнения и углубления школьного курса математики, а также помогает ученикам определить свое отношение к математике, как к возможной своей будущей профессии, мотивировать школьников к изучению математических дисциплин, развивает интерес к различным математическим соревнованиям.

В структуре «Малого матфака» можно выделить два направления работы. Первое - это подготовка ребят к выпускным экзаменам по математике и информатике. В рамках этого направления раз в две недели ведущими преподавателями факультета проводятся лекции и практические занятия по математике и информатике, а соответствующие версии электронных материалов размещаются на сайте «Малого матфака». При этом по электронной почте слушателям рассылаются учебные задания и методические материалы к очередным занятиям.

Второе направление ориентировано на математические соревнования, поэтому называется «Малый матфак для олимпиадников», в рамках которого осваиваются методы и приемы решения олимпиадных и нестандартных задач.

Обучение школьников ведется по очной форме (занятия по воскресным дням); проведение дистанционного консультирования и практических занятий; ведение работы в замкнутой дистанционной среде с использованием электронных ресурсов, а также кружковой работы с дистанционной поддержкой факультета математики и компьютерных наук Кубанского госуниверситета.

На факультете, в рамках профориентационной работы с потенциальными студентами, проводится кружковая работа. Ведущие ученые, доктора и кандидаты наук занимаются со школьниками вопросами, связанными с математическим моделированием, криптографией и защитой информации, программированием и математическими проблемами обработки изображений и др.

С нашей точки зрения, эта возможность общения учащихся с преподавателями вуза, приобщение их к научным знаниям, играет, несомненно, огромную роль в процессе воспитания у них образовательной грамотности в области точных наук.

«Малый матфак» ставит перед собой цели, не только обеспечивающие повышение качества математического образования учащихся Кубани, но и направленные на создание условий для профессионального и личностного роста каждого участника студенческого педагогического отряда ФМ и КН через организацию обучения и практической работы со старшеклассниками. При этом обучение студентов-математиков технологиям организации профессионально-математической ориентационной работы позволит сформировать у студентов необходимые профессионально-педагогические компетенции.

Способствует развитию мотивации и практическая реализация технологий конструирования специализированных web-ресурсов для обучения школьников и профессионально-математической ориентационной работы (учебно-информационных комплексов), с использованием методик интеграции специализированных интернет ресурсов обучающего типа и информационных групповых страниц в социальных сетях (в контакте).

Следует отметить, что такой подход позволит интегрировать профессиональный потенциал учителей математики на Кубани, профессорско-преподавательский состав КубГУ, а также студентов университета математических направлений подготовки.

С целью изучения мотивационной сферы школьников авторами были изучены методики диагностики уровня учебной мотивации, но основе которых, составлен тест «Диагностика уровня мотивации к изучению математики учащихся средней школы». Данный тест основан на информативности, доступности и емкости. Участникам было предложено ответить на 10 вопросов. Тестирование проводилось в двух группах, первая группа – это учащиеся «Малого матфака», занимающиеся подготовкой к выпускным экзаменам, вторая группа – это учащиеся «Малого матфака для олимпиадников», у которых наблюдается более высокий уровень математических способностей, отличающийся умениями логически мыслить, постигать достаточно глубокий смысл математический утверждений, находить подходы к решению нестандартных математических задач.

На вопрос «Я изучаю материал добросовестно, если...»в среднем по двум группам) (***Диаграмма №1***) 37 % ответили, что материал для них должен быть интересен, 32 % отмечают уровень понимания материала, 23% важна интересная подача материала преподавателем.

Следует отметить, что в работе со старшеклассниками важную роль играет содержательная сторона образования, от этого и будет зависеть уровень интереса к ее изучению. Учебная программа «Малого матфака» приближена к современной науке и отличается балансом трех компонент: фундаментальности, гуманистической ориентации и практической направленности, а в настоящее время фундаментальные знания законов математики являются основой профессионального роста в современном обществе.

Диаграмма №1

Важным аспектом является участие в работе «Малого матфака» студентов. В процессе работы со старшеклассниками формируется единая система – среда взаимодействия – образовательная среда, в которой доминирующие идеи и ценности направлены на развитие творческой, интеллектуально-развитой и инициативной личности. Таким образом, в большей степени формируется и развивается мотивационная сфера каждого учащегося. При этом студентами реализуются следующие виды работ. Выполнение работы по решению практических заданий лектора, выданных в качестве домашнего задания слушателям Малого матфака, затем проведение по этим заданиям консультирования. Проведение практических занятий. Размещение на сайте решений трудных задач. Работа в формате дистанционного консультирования, обработка и обобщение вопросов, полученных в режиме дистанционного консультирования для профессора или доцента, готовящих занятия по определенной тематике. Создание электронного варианта ответов на вопросы, обработанных преподавателем.

После проведения тестирования учащихся при помощи педагогической диагностики были сделаны следующие выводы (Таблица №1). В среднем у 29% учащихся «Малого матфака» наблюдается высокий уровень сформированности мотивации к изучению математики, это обуславливается проявлением у учащегося устойчивого интереса к ее изучению, осознанностью необходимости получения и совершенствования данных умений и навыков, их применению. Наблюдается увеличение числа учащихся с высоким уровнем мотивации, что говорит о формировании положительных мотивационных установок в данной образовательной среде. Отметим, что у первой группы процент сформированности высокого уровня ниже, чем у второй группы на 16%, это говорит о разном уровне направленности образовательной среды, при этом важную роль играет увлеченность математикой, более глубокое знание предмета, продуктивность работы, а также способность учащихся к самостоятельным исследованиям.

62,5% учащихся показывают средний уровень сформированности мотивационной составляющей, свидетельствующий о том, что старшеклассник положительно относится к изучению математики, но конкретные учебные цели не осознаются, при этом уровень познавательной активности средний, сосредоточен по интересу, но требует контроля со стороны.

В свою очередь низкий уровень мотивации отличается отсутствием интереса к изучению математики, что может быть обусловлено требованием времени и достижением желаемого блага, а именно текущей подготовкой к выпускным экзаменам, так как впоследствии выбранная профессия не предполагает углубленного изучения математики, в этом случае происходит так называемое «натаскивание» на определенные классы задач. При этом учащийся прикладывает нередко значительные усилия для овладения знаниями, это связано лишь с побуждениями, позволяющими решить проблемы обеспечения личного благополучия. Таких учащихся на «Малом матфаке» наблюдается в среднем всего13,5%. Низкий процент обуславливается содержательной стороной учебной программы подразделения, которая направлена в большей мере на среднего ученика.

Таблица №1

Группа	Общее кол-во учащихся	Уровень мотивации к изучению математики		
		Высокий	Средний	Низкий
№1	113	21%	66%	23%
№2	92	37%	59%	4%
Средний результат		29%	62,5%	13,5%

Многолетний опыт работы факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета со старшеклассниками в целом отвечает требованиям общества к математическому образованию и развитию мотивации учащихся к изучению математики.

Здесь уместно отметить достаточно большой процент абитуриентов, проходивших обучение в учебном подразделении «Малый матфак» и ставших студентами факультета математики и компьютерных наук.

Таблица №2

Год	2011	2012	2013	2014
Количество поступивших, обучавшихся на "Малом матфаке"	46	36	32	30
Количество бюджетных мест	90	103	96	85
Процент поступивших, обучавшихся на "Малом матфаке"	51%	35%	33%	35%

При этом значительно выросла успеваемость студентов на факультете, а также с каждым следующим годом увеличивались баллы ЕГЭ по математике и информатике обучавшихся на «Малом Матфаке» и поступивших к нам.

Роль математического образования в мире возрастает с каждым годом, так как возрастает потребность в высококвалифицированных специалистах высокотехнологичных отраслей производства, в основе которых лежит знание фундаментальных математических законов.

На наш взгляд, использование таких форм работы со школьниками, как «Малый матфак», оказывает действие на усиление мотивационной сферы учащихся и имеет положительное влияние на уровень математического образования в регионе. Считаем целесообразным применение и распространение такого опыта работы со старшеклассниками.

Формирование у школьников мотивации к изучению математики и информатики и ИТК на достаточном уровне дает им возможность в будущем заниматься научными исследованиями с использованием математического аппарата. Способствует успешному обучению в вузе в дальнейшем, поднятию уровня образования по математическим дисциплинам у школьников образовательных учреждений Кубани и республики Адыгея для сдачи ими ЕГЭ на высокие баллы.

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Bocharov A.V., Grushevsky S.P., Kolchanov A.V. «*Experience of educational department «Maly mathematical faculty»* // Proceedings of the 1st European Conference on Education and Applied Psychology. «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH. Vienna. 2014. P. 220-221.

2. Грушевский С.П., Колчанов А.В., Лазарев В.А., Сергеев Э.А. *«К истории развития юношеских математических школ и мотивации изучения математики школьниками»* // Труды Международной научной конференции 24-29 марта, г. Цахкадзор, том 1: «Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство», г. Цахкадзор, 2014. – С. 536-537.

3. Грушевский С.П. *«О работе факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета по профессионально-математической ориентации школьников»* // Историческая и социально-образовательная мысль. 2012. № 3. 105-118 (0,65 п.л.).

4. Аронова Е.Ю., Бочаров А.В., Грушевский С.П. *«Построение процесса профессионального самоопределения старшеклассников в открытом образовательном пространстве вуза»* //Теория и практика общественного развития [Электронный ресурс]: электронный научный журнал. Режим доступа: http://teoria-practica.ru. Дата обращения: 16.12.2011.-№7 2011.

ЗАЧЕМ УЧИТЬ ФИЗИКУ И МАТЕМАТИКУ В ШКОЛЕ?

Бычков С.Н.

ГАОУ ВПО Московский институт открытого образования

119034, Москва, Пречистенский пер., дом 7а
Тел. 89164057405, e-mail: bytc@mail.ru

Недостаток мотивации при изучении математики и естественных наук – проблема не одного только российского образования. Причину кризиса, охватившего физико-математические науки, С.П. Новиков видит в упадке традиционного математического образования: «Уже в 60-х гг. в СССР и на Западе стала нарастать резкая общественная критика трудности школьных математических программ, стали сокращать число экзаменов. Вероятно, это было связано с тем, что все 10–11 лет обучения стали общеобязательными... Так или иначе, общество потребовало сокращения и упорядочения... Начался процесс постепенного падения уровня» [1, с. 354]. Это или что-то другое оказало столь пагубное влияние на обучение физико-математическим дисциплинам – сегодня не особенно важно. Существенны причины, в силу которых не следует ожидать легкого решения накопившихся проблем.

Начнем с физики. Теория электромагнетизма и квантовая механика лежат в фундаменте современной техники. Новые применения этих фундаментальных физических теорий не требуют пересмотра их основоположений. Трудности при строительстве новой гидроэлектростанции или атомной электростанции связаны сегодня не с физикой, а с экономикой или экологией. Соответственно, творческий момент в инженерных проектах связан именно с этими науками. О том, что *создание* теорий электромагнитного поля и атомного ядра когда-то потребовало настоящей революции в образе физического мышления, сегодня – с технической точки зрения – можно и не вспоминать.

Аналогично обстоит дело и с применением математики. Разработка атомного оружия в 40-х гг. XX в. требовала огромных расчетов, что дало мощный толчок созданию новой вычислительной техники. Математический фундамент этой техники (работы Тьюринга, Поста, Черча) к тому времени в значительной мере уже был создан, а идеи фон Неймана, появившиеся в ходе проводившихся разработок, привели к окончательному архитектурному оформлению новой техники. Идеи теории алгоритмов были революционными по отношению к «континуальной» математике XIX в., однако в XXI в. они превратились в «обыденную реальность», став привычным арсеналом специалистов в области математики и информатики.

Что же получается? Для будущих инженеров и информатиков физика и математика – основа их будущей деятельности (в том числе и по добыванию хлеба насущного). Для них нет проблемы мотивации при изучении соответствующих предметов в средней и высшей школе (подобным образом обстоит дело для любого школьника, выбравшего углубленный уровень изучения некоторой – естественнонаучной или гуманитарной – дисциплины). А как быть, если учащийся знает, что для его будущей профессии физика или математика не представляют первостепенного значения? (Слова о возможной важности этих наук для будущего развития «его профессии» вряд ли положительно скажутся на мотивации, поскольку на данный момент не ясно, какие именно разделы могут оказаться полезными завтра, а учить все подряд сегодня на случай, если что-то вдруг понадобится завтра, убедить себя трудно: ведь вероятен и вариант, когда ничего из выученного в будущей работе по профессии не окажется востребованным.)

Итак, для одних «прагматически-профессиональный подход» снимает с мотивацией все проблемы, а для других тот же самый подход приводит к прямо противоположному: нежеланию прикладывать серьезные усилия для овладения идеями физики и математики.

Неразрешимость проблемы мотивации при изучении математики и естественных наук в рамках описанного прагматического подхода свидетельствует о том, что на базовом уровне в основу школьного преподавания должен быть положен совершенно иной принцип. И на это (применительно к математике) уже достаточно давно указал Н.Х. Розов. По его убеждению, для учащихся, не предполагающих посвятить жизнь математике, естествознанию или технике, важно понимание концептуальных моментов математической теории (а это не предполагает выработку технических навыков математических исчислений) и действия математических законов в окружающем мире, применение их для научного объяснения явлений [2, с. 60].

В этом, видимо, и заключается единственно возможный подход к решению проблемы повышения мотивации к изучению математики и естественных наук в современном обществе: «учить затем, чтобы понимать». Дело за «малым»: за конкретизацией этих общих идей применительно к отдельным разделам соответствующих учебных дисциплин. Реальная сложность заключается в том, что философия науки, которая изначально ставила перед собой именно такие общие задачи, на сегодняшний день так и не получила на них удовлетворительного ответа. И решать их сегодня приходится исходя не из мотиваций «высокой» науки, а из потребностей «приземленной» педагогики.

Литература

1. Новиков С.П. Вторая половина XX века и ее итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе // Историко-математические исследования. Сер. 2. – 2002. – Вып. 7 (42). – С. 326–356.
2. *Розов Н.Х.* Гуманитарная математика // Математика в высшем образовании. – 2003. – № 1. – С. 53–62.

Создание комплекса учебников и учебных пособий по математике для вузов экономического профиля как важнейшее направление реализации принципа профессионально-прикладной направленности учебного процесса по математике

П.С. Геворкян, С.А. Розанова

Академия труда и социальных отношений

srozanova@mail.ru

Одним из важнейших педагогических принципов является оптимальное сочетание фундаментальности и профессионально-прикладной направленности учебного процесса по математике. Особенно актуальна реализация этого принципа в учебных процессах вузов, для специальностей и направлений: экономических, инженерно-технических и естественнонаучных.

Двумя членами НМС по математике Министерства образования и науки РФ П.С. Геворкяном и В.Л. Клюшиным разработан комплекс учебных пособий (курс лекций и сборник задач), охватывающий все разделы математики, необходимые для всех специальностей в области экономики и управления, техники и технологии. Этот комплекс был прорецензирован экспертами математиками-педагогами и ему был присвоен гриф НМС по математике Министерства образования и науки РФ. К достоинствам этого комплекса следует отнести полноту, строгость, ясность и доступность изложения математического материала. Учитывая, что эти книги были написаны для нематематических специальностей, был реализован принцип «разумной строгости» и «неформальной строгости», введение профессионально-прикладной составляющей ([1]стр.72). В связи с этим в книги были включены многочисленные приложения высшей математики в экономике. Они охватывают важнейшие понятия и разделы математической экономики и финансовой математики (балансовые модели, производственные функции, предельный анализ и т. д.). Кроме того, где это возможно, раскрывается экономический смысл математических понятий (например, производной, интеграла, частных производных и др.). Приводятся математические формулировки ряда экономических законов(закон убывающей доходности, закон оптимального объема выпуска и издержек производства, закон максимализации прибыли, критерий сбалансированности международной торговли и др.).

Все эти приложения доступны студентам младших курсов и не требуют дополнительных экономических знаний. С учебниками непосредственно связаны «Сборники задач по высшей математике для экономистов». В них специально выделены параграфы, содержащие многочисленные экономические задачи. Задачи тщательно подобраны в порядке возрастания их трудности.

Введение таких профессионально-прикладных аспектов в учебники и учебные пособия формируют и профессиональную и математическую мотивации.

В 2014 году авторы этого комплекса стали лауреатами премии Правительства РФ в области образования.

Литература

1.С.А. Розанова «Математическая культура студентов технических университетов», М. Физматлит, 2003г.

2.В.Л.Клюшин «Высшая математика для экономистов» ,«ИНФРА-М», 2011г.
3. В.Л. Клюшин ««Высшая математика для экономистов: задачи, тесты, упражнения», ,«ИНФРА-М», 2010г
4. П.С. Геворкян «Высшая математика. Основы математического анализа» , 2-ое изд.«Физматлит», 2013 г.
5. П.С. Геворкян «Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия», »,«Физматлит», 2007 г.
6. П.С. Геворкян «Высшая математика. Интегралы, ряды, ТФКП, дифференциальные уравнения»,«Физматлит», 2007 г.

СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК ФАКТОР РАЗВИТИЯ МОТИВАЦИИ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Дворяткина С.Н., Мельников Р.А.

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

399740, Елец, ул. Коммунаров, д. 28

Тел.: 89155510955, e-mail: sobdvor@yelets.lipetsk.ru; roman_elets_08@mail.ru

В последние годы усилилось понимание педагогами и психологами роли положительной мотивации к учению в обеспечении успешного овладения знаниями и умениями. Осознание высокой значимости мотива учения привело к формированию дидактического принципа мотивационного обеспечения учебного процесса. Исследователями была установлена корреляция между силой мотива в процессе обучения и успешностью проявления учебной деятельности, ее эффективностью, а также степенью освоения выбранной специальности студентами [1]. Выявлено, что высокая позитивная мотивация играет роль компенсирующего фактора в случае недостаточно высоких способностей; в обратном направлении этот принцип не срабатывает. Таким образом, для успешной учебы наличие фактора позитивной мотивации оказывается сильнее, чем фактор интеллекта.

Однако достаточно сложно выделить один ведущий мотив в учебной деятельности. Ряд исследователей в качестве основополагающих мотивов выделяют профессиональные и личного престижа (А.Н. Печников, Г.А. Мухина), другие прагматические (Ф.М. Рахматулина), третьи познавательные (В.М. Дамиров). Доказано, что на разных курсах роль доминирующих мотивов может меняться. Следовательно, мотивацию будем рассматривать со структурных позиций, как некую совокупность мотивов. Согласно схеме В.Д. Шадрикова [2], мотивация обусловлена потребностями и целями личности, уровнем притязаний и идеалами, условиями деятельности и мировоззрением, убеждениями и направленностью личности. С учетом этих факторов происходит принятие решения, формирование намерения. Поэтому следует говорить о полимотивированном характере учебной деятельности, предполагающей наличие иерархии побудительных оснований с точки зрения влияния на конечный результат. Парадоксально, что побудительной силы внешних мотиваторов может быть достаточно для достижения высоких результатов в учении, но хорошее знание учебного предмета еще не означает, что познавательные мотивы сформированы.

Поскольку в рамках деятельностной парадигмы всякое действие может быть описано на двух уровнях его организации – субъективном и объективном, то исследование мотивации организуется по схеме «двойной стимуляции», например, наличие двух целей – вещественной и познавательной (по А.Н. Леонтьеву), или двух типов задач – объектно-ориентированных и субъектно-ориентированных (по В.А. Петровскому), или двух видов мотивов – объектной и субъектной ориентации (по А.М. Матушкину).

В связи с вышеизложенным считаем, что ведущими мотивами учебной деятельности у студентов являются следующие группы: внешние мотивы, удовлетворяющие задаче социальной адаптации личности (жизнеобеспечения, комфорта, социального статуса) и внутренние мотивы, решающие задачи личностного развития (общей активности, творческой активности, социальной полезности) [3]. В педагогической практике различие в мотивации обнаруживается в отношении обучаемых к различным проверочным работам: на оценку или для установления личностной самооценки. Очевидно, что вопрос выбора содержания учебного материала на этапе оценки учебной деятельности для установления доминирующего мотива представляется наиболее важным и интересным.

Одним из основных направлений современной психологии развития является операционализация философского принципа М.К. Мармадашвилли о том, что развитие осуществляется в ситуации невозможности. Поэтому необходимы специальные средства и механизмы, обеспечивающие понимание, объективацию и описание феноменов развития [4]. В этом аспекте любая проблемная ситуация, с которой сталкивается обучающийся, не только несет в себе потенциал для него в виде «зоны ближайшего развития», но и обеспечивает вероятность проявления потенциальных возможностей для себя, развития объективной мотивации учебной деятельности. Действия с операторами в пределах заданной неопределенности математической задачи, с одной стороны моделируют ситуацию развития, с другой – объективизируют отдельные составляющие процесса развития (мышления, памяти и др.) в виде деятельностного преодоления субъектом различных ограничений.

Избыточность познавательной или личностной активности проявляется в поиске (или выборе из возможных вариантов) оптимального решения. В математической науке установлено, что каждое событие должно быть оценено более чем одним способом, поэтому от обучаемых следует требовать многовариантного решения проблем. Использование в процессе обучения задач, допускающих несколько решений, направлено на активизацию мыслительной деятельности, интеллектуальной инициативы, способности самостоятельно добывать знания, используя потенциал математики; стимулирует личностное развитие и приводит к аккумулированию профессионального мастерства.

Приведем пример задания, имеющего многовариантное решение: найти решение задачи Коши $y''(x)+ay'(x)+by(x)=f(x),\ y(0)=y_0, y'(0)=y_1$.

Для решения уравнения такого вида можно использовать следующие методы:

1) опираясь на теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, применить метод неопределенных коэффициентов;
2) использовать метод вариации констант;
3) применить операционный метод: найти изображение искомой функции (по Лапласу), восстановить оригинал методом неопределенных коэффициентов;
4) применить операционный метод: заменить правую часть уравнения δ– функцией Дирака, получить изображение, воспользоваться формулой Дюамеля;
5) исходя из формулы Коши многократного интегрирования функции, преобразовать данное дифференциальное уравнение в интегральное уравнение Вольтерры второго рода, решить полученное уравнение любым из известных способов (выбор способа зависит от формы ядра).

Учитывая, что одним из ключевых условий, влияющим на формирование у студентов положительного отношения к учебе, в частности, на изучение математики, является организация контроля и оценки учебной деятельности, то использование задач, имеющих многовариантное решение, представляется вполне оправданным и перспективным, что может быть реализовано, например, в семестровом задании. Разработка подобных заданий удачно встраивается в бально-рейтинговую систему оценки учебной деятельности студентов. За решение подобной задачи может применяться повышающий коэффициент (т.е. «базовый балл» за решение задачи одним способом умножается на коэффициент, численно равный количеству правильно приведенных решений). Предлагаемый подход будет полезен для разработки современных учебно-методических комплексов и рабочих программ.

Литература

1. Гребенюк, О.С. Основы педагогики индивидуальности: учебное пособие / О.С. Гребенюк, Т.Б. Гребенюк. – Калининград: Янтарный сказ, 2000. – 572с.
2. Шадриков, В.Д. Введение в психологию: мотивация поведения.- М.: Логос, 2001. – 136 с.
3. Дворяткина, С.Н. Развитие вероятностного стиля мышления в процессе обучения математике: теория и практика/С.Н. Дворяткина. – М.: ИНФРА-М,2013.-272 с.
4. Эльконин, Д..В. Введение в психологию развития (в традиции культурно-исторической теории Л.С. Выгодского). – М.: Тривола, 1994. – 168 с.

ПОДГОТОВКА ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ В ОБЛАСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВОЗОБНОВЛЯЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ МАГИСТРАТУРУ

Ершина А.К., Копенбаева А.С., Манатбаев Р.К.

Казахский государственный женский педагогический университет

050000, Алматы, ул. Айтеке би, 99

Тел.: +7 (727) 2781029, e-mail: ainakul82@mail.ru, akon_8080@mail.ru

Резюме:

Казахстан по своему географическому положению находится в ветровом поясе северного полушария. В ряде районов Казахстана среднегодовая скорость ветра составляет более 6 м/с. В этой связи Казахстан рассматривается как одна из наиболее подходящих стран мира для использования ветроэнергетики. По экспертным оценкам, ветроэнергетический потенциал Казахстана оценивается как 1820 млрд. кВтч электроэнергии в год. Хорошие ветровые районы имеются в центральной части Казахстана, в Прикаспии, а также в ряде мест на Юге, Юго-Востоке и Юго-Западе Казахстана. Исследования ветроэнергетического потенциала в ряде мест по территории Казахстана, проведенные в рамках проекта Программы развития ООН по ветроэнергетике, показывают наличие хорошего ветрового климата и условий для строительства ВЭС на территории Казахстана. Наличие свободного пространства позволяют развивать мощности ВЭС до тысяч МВт. Исследования распределения ветроэнергетического потенциала по территории Казахстана должны быть продолжены с целью определения перспективных площадок для строительства ВЭС.

В связи с дальнейшим ростом доли возобновляемых источников энергии в энергетике увеличивается потребность в кадрах по использованию ВИЭ. В статье рассматриваются пути подготовки инженеров и квалифицированных кадров по нетрадиционной энергетике в Казахстане.

Ключевые слова: возобновляемые источники энергии, Послание Президента, Национальная Программа развития ветроэнергетики, Киотский протокол, подготовка преподавателей и специалистов.

Введение

В соответствии с Посланием Президента Республики Казахстан Н.А. Назарбаева народу Казахстана актуальными становятся вопросы использования энергоэффективности в экономике. В особенности Президент делает акцент на необходимость концентрации усилий на внедрении энергосберегающих и экологически чистых технологий. Казахстан обладает значительными возможностями поэтапной переориентации энергетики на использование возобновляемых источников. В настоящее время доля ВИЭ в Казахстане составляет менее 1%, от общей выработки энергии, исключая ГЭС.

Одной из ключевых стратегических задач, обозначенных Президентом РК в своем Послании, стоит вхождение республики в число 30-ти наиболее конкурентоспособных стран мира. Обязательным условием включения страны в данный список является соблюдение экологических норм, а также преимущественно использование тепловой и электрической энергии, производимой из альтернативных источников энергии. В данном направлении уже предприняты конкретные шаги: подписан Киотский протокол, основанный на международном сотрудничестве в области сокращения выбросов углекислого газа в атмосферу, помимо этого наблюдается постепенное применение со стороны контролирующих органов государства экономических санкций в отношении промышленных предприятий, деятельность которых не соответствует экологическому законодательству Республики Казахстан.

На сегодняшний день государственная политика в области альтернативной энергетики и нетрадиционных возобновляемых источников отражена в Законах «О поддержке использования возобновляемых источников энергии», «Об электроэнергетике» и «Об энергосбережении», а также в Стратегии индустриально-инновационного развития РК до 2015гг. и Концепции перехода Республики Казахстан к устойчивому развитию на период 2007-2024 гг. [1,2].

В 2003 году важным документом, подготовленным в рамках выполнения международных обязательств, взятых Казахстаном в соответствии с Рамочной Конвенцией ООН об изменении климата, стало постановление «О развитие ветроэнергетики». Также правительство Казахстана одобрило проектное предложение Программы развития ООН (ПРООН) «Ускоренное развитие ветроэнергетики в Казахстане».

Кроме того, Министерство охраны окружающей среды РК разработал документ «Стратегия эффективного использования энергии и возобновляемых ресурсов РК в целях устойчивого развития до 2024 года». Концепция Стратегии предусматривает реализацию следующих этапов [2]:

1. 2008 – 2009 гг. подготовку условий для эффективного использования ВИЭ, обобщение и систематизацию наилучшего международного опыта, разработку и усовершенствование законодательной базы, создание предпосылок для стимулирования государством эффективного использования ресурсов и энергии;
2. 2010 – 2012 гг. – внедрение государственных мер стимулирования использования ВИЭ, технологий энерго- и ресурсосбережения, проведение исследований и разработку программных документов, содействующих повышению эффективности системы подготовки и переподготовки кадров, трансферт технологий путем участия в деятельности предприятий, привлечения инвестиций и «ноу-хау»;
3. 2013 – 2018 гг. – проведение пилотных проектов во всех регионах Казахстана, развитие интегрированных энергетических систем, снижение доли теплоэнергетики, дальнейшее проведение научных исследований и технологий в области энерго- и ресурсосбережения;
4. 2019 – 2024 гг. – формирование отраслей на базе ВИЭ, повсеместное распространение позитивного опыта, в том числе и в странах Центральноазиатского региона, переход к «прорывным» энергетическим технологиям.

Состояние развития ветроэнергетики в мире

На основании отчета о развитии мировой ветроэнергетической отрасли за 2012 год, подготовленной Всемирной ветроэнергетической ассоциацией (World Wind Energy Association - WWEA) [3,4] следует, что: мощность мировой ветроэнергетической отрасли в 2012 году достигла 282275 МВт, из которых 44609 МВт были добавлены в 2012 году, что превышает показатели предыдущих лет.

Все ветротурбины, установленные в мире на конец 2012 года, ежегодно могут вырабатывать 580 ТВт часов электроэнергии, что соответствует более чем 3% от мирового энергопотребления. Товарооборот ветроэнергетического сектора в 2012 году составил 60 млрд. Евро / 75 млрд. долларов США. В целом 100 стран и регионов мира использовали энергию ветра для производства электроэнергии. Казахстан стал восемьдесят первой страной мира, использующей ветроэнергетические технологий мощностью 2 МВт в 2012 году [4].

По отчету Всемирной ветроэнергетической ассоциаций (World Wind Energy Association - WWEA) [3,4] обе страны, и Китай и США, ввели в эксплуатацию за год почти по 13 ГВт новых ветроэнергетических мощностей. Если рассматривать по континентам: на долю Азиатского континента приходится наибольшая доля новых ветроэнергетических мощностей введенных за 2012 год – 36,3 %; далее следуют Северная Америка – 31,3 % и Европа – 27,5%; на долю Южной Америки приходится 3,9 %, и на долю Австралии/Океании - 0,8%.

Всемирная ветроэнергетическая ассоциация (World Wind Energy Association - WWEA) [3,4] прогнозирует, что общая установленная мощность мировой ветроэнергетики достигнет

500 ГВт к 2015 году и возможно около 1000 ГВт к 2020 году. На рис. 1 приведены установленные мощности ВЭУ в мире.

К концу 2011 г. на рынок вышли более 330 производителей малых ветротурбин работающие в 40 странах на всех континентах, при этом приблизительно еще 300 компаний производят оборудование для сектора малой ветроэнергетики. Большинство из этих производителей являются представителями малого и среднего бизнеса. Больше половины этих компаний расположены только в пяти странах, а именно: в Китае, США, а также в Германии, Канаде и Великобритании.

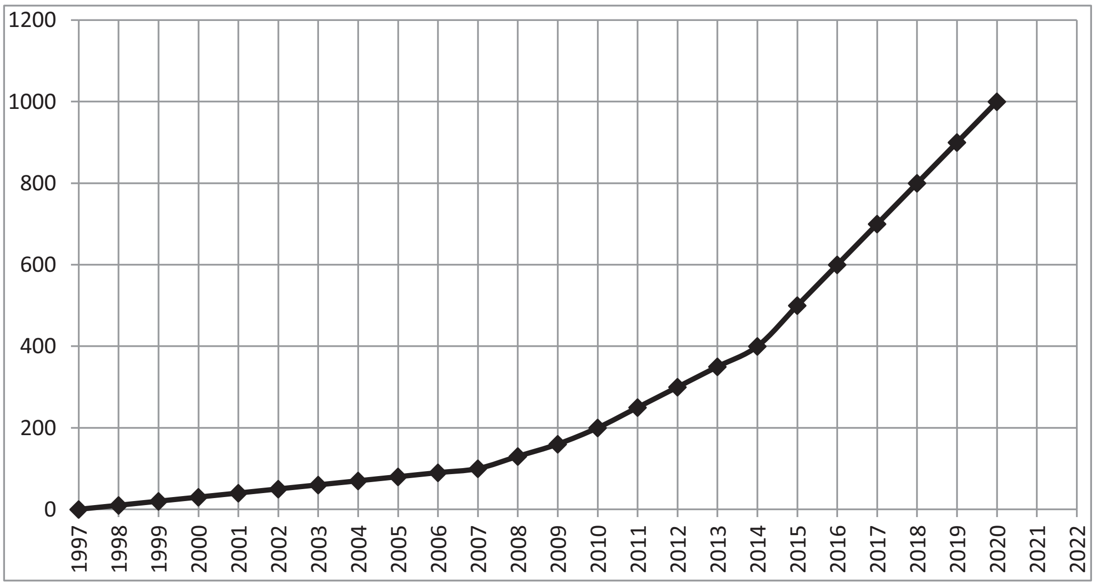


Рисунок 1 - Установленные ветроэнергетические мощности в мире 1997 - 2013гг. и прогноз до 2020

Общая установленная мощность малой ветроэнергетики по всему миру достигло 443,3 МВт по состоянию на конец 2010 года [3].

Глобальное распределение производителей малой ветроэнергетики показаны на 2 рисунке [3].

Ветроустановки изготавливаются мощностью от нескольких ватт до нескольких мегаватт. За рубежом существует классификация ВЭУ основные параметры, которых приведены в таблице 1.

Ветроэнергетика в зависимости от установленной мощности разделяется на 2 категории, одну мегаваттных называют большой ветроэнергетикой, а вторую киловаттной мощностей именуют малой ветроэнергетикой.

Существует большое разнообразие ветроэнергетических установок по конструкциям и мощностям. Совершенствуя в основном трехлопастные пропеллерные ветроагрегаты удалось индустриально высоко развитым странам как США, Германия, Дания, Канада и др. довести установленную мощность таких агрегатов до нескольких мегаватт. Вместе с тем многие фирмы в зависимости от спроса изготавливают также маломощные аппараты.

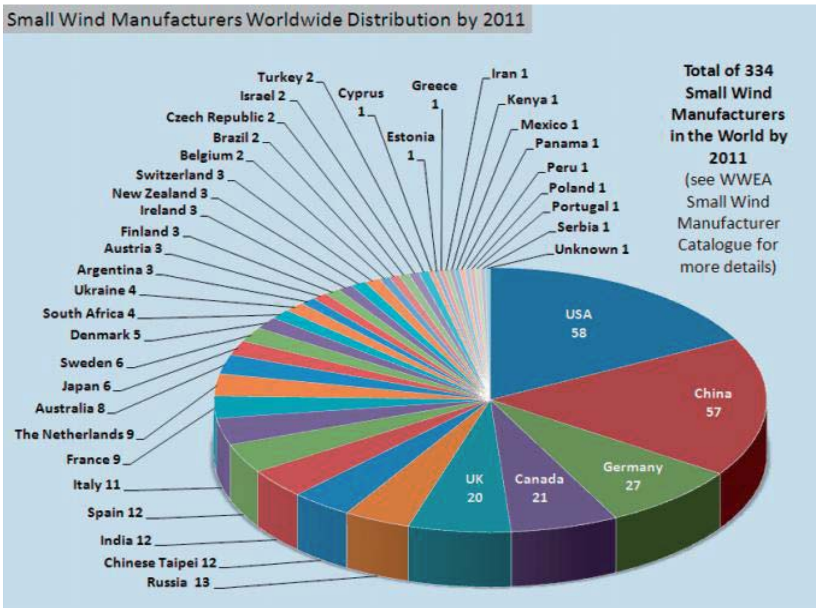


Рисунок 2 - Глобальное распределение малой энергетики

Таблица 1- Классификация ветроустановок [5]

Класс ВЭУ	Диапазон мощностей, кВт	Диапазон диаметров ветроколеса, м	Диапазон скоростей вращения ветроколеса, об/мин
Очень малые	0.025-1	0,5-2,5	500-2000
	1,5-10	3,0-9,0	200-500
Малые	20-60	10-15	92-140
	75-150	18-24	40-60
Средние	200-300	26-30	40
	400-500	35-40	30-35
Большие	600-750	43-48	30
	900-1300	50-64	20-32
Очень большие	1500-3000	70-90	15-20
	4000-6000	105-124	13-15

Исторически сложилось прямое соединение вала вращения ветротурбины с генератором. С ростом веса электрогенератора повышаются требования к конструкции опоры. Это потребовало усилить опорную башню поддерживающую гондолу на определенной высоте от уровня земли, в основном выше приземного пограничного слоя. Ввиду того, что обычно ветры порывистые, происходит раскачивание ветроагрегата в целом. При этом наибольшее раскачивание происходит тяжеловесной гондолы. В результате, если башня недостаточно прочная при сильных порывах ветра происходят аварийные ситуации из-за поломки ствола башни. Это связано с неуравновешенностью ВЭУ из-за прямого горизонтального соединения вала турбины с тяжелым генератором на большой высоте.

Хочется также заметить, что пропеллерные турбины создают высокую турбулентность, из-за отрывного течения на лопастях пропеллерного типа (см. фото на рис. 3). Такая ситуация приводит к большому шуму в широком диапазоне частот. В результате мелкие зверьки и птицы покидают свои обжитые места вокруг ветроагрегата пропеллерного типа. Эти аппараты устанавливаются подальше от населенных пунктов.

В отличие от пропеллерных ВЭУ ветротурбины карусельного типа хорошо обтекаемые (см. рис. 4), практический не создают заметного турбулентного следа и могут быть расположены в любом месте даже в близи потребителей, ибо электрогенераторы обычно располагаются на уровне земли. Все эти достоинства достаточно подробно описаны в различных публикациях [6-16] в результате всестороннего изучения конструктивных версии вертикально-осевых крыловых ветротурбин. Перечислим перспективность ВЭУ карусельного типа: а) вследствие вертикально-осевого вращения турбины направление ветра не играет роли; б) электрогенератор и другое оборудование расположены на уровне земли, что облегчает конструкцию машины большой мощности, профилактику, техническое обслуживание и ремонт; в) имеет высокий коэффициент использования энергии ветра (ξ=0,45); г) в отличие от пропеллерных, которые создают после себя высокую турбулентность, связанных с отрывными обтеканиями каждой лопасти, что приводит к гнездованию птиц подальше от ветроустановки и переселению мелких грызунов, у ВЭУ карусельного типа течение безотрывное, соответственно бесшумное; д) в отличие от пропеллерной ветротурбины технология изготовления симметричных крыловых профилей для рабочих лопастей ВЭУ карусельного типа намного проще.

Рисунок 3 - Турбулентный след за ВЭУ пропеллерного типа

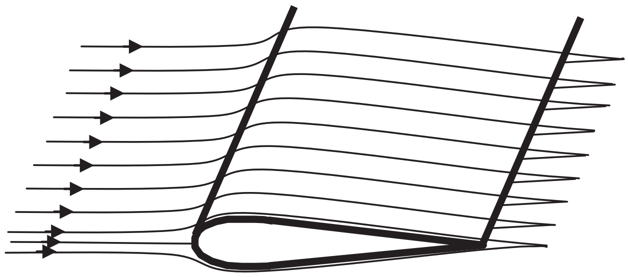


Рисунок 4 - Схема безотрывного обтекания симметричного крылового профиля NASA

Строительства ВЭС в Казахстане: По экспертным оценкам [17] потенциал возобновляемых энергетических ресурсов (гидроэнергия, ветровая и солнечная энергия) в Казахстане весьма значителен и оценивается величиной свыше 1 трлн. кВт · час/год.

Совместно с Министерством энергетики и минеральных ресурсов РК и ПРООН разработана Национальная Программа развития ветроэнергетики [18], в рамках которой приблизительно определены индикативные цифры установки мощностей ветростанций на период 2010-2024 гг. По предварительным данным установленная мощность ветроэлектрических станций (ВЭС) к 2024 г. может составлять порядка 2000 МВт.

Перечень исследованных площадок для строительства ветроэлектростанций (ВЭС) в результате исследования ПРООН в Казахстане приведены [18] в таблице 2.

Таблица 2. Перечень исследованных площадок для строительства ВЭС

(По данным метеоисследований ПРООН) № п/п	Наименование площадки	Область	Скорость ветра на выс. 50 м	Предполагаемая мощность ВЭС
1	Джунгарские ворота	Алматинская область	9,7	50 МВт
2	Шелекский коридор	Алматинская область	7,7	100 МВт
3	Кордай	Жамбыльская	6,1	10-20 МВт
4	Жузымдык- Чаян	ЮКО	6,7	10-20 МВт
5	Астана	Акмолинская	6,8	20 МВт
6	Ерейментау	Акмолинская	7,3	50 МВт
7	Каркаралинск	Карагандинская	6,1	10-20 МВт
8	Аркалык	Костанайская	6,2	10-20 МВт
9	Атырау	Атырауская	6,8	100 Мвт
10	Форт-Шевченко	Мангыстауская	7,5	50 МВт

О состоянии использования ветроэнергетики в Казахстане

В 1999 г. Республика Казахстан присоединился к рамочной Конвенции ООН по изменению климата, в марте 2009 г. ратифицировала Киотский протокол. 4 июля 2009 г. был принят Закон «О поддержке использования возобновляемых источников энергии» подписанный президентом Республики Казахстан [1,2].

В настоящее время доля ВИЭ в Казахстане составляет менее 1%, от общей выработки энергии, исключая ГЭС, причем в основном зарубежного производства.

Прогнозируется дальнейший рост доли возобновляемых источников энергии. Думается, что появление закона по использованию ВИЭ, ускорит развитие альтернативной энергетики.

Углубленное изучение проблем использования энергии ветра в Казахстане началось в последние 15-20 лет работами: Ш.А.Ершина (КазНУим.аль-Фараби г.Алматы), А.В.Болотова (АИЭС, г.Алматы) Н.С.Буктукова (г.Алматы), Х.Ж.Байшагирова (НПО-ВЭУД г.Кокчетав), О.Баялиева (ИП «Инновационное бюро Баялиева» г.Алматы), А.К.Кусаинова (Азиямонтажинжиниринг, г.Алматы), М.М.Майлибаева (г.Алматы), Г.Б.Нурпеисовой (КазНИИ механизации и электрификации сельского хозяйства) и др. при недостаточной финансовой поддержке правительственных органов и ПРООН.

В стране в основном отдельными энтузиастами разрабатываются разные виды малых ветроустановок (МВЭУ) как с вертикальными, так и с горизонтальными осями вращения. К первой группе относятся разработки академика НАН РК Ершина Ш.А., академика НИА Болотова А.В., д.т.н. Буктукова С.Н. и др. Ко второй группе относятся опытные образцы д.т.н. Камбарова М.Н., д.т.н. Байшагирова Х.Ж., д.т.н. Петрова В., д.ф.-м.н. Кусаинова К.К., к.ф.-м.н. Жилкашиновой Э.М. и др.

Благодаря энтузиастов ветроэнергетики Казахстана начинает подрастать молодая поросль например: Манатбаев Р.К., Толепбергенов А.К., Кунелбаев М.М., Копенбаева А.С., Бижанова А. и т.д.

Использование ВИЭ в Казахстане на примере ветроэнергетики целиком и полностью зависит от развития ветромашиностроения и соответствующей ему промышленности, создание специализированного КБ, поддержка НИОКР, создание комплектующих для ВИЭ, подготовка квалифицированных кадров и т.д.

Требуется реформа образовательной системы для опережающего развития подготовки кадров по новым специальностям: Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии»; Гидротехническое строительство; Ветряные электростанции; Солнечные электростанции и т.д.

Отсутствует интерес большинства частных компаний в софинансировании научной, исследовательской и образовательной программы не традиционной энергетике.

Необходимо, чтобы Министерство образования и науки Республики Казахстан (МОН РК) выделило целевые гранты на: 1) разработку Государственного общеобразовательного стандарта образования (ГОСО) бакалавриата, магистратуры и докторантуры PhD по специальности «Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии» с целью внесения в реестр специальностей РК, 2) по приоритетному направлению использования ВИЭ открыть специализированных кафедр.

Из-за отсутствия кадров по использованию ВИЭ в реестр государственного образования ввести специальности в этой области и на грантовой основе ежегодно выпускать 200 специалистов, из которых 10-15% отправлять на стажировку в высокоиндустриальные зарубежные страны. Кроме подготовки инженерного корпуса, необходимо готовить и кадры высшей квалификации – кандидатов и докторов наук и доктор PhD.

Например, в России имеются магистерские программы:

1). 551705 “Комплексное использование возобновляемых источников энергии”.

2). 551704 “Гидроэнергетические установки”.

3). 551706 “Преобразование возобновляемых видов энергии и установки на их основе” и др.

Рабочий учебный план по магистерской программе 140202.68.06 - “Проектирование и сооружение гидроэнергетических объектов и установок ВИЭ” приведен [19] в таблице 3 .

Таблица 3. Рабочий учебный план по магистерской программе 140202.68.06 - “Проектирование и сооружение гидроэнергетических объектов и установок ВИЭ”

Номер дисциплины	Наименование дисциплины	Семестры				Часов			
		экзамены	зачеты	курс. проект	курс. работа	Всего	Аудиторных	КСР	Сам. работа
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ДНМ	Дисциплины направления					1122	527		595
ДНМ.Ф	Федеральный компонент					697	323		374
ДНМ.Ф.01	Дополнительные главы математики	10	11			170	68		102
ДНМ.Ф.02	История и методология науки		11			119	51		68
ДНМ.Ф.03	Компьютерные технологии в науке и образовании	11	10			170	102		68
ДНМ.Ф.04	Методология научного тваорчество		11			119	51		68
ДНМ.Ф.05	Современные проблемы электроэнергетики	11				119	51		68
ДНМ.Р	Национально-региональный (вузовский)компонент					204	119		85

ДНМ.Р.01	Экономика установок возобновляемой энергетики	9	10			136	68		68
ДНМ.Р.02	Электрическая часть установок возобновляемой энергетики	9				68	51		17
ДНМ.В	Дисциплины и курсы по выбору студентов, устанавливаемые вузом					221	85		136
ДНМ.В.01									
ДНМ.В.01.01	Оценка состояния гидроэнергетических объектов		9			85	34		51
ДНМ.В.01.02	Электромагнитная совместимость в электроэнергетике		9			85	34		51
ДНМ.В.02									
ДНМ.В.02.01	Режимы использования установок возобновляемой энергетики		11			136	51		85
ДНМ.В.02.02	Экспертные системы и их использованиев энергетике		11			136	51		85
СДМ	**Специальные дисциплины**					**867**	**391**		**476**
СДМ.01	Основное энергетическое и вспомогательное оборудование установок возобновляемой энергетики	10	9			268	119		119
СДМ.02	Проектирование и эксплуатация установк возобновляемой энергетики	9	10	10		306	119		187
СДМ.03	Энергетические сооружения установок возобновляемой энергетики	9				102	51		51
СДМ.В.01.01	Биоэнергетические установки	10	9			136	68		68
СДМ.В.01.02	Ветроэнергоустановки	10	9			136	68		68
СДМ.В.01.03	Гидроэнергетические установки	10	9			136	68		68
СДМ.В.01.04	Приливные и гетермальные электростанции	10	9			136	68		68
СДМ.В.01.05	Солнечные энергоустановки	10	9			136	68		68
СДМ.В.01.06	Энергокомплексы на базе возобновляемых источников энергии	10	9			136	68		68
СДМ.В.02									
СДМ.В.02.01	Динамика установок возобновляемой энергетики		9			85	64		51
СДМ.В.02.02	Инновационный менеджмент в энергетике		9			85	64		51
СДМ.В.02.03	Математическое моделирование объектов и процессов возобновляемой		9			85	64		51

	энергетики								
СДМ.В.02.04	Технология строительного пройзводства		9			85	64		51
СДМ.В.02.05	Экспертиза и инспектирование объектов энергетики		9			85	64		51
РМ	**Работа магистра**					**765**	**68**		**69 7**
РМ.01	Работа магистра в семестре		9,10, 11,1 2			765	68		69 7
	ВСЕГО					2754	986		17 68

Всего: 2754 часов, из них аудиторных - 986, самостоятельных работ - 1768 часов.

Также следует открыть программы PhD по специальности:

1). Энергоменеджмент

2). Энергоаудит

3). Энергоэффективность зданий и возобновляемые источники энергии.

За основу учебного процесса магистрантов и докторантов по направлению использования ВИЭ следует взять учебные планы Российских вузов.

Все эти учебные направления должны быть обеспечены с высококвалифицированными специалистами.

Для подготовки инженеров и квалифицированных кадров в области ВИЭ необходимо пригласить из-за рубежа опытных специалистов и педагогов работающих в этом направлении.

Для казахстанских педагогов организовать стажировки в странах, где развиты исследования и использования возобновляемых источников энергии.

В своем докладе доктор технических наук Санкт-Петербургского государственного политехнического университета В.В. Елистратов сообщил, что в Российской Федерации общий прием на специальности, связанные с ВИЭ составляет 150 человек в год, а заканчивает ВУЗ около 75-80% от зачисленных на 1 курс, т.е. ежегодный выпуск по России составляет 100-120 инженеров и магистров [19]. Он считает, что этого мало, нужно количество студентов довести до 300 человек в год.

Потребность в кадрах по использованию ВИЭ (ветроэлектростанции - ВЭС, солнечные электростанции - СЭС, геотермальные электростанции, электростанции на биогазе, гидроэлектростанции - ГЭС и т.д.) к 2015 году может вырасти в несколько тысяч человек.

Литература

1 Закон Республики Казахстан «О поддержке использования возобновляемых источников энергии» (Утвержден Указом Президента РК., №165-IV от 4.07.2009 г.).

2 Стратегия индустриально-инновационного развития Республики Казахстан до 2015 г. (Утвержден Указом Президента Республики Казахстан, №1096 от 17.05.2003 г.).

3 http://www.wwindea.org

4 www.uwea.com.ua/files/wwea_2012_Russian.pdf

5 Безруких П.П., Безруких П.П. (младший). Ветроэнергетика вымыслы и факты. Ответы на 100 вопросов. - М.: Институт устойчивого развития Общественной палаты РФ/Центр экологической политики России, 2011. – 74 с.

6 Ершина А.К. и др. Основы теории ветротурбины Дарье. Алматы: КазгосИНТИ, 2001. – 104 с.

7 Yershina A.K., Yershin Sh.A., Tulepbergenov A.K., Manatbayev R.K. Bi – Darrie windturbine. ASME – ATI – UIT 2010 Conference on Thermal and Environmental lssues in Energy Systems. Sorrento, Italy, from May 16t h to 19th 2010.-pp. 615-619.

8 Yershina A.K., Yershin Sh.A. Vertical – axial compound wind turbine of rotor - type. ASME – ATI – UIT 2010 Conference on Thermal and Environmental lssues in Energy Systems. Sorrento, Italy, from May 16th to 19th 2010. – pp. 621-625.

9 Ершина А.К., Акылбекова А.Д., Кольбаева К.З. Аэродинамика ветротурбины карусельного типа – Бидарье. Материалы седьмой всероссийской научной молодежной школы с международным участием «Возобновляемые источники энергии» 24-26 ноября 2010г., Москва. - С.18-21.

10 Yershina A.K. Rotary—type windturbine. //Eurasian physical technical journal. Vol. 8, No.2 (16), 2011.—pp. 28-35.

11 Ершина А.К. Состояние и перспективы использования ветроэнергетики в Республике Казахстан. //Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск шестнадцатый. Гидрогазодинамика, геомеханика и геотехнологии. Бишкек. Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана и Институт геомеханики и освоения недр НАН КР, 2012. – С. 28-32.

12 Ершина А.К. Перспективные ветроагрегаты карусельного типа с высоким коэффициентом использования энергии ветра. Тезисы докладов XIX Международной конференции «Высокие интеллектуальные технологии и инновации в образовании и науке». Санкт-Петербург. 2012.- С. 51-52.

13 Yershina A.K.,Yershin Ch. Sh., Manatbayev R.K. Vertical-axial component wind turbine with a high coefficient using for wind energy. //Journal of International Scientific Publications Materials, Metods & Technologies. Vol. 6, Part 3. 2012, European Union. – pp. 232-236.

14 Yershina A.K.,Yershin Ch. Sh. Progressive innovations in appling of wind energy. //Journal of International Scientific Publications: Materials, Metods & Technologies. Vol. 7, Part 3. 2013, European Union. –pp. 4—12.

15 Yershina A.K., Yershin Sh. A., Manatbayev R.K. Determination of the Aerodynamic Characteristics of Darrieus Wind Turbine System of Troposkino. // World Applied Sciences Journal: Volume 24 Number 8, 2013. – pp. 980-988.

16 Предварительный патент №19114 РК, F03D 3/06 (2006/01). Ветротурбина Бидарье /Ершина А.К., Ершин Ш.А. - № 2006/0166.1; заявлен.15.02.2006; опубл. 15.02.2008, бюл. №2.

17 Саткалиев А. Развитие электроэнергетики в Казахстане: Устойчивое развитие и энергоэффективность. //Энергетика. № 1 (44) февраль 2013. – С. 14-15.]

18 www. windenergy.kz

19 Елистратов В.В. Проблемы подготовки кадров в области возобновляемой энергетики в России. Седьмое заседание Комитета по проблемам использования возобновляемых источников энергии РосСНИО. Москва. 09.11.2009 г.

СПЕЦИФИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ-ГУМАНИТАРИЕВ

Ефимова Е.А.

Российский государственный гуманитарный университет,

125993, ГСП-3, Москва, Миусская площадь, д. 6,

8(499)250-63-29, yefimova-elena@yandex.ru

Специфика отделения интеллектуальных систем в гуманитарной сфере РГГУ заключается в том, что на нем обучаются студенты-гуманитарии, но изучают они, главным образом, математику и программирование. В последние годы на отделении появилась робототехника, но это пока не привело к изучению механики. Дифференциальные уравнения теперь изучаются в отдельном курсе (до этого они были включены в курс математического анализа), но на практике еще не было случая их использования студентами. Несмотря на значительное количество курсов по математике, математические методы довольно редко встречаются в курсовых и дипломных работах. Обычно их использование связано лишь с описанием какого-либо метода интеллектуального анализа данных на формальном языке, анализом стихотворных текстов и т. д.

Попытки повысить уровень понимания математики с помощью усложнения программы курсов не приводят к ожидаемому эффекту. Студенты не могут почувствовать красоту абстрактных примеров. Поэтому эти примеры не имеют должного воздействия. Вскоре студенты забывают многое из того, что им читали. Например, они могут изучать на первом курсе такое сложное понятие, как действие группы на множество, что вроде бы должно привести к умению решать сложные задачи, но через полгода, в начале второго курса, они уже не помнят, как перемножить две матрицы, решить систему линейных уравнений и т.д. К счастью, они справляются с этим после небольшого напоминания. С другой стороны, практика показывает, что к такому же эффекту забывания приводит и чрезмерное упрощение программы, в результате которого им не приходится прикладывать серьезных усилий для ее освоения.

Более прочному усвоению математических курсов могут послужить небольшие вставки из истории математики. Например, если студентам сообщить, что первым, кто опубликовал доказательство теоремы Кронекера-Капелли, был Чарльз Доджсон (Льюис Кэрролл), то интерес к этой теореме увеличивается.

Причиной быстрого забывания математических методов является, по-видимому, вытеснение одних знаний другими при довольно большом общем объеме новых знаний, а также довольно высокий для гуманитариев общий уровень сложности изучаемых понятий. Поэтому самостоятельного применения математических методов ожидать трудно.

На наш взгляд, в освоении необходимых, но трудных для понимания математических методов может помочь, во-первых, использование специально подобранных примеров (головоломок, занимательных задач, задач практической направленности), а, во-вторых, сопровождение иллюстраций написанием несложных программ (что особенно просто сделать на языке логического программирования).

Одним из примеров, который может быть полезен для иллюстрации понятия действия группы на множество, а это понятие является слишком трудным для студентов-гуманитариев, является действие группы симметрий квадрата на доску для игры в крестики-нолики. Практическая часть в освоении понятия должна заключаться в написании программы, с помощью которой компьютер (робот) должен научиться играть в эту игру. Одним из способов организовать самообучение является запоминание позиций и ходов из них в базе данных, а потом выбор наилучших ходов с помощью некоторого критерия. Запоминание только одной позиции из ее орбиты позволяет существенно сократить базу данных и ускорить поиск хода. Для закрепления понятия действия группы на множество полезно написание и других программ, в которых производится учет симметрии.

Этот же принцип полезен для освоения и многих других понятий.

Таким образом, новые понятия, которые необходимо вводить для повышения уровня знаний студентов и для решения новых задач, должны появляться только вместе с хорошими, доступными для понимания студентов-гуманитариев иллюстрациями и сразу сопровождаться использованием в профессиональной подготовке. Поэтому иногда было бы полезно уменьшение количества «трудных» понятий в базовых математических курсах и перенос их в прикладные курсы профессионального цикла.

СОЦИАЛЬНАЯ РОЛЬ МАТЕМАТИКИ

О.В. Зимина[1], А.И. Кириллов[2]

[1] Национальный исследовательский университет МЭИ,
кафедра высшей математики,
Россия, 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д.14
e-mail: AcademiaXXI@mail.ru

[2] Российский фонд фундаментальных исследований,
Россия, г. Москва, Ленинский просп., д.32а
e-mail: AcademiaXXI@mail.ru

Мотивация к изучению математики в значительной степени обусловлена той социальной ролью, которую должна исполнять математика. Нужно различать объективную социальную роль и фактическую, которая может быть и больше и меньше, чем объективная.

В современном мире социальная роль фундаментальной науки возрастает, и в этом процессе математике принадлежит центральное место. В работе [1] перечислены и исследованы различные социальные роли фундаментальной науки, в том числе те, в которых со времен античности математика играет ведущую роль. Занятия математикой воспитывают навыки строгого мышления, уважение и привычку к умственному труду, умение отличать истинное от ложного, развивают абстрактное мышление, способствуют освобождению от предрассудков и мифов и т.п.

В Европе вопрос о социальной роли математики возник в XVII в., при переходе к Новому времени, когда потребовалось массовое школьное образование для достижения более высокого качества населения, чем это было в средневековой Европе.

В России значение математики в развитии страны было осознано Петром I, о чем свидетельствуют принятые им решения, начиная с создания в 1801 г. «Школы математических и навигацких наук» до учреждения в 1724 г. Петербургской академии наук, университета и гимназии. Благодаря усилиям Петра в Академии были собраны ученые из лучших университетов Европы, в том числе математики Николай и Даниил Бернулли, Якоб Герман, а с 1727 г. — Леонард Эйлер.

В докладе социальная роль математики обсуждается в двух аспектах.

1. Роль математики как одной из наук об окружающем мире.

2. Роль математики как учебного предмета в формировании менталитета личности и общества.

В современном российском обществе социальная роль математики как науки, формирующей знания о числах, фигурах, зависимостях, близка к нулю, поскольку эти знания у наших граждан находятся на крайне низком уровне, хотя все изучали (и сдавали) математику в школе.

При высоком уровне нашей научной математической школы и замечательных традициях элитарного математического образования (от математических кружков и специализированных школ для одаренных детей до математических факультетов и аспирантуры в лучших университетах страны) уровень математических знаний и умений в массовой средней и высшей школе постоянно снижается.

В начале 1860-х гг. Д.И. Писарев в обширной работе "Школа и жизнь" писал: "Общество наше плохо знает математику и вовсе не желает с ней знакомиться, потому что питает к ней глубокое, хотя и почтительное отвращение" [2, т. 4, с. 557]. Если исключить слово "почтительное", то эти слова с полным основанием можно применить к современному обществу. В ближайшие годы положение будет только усугубляться в связи с узаконенной "профилизацией" общего среднего образования, сокращением и упрощением математических курсов в технических вузах, а также исчезновением курса "Математика для гуманитариев" на гуманитарных факультетах классических и педагогических университетов. Отметим, что в "Концепции развития математического образования в Российской Федерации", утвержденной Правительством 24.12.2013 г., о курсе "Математика для гуманитариев" нет ни слова.

Мы видим большую опасность в том, что представители гуманитарных профессий (журналисты, политологи, артисты и др.), чье влияние на на отдельных людей и на общество в целом особенно велико, не стесняясь высказывают пренебрежительное отношение к математике и даже гордятся отсутствием элементарных математических знаний и умений.

На наш взгляд, одним из эффективным способов улучшить ситуацию, является тотальный анализ содержания и методики преподавания математики в средней и высшей школе с целью переноса акцента в триаде "что–как–зачем" с "как" на "что" и особенно "зачем" (сейчас происходит ровно наоборот). Такой перенос соответствует дидактическому принципу сознательности (или осмысленности) изучения математики на всех уровнях подготовки.

Другим способом повышения социальной роли математики является просветительская деятельность ученых и педагогов, включая педагогическую переработку и популяризацию достижений в различных областях математики и их приложений в естественных и гуманитарных науках, в технике, технологии, а также в социальной сфере.

Во второй части доклада мы анализируем роль математики как учебного предмета — то, что педагоги называют "воспитанием математикой".

О воспитательном значении математического и естественнонаучного знания писал Писарев: "Эти науки сообщают человеку, посвятившему себя их изучению, такую трезвость и неподкупность мышления, такую требовательность в отношении к своим и чужим идеям, такую силу критики, которая сопровождает этого человека за пределы выбранных им наук, которая не оставляет его в действительной жизни и кладет свою печать на все его рассуждения и поступки" [2, т. 3, с. 110].

Сейчас воспитательное значение изучения математики приближается к нулю, и это обстоятельство имеет ряд негативных последствий. Назовем лишь некоторые из них.

1. Неправильно сформированные дефиниции приводит к взаимному непониманию, сужению словарного запаса и т.п., тем самым затрудняя взаимодействие как индивидуумов, так и различных профессиональных, политических, гражданских и иных объединений (см. также [3]).

2. Неверные представления о том, что такое аксиома, гипотеза и др. приводит к тому, что в обществе нет консенсуса даже в отношении базовых понятий.

3. Отсутствие навыка анализа условий (необходимых и достаточных), при которых справедливо данное утверждение. Игнорирование изменившихся условий строго наказывается в математике (например, посредством контрпримеров). Если такой навык не выработан, то в обыденной жизни отдельные люди и общество в целом становятся легкой добычей всякого рода демагогов и шарлатанов, рискуют потерпеть фиаско в профессиональной деятельности и т.д. Так, игнорирование принятия Государственной Думой новых законов, (в частности, об образовании) лишает педагогическое сообщество возможности (и права) конструктивно обсуждать важнейшие проблемы существующей системы образования и пути ее реформирования.

В современном демократическом обществе одна из главных задач воспитания человека — научить его принимать обоснованные решения, предвидеть последствия своего выбора и нести за него ответственность. Сформировались новые области научных исследований и соответствующие учебные дисциплины в вузах: многокритериальная оптимизация, теория принятия решений. Определенные достижения в этих областях могут стать предметом педагогических исследований и использоваться в практике инновационного обучения.

Впервые учащийся встречается с задачами выбора на уроках математики при изучении множеств. Он должен усвоить, что для того, чтобы сделать выбор, необходимо упорядочить множество: установить классы эквивалентности и отношения порядка. Для выбора должно быть не менее трех элементов (транзитивность). Отсюда следует, что выбор из двух (например, политических партий) недостаточно обоснован. В докладе мы приведем примеры нарушения транзитивности, связанные с изменением критериев выбора. Будут приведены примеры того, как в процессе изучения математики используется множественность представлений об одном и том же объекте для расширения возможности познания (в том числе, человека и социума); как происходит движение к более высокому уровню абстракции в математике в сравнении с тем, как в общественной жизни формировались представления о равных возможностях независимо от пола, возраста, расы и т.д.

В заключение доклада мы используем результаты исследования социальной роли математики для анализа некоторых положений “Концепции математического образования” и плана мероприятий Министерства образования и науки по ее реализации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А.И. Кириллов. Роль фундаментальной науки в развитии общества // Вестник Московского университета. Серия 20 “Педагогическое образование”. № 1, 2012. С. 6–36.

2. Писарев Д.И. Полное собр. сочинений. Издание Ф. Павленкова. С.-Петербург, 1894.

3. Зимина О.В., Кириллов А.И. Профильное образование и диалог культур // Материалы XIX Межд. конф. “Математика. Образование”. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2013. С. 88–97.

КРАТКИЙ ОБЗОР ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ЛОГИКИ КАК КОМПОНЕНТЫ ГУМАНИТАРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ОБУЧЕНИЯ ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Исмагилова Е. И.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) (МГТУ МИРЭА)

119454 г.Москва, пр.Вернадского, д. 78

Тел.: 89035843624, e-mail:eismagilova@mail.ru

> «Разве настоящее не находится более чем наполовину во власти прошлого, упорно стремящегося выжить? И разве не представляет прошлое посредством своих различий и своих сходств ключ, необходимый для всякого серьёзного понимания настоящего?»
>
> Фернан Бродель. (см. [2], с.11)

В настоящее время гуманитаризация высшего образования рассматривается как дополнительный и необходимый компонент профессионального образования. Гуманитарная парадигма высшего образования переносит акцент с узкопрофессионального подхода к подготовке специалистов на интеллектуально-духовное развитие личности, на развитие личностных качеств, в том числе и профессионально значимых. В связи с этим возрастает роль гуманитарного потенциала математического образования.

Одним из путей реализации гуманитарной направленности обучения математике является использование элементов истории математики в учебном процессе вуза. Введение исторических элементов в содержание математических дисциплин имеет педагогическую целесообразность, поскольку оно:

- оказывает влияние на мотивацию изучения математики, стимулируя познавательный интерес — важнейший мотив учебной деятельности;
- способствует пониманию фактического материала и роли математики в современном обществе.

Добавляя исторический элемент в раздел математической дисциплины, следует обратить внимание не только на содержание выбранного материала, но и на его структуру.

Содержание исторического материала должно включать как краткое знакомство с жизнью и деятельностью выдающихся учёных-математиков, так и обзор оригинальных отрывков из их сочинений.

Структура исторического материала должна обеспечить генетический характер изложения. В.М. Брадис в «Методике преподавания математики в средней школе» (1949) отнёс генетический характер изложения материала к основным принципам обучения. По его мнению, качество усвоения математического материала при генетическом характере изложения существенно выигрывает, если каждое новое понятие, каждое новое предложение вводить так, чтобы была видна его связь с уже известными учащимся положениями и чтобы была понятна целесообразность его изучения. Недаром говорят, что полное понимание любого теоретического вопроса достигается лишь тогда, когда становится ясной его история, его генезис (см. [1], с. 49). Обеспечить генетический характер изложения материала легче всего на основе истории конкретного раздела математической дисциплины. В этом случае небольшой объем исторического материала позволяет быстро структурировать его содержание при помощи историко-генетического (ретроспективного) метода и изучить выбранные исторические явления в процессе их развития, от зарождения до гибели или современного состояния, что даёт как бы «биографию» исторического объекта.

В качестве примера исторического элемента рассмотрим краткий обзор истории развития геометрических методов логики, который разработан на основе истории раздела «Логика высказываний» дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов».

В логике, в целях наглядности, издавна применялись геометрические (точнее, графические) методы. Первые методы были созданы для облегчения усвоения силлогистики Аристотеля, в основе которой лежат простые суждения, представленные четырьмя типами (базис силлогистики Аристотеля):

A – общеутвердительное (Y присуще всем X);

E – общеотрицательное (Y не присуще всем X);

I – частноутвердительное (Y присуще некоторым X);

O – частноотрицательное (Y не присуще некоторым X).

Когда заходит речь о графических методах логики (не обязательно математической), обязательно вспоминаются круги Эйлера, которые начиная с конца XVIII в. стали широко использоваться не только в учебных курсах логики, но и при изложении основополагающих разделов современной математики, в которых применяется алгебра множеств.

В «Письмах к немецкой принцессе» (1768) Л.Эйлер в популярной форме изложил своё понимание Аристотелевой силлогистики. При этом он использовал наглядные геометрические иллюстрации, которые оказались более понятными, чем формальные логические выводы, и впоследствии получили название «круги Эйлера».

Классической и вошедшей во все учебники логики иллюстрацией метода Эйлера является изображение (рис. 1) модуса barbara:

Всякое M есть P,

Всякое S есть M,

Следовательно, всякое S есть P.

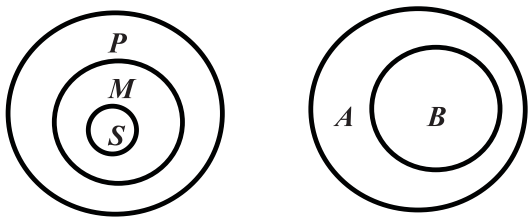


Рис.1. Рис.2.

Но при этом ещё сам Эйлер отмечал, что его круги не совсем точно выражают информацию, содержащуюся в предложениях силлогистики. Так как в аристотелевой логике термин «некоторые» понимается в смысле «некоторые, а может быть и все». На примере фигуры, представленной на рис. 2, где класс A соответствует деревьям, а класс B — грушам, он пишет, что её можно выразить словами по-разному:

«1. Все груши — деревья.

2. Некоторые деревья — груши.

3. Некоторые деревья — не груши».

Графическая интерпретация с помощью кругов Эйлера была пригодна только для рассуждений, не выходящих за пределы силлогистики Аристотеля, т. е. не была даже полностью эквивалентна исчислению одноместных предикатов.

Известный немецкий философ, математик, физик и астроном XVIII в. И. Г. Ламберт (1728 - 1777), современник Эйлера, излагает свою геометрическую интерпретацию силлогистики Аристотеля в работе «Новый Органон» («Neues Organon», 1764). В этой интерпретации каждому термину ставится в соответствие отрезок прямой. Предложение: «Всякое A есть B» изображается Ламбертом в виде системы из двух отрезков неравной длины, где меньший отрезок помещен под (или над) большим:

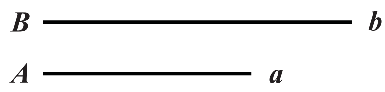


Рис. 3.

Отрезок *Aa* короче отрезка *Bb* и лежит под ним. Предложение: «Ни одно *A* не есть *B*» представляется схемой:

Рис. 4.

где отрезки *Bb* и *Aa* располагаются один вне другого на одной прямой. Между правым концом отрезка *Bb* и левым концом отрезка *Aa* находится пустой промежуток.

Предложение: «Некоторые A не суть B» выглядит на схеме Ламберта так:

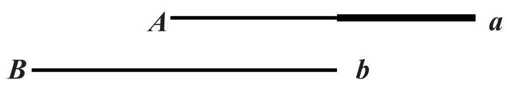


Рис. 5.

где жирная часть отрезка *Aa* изображает ту часть объёма субъекта частного отрицательного суждения, которая (часть) лежит вне его предиката.

Предложение: «Некоторые A суть B» передаётся диаграммой:

Рис. 6.

где жирная часть отрезка *Aa* символизирует ту часть объёма субъекта частноутвердительного суждения, которая (часть) заключена в пределах его предиката.

Умозаключение: «Все *B* суть *A*; некоторые *C* не есть *A*; следовательно, некоторые *C* не есть *B*» изображается на диаграмме так:

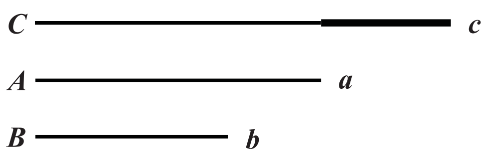


Рис. 7.

Ламберт употребляет также чрезвычайно интересную систему обозначений, включающую знаки постоянных 1 и 0, где 1 интерпретируется как наличие, а 0 как отсутствие некоторого качества. Он записывал конституенты единицы в форме: ABC, AB0, A0C, 0BC и т.д., где помещение знака 0 на соответствующем месте означало, что на этом месте должна стоять надлежащая (взятая в словарном порядке) буква с символом отрицания над ней. Ламберт определяет также число конституент единицы в количестве 2^n, где n число букв, обозначающих элементарные классы.

Создавая свою обобщённую силлогистическую теорию, Ламберт понимал, что она не может претендовать на охват всевозможных видов научных умозаключений, но его скалярные диаграммы для геометрической интерпретации силлогизмов нашли своё применение в исследованиях современных логиков. По мнению современного учёного В.И. Лобанова, Ламберт допустил ряд ошибок, главной из которых явилось отсутствие фиксации универсума, и «эта ошибка на несколько столетий похоронила идею математической силлогистики» [9].

Идеи Л.Эйлера были развиты в работах французского математика и логика Ж. Д. Жергонна (1771—1859). Жергонну удалось в работе «Очерк рациональной диалектики» («Essai de dialectique rationelle», 1817), представить классы суждений, выделенные Аристотелем, с помощью соотношений между множествами. Эти соотношения получили в математике и в логике название «Жергонновых отношений». Классические Жергонновы отношения представлены на рис. 8.

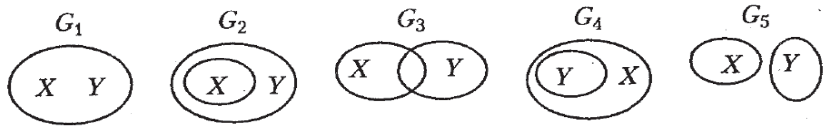


Рис. 8.

Каждый тип Жергонновых отношений ($G_1 - G_5$) имеет собственное название:

G_1 - совпадение или равнозначность;

G_2 - левостороннее включение;

G_3 - частное совпадение;

G_4 - правостороннее включение;

G_5 - несовместимость.

Жергонн показал, что каждый тип аристотелевского суждения можно выразить как некоторое множество возможных вариантов отношений
$G_1 - G_5$, в частности:

A: $\{G_1, G_2\}$;

E: $\{G_5\}$;

I: $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$;

O: $\{G_3, G_4, G_5\}$.

Жергонновы отношения часто использовались для строгого обоснования не только правил вывода для простого категорического силлогизма, в котором в качестве посылок используется два суждения, но и для более сложных умозаключений, когда в качестве посылок допускается большее число суждений. Но Жергонн не учитывал универсум, учёт которого приводит не к пяти, а к семи вариантам отношений между двумя непустыми множествами X и Y являющимися подмножествами унивёрсума U.

Круги Эйлера, скалярные диаграммы Ламберта и Жергонновы отношения возникли в традиционной силлогистике и к становлению математической логики имеют весьма отдалённое отношение. Для обслуживания математической логики были разработаны диаграммы Венна. Лежащая в их основе идея — идея разложения на конституенты - является одной из центральных в алгебре логики и вряд ли могла бы быть выдвинута без связи с последней. В этом основное различие между графическими методами Венна и Эйлера.

Наиболее значительными работами английского логика и философа Дж. Венна (1834-1923) являются «Логика случая» (The logic of chance», 1866), «Символическая логика» («Symbolic Logic», 1881), «Принципы эмпирической логики» («The principles of Empirical Logic», 1889).

Венн ввёл диаграммы для наглядного представления заданной информации и для решения с их помощью некоторых задач символической логики. Построение диаграмм Венн начинает с разбиения части плоскости на 2^n ячеек с помощью n фигур, где n — число переменных, данных в условии задачи. В дальнейшем предложенный Венном метод разбиения плоскости изменялся и усовершенствовался, делались попытки увеличения наглядности его для большего числа переменных.

Рассмотрим идею метода, предложенного Венном, для $n = 1, 2, 3, 4$.

Замкнутая кривая Ψ без самопересечений делит плоскость на две части (ячейки) - внутреннюю и внешнюю (предполагается, что кривая Ψ - граница ячеек - не принадлежит ни одной из них), одну из ячеек (внутреннюю) обозначают a или 1, другую, дополняющую a до плоскости, - $\overline{a}$ или 0. Иногда в качестве Ψ удобно использовать прямую, которая также делит плоскость на две части (ячейки).

При $n = 1$ в качестве Ψ можно взять окружность произвольного, но фиксированного радиуса или прямую (рис. 9).

При $n > 1$ замкнутые кривые $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ без самопересечений располагают на плоскости так, чтобы разделить её на 2^n ячеек.

При $n = 2$ можно разделить плоскость на четыре ячейки двумя окружностями или двумя прямыми (рис. 10).

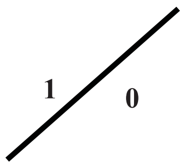


Рис. 9.

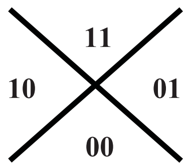


Рис. 10.

При $n = 3$ ещё можно воспользоваться тремя окружностями (рис. 11) или двумя прямыми и окружностью, как показано на рис. 12, но уже нельзя — тремя прямыми.

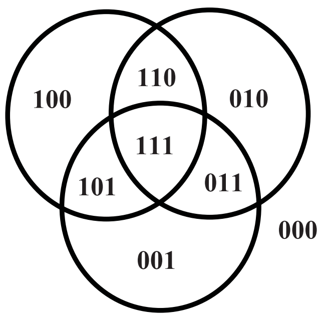


Рис. 11.

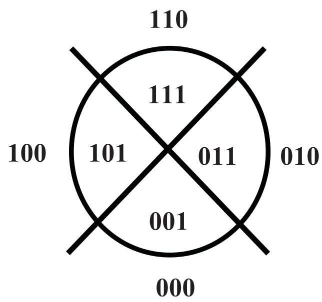


Рис. 12.

При $n = 4$ можно расположить на плоскости две прямые, окружность и эллипс так, что плоскость разделится на 24 ячеек (рис. 13); можно также ограничиться, как это делает Венн, четырьмя эллипсами (рис. 14).

Следовательно, при $n = 1, 2, 3, 4$ плоскость можно разделить на 2^n ячеек с помощью n фигур, ограниченных кривыми без точек самопересечения.

Венн применяет свои диаграммы исключительно для иллюстрации решения задач логики классов, и они работают при этом весьма успешно. Ценность и преимущество диаграмм состоит в их наглядности, которая является существенным подспорьем при решении задач и доказательстве теорем, поэтому пренебрегать ею не стоит.

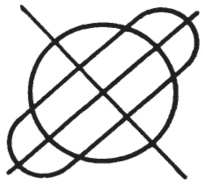


Рис. 13.

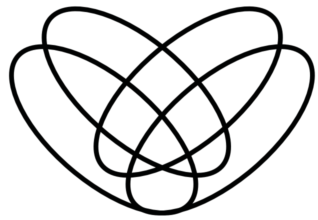


Рис. 14.

В настоящее время диаграммы столь же эффективно используются и в задачах, интересующих современных логиков.

В.И. Лобанов (родился 1 марта 1940 г. в г. Осташкове Калининской обл.) приводит аналитическое выражение суждений базиса силлогистики Аристотеля на основе использования скалярных диаграмм Лобанова, в которых получили развитие диаграммы Венна и Ламберта. В работе «Русская логика для школьников (азбука математической логики)» (2004) показан переход от диаграмм Венна к скалярным диаграммам Лобанова (рис. 15.).

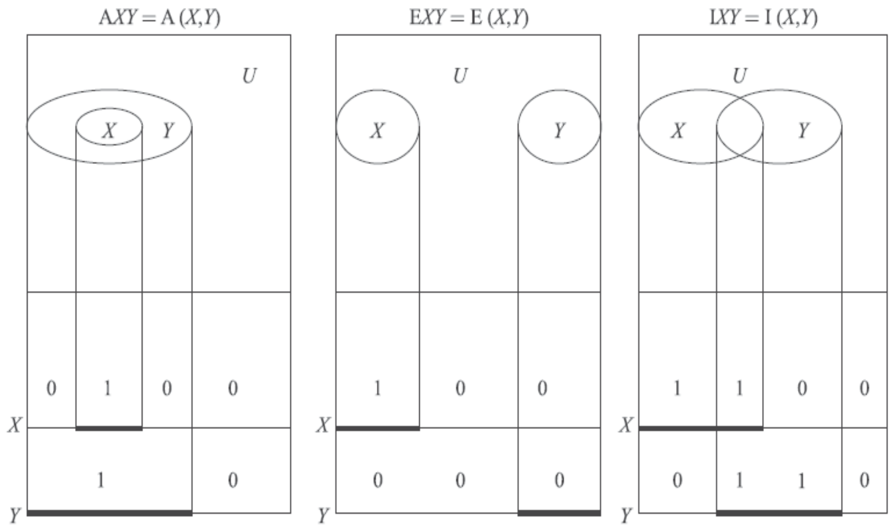


Рис. 15. Переход от диаграмм Венна к диаграммам Лобанова и синтез силлогстических функторов Axy, Exy, Ixy.

В.И. Лобанов чётко охарактеризовал принципиальные отличия своих скалярных диаграмм от диаграмм Ламберта:

1) наличие фиксации универсума;
2) размещение силлогистического функтора Exy на двух, а не на одном уровне;
3) возможность "дробного" (разрывного) представления понятия в пределах универсума;
4) возможность графической и аналитической (4-значной комплементарной) интерпретации результатов анализа и синтеза силлогизмов. [8]

В своих работах Лобанов доказал некорректность и неполноту силлогистики Аристотеля, а также подверг критике кванторное исчисление. При этом он предложил множество базисов силлогистики и достаточно веское их обоснование.

Ю.М. Сметанин (Родился в 16.08.1950 г. в г. Ижевске) в своих работах при помощи скалярных диаграмм Лобанова даёт интерпретацию аристотелевской силлогистики в современных терминах, на фоне универсума наглядно демонстрирует различия классических и расширенных Жергонновых отношений (рис.16, рис. 17), показывает множественность смыслов простых суждений Аристотеля (рис.18).

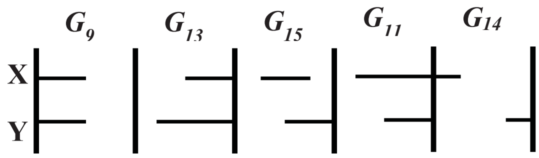


Рис.16. Классические Жергонновы отношения.

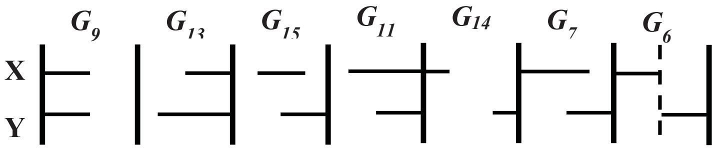


Рис.17. Расширенные за счёт G_6 и G_7 Жергонновы отношения.

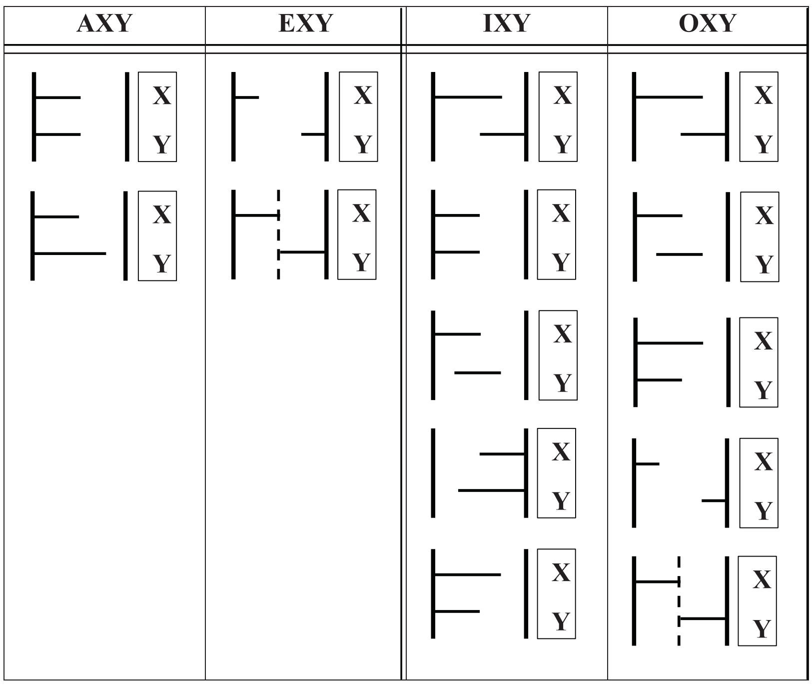


Рис. 18. Многосмысловость простых суждений из базиса Аристотеля.

Развивая идеи В.И. Лобанова и выявляя недостатки математической модели, лежащей в основе классической логики, Ю.М. Сметанин рассматривает возможность и актуальность замены в классической логике и традиционной силлогистике многосмыслового базиса Аристотеля на односмысловой ортогональный базис. Он разрабатывает и предлагает улучшенный вариант логики - логику S_{L_1}, в основе которой лежит уточнённая математическая модель - невырожденная булева алгебра и сопряжённая с ней алгебраическая система на основе множеств.

Таким образом, развитие и расширение применения графических методов логики, задача которых состояла в облегчении усвоения силлогистики Аристотеля, способствовало созданию улучшенного варианта логики S_{L_1} высказываний на основе ортогонального базиса.

Из выше сказанного можно сделать вывод, что понимание взаимосвязи в историческом развитии графических методов логики и общественного прогресса позволяет студентам глубже осознать специфику логики высказываний, формирует у них позитивно-мотивированное отношение к использованию графических методов логики в будущей профессиональной деятельности; создаёт правильное представление о путях приобретения человечеством знаний об окружающем нас мире и о развитии методов этого познания.

Литература

1. Брадис В.М. Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Учпедгиз, 1949. - 472 с.
2. Бродель Ф. Материальная цивилизация, экономика и капитализм XV – XVIII вв. В 3-х томах. Т.3. Время мира. – М.: Прогресс, 1992, - 680 с.
3. Кузичев А.С. Диаграммы Венна. М.: Наука, 1968. - 253 с.
4. Кулик Б.А. Логика естественных рассуждений / Под ред. В.А. Дюка. – СПб.: Невский Диалект, 2001. - 128 с.
5. Сметанин Ю.М., Ортогональный базис силлогистики // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. с. 155–166.
6. Сметанин Ю.М., Логика высказываний на основе алгебраической системы, включающая традиционную силлогистику // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 2, с. 127–146.
7. Стяжкин Н.И. Формирование математической логики. - М: 1967. - 508с.
8. Лобанов В.И. Русская логика для школьников (азбука математической логики). - М.: 2004. - 122 с.
9. Лобанов В.И. Русская вероятностная логика. М.: Русская правда, 2009. - 320 с.

ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ ШАХМАТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ КАК ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ПЛАТФОРМА ДИНАМИЧЕСКИХ РАЗВИТИЙ СИСТЕМЫ МОТИВАЦИЙ ОСВОЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СФЕРЕ

Владимир Карапетян
Армянский государственный педагогический университет им. Х. Абовяна

Заключение. Республика Армения, как шахматная держава, продолжительно разрабатывает и инвестирует такие стратегические программы, которые направлены не только на обеспечение высоких заслуг в сфере шахмат, но и в первую очередь предназначены на: 1) модернизацию сферы обучения РА, 2) повышение не только шахматных качественных показателей, но и обучение математики, как основной ресурс всемирной системы образования, 3) углубление познавательных интересов школьников к математическому обучению благодаря возможностям шахмат, 4) развитие учебно-познавательных мотивов обучающихся, 5) создание условий для активизации умственного потенциала обучающихся, обеспечение сознания социальной ценности математики и шахмат, а так же в межличностных отношениях и в условиях учебного сотрудничества.

Расширение новаторских информационных и учебных технологических баз создали познавательные новые возможности для углубления процесса формирования профессиональных и межличностных компетенций в обучении, способами формулировки новых путей и развития обучения в первую очередь, учитывая возможности расширения ориентировочной основы действия. Предлагаемые схемы эффективных моделей обучения в практике по причине отсутствия стольких потенциалов и исполнительных стараний и имеющихся достаточно сложных и постоянно меняющихся порядков значительно осложнили инвестиции восприятия математического учебного материала, познавательные, выполняемые и операциональные части процессов понимания и освоения в учебном процессе. Об этом свидетельствуют многочисленные изучения математических учебных сложностей и их типологии, где их значительная часть касается так же остальных учебных предметов.

Психологическое изучение учебных моделей снова приводит нас к сфере активизации собственной деятельности обучающегося, имея в виду необходимость раскрытия новых познавательных и поисковых возможностей школьника в условиях активизации рефлексивного поля понимания математического учебного материала. Разработка новой концепции основана на нескольких основных понятиях, которые в процессе совместной эффективной организационной деятельности важны для активизации роли компонента сотрудничества. Предлагаемая концепция исключительно основана на том понятии, что математика и шахматы своим структурно-функциональным потенциалом могут выступать в **роли стимулирующей модели учебного**

процесса, которые кратко может выражаться в следующем: 1) в восприятии учебной ситуации, разделения внедренных промежуточных действий в математических или шахматных проблемах, 2) постоянной эмоциональной напряженности, стабильности и распределения внимания (произвольное внимание, реальность, которая очень важна для организации математического учебного процесса), 3) наличие **постоянной спонтанной** обратной связи в обучении шахмат – в отличие математических обучающих других процессов, 4) контроля учебной ситуации и собственных действий, 5) учебной ситуации и мониторинговых и оценочных компонентов учебной деятельности (математика и шахматы).

Следовательно, нужно разработать такую конструкцию, которая кроме как открытой системы, будет включать так же компоненты возрастного развития и распределения возможностей, если речь частично идет о математических и шахматных учебных предметах. Исследования, касающихся психологических процессов, построенные на основе общей методической ориентировочной основе, условно можно разделить на три части. Исследования, которые касаются 1) возможностей интеллектуального потенциала математики и шахмат, 2) образовательной ценности математики и шахмат, 3) социальных и культурных ценностей математики и шахмат. Конечно, вышеперечисленные связаны между собой и имеют возможности взаимодополнения, но, по нашим представлениям, их целенаправленное исследование расширит поле оценивания культурных и образовательных функций математики и шахмат.

Они ниже представлены и одновременно отмечаются как нынешнее состояние исследования данного компонента, так и те возможности его расширения, которые обсуждаются несколькими направлениями. И так; 1) во время обсуждения постановки задачи исследования познавательных ресурсов математики и шахмат выяснилось, что эта сфера очень много и глубоко исследована в разных странах. Речь о тщательном исследовании процессов внимания, памяти, мышления, воображения и т.д.. Раскрываться исключительная роль шахматных игр и математики в деле проявления высших психических процессов, то есть, указывается их интеллектуальная ценность особенно с точки зрения развития мышления, которая пока не выражает наличие уровня восприятия интеллектуальной ценности и субъективной оценки или индивидуального сознания и его реальную картину. По нашему мнению, необходимо показать реальный путь интериоризации и трансформации оценки интеллектуальной ценности в условиях межкультурной интеграции. Между тем, имея в виду, что уже несколько лет шахматы вошли в образовательную систему РА, считаем необходимым определенно показать особенности психических процессов, в том числе и возрастные особенности интеллектуального развития - начиная с младшего школьного возраста. Этот исследовательский ряд был осуществлен психологическими и социологическими методами - начиная с имеющегося отношения населения РА к математике и шахматам до шахмат и математики как исследования интегративных носителей интеллектуальной ценности. В целях исследования субъективного оценочного восприятия интеллектуальной оценки шахмат в различных школах РА были выполнены целенаправленные изучения, и кроме их кратких описаний и анализов так же приводится динамика проявления развитий связанный с учебным предметом математики.

Математика и шахматы как образовательная ценность. Образование как общенациональная ценность крайне важна и оценена во всем мире , между тем в рамках деятельности обучения ребенка важность обучения математики и шахмат на уровне индивидуального сознания еще нуждается в дополнительном изучении. Например, по Джерри Майеру (Jerry Meyers), растет учебная успеваемость детей, по сколько они приобретают следующие навыки: 1) сосредоточенность внимания, так как ученики понимают преимущества внимательности и сосредоточенности, 2) визуализация, посколько ученикам регулярно напоминают, чтобы они представляли последовательность действий сделанные ими до того как они их предпримут.

Организованные опросы и обсуждения с 500 учителями математики и шахмат показали, что значимая часть учебные затруднений усвоения предметов «Математика и «Шахматы» в основном относятся к следующим блокам: 1) низкой сосредоточенности внимания, 2) проверке домашних работ, 3) организации групповых работ, 4) организации урока в инклюзивном классе.

Шахматная академия Армении с помощью прибора «Эгоскоп» (с диапазоном 50 милисекунд) исследовала особенности внимания детей со слабыми, средними и высокими показателями успеваемости (стабильность внимания, слежка за подвижным предметом, подвижность интелекта и т.д.) как в НКР (в рамках учеников 4-ого класса, не проходившие шахматы), так и учеников 2-4-ых классов уже с определенным стажем умения играть в шахматы Ереванских 50-ой и 60-ой школах (общее число – 450). Помимо того, поиспользованию детского варианта теста Бурдон-Рудика были исследованы особенности внимания учеников 2-4-ых классов.

Количественный анализ диагностики сконцентрированности внимания показал, что во 2-ом классе средний показатель сконцентрированности внимания 91%, в 3-ем- 85%, в 4-ом – 58%. К стати, похожие изменения снижения замечаются так же в динамике учебных мотивов.

Можно отметить тот факт, что в 4-ом классе снижение стабильности внимания связано не только с увеличением количества преподаваемых предметов и проявлениями слабых интересов к их исследованию, а так же с особенностями возрастного кризиса, что отмечали так же родители учеников.

Принимая за основу представления разных авторов направленных на изучение роли стабильности внимания – специальным экспериментом попробовали выяснить 2 наиболее важные проблемы: 1) противостояние ребенка к подвижному объекту и 2) Найти определенные связи между противостояниями и некоторыми личностными особенностями (самоуверенность, уравновешенность, терпимость и т.д.).

Необходимо было найти время противостояния 2-4 классников в условиях использования методики «Противостояния подвижного предмета». Во время выполнения 20 заданий были сохранены скорость углового заполнения 100 градусов в секунду. Констатирующие 3 случая (противостояние раньше времени, правильный выбор времени противостояния, опоздавшее противостояние) показали большие изменения вариаций ответов, хотя противостояние подвижного предмета раньше времени (15 и больше) во всех случаях превышало. Обсуждение вопроса с этой точки зрения приближает нас к тем формулировкам Майера и других авторов, где отмечается, что со временем в детях развиваются: 1) терпеливость и благоразумие, 2) возможность соизмерять, 3) умение анализировать конкретным способом, 4) умение планировать, 5) абстрагированное мышление, 6) не удовлетворятся одним доводом, а одновременно учитывать разные факторы.

Методология формирования образовательной ценности математики и шахмат должна быть основана на ряде основательных доказательств. Необходимо показать – 1) связь процессов обучения и учебных мотивов, 2)сравнительные анализы показателей учебной успеваемости математики, шахмат и других преподаваемых предметов в начальных классах, 3) трансформация умственных возможностей математики и шахмат на сферу других учебных преподаваемых предметов в том же классе. С этим подходом выполненные многочисленные исследования в НКР и в 2-4-ых классах в течение 4-6 месяцев с помощью «Эгоскопа» показали непосредственную связь психических процессов и учебных мотиваций.

Ниже приводятся 2 эпизода, один из которых касается обеспечения мотивации шахматной деятельности, а второй - математики.

Наибольшее достижение это причинно-следственные связи, раскрывшиеся со стороны ребенка играющего в шахматы, во время организованных специальных интервью после экспериментов. «Почему», «Как», «С какой целью», «Когда» и другие вопросы, которые постоянно сопровождали ответы детей, показали, что сложность интериоризации речи не позволяет ребенку во время игры мыслить громко и выражать свою точку зрения выполняя каждое действие. Причина этого, что во время игры постоянно следил и давал методические указания профессиональный шахматист. Цель игры научить ребенка не только довести до конца начатую игру, но и заранее обдумать как главную цель, так и необходимые действия. Кажется, что формирование цели в конкретной игре особо не сложно, между тем, в реальности, решение конкретного игрового хода и равнозначное совмещение необходимого действия в 3 позиции. В большинстве играющим детям помогал опытный тренер, довольно сложно и с точки зрения результата можно формулировать гарантию организации объективной шахматной консультации - направленную на формирование рефлексии процесса.

Сохранение последовательности действий выслеживается и оценивается со стороны опытного шахматиста. Постепенно ребенок учится задавать сам себе вопрос: 1) «Если я сделаю это, что будет потом и как я смогу отнестись к этому?». Поскольку память детей младшего возраста в большинстве механическая, то опытный шахматист часто повторял вопросы и выяснял- на самом ли деле ребенок понял суть вопроса. В итоге выяснилось, что поисковая деятельность ребенка не только сопровождается, но и дает основу своевременному совмещению между собой элементов сходящегося и расходящегося мышления. Подробное прояснение приобретенной ориентировочной основы ребенка с непосредственным участием опытного шахматиста выступающего в роли консультанта, регулировщика и оппонента постепенно приводит к эффективному выбору запланированных и целенаправленных действий.

Во время исследования мы попытались употребить вышеприведенное, и в условиях изучения математики. Мы попытались активизировать учебный компонент сотрудничества за счет тех учащихся, кто легче понимает и осваивает математический материал. После некоторых организационных сложностей, которые в основном были связаны с раскрытием возможностей работы с детьми со слабой успеваемостью во время урока и выбором советчика среди детей с высокими способностями по предмету математики, выяснилось, что замечается некий прогресс у слабо учащихся детей. Меняется суть их учебных мотивов, формулируются интересы к учебному предмету математики. Выяснилось так же, что показатели учебной успеваемости совпадают с предметами математики и шахмат. С точки зрения корреляционных связей показатели высокой и средней успеваемости почти совпадают.

Несмотря на то, что эксперименты в этом направлении еще не закончены, уже есть определенные результаты, которые показывают, что внутренний план действия или выполнение в уме происходит сравнительно быстрее, когда советчик задает похожий вопрос двум игрокам (в шахматах) или нескольким ровесникам (в математике). Каждый игрок или выполняющий математическую задачу показывает свой вариант, имея в виду, что есть протестующие и требующие доказательств разные подходы. Разные роли одного и того же игрока или решающего задачу естественно создают когнитивный диссонанс, что может получить оптимальное решение, если перебороть чувство, которое обычно ассоциируется с опасностью ошибиться. Считая как основное приобретение обогащение учебного опыта, ребенок сосредотачивается на отдельные процессы, а не на результат, поскольку правильно построенные процессы с еще большей вероятностью приводят к ожидаемому результату. Кроме того, одновременное выполнение ролей превращается в реальную учебную деятельность, а не в расчлененные части обучающего процесса, которые со временем могут реформироваться или забыться из за непропорционального распределения и ассоциации компонентов проверки и оценивания.

С помощью механизма активизации отдельных компонентов и функций поисковой деятельности раскрывается реальный путь к формированию стимулирующей модели учебно-познавательной деятельности, к чему мы гипотетически отнеслись в начале. Мы считаем, что построение подобной модели в смысле регулирования и корректирования деятельности даст возможность обеспечивания передаваемости знаний из одной сферы в другую. В связи с этим, в частности раскрылась непосредственная связь математики и шахмат с точки зрения алгоритмизированного и комбинированного мышления.

3) Математика и шахматы как социальная ценность. Фактически имеем в виду, что, несмотря на то, что участники на вербальном уровне практически не общаются, внутренней речью и не вербальными способами (жесты, мимика и т.д.) воплощаются их планы, выражая проявления межличностного и внутриличностного мышления единством речи и мышления (Гарднер). В плане социальной ценности отмечаются те важные и волевые качества, которые в первую очередь выступают как решительность, готовность самостоятельно действовать и сдержанность. Считаем, что выше отмеченные играют значимую роль в межличностных отношениях и процессах их регулировки. В условиях эксперимента наблюдались ситуации взятые из реальной жизни, где дети могли воспользоваться подсказками или помощью ровесников. Нас заинтересовало, в каких ситуациях и к какой помощи обратятся дети (подробности, приборы, варианты выполнения и т.д.) для совместного сотрудничества. Выясняется, что рефлексивные и рациональные суждения детей основаны на активации выполняемых процессов (Ferguson, 1986)*.

И так, исследуя дальнейшее развитие учебной деятельности и исходя из этого обучения математики и шахмат, 3 группы непосредственно между собой связанные сферы (интелектуальная, учебная и социальная ценности) совместно с исследованиями и внедрениями результатов на практике, уточняются основы эмпирического строения модели стимулирующей развитие учебной деятельности, где математика и шахматы образуют платформу для укрепления межпредметных связей в сфере образования.

Литература

1. Альманах психологических тестов, М., 1995, с.107-111

2.[*] Robert Ferguson, “Developing Critical and Creative Thinking though Chess,” report on ESEA Title IV-C project at the annual conference of the Pennsylvania Association for Gifted Education, Pittsburgh, Pennsylvania, April 11-12, 1986.

3.[**] F. Kazemi, M. Yektayar, A.M. Bolban Abad. Investigation the impact of chess play on developing mega-cognitive ability and math problem-solving power of students at different levels of education. Report on the 4th International conference of Cognitive science (ICCS 2011).

ПРИВЛЕЧЕНИЕ СТУДЕНТОВ К ВЫПОЛНЕНИЮ ТВОРЧЕСКИХ ЗАДАЧ - ОДИН ИЗ ПУТЕЙ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ

Т.А. Кузнецова, С.А. Розанова

Московский институт радиотехники, электроники и информационных технологий (МГТУ МИРЭА)

Г. Москва, пр. Вернадского, д. 78

kuzta@yandex.ru, srozanova@mail.ru

Чрезвычайная важность проблем образования в России и, в частности, математического образования, обсуждаемых в обществе на протяжении последних десятилетий стала очевидной после принятия на высшем государственном уровне концепции математического образования в России и плана мероприятий по ее осуществлению. Этот факт – признание того, что математика – один из важнейших фундаментов всей науки. Изучение математики на протяжении всей жизни способствует формированию аналитического мышления, вырабатывает настойчивость в достижении поставленных целей, приучает доводить начатое дело до логического конца,….

Однако существует ряд объективных причин, по которым студенты вузов (нематематических специальностей) недостаточно мотивированы для изучения математики:

- Недостаточный уровень математической подготовки вчерашних школьников и как следствие - сложности с усвоением нового материала;
- Отсутствие убежденности, что изучение математики необходимо для овладения выбранной специальностью;
- Высокий уровень формализации при изложении теоретического материала.

Перед преподавателями высшей школы стоит сложная задача – пробудить интерес у студентов к изучению математики. Эта деятельность должна быть постоянной и последовательной. Для повышения мотивации студентов к изучению математики представляется полезным:

1. Начать изложение математического курса (возможно 1-2 лекции в рамках курса «Введение в специальность») с популярной лекции, в которой в увлекательной форме рассказать об истории развития математики, привести интересные факты применения математики в решении интересных реальных задач, рассказать о перспективах развития современной математики, постараться довести до сознания студентов, что математическая культура – это часть общечеловеческой культуры и каждый образованный человек обязан быть математически грамотным.
2. Наряду с классическими задачами, традиционно рассматриваемыми в курсе высшей математики, включать в изучаемый курс задачи прикладного

характера, демонстрируя применение математических методов при решении профессиональных задач.

3. Развивать у студентов интерес к самостоятельной учебной, исследовательской и творческой деятельности. Подходить дифференцировано к обучению студентов. Предлагать для самостоятельной работы задания разной сложности: расчетные работы, рефераты, курсовые и лабораторные работы. Наиболее способных студентов стимулировать к участию в вузовских, межвузовских и всероссийских конференциях. Самостоятельная творческая работа предполагает изучение теоретического материала, создание плана исследования, анализ полученных результатов и презентацию своей работы. Такие работы должны быть доступны студентам по сложности выполнения, предполагать свободное владение материалом, изученным по вузовским программам. Вместе с тем, самостоятельные творческие работы, выполненные отдельными студентами под руководством преподавателей и доложенные авторами перед студенческой аудиторией, способствуют повышению мотивации к изучению математики.

Например, уже на первом курсе после изучения методов решения систем линейных уравнений студентом МГТУ МИРЭА И.А. Балыко была выполнена работа «Решение системы линейных уравнений с числом уравнений, превосходящих число неизвестных», которая была доложена перед студентами второго курса и будет опубликована в тезисах Международной конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования». Интерес к этой работе вызван тем, что обычно в курсе «Алгебра и геометрия» на первом курсе рассматриваются только методы решения совместных систем линейных уравнений. Однако в процессе экспериментальных исследований возникают системы несовместных систем линейных уравнений и автор в своем докладе приводит один из методов нахождения оптимального решения некоторых несовместных систем.

Другим примером самостоятельной творческой работы может служить работа студента 2-го курса МГТУ МИРЭА Фримучкова А.Н. «Аппроксимация функций с помощью ортогональных полиномов» [1], выполненная под руководством проф. Розановой С.А. После изучения рядов Фурье в курсе математического анализа наиболее способные студенты в рамках дополнительных самостоятельных заданий выполняли лабораторные работы. В частности, Фримучков А.Н. проанализировал разложение функций по различным системам ортогональных функций, сравнил результаты разложений и рассказал о применении аппроксимации сигналов в различных радиотехнических задачах.

Хорошим примером повышения интереса к изучению математики в высшей технической школе является демонстрация связи изучаемых студентами разделов математики и их использования при изложении теоретических вопросов в специальных дисциплинах. Так, например, в работе [2] демонстрируется вывод уравнений электродинамики на основе материалов, изученных в курсе «Векторный анализ».

Творческие работы, самостоятельно выполненные студентами под руководством преподавателей, обязательно должны быть рассказаны перед студенческой аудиторией. Это приучает докладчиков излагать свои мысли, отвечать на неудобные вопросы и должно способствовать проявлению интереса к самостоятельной работе у остальных студентов.

Литература

1.Фримучков А.Н. Аппроксимация функций с помощью ортогональных полиномов. Труды международной конференции «Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство» Цахкадзор, 2014г.,стр.343-348.

2. Балыко А.К., Балыко И.А. Вывод уравнений электродинамики из уравнений механики.

Электронная техника, в. 2(509). 2011г.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 26-14-20004

О программе дополнительного образования, направленного на развитие математических способностей обучающихся

Лазарев В.А., Кузнецова Т.А

Центр современного образования

e-mail viktor_lazarev@mail.ru

Трудно найти такую область человеческой деятельности, где не потребовалась бы должная математическая подготовка. Труд рабочего, техника, инженера становится всё более интеллектуальным, что требует постоянного творчества, поискового и логического мышления, а это требует прочных математических знаний, умений и навыков. Чтобы их получить, нужно много трудиться, трудиться с интересом и увлечённостью.

Данная образовательная программа кружка «Занимательная математика. Творческое развитие.» относится к естественнонаучной направленности и ориентирована на формирование в системе дополнительного образования детей интереса к математике. Программа, разработанная в НМС по математике с целью её реализации в Центре детского творчества г. Москвы, реализует одно из основных концептуальных положений - развитие творческого мышления с помощью математики с раннего возраста.

Вопросами развития математических способностей детей занимались многие учёные – теоретики и практики. Ознакомиться с такими работами можно по книгам [1-4] и др.

Новизна образовательной программы состоит в том, что подобраны задачи, которые будучи поставленными перед детьми заставляют их задуматься, задуматься над условиями задачи, над составлением плана поиска решений, над ходом решения задачи, возможной проверкой действий, проверкой результатов.

Программа ориентирована на развитие интереса к размышлениям над задачей, поискам путей решения, на развитие интеллектуальных, коммуникативных, эстетических, исследовательских сфер деятельности ребенка, формирование творческой активности, на развитие духа состязательности, трудолюбия, ответственности и честности.

Педагогическая целесообразность образовательной программы состоит в том, что она разработана специально для работы с учащимися разного возраста с намерением развития у детей интереса к математике.

	Занимательная математика. Творческое развитие.
Современность	Внедрение в учебный процесс индивидуального подхода к обучению, используя современные технические средства.
Доступность	Возможность создания разновозрастных групп, работа по индивидуальным траекториям.
Комплексность	Многообразие задач из разных сфер деятельности, разных областей знаний и практики.

Цель.

Способствовать развитию интереса к математике, развитию мотивации к изучению математики, развитию математических способностей с помощью системы нестандартных занимательных задач.

Задачи программы.

Попытаться сделать занятия математикой интересными и познавательными.

Учить понимать условия задач (что известно в задаче и что требуется определить), в частности, задач с яркими и оригинальными сюжетами.

Учить навыкам самостоятельного поиска решений математических задач.

Показать разнообразие подходов к решению математических задач.

Формировать трудолюбие и упорство при решении математических задач.

Развивать аккуратность и ответственность за конечный результат при решении любых задач.

Формировать навыки коллективной работы и духу соперничества, состязательности.

Виды задач.

Обучающие:

знакомство с историей возникновения математических задач;

знакомство с исторической терминологией;

обучение навыкам и умениям использования условий задачи, открытых и замаскированных;

овладение умением работать с различными видами информации, в том числе графической, текстовой.

Развивающие:

расширение кругозора на истории развития математики и на биографических данных математиков;

расширение представлений у обучающихся о постановке задач;

развитие межпредметных связей, развитие пространственного воображения, логического и визуального мышления;развитие мелкой моторики рук (узлы в математике);

развитие речевого аппарата, знаний о профессиях;

формирование устойчивого интереса к познавательному творчеству;

развитие творческой инициативы обучающихся: самостоятельный выбор методов решения, средств и способов представления результатов;

развитие чувства прекрасного в математике.

Воспитательные:

содействие в будущем профессиональному самоопределению обучающихся;

раскрытие воспитательных возможностей математического творчества; воспитание информационной потребности;

развитие культуры общения;

развитие творчески активной личности;

формирование гражданственности и патриотизма;

формирование активной жизненной позиции.

Отличительной особенностью программы «Занимательная математика. Творческое развитие» является её универсальная направленность:

- развить математические способности;
- приобщить обучающихся к использованию компьютерных технологий;
- привить умения осваивать новый материал;
- формировать честность и хороший эстетический вкус;
- формировать и развить устойчивый интерес к самообразованию;
- выявить личностный творческий потенциал.

Данная программа рассчитана на работу с детьми от 8 до 14 лет.

Срок реализации программы – один год .

Программа предполагает разноуровневые знания у учащихся.

Форма занятий групповая.

Занятия проходят – 2 раза в неделю по 2 часа. Численность обучающихся в группе не более 10 человек.

Каждое занятие включает в себя организационные моменты и здоровьесберегающие технологии (минутки релаксации, перерывы на отдых, режим проветривания помещения).

Допускается дистанционное консультирование, используя IT – технологии.

Структура проведения занятия (2 часа)

Организационный момент - 10 минут.

Учебное занятие - 45 минут.

Перерыв - 10 минут.

Учебное занятие - 45 минут.

Завершение занятия, подведение итогов, уборка рабочего места - 10 минут.

Ожидаемые результаты

Программа рассчитана на один год обучения.

_К концу обучения обучающиеся будут иметь представление

о стандартных задачах, нестандартных задачах, олимпиадных задачах;

смогут понять и изложить доступно условия нестандартных задач, предлагать варианты решений.

Содержание программы

1. Логика и забавные логические задачи. (10 ч.)

Задачи, при решении которых определяющим фактором является обнаружение связей между данными задачи и их анализ, при этом, результатом является формулирование последовательных суждений, а любые вычисления и построения играют вспомогательную роль или совсем отсутствуют.

2. Занимательные задачи и развитие математических способностей. (10 ч.)

Занимательные задачи полезны тем, что ими можно увлечь и заинтересовать детей на длительный период. Размышления могут продолжаться дома с родителями, по пути в школу или на специальном конкурсе, на школьном празднике. Важно то, что возможны некоторые намёки, маленькие подсказки и даже указания.

3. Математика без вычислений. Рассуждения, таблицы, графы. (8 ч.) Затейные задачи вызывают интерес, любопытство, создают затруднения. Но часто их решения находятся без вычислений, с помощью рассуждений, таблиц и графов

4. Развитие математических способностей учащихся на задачах геометрии (24ч.):

а. геометрическое зрение,

б. задачи на разрезание фигур,

в. аналитико-синтетические методы при решении задач со спичками.

Программа предусматривает формирование интереса к математике постановкой и решением практически значимых для школьника задач (вычислить площадь участка сложной формы, найти расстояние между домами, объём зданий, привести рисунки корабля или самолёта и т. п.).

5. Развитие мотивации к изучению курса геометрии(24 ч.).

На специально подобранном геометрическом материале, интересных задачах формируется стремление понять важнейшие положения (определения, аксиомы, правила, постулаты), формируется понимание и необходимости доказательств. Что отличает математику от многих других предметов.

а. задачи по теме «точки и прямые».

б. комплексные творческие задачи,

в. распределение деревьев, цветов, монет.

6. Проблемные задания: «трёхточечники», «четырёхточечники», игры с шашками (10 ч.).

Программой предусматриваются постановка проблемных геометрических заданий. Это предполагает такую организацию учебных занятий, которая создаёт под руководством педагога ситуацию активной самостоятельной деятельности учащихся по поиску решения, в результате чего и происходит творческое овладение знаниями, умениями, навыками.

7. Задачи на пространственное воображение. Разбиение плоскости и пространства. Стратегии поиска решений исследовательских задач. (10 ч.)

Исследовательские задачи в программе нацелены на добывание знаний через учебную деятельность и развитие мышления. Планируются такие задачи, где возникает проблемная ситуация, где наличных знаний недостаточно и надо их либо переосмыслить, либо найти новые и применить в сложившейся ситуации.

8. Задачи с оригинальным содержанием. Задачи, сформулированные в олимпиадном стиле. (16 ч.)

Программой планируется постановка и решение олимпиадных задач. Как правило, такие задачи не требует знаний, выходящих за рамки школьной программы. Но они обычно сформулированы так, что не принадлежат ни к одному из стандартных типов задач школьного математического курса. Поэтому решение каждой такой задачи требует особого подхода, наличие творческости, нестандартности мышления.

9. Математика и поэзия. Математика и шахматы. Математика и социальные проекты (14 ч.)

Язык математики - язык рассуждений и доказательств. Но означает ли это, что в математике не найдется места лирике? На программных занятиях приводятся интересные контрпримеры. Математический фестиваль. Социальный проект: «Здоровье в твоих руках. О вреде курения»

Литература.

1. Гусев В.А., Психолого-педагогические основы обучения математике. Изд.Академия (Academia), 2004 г
2. Лазарев В.А. Педагогическое сопровождение одарённых старшеклассников. Изд.Яр. ПГУ.2005 г.
3. Левитас Г.Г., Нестандартные задачи по математике. Изд. Илекса, 2014г
4. 4.Муштари Д.Х, Подготовка к математическим олимпиадам. Изд. Каз.МО.2000 г.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 14-26-20004

К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕНЕНИИ ОТНОШЕНИЯ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОБРАЗОВАНИЮ В ОБЩЕСТВЕ.

Лазарев В.А., Розанова С.А.

Центр современного образования

e-mail viktor_lazarev@mail.ru, srozanova@mail.ru

В настоящее время в стране сложилась благоприятная обстановка, чтобы реально изменить отношение всех, или, по крайней мере, большинства активных членов российского общества к математическому образованию.

24 декабря 2013 г. распоряжением № 2506-р Правительства РФ утверждена Концепция развития математического образования в Российской федерации. Для реализации положений этой Концепции был разработан и утверждён 3 апреля 2014 г. (Пр.№265) План мероприятий Минобрнауки России по реализации Концепции.

Концепция на стадии подготовки длительное время обсуждалась специалистами и общественностью и в конечном виде представляет собой солидный материал. План мероприятий по реализации Концепции также разработан со знанием дела и знанием проблем в математическом образовании и в образовании в целом. В Плане сформулированы мероприятия относящиеся к: общесистемным мероприятиям, общему образованию, профессиональному математическому образованию, математическому просвещению и популяризации математики. Определены сроки реализации мероприятий и ответственные исполнители. Предусмотрен мониторинг и контроль реализации мероприятий.

Для нашей проблемы «Развитие мотивации к изучению математики в современном мире» принятые правительством документы исключительно важны и полезны, конечно, при ответственном подходе со стороны Правительства, руководителей регионов, руководителей образовательных учреждений, бизнеса, родителей учащихся и самих учащихся. Это и будет первым изменением отношения к математическому образованию - ответственность исполнителей.

1. Ответственность всех исполнителей за принятые решения на всех уровнях от правительственных чиновников до учителя и учащегося. Четкое исполнение принятых документов, поручений, обязательств – это одно из главных концептуальных положений изменения отношения к образованию в обществе.

По сути, все перечисленные органы власти, юридические и физические лица должны быть включены в процесс исполнения мероприятий, должны быть мотивированы теми или иными способами достигать промежуточных или конечных целей. За ходом исполнения мероприятий должен быть контроль общественности и контрольно-ревизионных органов. Реализация мероприятий, определённых Планом на период до 2020 года, демонстрация достигнутых целей. безусловно, повысит уровень математических знаний школьников, студентов и выпускников учебных заведений, изменит отношение в обществе к математическому и естественнонаучному направлениям.

Остановимся на финансовом обеспечении Плана мероприятий по реализации Концепции - главной составляющей успешной реализации мероприятий Плана.

2. Обеспечение необходомого финансирования для успешной реализации мероприятий – важнейшее концептуальное положение изменения отношения к развитию математического образования.

Приказом № 265 от 03.04.2014г. «Финансовое обеспечение Плана мероприятий в 2014 году будет осуществляться в пределах бюджетных ассигнований, предусмотренных Министерству образования и науки Российской федерации Федеральным законом «О федеральном бюджете на 2014 год и на плановый период 2015 и 2016 годов» на реализацию государственной программы Российской Федерации «Развитие образования на 2013-2020 годы».

Таким образом, важнейшие мероприятия Плана, а многие и судьбоносные для российского математического образования мероприятия, придётся реализовывать при весьма ограниченном бюджетном финансировании. Правда, нужно отметить, что в 40 мероприятиях Плана из 64 примут «участие органы исполнительной власти субъектов РФ, осуществляющих государственное управление в сфере образования». Но известно, что и здесь финансы ограничены и запланированы уже в каждом регионе на свои проекты на ближайшие годы.

Продолжая обсуждение вопроса финансового обеспечения Плана мероприятий, отметим, что, с нашей точки зрения, а она основана на анализе

большого перечня практических работ авторов, педагогов школ и вузов, руководителей образовательных учреждений, представителей фондов и т.д., требуется специальная работа с бизнес-сообществом, направленная на вовлечение бизнеса в развитие образования, в данном случае в развитие математического образования. В России есть научные фонды государственные (РФФИ, РГНФ, РНФ), частные благотворительные фонды (фонд В. Потанина, фонд О. Дерипаски, фонд Д. Зимина и др.), поддерживающие науку и образование, но было бы полезно создать специальный фонд, нацеленный на реализацию мероприятий Концепции. Математика – фундаментальная и всепроникающая наука, это с одной стороны, с другой стороны - математические результаты, даже выдающиеся, не дают сиюминутной выгоды. Не является броским и труд математика, как, например, спортсмена, музыканта, эстрадного певца, шоумена и т.д. Здесь мы не умаляем труд уважаемых специалистов. Просто подчёркиваем, что труднее найти бизнесменов, которые бы были согласны на отсроченные результаты. Но это возможно и даже необходимо целенаправленно мотивировать бизнес на развитие математики и математического образования. При соответствующей разъяснительной работе Правительства, индивидуальном подходе вполне может быть подобран бизнес, которому по

- плечу создание фонда для возрождения математики и математического образования. Проведённые и проводимые масштабные мероприятия (Сочинская олимпиада, реформирование вооружённых сил и др.) в нашей стране говорят о том, что решаются же нужные проблемы качественно и в необходимые сроки. Реализация Концепции развития математического образования не менее важная в стратегическом плане проблема, чем вышеприведённые. Если же ограничиться только бюджетным финансированием, согласно приказа Правительства №256 от 03.04.2014, высококачественно реализовать мероприятия Концепции не удастся.

Есть ещё один источник финансирования мероприятий. Это, так называемое самофинансирование. Безусловно, за счёт активизации участников мероприятий, часть мероприятий (выездные школы, конференции, семинары др.) можно провести и, с учётом этого, самофинансирование нужно развивать. Но при таком подходе можно только поддержать какой-то уровень, на существенное же развитие значимых мероприятий едва ли можно рассчитывать.

Мы достаточно подробно остановились на финансировании мероприятий. Дело в том, что финансовая составляющая любого мероприятия должна показывать насколько оно значимо для общества и остаётся в памяти современников. К сожалению, достаточно часто недофинансирование проведения мероприятий ведёт к некачественному исполнению, что вызывает отрицательное отношение к самим мероприятиям.

Перейдём к следующему важнейшему концептуальному положению, направленному на изменение отношения к математическому образованию - развёртыванию математического просвещения и популяризации математики и математических знаний.

3. Средства массовой информации, издательства, лекции и семинары для родителей, популярные лекции о роли математики в современном мире для студентов в рамках курса «Введение в

специальность», привлечение студентов к работе в УИРС, НИР как важнейший механизм популяризации математики и обеспечения устойчивого интереса к ее изучению.

Здесь мы отметим два положительных момента, которыми необходимо воспользоваться, чтобы сформировать новое отношение к математическому и естественнонаучному образованию в российском обществе.

Первое. Пока ещё сохранился опыт тех процессов и периодов, когда с помощью целенаправленных воздействий со стороны Правительства – жесточайшей ответственности, необходимых финансовых вливаний и массированной пропаганды за короткий срок удавалось достигать нужных результатов. Мы приведём только несколько примеров. Рекрутирование лучших выпускников школ конца 50-х и начала 60-х годов на физико-математические и инженерные специальности, связанные с радиофизикой и ядерной физикой, несколько позже – наборы на вычислительную математику и прикладную математику. В результате произошло изменение общественного мнения. Молодёжь моментально среагировала на новые перспективные направления.

Второе. В утверждённом плане мероприятий по реализации Концепции развития математического образования определены важнейшие в настоящий момент специальные мероприятия для развёртывания математического просвещения и популяризации математики. Несомненно, что отношение в обществе к математическому образованию изменится в лучшую сторону при успешной реализации мероприятий.

Ниже мы приведём перечень этих мероприятий с нашими небольшими комментариями и нашим видением:

- Организация разработки навигаторов (информационных образовательных порталов) образовательных услуг в области математики. Исследования показывают, что информацию разного рода о дополнительном образовании по математике нужно доносить до населения, родителей и учителей любыми доступными средствами и, конечно, используя, в первую очередь, информационные технологии.

- Поддержка созданных на конкурсной основе интерактивных музеев математики, персональных музеев российских математиков. Конечно, здесь важно оказать поддержку и тем, кто хочет создавать интерактивные музеи, инициаторам. Именно на начальном этапе нужна как финансовая помощь, так и методическая.

- Поддержка создания математических интернет порталов и социальных сетей, сервисов для разработки и презентации творческих продуктов и проектов, массовых открытых онлайн курсов в области математики. Эти мероприятия – настоящий пласт для курсовых и дипломных работ студентов разных специальностей и вузов. Для активизации этой работы понадобится поддержка таких структур как деканаты математических факультетов, математические кафедры, НМС по математике Министерства образования и науки РФ.

- Поддержка создания центров интересной науки и эксплоратуриумов. Центры и музеи интересной науки привлекут детей разного возраста, создание их возможно как в городах, так и небольших поселениях, где также нет недостатка в одарённых и любознательных детях.

- Поддержка и распространение успешных практик дополнительного образования (в том числе - кружков), направленных на развитие математических способностей обучающихся. Хорошо известна в этом направлении работа в школах Москвы, Дубны, Звенигорода, Казани, Краснодара, Красноярска, Новосибирска, Петрозаводска, Рязани и. др.

- Организация разработки интерактивных систем тестирования знаний и компетенций в области математики для различных категорий населения. Известно, что использование обучающих компьютерных программ, средств и технологий (интерактивная доска, интерактивный планшет и интерактивная система тестирования) при обучении математике существенно повышают познавательный интерес к предмету, повышается учебная мотивация, повышается качество знаний обучающихся.

- Поддержка социально значимых тематических телевизионных программ и радиопрограмм, документальных фильмов и игровых фильмов о математиках и математической деятельности.

- Организация мероприятий по присвоению образовательным организациям имён известных российских математиков и математического просвещения с целью увековечения их памяти и патриотического воспитания молодёжи.

Организация разработки календаря знаменательных дат и событий в области математики.

Последние три направления Плана мероприятий заслуживают особого внимания. Дело в том, что Научно-методический совет по Математике Министерства образования и науки РФ (НМС) в последние годы, обеспокоенный снижением у значительной части молодёжи мотивации к изучению математики, проводил и проводит посильные действия к изменению ситуации. Это достаточно хорошо отражено в наших материалах. В НМС ведётся определённая работа именно по этим направлениям, работа связана с известными советскими и российскими учёными- математиками и педагогами А.Н. Колмогоровым, С.М. Никольским, Л.Д. Кудрявцевым. Есть короткометражные фильмы, изданы их труды, проводятся международные конференции, посвящённые этим выдающимся учёным, продолжают работу их научные школы, есть проекты более эффективной популяризации математических знаний, включая всемирно-известные результаты российских математиков последних лет.

Но, очевидно, нужен специальный проект (фонд), который бы возродил интерес к математике на всех уровнях, а следовательно будет социально-экономически и технически сильная Россия.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 14-26-20004

МОТИВАЦИЯ И СИТУАЦИЯ УСПЕХА КАК ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАЗВИТИЯ ИНФОРМАЦИОННО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БАКАЛАВРОВ-БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ ИНФОРМАТИКИ

к.п.н., доцент М.С. Мирзоев

Московский педагогический государственный университет, Россия

119435, г. Москва, ул. Малая Пироговская, д.29, каб. 52

Тел.: 89096449279, e-mail: sharifmir64@gmail.com

В профессионально-педагогической подготовке бакалавров - будущих учителей информатики (БУИ) развитие фундаментального и математического образования сопровождается созданием и реализацией ряда педагогических условий, среди которых важное место занимает создание условий побуждения мотивации и ситуация успеха. Мотивация и ситуация успеха как педагогические условия в подготовке БУИ, с одной стороны позволяют развивать предметную математическую направленность, характеризуют отношение студента к предмету и процессу его познания, а с другой стороны, создают условия ситуации успеха для самореализации, самосовершенствования в процессе профессиональной подготовки через стимулирование информационно-математической деятельности студента, уважения к себе и к окружающей среде.

Опираясь на работы [1], [2], [3], под ***информационно-математической деятельностью учителя информатики,*** будем понимать его деятельность, направленную на изучение, анализ, синтез и исследование информационных объектов, информационных процессов, рассматриваемых в рамках среднего общего образования, а также построение информационных моделей средствами и методами математики, реализуемых средствами ИКТ.

В Федеральных государственных образовательных стандартах второго поколения учебные предметы «Математика» и «Информатика» представлены в единой предметной области, что констатирует процесс взаимовлияния математики и информатики, который требует развитие информационно-математической деятельности БУИ, для повышения уровня преподавания информатики и подготовки учащихся в сфере ИТ.

Под интеграцией предметных областей «Математика» и «Информатика» будем понимать объединение в единое целое содержательных линий, общих для математики и информатики, общих понятийных аппаратов, общих организационных форм, методов обучения и инструментов деятельности, общих методологических подходов к профессиональной деятельности учителей информатики и математики, общности средств прикладного и инструментального программного обеспечения, используемого как объект изучения и средства обучения соответственно в информатике и математике.

Целью интеграции предметных областей «Математика» и «Информатика» (Журавлев Ю.И., Семенов А.Л. и др.) является повышение фундаментальной, практической подготовки, формирование общекультурных компетенций обучающихся, что влечет за собой необходимость усиления фундаментальной, математической подготовки бакалавров педагогического образования профиля «Информатика», специальности «Информатика», т.е. будущих учителей информатики (БУИ) в педагогических вузах.

Мотивация и ситуация успеха как педагогические условия приобретают особую актуальность в контексте интеграции предметных областей "Математика" и "Информатика", позволяющей рассматривать как единое целое содержательные линии, общие для математики и информатики, общие понятийные аппараты, общие организационные формы, методы обучения и инструменты деятельности.

Анализ работ исследователей (Анохин П.К., Ломов Б. Ф., Леонтьев А. Н. и др.), показал что, мотивационная структура личности состоит из множества элементов и имеет иерархическое строение. Из них особую значимость для анализа и прогноза деятельности студента имеют такие элементы структуры, которые занимают в ней доминирующее положение. Определение доминирующих мотивов позволяют судить о направленности личности, ставить вопрос о ее устойчивости и переходить от констатации поведения и деятельности к их прогнозу.

Целостная характеристика уровня сформированности мотивации у студентов должна отражать единство предметной направленности и социально-поведенческой стороны мотивации. Предметная информационно-математическая направленность мотивации характеризует отношение студента к содержательной линии предметных областей "Математика" и "Информатика" и процессу его освоения. Социально-поведенческая сторона мотивации отражает личностный аспект целостной характеристики личности. Эта сторона тесно связана с личностной позицией студента в освоении интеграции предметных областей "Математика" и "Информатика", которая показывает специфические для него отношения к научному миру, товарищам, коллективу, самому себе. В содержательной характеристике мотивации социально-поведенческий аспект определяет сущность взаимоотношений субъектов образовательного процесса, т.е. отвечает на вопросы, для чего и ради чего студент стремится к учению. А создание условий ситуации успеха для самореализации, самосовершенствования в процессе профессиональной подготовки развивает информационно-математическую деятельность будущего учителя информатики.

С другой стороны, согласно теории деятельностного подхода в обучении (Гальперин П.Я., Давыдов В.В., Занков Л.В. и др.), информационно-математическая деятельность становится необходимым условием формирования мотивов участия будущего учителя информатики в поисках, анализе, синтезе, исследовании информационных объектов, информационных процессов через осознание им собственных проблем, способствует побуждению мотивации на всех этапах обучения и стимулированию потребностей к самосовершенствованию, самореализацию.

Для выявления успеваемости студента требуется учет компонентов, характеризующих информационно-математическую деятельность будущего учителя информатики. В качестве таких компонентов выступают: умение применять полученные знания из предметных областей "Математика" и "Информатика" на практике; умение составлять и реализовывать информационные и математические модели; умение корректно осуществлять обобщение; умение осуществлять полноту и выдержанность классификации информационных объектов, процессов; умение осуществлять математическую обработку информации; умение анализировать сложность алгоритма и оценить эффективность алгоритма.

Таким образом, в развитии информационно-математической деятельности БУИ большую роль играет мотивация и создание ситуации успеха.

Литература:

1. Журавлев Ю.И. Фундаментально-математический и общекультурный аспекты школьной информатики. Народное образование. № 3 . 2006.
2. Садовничий В.А. Об информатике и ее преподавании в школе./Доклад на Всероссийском съезде учителей информатики. –М., 2011. – 24 с.
3. Семенов А.Л. Современный курс математики и информатики в школе. http://ecsocman.hse.ru/data/2011/01/19/1214869480/Semenov.pdf

М. А. Мкртчян

НЕОБХОДИМОСТЬ И ПРОБЛЕМЫ ИНДИВИДУАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Предисловие

Мы будем исходить из следующих основополагающих положений педагогического мировоззрения (см. [1]; [2], стр. 38):

Первый. Каждый здоровый человек может освоить любой учебный материал.

Второй. Дети отличаются не своими возможностями усвоить тот или иной материал, а индивидуальными способами и средствами освоения этого материала.

Третий. Интерес ученика к изучаемому материалу определяется не содержанием этого материала, а успешностью действий ученика в процессе освоения этого материала.

В общеобразовательных задачах принципиальное значение имеет вопрос о том, на каком качественном уровне усваивается учебный материал. Существуют разные варианты классификации, позволяющие характеризовать качество усвоения учебного материала (см. например [3]; [4]; [5]). При этом, как замечает Парсамян В. для обеспечения усвоения высоких качественных уровней необходимо обеспечение усвоения учебного материала, как минимум, на уровне понимания ([6]), Понимание есть сугубо индивидуальный процесс и зависит от индивидуальных особенностей учащихся. Поэтому задача обеспечения возможности для каждого учащегося усвоить учебный материал на уровне понимания неизбежно приводит к необходимости индивидуализации процесса обучения. Заметим также, что именно понимающий уровень усвоения способствует усилению эмоционального компонента мотивации к изучению математических дисциплин.

Некоторые рассуждения о понимающем уровне усвоения математических фактов и явлений

Безусловно можно вызубрить формулу корней квадратного уравнения и успешно решать задачи на нахождения корней разных квадратных уравнений, при этом не понимая почему эти формулы именно такие. Доказательство можно осуществить путем прямой подстановки. Мы склонны считать, что вывод этих формул более ценен не ради доказательства, а ради их понимания и ради самого метода получения таких формул.

Рассмотрим другой пример – теорема Пифагора. Ее восприятие как “сумма квадратов катетов равняется квадрату гипотенузы” позволяет решить много интересных геометрических задач, а разнообразные доказательства этой теоремы позволяют почувствовать красоту математической действительности и безусловно способствует развитию логического мышления учащегося. Однако ее переосмысление как “соотношение между сторонами в прямоугольном треугольнике” характеризует глубину понимания теоремы Пифагора, вызывает интерес к поиску других соотношений между сторонами в прямоугольном треугольнике и выводит на более широкое представление об этих соотношениях. А именно: “ сумма катетов больше гипотенузы, сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, а сумма кубов катетов меньше куба гипотенузы”.

Еще один пример. Хорошо известно, что если у двух многочленов одного комплексного переменного совпадают прообразы единицы и прообразы нуля, то эти многочлены тождественно равны. Известно очень изящное доказательство этого явления (см. [7]). Однако это доказательство убеждая в справедливости самого явления, не обнаруживает его причину. Причина же становится понятна за счет другого факта. Дело в том, что количество разных точек, где многочлен принимает значение ноль или один больше, чем степень этого многочлена (см. [8]).

Проблемы индивидуализации математического образования

Нам неоднократно приходилось отмечать, что исходная проблема нынешней общеобразовательной практики это проблема обеспечения деятельностной включенности каждого члена учебной группы в учебный процесс (см. [9]; а также [2], стр. 22). Она исходная потому, что её прямым следствием являются другие трудности и проблемы общего образования. Это относится и к проблеме индивидуализации математического образования.

Вообще педагоги уже признают, что при нынешнем способе организации обучения задача реализация идей индивидуального подхода является серьезной проблемой.

Например, И.К. Журавлев, И.Я. Лернер пишут: «… нужно отдавать себе отчет в том, что в условиях классно-урочной системы индивидуализация обучения как принцип его эффективной организации не может получить своего идеального воплощения. Поэтому реально индивидуализация обучения осуществляется через дифференцированный подход к организации обучения различных групп учащихся. Чем больше таких групп оказывается в поле зрения учителя в каждый момент времени урока, тем выше достигаемый ими уровень индивидуализации обучения» (см. [10], стр. 293).

О. Г. Грохольская говорит: «Дидактика должна решить, как индивидуализировать обучение. На уровне содержания это предполагает многомаршрутные дидактические системы в рамках одного предмета… на уровне технологии и методики обучения – поэлементное структурирование материала, позволяющее представить его через мелкие, средние и крупные блоки». ([11], стр. 47). А.В. Хуторской замечает: «Не было ответа на вопрос, как могут существовать индивидуальные пути обучения при общем среднем образовании и при общих стандартах» ([11], стр. 44). А вот Александрова Е. считает, что сегодня индивидуальные образовательные траектории в рамки классической педагогики не вписываются([12], стр. 244). И далее «полагаем, что учебно-воспитательный процесс индивидуализации образования невозможно планировать и организовывать так же, как прежде планировался и организовывался традиционный учебный процесс. С точки зрения управления оно нуждается совсем в других методах непланового управления, не руководства, не контроля, а обеспечения условий, самоуправления и самоорганизации» ([12],, стр.249).

Фактически актуализируется задача создания такой технологии организации учебного процесса, которая позволила бы реализовать индивидуальные образовательные программы обучающихся в условиях их совместной деятельности.

Позволим себе отметить еще раз, что способ организации учебного процесса, практикуемый во всех образовательных учреждениях, характеризуется наличием так называемого общего фронта - ситуация, когда все члены учебной группы в каждый конкретный момент времени делают одно и то же, одним и тем же способом, одними и теми же средствами за одно и то же отведённое на это дело время. Именно это обстоятельство препятствует тому, чтобы при организации учебного процесса ориентироваться на индивидуальные особенности каждого ученика, именно оно является главной помехой обеспечения деятельностной включенности каждого ученика в учебный процесс. Фактически, решение исходной проблемы обусловлено отказом от принципа соблюдения общего фронта при организации учебного процесса. Более точно, решение этой проблемы связано с соблюдением принципа отсутствия общего фронта при организации учебного процесса. По сути дела, речь идет о создании нового типа учебного процесса, что в свою очередь будет инициировать становление новой образовательной практики (об этом подробно см. [2]; а также [13]).

Литература

1. Мкртчян М. А. О книге Л. Д. Кудрявцева «Мысли о современной математике и ее изучении» // В кн.: «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования. Труды международной конференции», том 3, М., 1998, стр. 120.
2. Мкртчян М. А. Становление коллективного способа обучения // Красноярск, 2010 г. – 228 с.
3. Сочень Л.Т Влияние профессиональной позиции педагога на уровень самостоятельности учащихся. 2000. Некоторые вопросы философии и методологии образования, superinf.ru/view_helpstud.php?id=5637
4. Блум Б.«Таксономия Образовательных Целей: Сфера Познания», 1956. https://ru.wikipedia.org/
5. Выгодский Л. С. Мышление и речь. Москва 1934. 324 ст.
6. Парсамян В. Г. // Армянский педагодический журнал “Манкажаржутюн” (Педагогика), 6, 2014 г, стр.
7. Adams W., Straus E. Non-archimedian analytic fanctions taking the same values at the same points. – Ill. J. Math., 1971, v. 15, pp 418 – 424.
8. Мкртчян М. А. Об одной задаче Янга // в кн. Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа, Красноярск, 1980 г.. стр. 237-242.
9. Мкртчян М. А. Исходная проблема практики школьного образования // Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего

профессионального образования : тезисы докладов Международной научно-образовательной конференции. – М. : РУДН, 2009. – с. 714-716.

10. Теоретические основы процесса обучения в советской школе / Под ред. В.В. Краевского, И.Я. Лернера; Научн.-исслед. ин-т общей педагогики АПН СССР. – М.: Педагогика, 1989. – 320 с.
11. Перспективные направления развития дидактики [круглый стол] // Педагогика. – 2007 г., № 6.
12. Александрова Е. Индивидуализация образования: учится для себя // Народное образование, № 7, 2008 г., стр. 243-250.
13. www.kso-kras.ru

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ МОТИВАЦИИ УЧАЩИХСЯ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ

Посицельская Л.Н, Горбачева Н.А.

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет

125319, Москва, Ленинградский проспект, д.64

Тел.: 89035614178, e-mail: posicelskaja@yandex.ru

ГБОУ Центр образования «Технологии обучения»

119842, Москва, Резервный проезд, д.10

Тел.: 89096397937, e-mail: ninagor@list.ru

Проблемы в преподавании математики в школе и в вузе были всегда. И ранее, как и сейчас, были те, кто совсем не понимал, что говорил преподаватель, кто постоянно задавал вопросы “а зачем это нам нужно”, кто пытался искать ответ или решение у соседа, в книге, или где-то ещё, лишь бы не решать самому. В наше время – время стремительного развития информационных технологий – эти проблемы не исчезли, более того, они видоизменились, и за счет этого стали более сложными для решения. Это связано с обилием различных пособий с решениями, или просто решебников к существующим учебникам и задачникам, с появлением программных средств, по запросу выдающих решение той или иной задачи. И если существует возможность легко получить решение, то ученику, выполняя домашнее задание, трудно удержаться, чтобы им не воспользоваться.

Решение этой проблемы видится в применении особых педагогических приемов[1]: разбиение выполнения задания на этапы, использование нестандартных формулировок задач, индивидуальная и групповая рефлексия и т.д. Возникает необходимость так организовать работу учащихся, чтобы использование готового решения было недостаточно для выполнения задания: требовать от учащихся описания алгоритма или плана решения, проводить взаимообмен заданиями и взаимопроверку.

Важно также убедить школьника, что самому решить трудное задание гораздо интереснее, чем просто списать. Для того, чтобы подготовить ученика к самостоятельному выполнению домашнего задания, надо давать учащимся больше возможностей работать в классе без учителя (индивидуально или в группах). Созданию творческой атмосферы способствует включение в уроки дидактических игр, мини-соревнований, использование различных форм уроков.

В связи с развитием тестовой формы контроля знаний отошла на второй план практика изложения логики решения задачи, которая раньше была нормой. Борясь за повышение баллов учащихся на ЕГЭ и будучи ограниченными учебным временем, учителя всё меньше уделяют внимания рассуждениям, доказательствам, подробной записи решения задач. Это мешает пониманию смысла решения, препятствует развитию логического мышления у детей, убивает положительную эмоциональную реакцию ребенка на победу над задачей.

В такой ситуации проблема мотивации школьников и студентов к изучению математики оказывается особенно важной. В Центре образования «Технологии обучения» мы ищем разные пути решения этой задачи: используем современные программы для демонстрации математических теорий (Живая Математика, GeoGebra, Cabri3d и др.), виртуальные модели, которые показывают красоту математики[2]. Большое значение придаем демонстрации практического применения математики. На уроках математики учащиеся решают практико-ориентированные задачи. В старших классах подростки начинают задумываться о профессии, в выборе которой им может помочь профильная подготовка, в том числе разработка проектов. Так, мечтающий заняться химией разрабатывает проект о методах решения задач на смеси и сплавы, а будущие инженеры изучают применение математики в технике. С интересом проходит работа на проектами "Математика и спорт", "Практическая геометрия", "Математика в быту" и т.д. В банке заданий ЕГЭ есть блок прикладных задач, но некоторым детям тексты задач с физическим, экономическим содержанием сложны для восприятия. Однако они с интересом решают задачи, имеющие прикладное бытовое значение. Дополнительную мотивацию к изучению математики дают интегрированные курсы, созданные на стыке математики и других школьных дисциплин («Математика с компьютером», «Орнаменты», «Геометрический калейдоскоп», «Необычные фигуры и головоломки»). Многие школьники выбирают занятия на факультативном курсе «Математика в нашей жизни», в котором на примере анализа жизненных ситуаций дети осваивают математические понятия и учатся использовать знания, полученные на уроке. В элективном курсе «Математика с компьютером» учащиеся решают задачи по математике, используя различные компьютерные программы. Занимаясь на данном курсе, многие дети, используя компьютер в качестве помощника, начинают с большим интересом решать примеры, уравнения, геометрические задачи.

Большую роль в формировании активного и творческого подхода ребенка к учебе вообще и к изучению математики в частности играет отношение к этому вопросу окружающих: семьи, друзей, родственников. Если близкие люди, мнение которых важно для школьника, интересуются только отметками и баллами за тесты, то списывание или бездумное выполнение задания по образцу представляется ему вполне уместным. Если же он слышит вопрос о том, сам ли он справился с такой трудной задачей, и его хвалят не за пятерку (или не только за пятерку), а за смекалку, упорство, знания, то у ученика формируется система ценностей, в которой личные качества и компетенции важнее оценок.

Проблема мотивации связана с развитием ребенка, что важнее любых формальных параметров, но убедить в этом общественность не удастся до тех пор, пока портфолио школьника не будет реально учитываться наравне с баллами и оценками.

Литература

1. Посицельская Л.Н., Горбачева Н.А. Подходы к внедрению новых ФГОС по математике в старшей школе. // Третья научно-методическая конференция «Новые образовательные программы МГУ и школьное образование. Тезисы докладов. Ноябрь 2013. Москва. С. 24-25

2. Горбачева Н.А., Посицельская Л.Н. Технологии учебного взаимодействия на дистанционных уроках математики.// Материалы Международной научно-практической заочной конференции «Дидактика XXI века: Инновационные аспекты использования ИКТ в образовании», 2014. Самара, с. 214-217

ПРОБЛЕМЫ ПОСТАНОВКИ И ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

Пунтус А.А.

Московский авиационный институт (государственный технический университет).

125871, Москва, Волоколамское шоссе, дом 4

Тел.: 84991584395, e-mail: artpuntus@yandex.ru

Содержанием данной статьи является накопленный автором многолетний опыт преподавания отдельных разделов высшей математики на факультете прикладной математики и физики Московского авиационного института (МАИ). Успешная реализация цели усвоения материала курсов высшей математики достигается тремя путями: использование современных методов преподавания математических дисциплин, привлечение наиболее продвинутых студентов к активной научно-исследовательской работе, и, наконец, оправдавшая себя такая эффективная форма, как обучение студентов по индивидуальному учебному плану.

Примером современного метода преподавания математических дисциплин может служить преподавание автором курса обыкновенных дифференциальных уравнений путём достаточно строгого изложения теории и методов отдельных разделов данного курса в современной векторно-матричной и операторной форме. Так, в данной форме нормальная система дифференциальных уравнений записывается в виде:

$$y' = A(x)y + f(x),$$

где $y, f(x)$ – векторы, $A(x)$ – функциональная матрица, или в эквивалентной операторной форме $L(y) = f(x)$, где $L(y) = y' - A(x)y$ – линейный оператор. В этой форме достаточно наглядно и строго легко доказываются как свойства решений соответствующей линейной однородной системы, так и данной неоднородной. При таком доказательстве свойств решений систем линейных дифференциальных уравнений обязательно проводится сравнительное рассмотрение понятия и определения оператора с понятием и определением функции и функционала (их определённой общности и различия).

С использованием такой формы нормальной системы дифференциальных уравнений даётся достаточно математически строгое и в то же время относительно простое доказательство теоремы существования и единственности решения начальной задачи для системы дифференциальных уравнений и дифференциального уравнения высшего порядка в векторно-матричной форме для общего случая их постановки. Доказываются важнейшие следствия этой теоремы, проводится исследование свойств гладкости этих решений и их зависимости от параметров, начальных данных и правой части системы. В отличие от традиционного подхода основные свойства решений линейных дифференциальных уравнений и линейных систем дифференциальных уравнений рассматриваются одновременно в наглядной, доступной и математически строгой координатной, векторно-матричной и операторной формах. При изложении в данном курсе объединённого раздела линейных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений даётся наглядное и строгое обоснование возможности сведения задачи интегрирования одного из данных объектов к задаче интегрирования другого из них. Кроме того, предлагается редкий вывод формулы Остроградского-Лиувилля-Якоби, а также изложение важного для приложений приближённо-аналитического метода малого параметра. Излагаемые методы интегрирования иллюстрируются примерами типовых задач, решаемыми с достаточно подробными пояснениями и комментариями. В качестве примера прикладных задач, которыми можно воспользоваться для иллюстрации лекционного материала или заданий по различным видам учебных занятий и самостоятельной работы студентов по данному курсу, приводятся примеры различных видов приложений дифференциальных уравнений к прикладным задачам авиационной техники.

Кажется, что привлечение студентов к научно-исследовательской работе меньше всего связано с усвоением материала различных математических курсов. Однако, целый ряд возможностей открывается при этом не только с точки зрения взаимодействия в этом случае научного и учебного процессов, но и появляется вероятность более глубокого усвоения традиционных учебных курсов, входящих в цикл фундаментальной подготовки. Здесь, прежде всего, используются самые широкие возможности для иллюстрации связи учебного процесса с практическим применением получаемых в учебном процессе знаний, используемых в практической научно-производственной деятельности. В данном случае, при преподавании фундаментальных математических дисциплин постоянно включаются примеры приложений методов данных дисциплин в прикладных задачах механики, физики и техники.

Опыт привлечения наиболее продвинутых студентов к активной научно-исследовательской работе, т.е. реализации процесса активного взаимодействия учебного и научного процессов на факультете прикладной математики и физики Московского авиационного института показал, что главной целью такого взаимодействия учебной и научной деятельности является привитие будущим инженерам навыков научного подхода к решаемым инженерным задачам. Наряду с совершенствованием учебного процесса, весьма эффективным средством практического приложения полученных физико-математических знаний является широкое привлечение студентов к творческой деятельности – научно–исследовательской работе студентов (НИРС). Этой конечной цели и должны быть подчинены различные формы соединения учебного и научного процессов. Участвуя в НИРС, будущий специалист убеждается в необходимости самостоятельного поиска путей постановки и решения прикладных задач, построения и исследования их математических моделей, приобретает навыки творчества. Нормой его поведения становится осознанное отношение к активной трудовой деятельности, что обеспечивает его готовность к самостоятельной профессиональной деятельности.

На современном этапе развития НИРС, многообразии её форм и методов термин НИРС стал собирательным. Он включает в себя самые различные стороны учебной, научной, воспитательной и организационной деятельности вуза, которая обеспечивает:

– условия успешного овладения студентами своей специальностью;
– подготовку студентов к самостоятельной творческой деятельности;
– развитие навыков использования полученных физико-математических и других знаний в практической работе;
– формирование потребности и умения постоянно накапливать и совершенствовать знания;
– расширение научно – технического кругозора;
– воспитание всесторонне развитой личности.

Для обеспечения этих видов деятельности проводится увеличение сложности и объёма знаний, умений и навыков, приобретаемых студентами в учебное и вне учебное время. Кроме того, обеспечивается преемственность методов и форм подготовки специалистов при переходе от одних знаний к другим, от курса к курсу. Решение вопросов совершенствования творческой подготовки студентов возможно только на основе всё большего соединения НИРС с учебным процессом, когда НИРС становится его полноправной формой, а учебный процесс, в свою очередь, помогает решать научно–технические, производственные и общественно–воспитательные задачи вуза.

Возможности для взаимодействия научного и учебного процессов, в первую очередь, открываются в традиционных, в том числе математических, курсах, входящих в цикл фундаментальной общеинженерной подготовки. Здесь, прежде всего, используются широкие возможности для иллюстрации связи учебного процесса с будущей производственной или научно–производственной деятельностью. В частности, при преподавании фундаментальных дисциплин этому способствует включение примеров приложений материала преподаваемых дисциплин в прикладных задачах физики, механики и техники.

ПРОБЛЕМА РАЗВИТИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ В СОВРЕМЕННОМ ОБЩЕСТВЕ И НЕКОТОРЫЕ ПУТИ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Розанова С.А.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики(т/у)

Москва, пр. Вернадского, 78

e-mail srozanova@mail.ru

Развитие мотивации обучающихся к изучению математики является одной из важнейших проблем развития математического образования в стране. В утвержденной 24 декабря 2013г. Концепции развития математического образования в РФ среди обозначенных в ней проблем на первом месте стоит проблема мотивационного характера: «Низкая учебная мотивация школьников и студентов связана с общественной недооценкой значимости математического образования…» [1]. Действительно, среди ряда разнообразных причин возникновения этой проблемы, в дополнение к указанным в [1], можно отметить следующие:

1. сложность математики как учебного предмета и трудность ее усвоения массовым школьником и студентом (красиво подчеркнул это качество математики Б.Рассел: «Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой холодной и суровой, подобной красоте скульптуры, возвышенно чистая, способная к такому строгому совершенству, которое доступно только величайшему искусству»);
2. не всегда удовлетворительное качество преподавания математики в школах и вузах;
3. предметное содержание учебного материала бывает неадекватно сложившимся социальным реалиям;
4. качество подготовки учителей и преподавателей нуждается в совершенствовании.

Необходимость исследования вызвана сложившимся в последнее время негативным отношением к математике в нашем современном обществе (в выступлениях некоторых ученых, педагогов, писателей в СМИ, в том числе и на канале «Культура»).

Проблема уменьшения негативного отношения к математике является важной не только для России, но и для других стран. Так, например, краковские школьники обратились к члену государственного совета с просьбой посодействовать отмене преподавания в школах математики, поскольку, по их мнению, она ни для чего не нужна.

Актуальность проблемы обусловлена: возрастанием роли математики в естествознании, компьютерных и гуманитарных науках; падением интереса к получению математических знаний в молодежной среде России, Армении, Польше и др. странах. **Уровень фундаментальности** обусловлен тем, что эта проблема, как и сама математика, является важнейшим приоритетом существования и процветания государства и общества, а также научно-технического прогресса.

Научная новизна определяется предлагаемым комплексным подходом к решению поставленной задачи:

- формулирование концептуальных положений развития мотивации к изучению математики и создание методик их реализации, направленных на приоритетное отношение общества и государства к математике;
- рассмотрение развития мотивации к изучению математики школьников и студентов вузов различных профилей;
- рассмотрение проблемы для общества в целом (государственные структуры, средства массовой информации, бизнес, семья и пр.).

Практическая значимость: Полученные результаты могут быть использованы школами, вузами и обществом в целом (государство, СМИ, бизнес, семья)

Возникает дилемма:

- Либо уступить негативным требованиям общества и сократить число часов на математику или вообще ее отменить.
- Либо «поступить так, как учит природа, которая разбрасывает тысячи зерен, хотя лишь несколько из них упадут на плодородную почву. И из этих нескольких зерен позже вырастут Паскаль, Гаусс и Больяи…» (Г.Штейнгауз из книги «Математика – посредник между духом и материей»).

Все это вызывает острую необходимость решения обозначенной проблемы.

В настоящий момент существует некоторое количество исследований как российских, так и зарубежных исследователей педагогов и психологов по проблемам развития мотивации к изучению математики. Но в педагогических работах (диссертациях, статьях) они носят характер исследований для конкретных категорий обучаемых (и далеко не для всех), например, «Развитие мотивации к изучению математики учащихся классов лингвистической направленности» (Вельмисова С.Л.), «Формирование мотиваций к изучению математики как технология эффективности обучения учащихся» (Плехова Л.М.) и др. Другая группа исследований направлена на поиск всевозможных игровых ситуаций для повышения интереса учащихся, увлечение которыми выхолащивает фундаментальность самой математики.

Изучение мировых рейтингов образовательных систем и анализ состояния образования, в том числе математического, в ряде стран (Армения, Россия, Япония, Китай, Сингапур, США, Германия, Финляндия и др.), проведенный совместно с соискателями проекта из Армении, позволяют отметить следующее:

1. Рост интереса к математике как к учебному предмету наблюдается в системах образования, в которых максимально снижены или полностью преодолены учебные трудности. Переход от одной темы к другой считается недопустимым, пока предыдущий материал не усвоен на соответствующем уровне.
2. Постановка предмета «Математика», образовательные условия, созданные в странах – лидерах образовательных систем (Южная Корея, Япония, Сингапур, Китай, Финляндия, Великобритания и др.), предъявляемые требования, теоретико-методологические и психологические подходы преподавателей (используемые методы, средства и формы представления информации, психолого-педагогические условия) достойны более глубокого изучения.
3. Во всех странах для повышения мотивации к изучению математики кроме обязательного достойного финансирования, важна еще *«культура образования»*, стимулирующая желание учиться, *вера общества* в важность образования и его высокую моральную ценность.
4. Для повышения мотивации к изучению математики в обществах России и Армении необходимо:

4.1. обеспечить поиск совершенствования подходов к преподаванию математики, выделение тех базовых идей и методов в математике, овладеть которыми необходимо каждому образованному человеку (концептуальные положения), создание соответствующих примерных программ; создание инновационных пособий по математике, обеспечивающих наглядность математических идей и их приложений, содержащих исторические факты, задачи практического характера, занимательные задачи и т. п., повышающие мотивацию.

4.2. создать концепцию развития мотивации и методики ее реализации (а также необходимый план реализации).

Некоторые пути решения проблемы [2]:

1. **Поддержка решения проблемы на государственном уровне**.

В ряде развитых стран за последние годы значительно увеличился интерес к изучению математики, благодаря определенной, часто жесткой, политике государств, понимающих важность развития фундаментальных наук для своих стран. Например, в Европейском союзе, который является одним из богатых регионов в мире, поддержка науки и образования, в том числе и математического, осуществляется через важнейшие инструменты региональной политики – структурные фонды (Европейский фонд регионального развития, Европейский социальный фонд и др.). Европейский социальный фонд разработал оперативную программу «Человеческий капитал». В этой программе выделены 9 приоритетов, из которых важное место занимают высокое качество системы образования, высшее образование и наука.

В США еще при Буше-младшем по результатам работы экспертной комиссии принята программа приоритетных направлений, в которой важнейшее место занимает повышение качества математического образования. Такие меры на государственном уровне дают мощный импульс для развития научных и психолого-педагогических исследований.

Другим примером может служить выставка Гете-Института «Ощути математику», которая проходила в феврале 2013 г. в Политехническом музее Москвы под девизом «Делай сам и думай сам».

Президент России В.В. Путин 7 мая 2012 года подписал Указ «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки», в котором, в частности, поручается Правительству Российской Федерации разработать и утвердить в декабре 2013 г. Концепцию математического образования в Российской Федерации на основе аналитических данных о состоянии математического образования на различных уровнях образования.

Московский Департамент образования в 2012 г. в Доме Учителя г. Москвы под руководством министра образования г. Москвы, начальника Московского Департамента образования И.И. Калины провел совещание о проблемах математического образования, в работе которого приняли участие представители Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки РФ (НМС), директора ряда физматшкол, директор ЦНМО И.В. Ященко и др. В результате 2-х часовой беседы и обмена мнениями участники совещания пришли к выводу о необходимости разработки ряда предложений и мер по повышению мотивации к изучению математики в современном обществе.

Большой вклад в решение обозначенной проблемы будет внесен при выполнении плана реализации концепции математического образования [3].

Весь мир ищет пути, формы и методы развития мотивации к изучению математики в быстро меняющихся условиях существования человечества.

2. Роль государственно-общественной организации «Научно-методический совет по математике Министерства образования и науки» (НМС) в решении проблемы.

НМС ставит перед собой **цель** по разработке и внедрению научно-учебно-методического комплекса, организационных и научно-практических мероприятий, обеспечивающих повышение качества математического образования учащихся средней школы, НПО, СПО и студентов ВПО нематематических специальностей.

НМС сформулировал предварительный план и некоторые направления работ по повышению мотивации к изучению математики учащимися и студентами.

1). Создание научно-учебно-методического комплекса по математике (НУМКМ), направленного на повышение мотивации к изучению математики, базовым в этом комплексе является сборник программ по математике для всех образовательных направлений [4].

Обобщение опыта преподавания курса «Математика и информатика» студентам гуманитарных специальностей и экспертиза существующих ГОС последнего поколения и на этой основе

- выделение тех базовых идей и методов математики, овладеть которыми необходимо всем (концептуальные положения);
- создание соответствующих примерных программ;
- создание инновационных пособий по математике, в том числе и электронных, обеспечивающих наглядность математических идей и их приложений, содержащих исторические факты, задачи практического содержания, занимательные задачи и т.п. и повышающих мотивацию;
- разработка методических материалов для повышения научного уровня учебников, учебных пособий и методических рекомендаций учителям математики [5].

2). Разработка и апробация организационных и научно-практических мероприятий по внедрению НУМКМ:

- проведение творческих семинаров для преподавателей средних школ, НПО, СПО и ВПО на базе НМС (МИРЭА и РУДН);
- создание лектория для родителей, школьников и студентов для формирования правильных представлений о сути математики, её роли в обычной жизни, её значения при выборе будущей профессии. С этой целью использовать средства массовой информации, в том числе и

телепрограмму «Академия» на канале «Культура», и привлекать членов НМС для достижения этой цели;

- привлечение преподавателей математики и талантливых учеников физматшкол (и, возможно, других школ) к участию в школах молодых учёных, российских и международных конференциях, ежегодно проводимых НМС, с публикацией научных и научно-методических результатов;

- приглашение ведущих учителей математики школ к участию в работе секции средних школ, секции средних технических учебных заведений, секции компьютерной поддержки математического образования;

- проведение соревновательных мероприятий по математике для массового участия школьников и студентов с целью воспитания их успешности (пилотный проект на инновационных площадках НМС);

- создание программ с включением мотивационной составляющей и организация курсов повышения квалификации педагогов высших школ[6].

3. **Необходимость объединения усилий научно-педагогической общественности на мировом уровне для проведения психолого-педагогических исследований по проблеме «Развитие мотивации к изучению математики в условиях реформирования образования: школы, вузы, общество».**

В итоге для реализации этих планов необходимо:

- провести сравнительный анализ состояния развития мотивации к изучению математики и методики их реализации для школ, вузов (педагогических, технических, экономических);
- разработать концептуальные положения развития мотивации к изучению математики и методики их реализации для школ, вузов (педагогических, технических, экономических, гуманитарных);
- структурно рассмотреть в определении мотивации ее профессиональную и общекультурную составляющие;
- сформулировать концептуальные положения, направленные на изменение отношения к математическому образованию в социуме (государство, СМИ, бизнес);
- на основе этих концептуальных положений разработать психолого-педагогическую концепцию состояния развития мотивации к изучению математики и методики их реализации для школ, вузов различного профиля;
- разработать методики использования информационных технологий как эффективного механизма повышения мотивации к изучению математики в школах;

- организовывать и проводить международные конференции, симпозиумы, семинары серии «Образование, наука, экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство», математические школы для молодых ученых и одаренных школьников, рассматривая их как эффективный механизм повышения мотивации к изучению математики.

Все это требует комплексного подхода к решению этой актуальной проблемы Для этого необходимо рассмотреть следующий алгоритм ее решения, для ответа на поставленные вопросы:

1. Что такое мотивация и ее развитие?

2. Особенности математики как науки и учебного предмета.

3. Модернизация образования: плюсы и минусы.

4. Мотивационная сфера учеников, обучающихся в современной школе.

5. Мотивационная сфера студентов, обучающихся в современных вузах различного профиля.

6. Методология развития мотивационной сферы обучающихся в школе и вузе: общие и отличительные компоненты.

7 Информационные технологии как эффективный механизм повышения мотивации к изучению математики.

8. Формирование концептуальных положений, направленных на изменение отношения к математическому образованию в обществе (государство, СМИ, бизнес, семья).

9. Пути реализации концептуальных положений как в рамках реализации плана Концепции [3], так и в дополнение к нему.

10. Методики реализации

Нами разработана классификация концептуальных положений

1. Концептуальные положения – общие (универсальные) для средней и высшей школ: оптимальное развитие мотивационной сферы личности обучаемого должно включать в себя интегративное взаимодействие триады компонентов внешней и внутренней мотиваций: мотивации достижения, самоопределения и интеллектуального напряжения в изучении математики на основе дифференциации и сложности взаимодействия когнитивных и личностных подсистем.
2. Концептуальные положения, специфические для средней школы.

3. Концептуальные положения, специфические для высшей школы (развитие профессиональной мотивации с использованием математических методов и моделей).
4. Специфические положения с учетом профиля вуза (технические, педагогические, экономические, гуманитарные).
5. Концептуальные положения для общества, государства, СМИ, бизнеса.
   5.1. Поддержка общества, государства, СМИ, бизнеса (политическая, организационная и материальная) - основа развития мотивации к изучению математики в современном обществе;
   5.2. Основополагающие государственные документы.

Универсальные концептуальные положения для общества в целом:

1. Социально значимый уровень понимания обществом в целом (государство, СМИ, семья, бизнес) роли математики и математического образования в современном мире - залог развития мотивации к изучению математики в образовательных структурах.

2. Необходимость владения специалистами любого профиля математической культурой (на разных уровнях) – ответ на вызов современного состояния общества в его синергетических и технологических проявлениях .

3. Развитие мотивации к изучению математики с раннего детства на основе развертывания фундирующих иерархических структур обобщенных математических знаний и актуализации личностных предпочтений.

4. Непрерывность и преемственность развития математической культуры и мотивации к изучению математики в школе и в вузе в неразрывной взаимосвязи с развитием эмоционально-волевой сферы и творческой самостоятельности обучающихся.

5. Интегративный рост компонентов триады внешней и внутренней мотивации к изучению математики – одно из основных условий оптимального развития мотивационной сферы личности.

6. Актуализация выраженности индивидуального стиля как ответ на изменчивость, вариативность и открытость образовательных ситуаций, необходимость использования «мягких» моделей

образования и развития мотивационной сферы изучения математики.

7. Повышение требований к профессиональным стандартам педагогической деятельности (школы, СПО, высшей школы) на основе системогенеза психологической системы деятельности, профессиональной идентичности требованиям профессии и высокой степени актуализации профессиональной мотивации.

8. Использование информационно-коммуникационных технологий и дистанционного обучения как эффективный механизм повышения мотивации к изучению математики и роста информационной культуры педагога и ученика на основе коммуникаций.

9. Адаптация современных достижений математики и ее приложений к экономике, науке, технике и производственной сфере к содержанию и инструментализации математического образования на различных уровнях.

10. Проектирование и реализация исследовательского поведения школьников (студентов) в условиях актуализации наглядного моделирования в развертывании фундирующих конструктов математического знания, инсайтов и рефлексии при активном взаимодействии учебных предметов и интеграции математических, информационных, гуманитарных или естественнонаучных знаний создает атмосферу повышения мотивации к изучению учебного материала;

11. Развитие технологии внедрения *оснащенных спиралей фундирования математических знаний* в процесс обучения математике студентов гуманитарных (естественнонаучных) направлений и специальностей университетов на основе обоснованного отбора обобщенных математических конструктов и дидактического анализа выполнимости и адекватности технологических новшеств в актуальном поле гуманитарного (естественнонаучного) знания ведет к активизация мотивационных и когнитивных структур в процессе изучения математики способствовала положительным изменениям в личностном развитии и успешности освоения математической деятельности студентов.

12. Формирование и развитие *интегративных конструктов интеллектуальных операций* (моделирование, понимание, планирование, прогнозирование, принятие решения) как механизмов развития практического мышления на основе диагностики и развертывания фундирующих процедур практико-ориентированного характера, направленных на решение частных, конкретных задач эффективно реализуются в ходе ресурсного взаимодействия математических, информационных, гуманитарных (естественнонаучных) знаний, повышения самостоятельности, ответственности за принимаемые решения (включая волевой и нравственный аспекты) в переходе от размышления к действиям;
13. Разработка требований, критериев, параметров и показателей оценки учебно-методических материалов нового поколения для обеспечения мотивирующего изучения математики на основе процессов интеграции профессионально важных знаний и наглядного моделирования учебных элементов. Разработка экспертных таблиц и оценочных показателей требований к учебно-методическим материалам нового поколения.
14. Приоритет в создании насыщенной информационной среды: диалог культур, полифункциональная деятельность, интеграция предметных, информационных, гуманитарных и естественнонаучных знаний, экспериментальная и поисковая активность с реальными предметами, использование информационно-коммуникационных технологий.
15. Поддержка и развитие доминантной модальности восприятия (диагностика модальностей восприятия, построение индивидуальных образовательных траекторий, вариативность и технологическая поддержка средствами обучения, оптимизация функционирования других модальностей (знаково-символической, вербальной, образно-геометрической и конкретно-деятельностной) за счет диалога культур и работы в малых группах, переход процессов развития в процессы саморазвития).

В разработке этих положений значительное участие кроме автора статьи принял профессор ЯрГПУ Е.И. Смирнов. Положения разработаны в рамках проекта РГНФ № 14-26-20004

Литература

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. Распоряжение Правительства РФ от 24 декабря 2013г. №2506-р, Москва.

2. . С.А. Розанова О проблеме повышения мотивации к изучению математики в современном обществе, Труды Международной конференции, Армения, Цахкадзор, март 2014г., стр.50-54.

3. Об утверждении плана мероприятий Министерства образования и науки РФ по реализации Концепции развития математического образования в РФ, Приказ Министерства образования и науки РФ №265 от 3 апреля 2014г.

4. С.А. Розанова, Т.А. Кузнецова и др. Сборник примерных программ математических дисциплин цикла МиЕН Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования третьего поколения. Москва, РУДН, 2009,с. 1-166.

5. Е.И. Смирнов Единство математики в задачах на основе фундирования опыта наглядного моделирования будущего педагога. Proceedings of Global International Scientific Analytical Project " Subject and object of cognition in a projection of educational technologies and psychological concepts", 2014, London.-pp.34-41

6. С.А. Розанова, Т.А. Кузнецова Проект программы повышения квалификации преподавателей математики высшей технической школы. Труды Международной конференции, Армения, Цахкадзор, март 2014г., стр. 554-561.

Работа выполнена в рамках проекта РГНФ 14-26-20004

О ПОВЫШЕНИИ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМИ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ.

Розанова С.А., Кузнецова Т.А.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики(т/у)

Москва, пр. Вернадского, 78

e-mail srozanova@mail.ru, kuzta@yandex.ru

В высших технических учебных заведениях сложилось противоречие между необходимостью получения глубоких фундаментальных математических знаний и недостаточно мотивированным отношением студентов к вузовскому курсу математики. Назрела необходимость попытаться изменить отношение студентов к математическому знанию и тем самым повысить мотивацию к получению качественного математического образования.

Мотивация - общее название процесса побуждения учащихся (школьников, студентов) к продуктивной познавательной деятельности. Мотивация – основное средство повышения уровня заинтересованности студентов в изучении той или иной дисциплины и, в частности, математики. Причем, мотивационными процессами в обучении нужно управлять, создавая условия для развития внутренних мотивов студентов. Можно различать следующие мотивы для обучения: социальные, познавательные, профессиональные и т. д. Совокупность этих мотивов образует общую мотивацию для обучения.

Мотивация к изучению математики неразрывно связана с целью, необходимостью и потребностью изучения этой дисциплины. Целью изучения математики в техническом вузе является приобретение будущими молодыми специалистами:

- умения составления математических моделей профессиональных задач ;
- знания математических методов, применяемых в их конкретной специальности;
- достаточной математической эрудиции для дальнейшего самостоятельного использования новых математических методов в последующей профессиональной деятельности.

Концептуальные положения развития мотивации к изучению математики в технических вузах обусловлены спецификой соответствующей специальности, выбранной студентами. Мы выделяем следующие специфические положения:

1. ***Формирование математической культуры – закономерность учебного процесса по математике в современном техническом университете, основанном на 10 принципах*** [1, стр.72].
2. ***Соответствие программ по математике вуза (факультета, специальности) и программ по специальным дисциплинам***[2].

Математика с ее универсальным языком играет все возрастающую роль не только в естественных и технических отраслях, но и в гуманитарных науках. Но математика продолжает бурно развиваться и все больше специальных разделов математики находят свое применение в смежных науках. Вместе с тем развитие вычислительной техники открыло широкую дорогу применения численных методов при решении классических и профессиональных задач. Поэтому при разработке рабочих программ по математике требуется жесткий отбор материала, основанный на потребности конкретной специальности.

3. ***Создаваемые в настоящее время УМКД – эффективный механизм обеспечения профессионально-направленного обучения математике.***

Если исходить из того, что студенты сознательно поступили в данный технический вуз для приобретения конкретной специальности, то мотивацией к изучению математики для студента будет постоянное подтверждение применения математических методов при решении профессиональных задач. Но эти задачи должны быть реально доступными на каждом этапе изучения математики. В учебно-методические комплексы по математике, создаваемые для каждой специальности по всем изучаемым разделам математики, необходимо включать различные виды самостоятельных работ с практическим содержанием (доклады об истории создания и развития изучаемого метода, исторические справки о выдающихся ученых, расчетно-графические лабораторные работы, курсовые работы и т.д.).

4. Использование готового пакета прикладных программ для решения вычислительных и графических задач.

Студенты обладают навыками быстрой ориентации в информационном пространстве. Поэтому во многих случаях (из-за нехватки времени) можно отказаться от аналитических методов решения задач (которые редко встречаются в реальной жизни), а включить практически во все разделы высшей математики изучение вычислительных аспектов изучаемых тем. Среди задач типовых расчетов, предлагаемых студентам, должны быть задачи, требующие расчетно-графического решения.

Выделенные четыре специфических для технических вузов и пятнадцать универсальных концептуальных положений могут быть реализованы с помощью следующих современных образовательных технологий:

1. ***Осуществление деятельностного подхода при обучении математике в инженерном вузе.***

Формирование личностных свойств, в том числе потребностей, мотивов, интересов, возможно только в процессе специально организованной целенаправленной деятельности**.** В такой деятельности формируется творческая личность, выступающая деятельностным субъектом, целостно реализующим и развивающим свои способности. К сожалению, выпускники средних школ, за редким исключением, не приучены рассуждать логически, анализировать результаты своих действий, самостоятельно наметить путь решения задачи. Поэтому перед высшей школой стоит задача восполнить этот пробел, приучать студентов к самостоятельной работе, используя различные методические приемы.

2. ***Осуществление личностно-ориентированного подхода, учитывающего индивидуальные особенности и способности каждого студента в процессе обучения математике*** [3].

Разноуровневое дифференцированное математическое образование будет способствовать повышению интереса (мотивации) к изучению этой дисциплины. Интерес к любой деятельности возникает после того, когда появляется понимание и вера в то, что человек может. Поэтому очень важно при разработке заданий для самостоятельной работы студентов учитывать возможности каждого студента, предлагать задания разного уровня сложности, поощряя за выполнение заданий повышенной сложности.

3. ***Технология межпредметных связей.***

Совместная работа преподавателей математических и специальных кафедр позволит создать банк профессиональных задач, используемых на занятиях по математике, и подготовит студентов для решения профессиональных задач на специальных кафедрах на четырех уровнях сложности [4]:

- Профессиональные аналоги классических математических задач;
- Учебные профессиональные задачи;
- Учебно-исследовательские профессиональные задачи;
- Исследовательские профессиональные задачи.

4. ***Информационно – коммуникационные технологии, как фактор повышения качества математического и профессионального образования.***
5. ***Метод проектов как способ реализации компетентностного подхода в современном учебно-воспитательном процессе.***

Все вышеизложенное предполагает наличие высоко квалифицированных педагогических кадров, способных обеспечить осуществление поставленных целей по повышению мотивации к изучению математики в вузе. Развитие современной системы образования характеризуется переходом к непрерывному образованию, новым пониманием целей и ценностей образования, осознанием необходимости обновления содержания и технологий образования. Реформирование системы образования требует в целом и, прежде всего, совершенствования преподавательского состава высшей школы. Один из традиционно сложившихся способов повышения квалификации преподавателей высшей школы – это регулярное прохождение курсов повышения квалификации.

Целью повышения квалификации преподавателей математики высшей технической школы является получение дополнительных компетенций, что в конечном итоге ведёт к повышению качества математического образования в вузах. Программа, предназначенная для преподавателей математических кафедр технических вузов [5], планирующих повысить свою квалификацию, должна предполагать

- **повышение знаний преподавателей в предметной области в двух направлениях**: углубление математических курсов, преподаваемых в данном вузе; ознакомление с новейшими математическими курсами (фракталы, бифуркации, математика и суперкомпьютеры и др.);
- **ознакомление с новыми технологиями** преподавания математики в вузах

(индивидуализация обучения, деловая игра, технология дистанционного обучения и др.);

- **овладение инструментарием решения профессионально-прикладных задач** по профилям вузов (в инженерии, экономике, биологии, медицине, химии, социологии и.т.д.) ;
- расширение знаний в направлении **использования готового пакета прикладных программ для решения математических и прикладных задач**;
- знакомство с **новыми технологиями проверки и оценки** результатов обучения;
- **возможность включения** в свои учебно-методические комплексы (УМК) **мотивационной составляющей;** (например, популярной лекции о роли и значении математики в профессии).

- **возможность обсудить** предлагаемые методики и поделиться своим опытом преподавания.

Поскольку предположительно уровень слушателей подготовительных курсов повышения квалификации достаточно высок, то в качестве лекторов следует привлекать ведущих специалистов в соответствующих областях науки.

Одним из основных принципов построения такой программы должен быть модульный принцип. Необходимо наличие нормативного модуля, психолого-педагогического модуля, модуля математического моделирования профессионально-прикладных программ, модуля повышения мотивации к изучению математики. Модуль предметной области должен быть представлен по направлениям: углубление знаний, новые знания и современные технологии.

Литература

1. С.А. Розанова Математическая культура студентов технических университетов. М., Физматлит, 2003г.

2. С.А. Розанова, Т.А. Кузнецова и др. Сборник примерных программ математических дисциплин цикла МиЕН Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования третьего поколения. Москва, РУДН, 2009,с. 1-166

3. Е.И. Смирнов Единство математики в задачах на основе фундирования опыта наглядного моделирования будущего педагога**.** Proceedings of Global International Scientific Analytical Project " Subject and object of cognition in a projection of educational technologies and psychological concepts", 2014, London.-pp.34-41

4. С.А. Розанова О проблеме повышения мотивации к изучению математики в современном обществе, Труды Международной конференции, Армения, Цахкадзор, март 2014г., стр.50-54.

5. С.А. Розанова, Т.А. Кузнецова Проект программы повышения квалификации преподавателей математики высшей технической школы. Труды Международной конференции, Армения, Цахкадзор, март 2014г., стр. 554-561.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 14-26-20004

МОТИВАЦИЯ КАК ЦЕЛЕВАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ПОВЫШЕНИЯ ИНТЕРЕСА К МАТЕМАТИКЕ В СОВРЕМЕННОМ ОБЩЕСТВЕ

Розанова С.А., Санина Е.И.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики(т/у)
Москва, пр. Вернадского, 78
e-mail srozanova@mail.ru, esanmet@yandex.ru

При рассмотрении связи обучения и развития человека важно отличить, что

а) Саморазвитие - есть сложное и инволюционно-эволюционное поступательное движение, в ходе которого происходит прогрессивные и регрессивные интеллектуальные личностные поведенческие деятельностные изменения в самом человеке.

б) Развитие, особенно личностное, продолжается до момента прекращения самой жизни, меняясь только по направлению интенсивности характеру и качеству.

С. Л. Рубинштейн формулирует это понятие следующим образом: «Под деятельностью понимают активность субъекта, направленную на изменение мира, на производство или порождение определенного объективного продукта материальной и духовной культуры»[1].

Основоположником отечественной теории деятельности является А. Н. Леонтьев.

В структуре деятельности он выделяет три звена.

1) Мотивационно-ориентировочное;
2) Исполнительно-операционное
3) Контрольно-оценочное.

Первым элементом структуры учебной деятельности является учебно-познавательные мотивы. Мотив – это то, что побуждает человека к деятельности и связано с удовлетворением определенной потребности.

Так, исполнительно-операционное звено осуществляется в форме действий или цепи действий. Действие, имея определенную цель, осуществляется разными способами в зависимости от условий, в которых это действие совершается. Эти способы осуществления действий называют операциями.

Учебная деятельность имеет свои специфические особенности.

Во-первых, учебная деятельность учащихся направленная на усвоение и применение знаний, должна завершаться не становлением умственных действий, а реализаций этого действия в практической деятельности.

Во-вторых, в жизни деятельность побуждается фактически не одним мотивом, а несколькими и представляет собой цепь каких-то действий.

В-третьих, формирование у учащихся основных действий строится в процессе обучения как движение по спирали. Согласно этому положению, действие в учебном процессе может стать деятельностью на следующем этапе обучения.

Сложившаяся практика предметного обучения в педагогических учебных заведениях отражает объективную необходимость дифференциации социально-педагогического знания, способствует углублению профессиональной подготовки педагогов. «Интерес – избирательное, эмоционально окрашенное отношение человека к действительности, одна из характеристик личности». Интерес считают важнейшим побудителем любой деятельности, отсюда и значимость понимания важности этого качества личности» [2].

Кроме термина «интерес», в психолого-педагогической литературе часто встречаются такие понятия, как «мотив» или «мотивация».

По поводу взаимосвязей мотивации и деятельности В.В. Давыдов писал так: «...анализ деятельности человека можно осуществлять только тогда, когда будут определены потребность и мотивы этой деятельности, и при достаточно четком формировании их предметного содержания.

...Тот или иной мотив побуждает человека к постановке задачи, к той цели, которая, будучи представлена в определенных условиях, требует выполнения действия, направленного на создание или получение предмета, отвечающего требованиям мотива и удовлетворяющего потребность». [3]

Сама природа интереса, как и деятельности, имеет объективно-субъективные основы. Не возникает интереса к тому, что не имеет для школьников и студентов (как и для любого человека) объективного смысла, значимости, то есть интерес избирателен.

Но интерес, как и деятельность,– это качества человека, изучающего мир и отражающего его в своем сознании. С помощью интереса в изучение привносится личное начало, раскрываются возможности школьника и студента. Интерес к предмету тесно связан с ясным пониманием (восприятием) учебного материала. Психологи различают две возможности: «знания и их принятие», либо «знания и неприязнь». В отношении математики эта формула безусловно верна, однако сам процесс получения знаний и отношение ученика к ним тоже непрост и имеет много особенностей.

Существуют различные трактовки понятия *мотивация.* По мнению Л. И. Божович, сущностью мотивации является «совокупность мотивов, которая определяет ту или иную деятельность».

В. И. Ковалев под мотивацией понимает «совокупность мотивов поведения и деятельности».

Второй подход к определению мотивации учения связан с рассмотрением мотивации как *побуждений.*

Так. С. Л. Рубинштейн под мотивацией понимает «иерархическую организацию всей системы побуждений». В. Г. Асеев отмечает, что понятие «мотивация» у человека включает в себя «все виды побуждений: мотивы, потребности, интересы, стремления, цели, влечения, мотивационные установки или диспозиции, идеалы и т. д.». Чаще всего под «мотивом» понимают «любое побуждение к действию».

Из приведенных определений видно, как понятия мотивы и побуждения переплетаются и трактуются одно через другое. Для использования указанных трактовок важно знать, как различать побуждения, как их сравнивать, как связать мотивы с потребностями, целями и эмоциями.

Ниже приведем мотивы, которые можно выделить как наиболее значимые:

– «достижение поставленной цели»;

– «переживание чего-то личностно значимого для индивида»;

– «обоснование человеком своего поведения»;

– «словесно оформленное обоснование субъектом самому себе необходимости той или иной деятельности»;

– «направленность активности на предмет».

Как бы ни трактовался мотив, он необходим для успеха в любой сфере деятельности, особенно в области математики. Достаточно четко вопрос о соотношении мотивов и потребностей решается А. Н. Леонтьевым. По его мнению, за мотивом всегда скрывается проблема потребностей, но в самом понятии «потребность» мотив находится очень глубоко. «Потребность – только предпосылка деятельности, но сама по себе она еще не придает деятельности определенную направленность. Реальная же направленность деятельности вызывается предметом, отвечающим потребности, т. е. мотивом». Интересна проблема **классификации мотивов, их типологии.** Не останавливаясь на этом подробно, просто перечислим некоторые виды мотиваций.

Различают две мотивационные тенденции: тенденцию «надежда на успех» (мотив успеха) и «боязнь неудачи» (мотив неудачи).

Эти типы (виды) мотивации взяты из зарубежных изданий, предложенные формулировки нетипичны для отечественной литературы.

К предложенной классификации можно добавить следующее:

– мотив долга и ответственности;

– познавательная потребность;

– познавательный интерес как доминирующий мотив учебной деятельности.

В психологии различают *внутреннюю мотивацию,* которая складывается у самого учения и изнутри поддерживает учебную деятельность, и *внешнюю мотивацию,* складывающуюся вне самой учебной деятельности и влияющую на нее по типу внешнего подкрепления. Так, В. Э. Мильман к внутренней мотивации учения относит такие мотивы, как собственное развитие в процессе учения; познание нового, неизвестного, действия вместе с другими и для других. Такие мотивы, как понимание необходимости учения для дальнейшей жизни, процесс учения как возможность общения, являются весьма полезными в учебном процессе, хотя В. Э. Мильман считает, что их уже нельзя отнести только к внутренним формам учебной мотивации. Более насыщенными внешними мотивами являются выделенные им мотивы: учеба как вынужденное поведение, учеба ради лидерства и престижа, стремление оказаться в центре внимания. И наиболее резко выраженные внешние моменты в мотивах учебы: ради материального вознаграждения и чтобы избегнуть неудач.

В теории и методике обучения математике, к сожалению, практически не занимались изучением взаимосвязей учебного процесса с проявлениями внутренней и внешней мотивации. Об этом пока больше говорится, чем делается. В повседневной практике проводится некоторая работа по развитию у учащихся интереса к математике как учебному предмету, но, как указывалось выше, это еще не находит должного отражения, например, в действующих учебниках.

Познавательный интерес, частным случаем которого выступает интерес к учению, к учебным предметам, всегда признается важной характеристикой личности обучающегося.

Психологи и педагоги, анализируя сущность познавательного интереса, определяют его по-разному. Вот что по этому поводу писала Г. И. Щукина: «Познавательный интерес – избирательная направленность личности, обращенная в область познания к ее предметной стороне и к самому процессу овладения знаниями».

Как мотив учения познавательный интерес имеет ряд преимуществ по сравнению с другими мотивами. Он раньше, легче и отчетливее, чем другие мотивы, осознается учениками, его конкретность и реальность побуждений видна субъекту. Его легче обнаружить, распознать, вызвать и тем самым объективировать.

Г. И. Щукина вычленила признаки, отличающие познавательный интерес учащихся от других мотивов учения. Познавательный интерес – наиболее предпочитаемый школьниками мотив среди других мотивов деятельности. Познавательный интерес, «создавая внутреннюю среду» развития, существенно меняет силу деятельности, влияет на ее характер протекания и результат. Познавательный интерес развивается раньше других мотивов и взаимодействует с ними.

Следует отметить, что изложенной позиции противостоят взгляды психологов, которые не относят интерес к мотивам, указывая при этом на отличия в природе сопоставляемых феноменов.

Как общий феномен интереса познавательный интерес выражается в своем развитии различными состояниями. Условно выделяют четыре последовательные стадии его развития: любопытство, любознательность, познавательный интерес, творческий интерес.

Любопытство рассматривается нами как начальная стадия избирательного отношения, обусловленная внешними, неожиданными и необычными обстоятельствами, привлекающими внимание учащихся, вызывающими их удивление. Ученик на данной стадии довольствуется лишь ориентировкой, связанной с занимательностью того или иного предмета, той или иной ситуации. Но занимательность может послужить отправным моментом в выявлении познавательного интереса (далее будет подробно сказано о занимательности).

Любознательность, следующая важная стадия развития интереса школьника, характеризуется стремлением учащихся проникнуть за пределы увиденного. На этой стадии обнаруживаются достаточно сильные выражения эмоций удивления, радости познания, удовлетворенности деятельностью. Любознательность как устойчивая черта характера делает человеческий ум пытливым, ищущим.

В своем развитии *познавательный интерес* характеризуется познавательной активностью, ясной избирательной направленностью на учебные предметы, мотивацией, где важное место занимают познавательные мотивы. Эта стадия характеризуется поступательным движением познавательной деятельности, поиском интересующей информации.

Особую ступень занимает *творческий интерес* – это ступень активного воздействия человека на мир, с формированием мировоззрения, с его убеждениями о силе и возможностях науки. Возникновению и развитию мотивации способствует тщательно отобранное содержание материала, вынесенного на урок. Средствами, связанными с содержанием учебного материала, побуждающими формирование мотивации учения, могут быть:

– практическая значимость изучаемого материала для ученика;

– доступность учебного материала;

– новизна;

– соответствие содержания учебного материала наличным или вновь возникающим потребностям ребенка;

– наглядность и занимательность материала[4].

Каждый преподаватель постоянно сталкивается с проблемой нехватки учебного времени. Это происходит вследствие уплотнения учебного материала, сокращения числа часов, отводимых на изучение предмета, и усложнения задач обучения, призванного обеспечивать разностороннее развивающее воздействие на личность учащегося. Для разрешения этого противоречия считается важным убедительно раскрыть перед учеником значимость образования, необходимость личной заинтересованности в получении прочных знаний и перспективности самодвижения в приобретении образования. Содержание учебного предмета «математика» позволяет «встраивать» новый учебный материал в контекст ранее усвоенного. При изучении математики необходимым условием компетентности является овладение учеником основными законами и понятиями математики, математическим языком в соответствии с конкретным уровнем изучения курса. Это очень большой пласт учебного материала, нередко абстрактного характера, усвоение которого вызывает у учащихся немалые трудности. Для преодоления некоторых из них можно использовать интегративно-модульный подход в обучении.

Организация учебно-воспитательного процесса с учетом принципов адаптивно-развивающего обучения, элементом которого являются интегративно-модульный подход, дает хорошие результаты в процессе воспитания у учащихся положительной самооценки и развития мотивации учения.

Одной из самых важных проблем обучения математике, как и любой другой науке, является сохранение познавательного интереса к предмету. Слабые ученики, которым поначалу так нравятся простые математические задачи, и все кажется очень легким и доступным, которые на первых уроках «тянут руки», постепенно осознают обилие накопившихся трудностей, непонятных вопросов и учебный пыл их, не успев разгореться, быстро угасает.

Использование элементов интегративно-модульного подхода в обучении позволяет развивать у ученика желание учиться, создавать хороший эмоциональный климат в процессе учения.

Другим важным основанием внедрения данной технологии обучения явился учет специфических особенностей, присущих содержанию предметного обучения математике. Интегративно-модульное обучение стоит на позициях личностно-ориентированного преподавания математики, и предполагает создание следующих условий:

– обеспечение продвижения учащегося по отношению к его собственным успехам в предыдущей учебной деятельности;

– возможность выбора уровня сложности учебных заданий (через систему их дифференциации);

– опору в организации учебной деятельности на достоинства, сильные стороны конкретного учащегося;

– преодоление избыточной тревожности учащихся.

Создание данных условий возможно только на основе учета самооценки учащихся. Поэтому одним из важных компонентов учебной деятельности считается учет самооценки учащихся, а именно – сбор исходной информации об ученике. Для этого используют методику изучения возможностей учащихся с целью получения основы для конструктивного воздействия на них. Данная методика предложена И. М. Титовой и позволяет учителю предметнику изучить мотивационную сферу учащихся, где в качестве предмета анализа выступают: мотивы, цели, эмоции, сформированность учебных умений.

Выделение групп учащихся с вероятной завышенной и заниженной самооценками позволяет целенаправленно работать с учащимися, учитывая личностные характеристики учеников.

Учитывая данные психологов о существовании у подростков тенденции к занижению самооценки и серьезных негативных последствиях этого, считается особенно важным дополнительное внимание уделять группе учащихся с заниженной самооценкой. В частности, важно проследить за тем, чтобы слабые учащиеся данной группы смогли добиться успеха в профессиональной карьерной деятельности.

Карьерные ориентации определяются как представления о своих способностях, ценностных ориентациях, мотивах, смыслах и потребностях, относящихся к продвижению в профессиональной деятельности, рассматриваются в качестве важнейшей составляющей Я-концепции. Карьерные ориентации возникают в процессе социализации, актуализируются в ситуации выбора, ими субъект руководствуется при выборе и моделировании своего профессионального и в целом жизненного пути. В структуре профессиональной Я-концепции индивида присутствует не одна, а определенная иерархия карьерных ориентаций, которая может незначительно меняться под воздействием жизненных обстоятельств при низкой степени изменчивости тех или иных доминирующих ориентаций.

Необходимым условием повышения мотивации деятельности человека является персонализация, т.е. признание его другими людьми как личности, значимой для них. Включая обучающихся в процесс персонализации и самореализации, педагог побуждает их к непроизвольной, но активной мыслительной деятельности. Исследования Д.Б. Эльконина и В.В. Давыдова показали, что если в группу социального взаимодействия входят обучающиеся с разным уровнем развития, но так, чтобы эти уровни не отличались больше чем на один шаг друг от друга, то это способствует их развитию. При этом обучающиеся с более высоким уровнем развития мотивируются за счет персонализации, а с более низким – за счет самореализации.

Литература

1. Рубинштейн С. Л. Основы психологии: В 2 т.– М., 1989.
2. Выготский Л. С. Педагогическая психология.– М., 1991.
3. Давыдов В. В. Теория развивающего обучения.– М., 1986.
4. Гусев В. А. Психолого-педагогические основы обучения математике.– М., 2003
5.Жданович А.А. Карьерные ориентации в структуре профессиональной Я-концепции студентов: Автореф.дисс. …канд.психол.наук. – М., 2008. – 20 с.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 14-26-20004.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ МОТИВАЦИИ К УГЛУБЛЕННОМУ ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ В СОВРЕМЕННЫХ УСЛОВИЯХ.

Рябова Т.Ю.

МОУ СОШ №1 с углубленным изучением отдельных предметов г.Фрязино Московской области

141195, Московская область, г.Фрязино, ул.Школьная, 10

Тел: 89035626625 e-mail: tamarik@inbox.ru

Современное школьное образование – сложная нелинейная система взаимодействия педагогов, учеников и их родителей. Одна из важных характеристик этой системы – успешность обучения, которая зависит от множества факторов, среди которых мотивация к обучению. Мотивация к обучению – это некоторое внешнее воздействие, который по тем или иным причинам превращается во внутреннее действие субъекта обучения, приводящее к желаемому результату.

В психологии мотивация – это осознаваемые или неосознаваемые психические факторы, побуждающие индивида к совершению определенных действий и определяющие их направленность и цели. Значит, мотивация - это побуждения, вызывающие активность человека и определяющие направленность этой активности.

В педагогике мотивация – общее название для процессов, методов и средств побуждения учащихся к продуктивной познавательной деятельности, активному освоению содержания образования. При этом учебная мотивация – это проявляемая учащимися мотивированная активность при достижении целей учения. Педагогическая наука полагает, что наиболее значимыми для учащихся являются следующие мотивы:

- познавательные;
- коммуникативные;
- эмоциональные;
- саморазвития;
- позиция школьника;
- достижения;
- внешние (поощрения, наказания).

Необходимо отметить, что особенность учебной мотивации состоит в том, что в процессе деятельности по ее осуществлению ученик усваивает знания и формируется как личность. При этом мотивация – одно из главных условий успешного обучения в школе. Если учитель хочет квалифицированно организовать процесс мотивации и управлять им, ему необходимо провести диагностику учебной мотивации учащихся, а по ее результатам организовать и спланировать свою деятельность по развитию мотивации к учению.

По мнению Н.Ю.Скороходовой : «Технология развития мотивации учения в современной школе строится на развитии мотива достижения учеников. Эта технология включает как создание особой учебной программы с большим количеством фиксируемых градаций по сложности задач, времени усвоения и т.п., так и особый стиль взаимодействия учителя и ученика на уроке»[1].

Привить интерес к изучаемому предмету – значит добиться в дальнейшем высокого уровня обученности учащихся и хороших показателей качества знаний, то есть достичь основной цели обучения. Существует множество методов, посредством которых можно заинтересовать детей, повысить их учебную мотивацию.

Использование современных технологий на уроках помогает создать благоприятную эмоциональную обстановку, повышает мотивацию обучающихся к изучаемому материалу, углубляет знания, способствует развитию психологических процессов, что в конечном итоге, повышает качество знаний обучающихся. Заметно повышает мотивацию учащихся благоприятный и продуктивный микроклимат на уроке. Его поддержанию на уроке способствует вовлечение в деятельность всех учащихся класса; создание нестандартных ситуаций; демонстрация достижений каждого учащегося на каждом уроке; умение хвалить любого ученика на каждом уроке, даже за малые достижения и успехи.

Учитель в своей работе не должен забывать о таком понятии, как активная мотивация. Активная мотивация предполагает, что:

- никакие результаты нельзя признать хорошими, как бы высоки они ни были, если ученик мог бы достигнуть более высоких результатов;
- никакие результаты, как бы они не были малы, нельзя признать плохими, если они соответствуют максимальным возможностям ученика.

Ежедневная педагогика – это тяжелый труд, требующий ежеминутной круглосуточной отдачи от учителя, если, он хочет получить качественный результат. И чем опытнее становится учитель, тем лучше понимает, что нет предела совершенству. Учитывая особенности современного общества, мы находимся в ситуации, когда потребность в непрерывном образовании должна быть сформирована как можно раньше. Важную роль в формировании такой потребности играет деятельность учителя по развитию мотивационной сферы ученика средней школы.

Справедливо полагать, что в профильных классах и классах с углубленным изучением математики собрались учащиеся, более мотивированные к изучению предмета, чем в классах других профилей. Однако и сегодня в школах с углубленным изучением отдельных предметов в такие классы нет жесткого отбора. Школы просто не имеют на это юридического права в отличие от лицеев и гимназий. При этом существуют такие понятия, как средняя наполняемость классов, оплата классного руководства, деление классов на подгруппы, которые привязаны к количеству учащихся в классе. Именно поэтому проблемы мотивации к изучению математики, а точнее, к углубленному изучению математики, остаются актуальными в таких школах. МОУ СОШ №1 города Фрязино Московской области с углубленным изучением отдельных предметов относится именно к таким образовательным учреждениям. Если проанализировать причины, по которым ученики выбирают для обучения в старших классах физико - математический профиль, то на первом месте окажется желание родителей дать своему ребенку качественное образование, на втором месте окажется желание ученика в будущем получить высшее образование, связанное с математикой и физикой. Среди выпускников физико-математических классов нашей школы - ученые, математики, физики, инженеры, врачи, художники, поэты, государственные и муниципальные служащие, учителя. При этом физико –математическое образование всегда способствовало общему развитию, помогало осваивать самые различные отрасли человеческой деятельности. Следует отметить, что в 2013 и 2014 годах в независимом рейтинге РИАН «Новости» и Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО) наша школа занимала место в ТОП-500 лучших школ России и входила в двадцать лучших образовательных учреждений Московской области. Диагностика мотивации учащихся физико-математических классов, проведенная нами по методике изучения мотивации учения старшеклассников Окуневой О.Ю., показала высокий уровень мотивации учения, причем внутренние и внешние мотивы были выражены примерно в одинаковой степени.

Вопросы мотивации учащихся к изучению предмета всегда актуальны для профессионального учителя, в каких классах он бы не работал. При этом учитель так или иначе преследует цель мотивировать ученика учиться всю свою жизнь. Математика, на наш взгляд, наиболее подходящий для решения такой задачи предмет, так как она, как и всегда, играет основную роль в формировании познавательного интереса к жизни, раскрывая личностный смысл образования, овладения умениями, навыками в той степени, которая необходима для решения задач различной степени трудности.

Школьная математика – один из наиболее трудных предметов для изучения. В старшей школе по специальной 12-балльной шкале имеет трудность 11 баллов (алгебра) и 12 баллов (геометрия). При этом учитель математики обязан не только использовать методы развития познавательного интереса, но и поддерживать этот интерес. Для этого учитель может использовать технологии и методы, опирающиеся на неожиданность, парадоксальность, занимательность, создание ситуаций новизны, создание успеха, метод проблемных ситуаций и так далее. Стремление к новому, познанию мира всегда остается основной потребностью ученика.

К сожалению, в современной школе существует ряд межпредметных противоречий, которые не могут быть устранены только по желанию учителя. Так сложилось, что чаще всего математический профиль образования интегрирован с физическим, что вполне объяснимо. В частности, МОУ СОШ №1 города Фрязино стала в 1965 году первой школой в Московской области, где был открыт физико-математический класс. Однако на настоящий момент отсутствует полное согласование программ и учебно-методических комплектов, которое могло бы не только повысить качество обучения, но и стимулировать мотивацию к изучению двух таких сложных дисциплин как физика и математика. Речь идет об использовании при углубленном (профильном) изучении физики векторов, квадратичной функции, производной, интеграла гораздо раньше, чем это заложено в программе изучения математики. Но и изучение математики не может быть подстроено только под изучение физики, а должно учитывать и логику развития математической науки.

Если бы возможно было учесть все такие противоречия на уровне средней школы, не только ученик смог бы более полно раскрыть для себя личностный смысл изучаемого материала, но и государство могло бы получить более осознанных и компетентных, а главное, желающих заниматься трудоемкими разделами науки и производства тружеников.

Как считает один из идеологов сегодняшней педагогики Марк Поташник [2], одним из наиболее эффективных средств формирования устойчивой мотивации познания является личный пример учителя. Другими словами, требования к учителю, работающему в классе с углубленным изучением математики, многократно возрастают, хотя сегодня быть хорошим учителем математики и в обыкновенном классе нелегко. До сих пор в педагогической среде существует мнение, что работать в профильных классах проще, чем в непрофильных, потому что в них собрались заинтересованные ученики. Однако попробуем не согласиться с таким подходом. Ученики в таких классах проявляют более высокие способности к изучению не только математики, но и других предметов, значит, учитель должен обладать не только глубокими специальными знаниями по математике, но и иметь широкий кругозор, быть готовым ответить на любой вопрос учеников, владеть артистическими приемами ведения урока. Учитель должен знать не только психологию современных подростков, но и их родителей, так как часто главным внешним мотивом к обучению выступает не желание и возможности ученика, а желание родителей, которые видят в своих способных детях реализацию своих интересов и нереализованных потребностей.

Главной организационной единицей в традиционной классно-урочной системе был и остается урок. Поэтому от того как организован урок, как сформулированы цели урока, насколько верен стиль ведения урока, выбранный учителем, существует ли взаимопонимание между учителем и учеником, зависит уровень интереса и качество результата.

В классах с углубленным изучением математики учитель не только должен свободно владеть программным материалом на углубленном уровне, но и уметь преподнести его учащимся так, чтобы им было важно понять и освоить основные понятия и алгоритмы. Мы не говорим, «чтобы им было интересно». Интерес – вещь хорошая, но каждая зрелая личность в этой жизни чаще делает не то, что интересно, а то, что необходимо. (Хорошо, если это совпадает). Воспитание волевых качеств личности через изучение математики, на наш взгляд, один из главных путей стимулирования и мотивации ученика.

В настоящее время многие педагоги уделяют время исследовательской деятельности учащихся. Естественно, что в классах с углубленным изучением математики такая деятельность должна быть связана с основным профилем. В настоящее время в Московской области организовано большое количество математических конкурсов, в которых может принимать участие любой школьник. Одним из наиболее интересных, на наш взгляд, является Международный конкурс «Математика и проектирование», который вот уже несколько лет проводится Академией социального управления Московской области и Болгарской Академией наук. Участие в этом конкурсе с каждым годом требует все большего профессионализма учителя, курирующего деятельность ученика. Учитель должен сам хорошо представлять себе, как устроен исследовательский процесс, какие структурные элементы необходимо освоить ученику. А это значит, что он должен быть включен в научно-исследовательскую деятельность, хотя бы в самом небольшом объеме.

Учитель профильного класса должен владеть практически всеми существующими сегодня педагогическими технологиями от проверенных годами (например, дифференцированного обучения) до современных компьютерных (информационно–коммуникационных). Современного ребенка трудно обмануть. В городе Фрязино практически у каждого ученика несколько электронных устройств, с которыми он довольно легко обращается. Значит, человек, который их учит математике, просто обязан уметь хотя бы производить элементарные действия на таких устройствах.

Современные информационно – коммуникационные технологии используются в образовательных учреждениях в трех направлениях:

1) Для повышения наглядности при изучении программного материала (например, электронные образовательные ресурсы (ЭОР), презентации уроков)
2) Для осуществления процесса обучения (выполнение упражнений, осуществления оперативного контроля («Математический конструктор» 4.0, «Динамическая геометрия», система «VERDICT»));
3) Для осуществления управленческих функций (электронные журналы, дневники)

На самом деле, применение информационно - коммуникационных технологий в любой степени способствует развитию мотивации, хочет ли ученик знать математику на уровне культурного человека, функционального владения или на уровне исследовательских подходов.

Учитывая тот факт, что в педагогике результат не является прямым следствием использования тех или иных технологий, на уроке опытный учитель применяет интегрированные, нелинейные технологии, которые подчас невозможно четко дифференцировать и оторвать одну от другой. Именно поэтому вопрос освоения техники педагогической деятельности молодыми учителями – один из самых актуальных при решении проблемы стимулирования и мотивации учащихся к изучению математики на углубленном уровне.

В выпускном классе большинство учащихся уже имеют некоторое представление своем будущем профессиональном выборе. Думаем, что не ошибемся, если отметим, что массовый выбор учащихся – не в пользу тех профессий, что требуют глубокой математической подготовки. К сожалению, внешняя среда способствует принятию такого решения. Наукоемкие и трудоемкие сферы, к которым относится и математика, все меньше интересуют школьников в той степени, чтобы превратиться в их профессию. Поэтому необходимо задействовать и такой побудительный мотив, как чувство тревоги и ответственности перед будущим. Перед личным будущим и будущим всей страны. Удивительно, но учителю математики это сделать проще, чем любым другим учителям-предметникам. Несмотря ни на что, уроков математики пока еще в учебном плане больше, чем других.

Другой основой для развития мотивации в классах в с углубленным изучением математики является раскрытие самоценности знаний самих по себе с целью получения удовольствия от процесса познания, от открытия новых знаний, от того, что ученик просто узнал что-то новое для себя. Большую роль здесь играет такой раздел школьной математики, как «Начала математического анализа». Содержание этого раздела в школьных учебниках не меняется вот уже много лет, что можно отнести к положительным явлениям. Можно спорить, в какой период обучения включать данный раздел в программу изучения: в начале 10 класса, после изучения раздела «Тригонометрия», до изучения раздела «Степени и логарифмы» и так далее. Существующие сегодня учебно-методические комплекты позволяют решать этот вопрос по-разному. В нашей школе мы много лет используем УМК С.М.Никольского, подтверждая эффективность этого пособия.

Говоря о мотивации учащихся профильных классов, необходимо подчеркнуть, что именно «Начала математического анализа» являются пропедевтикой изучения математического анализа в высшей школе на более высоком научном уровне. Однако уже в средней школе, сталкиваясь с реальными задачами на нахождение наибольших или наименьших значений, задачами, требующих исследования функций, построением графиков, ученик начинает получать представление о реальной роли математики в окружающем мире, ее реальных возможностях. Если школьная математика до 9 класса воспринимается учениками больше как некая увлекательная игра, то изучение начал математического анализа, особенно при поддержке этого аппарата на других уроках (физике, химии, биологии, экономике), позволяет осознать исследовательскую роль математики. Если при этом использовать и возможности информационно-коммуникационных технологий, например, при изучении темы «Построение графиков с помощью производной», можно повысить наглядность и эффективность урока, пробудить осознанный интерес у учащихся. Конечно, учитывая реальный уровень интеллектуальной зрелости школьников, учитель не может требовать от них абсолютно точного воспроизведения определений, доказательства теорем математического анализа, но и недооценивать роль этого раздела нельзя. Ученики, планирующие связать свою профессиональную деятельность с математикой, получают хорошее представление о способах решения задач. У остальных учеников складывается представление о математике, как о мощной и современной науке.

Большего эффекта мотивирования можно добиться, если при изучении простейших дифференциальных уравнений как можно шире разнообразить тематику задач, используя не только задачи о размножении биомассы, радиоактивного распада, но и , например, судебной медицины, экономики. Необходимо расширять типы задач, используемые на этих уроках.

При обучении решению нестандартных задач, задач с параметрами надо привлекать современные интерактивные технологии, чтобы образ модели задачи не только аналитически присваивался учеником, но и приобретал осязаемый вид.

Большую роль в мотивации учащихся профильных классов играют правильно организованные уроки геометрии, в частности затрагивающие вопросы аналитической геометрии и векторной алгебры. В программе для профильных классов на изучение этой темы отводится до 20 часов. Значит, учитель может показать универсальные методы работы с задачами, подготовить учащихся к изучению математики на более высоком уровне.

Кроме уроков большую роль в развитии мотивации школьника к углубленному изучению математики играет внеурочная деятельность по математике, к которой могут быть отнесены: Всероссийская олимпиада школьников, предметные олимпиады, входящие в Перечень министерства образования и науки России, конкурсы, фестивали (в частности, Фестиваль науки), Международная математическая игра – конкурс «Кенгуру», посещение ведущих ВУЗов , заочные школы, дистанционные курсы для учащихся, Турнир Архимеда, математические бои и другие мероприятия. Чем больше учащихся будет участвовать в такой деятельности, тем выше вероятность того, что больше молодых и талантливых молодых людей выберут свой профессией математику или связанные с ней дисциплины. Значит, цель деятельности учителя по развитию мотивации к изучению математики будет достигнута.

Литература:

1. Скороходова Н.Ю. «Технология ведения урока», Санкт-Петербург : Речь, 2002. – 148 с.
2. Поташник М.М. «Требования к современному уроку», Москва, Центр педагогического образования, 2011 – 272с.

АНАЛИЗ СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕАМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВЕДУЩИХ СТРАНАХ МИРА

Саргсян Асмик Григорьевна
АГПУ им. Х. Абовяна
Кафедра дошкольной педагогики и методик
Канд. пед. наук, доцент

В настоящее время образовательные системы ведущих стран мира претерпевают значительные изменения. Бурное развитие информационных технологий требует от сферы образования нового осмысления содержания обучения, поскольку темпы развития общества требуют подготовки таких специалистов, которые могут сыграть решающую роль в социально-экономическом развитии общества. Вне сомнения, образование - фундамент общественного прогресса и качество образования является одним из важнейших факторов социально-экономического развития любой страны.

Математика как наука лежит в основе всех современных технологий и научных исследований, является важнейшим компонентом экономики, поскольку рост высокотехнологических производств ставит высокие требования к уровню подготовки специалистов, вовлеченных в эту сферу. Наряду с этим, математические знания несут в себе также и огромный общекультурный образовательный потенциал. Несмотря на это в последние десятилетия во всем мире специалисты в области образования отмечают резкий спад уровня математических знаний среди школьников.

Среди основных причин снижения кризиса в данной сфере эксперты выделяют наряду с такими факторами, как нехватка квалифицированных учителей и отсутствие эффективных учебных материалов и методик преподавания, отсутствие интереса к изучению предмета “Математики”, т.е. низкий уровень учебной мотивации.

Анализ ряда исследований современного состояния подготовки школьников по математике показал достаточно низкий уровень математических знаний в таких ведущих странах как США, Германия, Великобритания, Россия и т.д. Проблема качества математического образования остаётся приоритетной также и для Армении. В связи с этим, нам кажется актуальным изучение образовательных систем и стандартов стран, школьники которых показывают высокие результаты на мировых математических конкурсах.

Согласно результатам исследования, проведенного британской международной группой Pearson в 2014г. мировым лидером рейтинга эффективности систем образования стала Южная Корея, которая имеет наиболее высокие позиции по всем показателям. В целом, четыре ведущих места в рейтинге заняли страны Азиатско-Тихоокеанского региона: второе место принадлежит Японии, третье — Сингапуру, четвертое — Гонконгу. Вслед за Гонконгом расположилась Финляндия, которая стала европейским лидером рейтинга. В первую десятку также вошли: Великобритания, Канада, Нидерланды, Ирландия и Польша. Россия занимает в рейтинге 13 место из 40 возможных — между Германией (12 место) и США (14).

Анализ образовательных систем стран, занимающих высокие места в рейтинге, показал, что кроме финансирования, важна еще и культура образования, стимулирующая желание учиться. Первое и второе место заняли Финляндия и Южная Корея - две страны, которые координально отличаются друг от друга как в культурном, так и экономическом отношении. Но, тем не менее, общей их характеристикой является вера общества в важность образования и его высокую моральную ценность.

Большинство стран, попавших на первые места рейтинга, отличаются высоким уровнем школьной автономии, к примеру, Китай, Голландия, Британия, Гонконг. Тем не менее, следует отметить, что финские школы, в отличие от школ указанных стран, не имеют большой самостоятельности, однако это не помешало Финляндии возглавить рейтинг стран с лучшими образовательными системами [1].

То, что ученики начальных и старших школ восточноазиатских стран во многом превосходят по уровню своих математических знаний своих сверстников из западных стран также подтверждается недавним отчетом австралийского аналитического центра Grattan Institute.

15-летний шанхайский школьник, имеющий средние показатели по успеваемости, опережает своих сверстников из США, Австралии, Великобритании и Европы по уровню математических знаний на 2 или 3 года. Школьники же Гонконга почти на год впереди в чтении и математике по сравнению с детьми в США и Европе. При всем при этом, затраты государства на одного ученика в начальной школе в Восточной Азии почти в три раза меньше аналогичных затрат в американских школах.

Об этом свидетельствуют также и результаты отчета, основанного на данных программы международной оценки образовательных достижений учащихся (PISA) Организации экономического сотрудничества и развития. PISA (Programme for International Student Assessment) - международная программа по оценке образовательных достижений учащихся 15-летнего возраста, проводится каждые 3 года начиная с 2000 года. Основная цель данных исследований – выяснения уровня качества образования в школах, сравнение изменений, происходящих в системах образования разных стран.

За эти годы число стран участников возросло от 32 до 65. Из постоветских стран в программе принимали участие РФ и страны Прибалтики (Латвия, Литва и Эстония). Основное внимание в исследование уделялось:

математической грамотности, т.е. способности ученика формулировать и применять математические знания в разнообразных контекстах.

читательской грамотности – способности понимать и использовать письменные тексты, расширять свои знание благодаря чтению и т.д.

естественно-научной грамотности - способности осваивать и использовать естественно-научные знания для распознания и постановки вопросов, для освоения новых знаний, проявление активной гражданской позиции при рассмотрении проблем, связанных с естествознанием и т.д. [2].

Следует отметить, что с 2012 года Россия решила больше не участвовать в PISA. Президент Российской ассоциации чтения Наталья Сметанникова считает, что причина отказа от тестов заключается в негативной динамике показателей российских школьников. Она отмечает, что изначально Россия не хотела публиковать результаты, однако впоследствии все-таки решила не скрывать результаты, поскольку подобные международные тестирования направлены на изучение экономического состояния государства и оценку качества человеческого капитала – важнейшего фактора экономического развития. Следовательно, по результатам этих тестов можно строить определенные прогнозы, что в будущем ждать от государства.

Как отмечают эксперты, идет процесс деградации институтов образования и науки, дальнейшие же перспективы в рейтинге неутешительные.

Как уже отмечалось выше, на международных конкурсах по математике школьники США в последние годы также показывают не лучшие результаты, что вызывает обеспокоенность у американских специалистов в данной сфере.

В 2002 г. в США по инициативе президента Дж.Буша –младшего стартовала государственная программа No Child Left Behind (NCLB), которая была нацелена на повышение уровня образованности в стране.

Данный Акт подразумевал принятие образовательными структурами штатов единых стандартов оценки достижений учеников по основным школьным предметам. Также школы были обязаны информировать высшие инстанции и родителей учеников об успехах школы, её рейтинге (по показателям тестов). Те школы, которые имели высокие рейтинги, дополнительно финансировались. Такая образовательная политика предполагала, что все учебные заведения будут стремиться к высоким показателям, родители же соответственно захотят перевести своего ребенка в школы с более высокой успеваемостью.

Также были установлены стандарты для учителей. Преподаватель, квалификация которого не соответствовала стандартам, с трудом мог найти работу. Для преподавательского состава школ с низким рейтингом, организовывались специальные курсы повышения квалификации. При этом акцент ставился на тех учебный предметах, показатели которых особо низки у иммигрантов и малообеспеченных семей: математике, чтении, письме.

В целом, идея была неплоха, однако на практике выявилось множество недостатков программы. Для увеличения рейтинга в некоторых штатах стали облегчать тесты, вследствие чего школы добивались высоких рейтингов, что не совсем соответствовало действительности. Большинство преподавателй были недовольны тем, что учебный процесс стал нацелен на успешное написание тестов, а не развитие ребенка как личности. В основном упор делался на подготовке к написанию стандартных тестов по правописанию, математике и чтению, наряду с этим остальные предметы незаслуженно стали выпадать из спектра контроля. Высокие требования к профессиональным компетенциям учителей не совсем совпадали с реальной ситуацией (особенно в маленьких городках), где учителей часто не хватает и без этого.

Закон был принят сроком на 5 лет, в 2007 был продлён, но официально не узаконен. Последние данные 2009 г. показали, что прогресс в процессе обучения, на самом деле, значительно затормозился после принятия программы 2002 года, поэтому необходимость реформирования программы несомненна и очевидна.

Высокие показатели в области математических знаний учеников восточноазиатских стран привлекли внимание специалистов в области образования США и стран Европы. Так, между США и Сингапуром, на основе соглашения (2002г.), посвященному преподаванию и обучению математике и естественным наукам, был подписан меморандум.

С целью повышения качества обучения математики в школе министерство образования Великобритании решило прибегнуть к помощи китайских специалистов, поскольку выяснилось, что школьники из бедных семей в Шанхае обладают более глубокими знаниями, чем английские дети из семей со средним достатком. Из китайских провинций были приглашены 60 учителей, владеющие английским языком на соответствующем уровне, которые будут проводить мастер-классы в центрах повышения квалификации учителей.

Тем не менее, интересным является тот факт, что в самом Китае вовсе не обольщаются рейтингом своей страны. Многие китайцы отмечают такие недостатки в китайской системе преподавания как механическое запоминание, на который делают акцент преподаватели в китайских школах, вовсе не способствует развитию креативного мышления, что, по мнению китайских родителей, является большим недостатком. Школьников страны все чаще отправляют на Запад в колледжи и даже в средние школы, пытаясь избежать механического запоминания, развить своего рода инновационный стиль мышления.

Проблема школьного математического образования является актуальной также и для Армении. Многие эксперты связывают современное состояние математического образования в Армении с многочисленными образовательными реформами, которые проводились за последние десятилетия в стране. Не секрет, что успешное обучение зависит от многих факторов: квалификации учителей, качественных учебников, эффективности методов обучения и т.д. Профессиональная подготовка учителей не соответствует уровню современной науки и требованиям сегодняшнего дня. Появление новых учебников, материал в которых представлен в чрезмерно усложненной форме, низкий процент задач прикладного характера создает дополнительные затруднения в овладении математических навыков.

Эффективность обучения математике во многом зависит также и от степени развития мотивации у обучающихся. В процессе обучения происходит трансформация мотивационной сферы учеников. При чем трансформация может иметь как положительный, так и отрицательный характер. Как уже отмечалось выше, в последние годы наблюдается резкое падение интереса к обучению математики. Поэтому, развитие мотивации учения математики является одной из актуальных теоретических и методологических проблем. Ученик, не понимающий и не постигающий цели обучения, не обладающий средствами самостоятельной познавательной деятельности, не может достигнуть успехов в учебе. В школьном курсе математики необходимо акцентировать внимание на заданиях, показывающих применение теоретических знаний и выводов для практической жизни. Осознание важности и значимости математических знаний в повседневной жизни, в распознавании в явлениях окружающей жизни, в будущей профессии несомненно будет способствовать повышению уровня мотивации к изучению математики у школьников.

Таким образом, резюмируя вышесказанное, можно сказать, что реформы образования, которые проводились в сфере образования в последние годы во многих ведущих странах, не принесли ощутимых результатов с точки зрения повышения качества образования. Изучение, обобщение и применение передового опыта восточноазиатских стран в этой сфере, возможно поможет выработать новые стратегии в образовательной системе.

РЕЗЮМЕ

Анализ современного состояния математического образования в ведущих странах мира

А.Г. Саргсян

В статье проводится анализ образовательных систем ведущих стран мира и в частности состояния математического образования. Выявлены некоторые проблемы в этой сфере, требующие незамедлительного решения.

Литература:

1. http://kursor.org.ua/posts/571-sostavlen-reyting-luchshih-obrazovatelnyh-sistem-v-mirec
2. Основные результаты Международной программы PISA-2012 http://www.oecdcentre.hse.ru/newsletter2.2

МАТЕМАТИКА КАК МЕРА ОБРАЗОВАННОСТИ[1], КАК МЕРА ИНТЕЛЛИГЕНТНОСТИ[2]

Сенашенко В.С.

Российский университет дружбы народов,

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, Россия

E-mail: vsenashenko@mail. ru

«Надо развивать наши сильные стороны. У нас в стране - традиционно сильные математические школы в университетах и РАН. Мы можем поставить задачу сделать наше школьное математическое образование через десять лет лучшим в мире. Это даст нашей стране серьезные конкурентные преимущества».

В.В.Путин,

В настоящее время перед школой стоит двуединая задача. С одной стороны уровень математического образования должен быть достаточным, чтобы в современном обществе выпускник школы ощущал себя образованным человеком. С другой стороны уровень математического образования должен быть достаточным для того, чтобы выпускник школы мог продолжить свое образование по одному из направлений или специальностей высшей школы, тем более что в настоящее время более 80% выпускников общеобразовательных школ становятся студентами вузов.

И если первая проблема по многим причинам практически не имеет решения, то вторая легко формализуется. В этом случае на помощь приходят требования преемственности и непрерывности математического образования. Удовлетворение этим требованиям означает, что уровень школьного математического образования должен быть достаточным для освоения одной из основных образовательных программ высшей школы. Следует напомнить, что требования к математическому образованию студентов, осваивающих различные образовательные области, были сформулированы еще в 90-е годы и нашли отражение в государственных образовательных стандартах высшего профессионального образования (ГОС ВПО). Однако это ни как не сказалось на структуре школьного математического образования. И, естественно, не нашло отражения в содержании и структуре Единого государственного экзамена (ЕГЭ).

В результате выпускники общеобразовательной школы, которые затем становятся студентами вузов, очень часто оказываются не готовыми к освоению основных образовательных программ высшей школы, требующих знания математики. И преподаватели вузов на первом курсе вынуждены тратить время на «доучивание» математике бывших школьников, а теперь – студентов-первокурсников вместо планового освоения собственно образовательных программ высшей школы. Это становится особенно болезненным в условиях, когда высшая школа переходит на 4-х летние программы бакалавриата.

Более того, в соответствии с новыми ГОС ВПО (теперь – ФГОС ВПО) изучение математики в вузах становится обязательным всеми студентами, независимо от того в каком

[1] **Образованность – это** способность человека общаться, учиться, анализировать, проектировать, выбирать и творить.

[2] **Интеллигентность** – это умение самостоятельно мыслить, выносить суждения о делах людей и проявлениях мироздания.

Интеллигентность – это сочетание правдивости сердца, благородства души и трудоспособности ума человека.

Интеллигентность – это легкость интеллекта, терпимость характера, надежность слов и благородство поступков.

вузе и по какому направлению или специальности они будут получать высшее образование. Естественно, что характер требований к знанию математики на гуманитарных образовательных направлениях или специальностях существенно отличается от требований к знанию математики на естественнонаучных или инженерных образовательных направлениях или специальностях. Да и собственно математика в этих случаях имеет существенные отличия. Если для естественнонаучных или инженерных образовательных направлений или специальностей математические знания являются неотъемлемой частью профессии, требующей владения математическим аппаратом, то для гуманитарных образовательных направлений или специальностей математика становится, прежде всего, мерилом образованности выпускника высшей школы, его интеллигентности и содержит в себе значительную культурологическую составляющую. Но это вовсе не означает, что на естественнонаучных или инженерных образовательных направлениях или специальностях культурологическая составляющая отсутствует. Просто в этом случае объем математических знаний студентов должен быть гораздо больше, а их характер иметь несколько иную направленность.

Очевидно, нужна градация образовательных программ по математике (например: математика I, математика II и т. д.) не только в высшей, но и в общеобразовательной школе. И как следствие – дифференциация ЕГЭ по степени сложности.

Директора школ упрекают вузы в том, что практически отсутствует нижний порог количества баллов, полученных по результатам ЕГЭ, при зачислении абитуриентов. Конечно, в этом есть доля правды. Но нельзя забывать при этом социальную сторону проблемы. Высшее образование стало массовым и это одна из составляющих государственной образовательной политики. В таких условиях выход только один – повышение уровня школьного математического образования.

Особый интерес представляет проблема обоснования «уважительного» отношения к математическому образованию школьного сообщества, да и общества в целом. Прежде всего, математика должна быть интересной. А интересная математика это новые учебники, это современные образовательные технологии, подкрепленные инновационными методиками, это высокий уровень профессиональной культуры учителей.

Поэтому в качестве практической задачи выступает создание школьных учебников по математике нового поколения, созвучных жизненным реалиям. Какими эти учебники должны быть это проблема и методологическая, и методическая, и социальная. Решение следующей задачи предполагает повышение профессиональной культуры преподавателей математики. Ведь не секрет, что в учителя идут не самые способные выпускники педагогических вузов. И поэтому вновь и вновь возникает проблема повышения престижности профессии учителя. Очевидно, прием на работу учителем следовало бы сопровождать квалификационным экзаменом, предполагающим наличие определенных педагогических навыков у соискателя учительской должности. А для этого необходимо коренным образом изменить педагогическое образование, существенно увеличив объем практики студентов педагогических вузов и студентов классических университетов, ориентированных на работу школьным учителем.

И если даже имеются прекрасные современные учебники и преподаватели математики, обладающие высоким уровнем профессиональной культуры, остается проблема передачи знаний учащимся, «научения» их математике. А для этого требуются современные образовательные технологии, интересные методики подачи учебного материала.

Не менее важной проблемой является повышение математической культуры всего населения страны. Решение этой проблемы могло бы составить содержание одного из направлений просветительской деятельности. К этой работе можно было бы привлечь общество «Знание», воспользоваться ресурсными возможностями телевизионных каналов с участием не «дилетантов от образования», а профессионалов высокой квалификации.

Образовательная система «школа-вуз»: проблемы и решения

Ситкин Евгений Леонидович
Лицей 1501 г. Москва, Тихвинский пер, д.3
Телефон: 89607129896, e-mail: sitking@mail.ru

В последнее время все чаще слышится про связку *школа-вуз*. Школьные учителя не реагируют на это сочетание и в этом проблема.

Кто ассоциируется у обывателей со школой? В первую очередь учащиеся. Что декларируют в последние годы чиновники от образования в нужном и ненужном месте? Первое и главное действующее лицо это ученик, потом все остальные. Если обратиться к вузам, то большинство ассоциируют их в первую очередь с профессурой.

Из этой связки выпадают учителя. Их упоминают после. Чтобы обеспечить тесное взаимодействие школ и вузов, учителю необходимо занимать ведущую позицию. Для этого он должен быть заинтересован. Обратимся к прошлому. В советское время детей было больше, вузов – меньше. Были более престижные вузы, менее престижные, но все они обеспечивали народное хозяйство качественными специалистами. Из школьной среды в то время можно было отобрать детей мотивированных на получение знаний. Происходил естественный отбор из большого количества школьников и учитель в этой связке не играл доминирующую роль. Исключениями были лишь те учителя энтузиасты, которые вели заочные школы при ведущих университетах, институтах по примеру малого мехмата или физтеха. Таких учителей было очень мало, а появлялись они тогда, когда в среде учащихся, в силу каких-то субъективных причин, возникала потребность в обучении на базе этих университетов, и школьный учитель в силу своих профессиональных и этических норм мог и готов был оказать помощь школьникам, занимаясь с ними на кружках и факультативах. Эти единицы учителей делали большое и важное дело. Неосознанно они сохраняли отечественную науку на своем направлении деятельности. Те времена давно прошли. Но коль говорят об этом чаще и чаще, то потребность осталась.

Обратимся к настоящему. Как решается эта проблема в единичном случае? Приведу пример. Государство решило выйти на иной качественный уровень математического образования, в первую очередь школьного.

Профессура готова выйти в школу и выполнить госзаказ по работе с учащимися, но среди учителей не найдется поддержки, учитель исключен материально. Ему это не надо и, следовательно, этот шаг заранее обречен на провал. Даже такая деятельность как наставничество в студенческой среде, может сдвинуть эту образовательную машину в положительном направлении. Да, к сожалению, современные реалии превратили учителей в бездушную машину обучения, им необходимо думать о своих семьях. Кроме того, допуская к своим учащимся университетского работника, учитель еще более теряет свою значимость среди школьников, родителей, администрации.

Какой же вывод?

Чтобы связка *школа-вуз* была неразрывна, необходимо в этой связке:

- учителя максимально защитить от внешних факторов и сделать главным связующим звеном. Ни один серьезный, знающий специалист и уважающий себя человек не потерпит даже малейшего произвола или давления со стороны администрации школ, родителей и.т.д. Это одна из причин понижения качества образования;

- возродить работу кружков, факультативов при ведущих вузах страны. Тех учителей, которые могут потянуть эту тяжелую работу, прикреплять к вузовским кафедрам и оплачивать. В школах нет денег на подобную деятельность. Те копейки, которые могут дать из стимулирующего фонда школы не отражают тех интеллектуальных и временных затрат учителя, которые возникают в результате подобной деятельности. Энтузиасты остались, но зарабатывают деньги в современных условиях иначе. Если вузы будут оплачивать, то они вправе и контролировать работу учителя. И здесь исключается коррупционная составляющая, так как решать самому физтеховские задачи и еще учить решать такие задачи, дано не каждому. Эта деятельность может охватить и другие школьные дисциплины.

По моему мнению, это необходимо сделать быстрее. Заинтересованный учитель всегда сможет правильно сориентировать своих школьников. Процесс этот долгий, требует перестройки многих этических норм всей связки *школа – вуз*, но он необходим. Позже в процессе этой работы могут появиться и другие формы общения. Но начинать необходимо с малого.

Роль мотиваций в профессиональном становлении педагога

Смирнов Е.И.

ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского» Тел.: 84852726235, e-mail: e.smirnov@yspu.org

Концептуальные положения

1. Продуктивность мышления и восприятия, развитие предметной речи, логическая полноценность аргументации, развитие интеллектуальных операций и умственных способностей личности могут быть реальным результатом математического образования будущего педагога при условии развития учебной и профессиональной мотивации , если будет усиливаться роль математики как средства *гуманизации и социализации личности* в современном обществе как необходимого атрибута образовательной парадигмы XXI века. При этом формирование когнитивных актов и академического опыта с самого начала профессиональной подготовки должно осуществляться в контексте педагогической деятельности .

2. *Исследования целостности на основе единой продуктивной методологической идеи (например, концепции фундирования опыта личности и наглядного моделирования объектов, процессов и явлений)* на разных уровнях педагогического образования: глобальной структуры (дидактический процесс, учебные планы, учебные программы, дидактические модули, межпредметная интеграция и т.д.) , локальной модельности (модели и схемы функционирования математических понятий, кодирование знаково-символической деятельности, заместители педагогических процессов и т.п.), организации и управления познавательной деятельностью обучаемых, повышение ее результативности – являются одним из важнейших направлений роста учебной и профессиональной мотивации.

3. *Овладение приемами научного познания, интеграция науки и образования*, обогащение содержания математической деятельности современными достижениями науки (математики, физики, биологии и т.д.) во взаимодействии с учебными задачами и реальными жизненными ситуациями, вариативности заданий и ситуаций, интеллектуальных и деловых игр, обобщенных способов приемов и действий. освоение и развертывание широкого спектра диагностических процедур на основе развертывания практико-ориентированной учебной деятельности ведут к существенному развитию мотивационной сферы будущего педагога.

4. *Вариативность образования* как структурообразующая парадигма определяющая индивидуализацию профессионально-педагогического образования, поддержка самоактуализации и самореализации личности, решение задач формирования и развития универсальных учебных действий и интеллектуальных операций на основе широкого внедрения информационно-коммуникационных технологий как необходимого атрибута учебного процесса (дистанционное обучение, элементы компьютерной алгебры и динамической геометрии, e-

обучение, малые средства информатизации и т.д.) на фоне актуализации личностных смыслов и опыта определяют рост учебной и профессиональной мотивации будущего педагога.

Методика реализации концептуальных положений

1. *Формирование мотивации, ее сознательно-волевого уровня состоит, во-первых, в образовании иерархической регуляции на основе предметной деятельности*, во-вторых, в противопоставлении высшего уровня этой регуляции стихийно формирующимся импульсным влечениям, потребностям, интересам. Для того чтобы обучающийся по-настоящему включился в работу, нужно, чтобы задачи, учебной деятельности, были не только понятны, но и внутренне приняты им, т.е. чтобы они приобрели значимость для учащегося и нашли, таким образом, отклик и опорную точку в его переживаниях.

2. Будущий и настоящий учитель должен технологически осмыслить и инновационно разрешить серию конкретных проблем освоения учебного предмета обучающимся через *обобщенные конструкты и конструирование комплексов прикладных и исследовательских задач с интегративным содержанием*. С учетом целевой функции педагогического образования и роста профессиональной мотивации при проектировании его содержания в основу должно быть положено содержание школьного образования. И это содержание должно последовательно углубляться за счет изучения предметов высшего образования.

3. Основным средством формирования мотивационной деятельности будущего педагога и механизмом формирования исследовательского поведения школьников в процессе обучения учебному предмету нами предлагается *комплекс исследовательских практико - ориентированных задач*, реализуемый в специально организованной среде ресурсных занятий на фоне мотивов самоактуализации и ценностных ориентаций .

4. *Содержание учебной дисциплины « Фундирование опыта наглядного моделирования на основе единства математики в задачах»* базируется на материале всех основных школьных и вузовских математических курсов (алгебры, математического анализа, геометрии, стохастики, математической логики). В основе учебной дисциплины лежит исследование интегративных связей в математике и их переноса в дидактическое поле формирования приемов научного познания и устойчивой учебной мотивации у школьников в контексте рассмотрения и исследования так называемых интегративных задач (генезис, содержание, анализ, применение, оценка, презентация), выбор которых осуществляется выявлением обоснованных критериев.

5. Развитие технологии внедрения *оснащенных спиралей фундирования математических знаний* в процесс обучения математике студентов гуманитарных (естественнонаучных) направлений и специальностей университетов на основе обоснованного отбора обобщенных математических конструктов и дидактического анализа выполнимости и адекватности технологических новшеств в актуальном поле гуманитарного (естественнонаучного) знания ведет к активизация мотивационных и когнитивных структур в процессе изучения математики способствовала положительным изменениям в личностном развитии и успешности освоения математической деятельности студентов.

6. Формирование и развитие *интегративных конструктов интеллектуальных операций* (моделирование, понимание, планирование, прогнозирование, принятие решения) как механизмов развития практического мышления на основе диагностики и развертывания фундирующих процедур практико-ориентированного характера, направленных на решение частных, конкретных задач эффективно реализуются в ходе ресурсного взаимодействия математических, информационных, гуманитарных (естественнонаучных) знаний, повышения самостоятельности, ответственности за принимаемые решения (включая волевой и нравственный аспекты) в переходе от размышления к действиям

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 14-26-20004

ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ У СТУДЕНТОВ-ЭКОНОМИСТОВ НА ОСНОВЕ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Трофимец Е.Н., Трофимец В.Я.

Санкт-Петербургский филиал Финансового университета при Правительстве РФ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

197198 г. Санкт-Петербург, ул. Съезжинская, 15/17

150000, г. Ярославль, ул. Советская, д.14

Тел.: 89112530972, e-mail: ezemifort@inbox.ru

Тел.: 89109677162, e-mail: zemifort@inbox.ru

Мотивация достижения в изучении ряда учебных дисциплин математического цикла (в частности, таких дисциплин, как «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Эконометрика», «Теория игр», «Статистика») студентами-экономистами может быть повышена путем внедрения в образовательный процесс инновационных методов обучения, отличных от традиционных форм обучения, которые, в основном, направлены на механическое запоминание информации. Традиционные формы обучения должны дополняться новыми инновационными технологиями, разработанными в соответствии с интерактивными формами обучения, что позволит повысить мотивацию, а тем самым и качественный уровень подготовки студентов, поддерживая и направляя их интеллектуальный потенциал. Одной из таких технологий, на наш взгляд, является технология компьютерного моделирования, которая позволяет органично синтезировать знания по экономике, математике, информационным технологиям и обладает значительным дидактическим потенциалом в формировании информационно-аналитической компетентности студентов экономических вузов.

Особенность информационно-аналитических технологий обучения состоит в том, что наряду с информационной составляющей в них доминирующую роль играет математическая составляющая, которая является ключевой компонентой инструментальных методов решения сложных аналитических задач экономического характера.

Проектирование информационно-аналитических технологий обучения студентов-экономистов подчиняется общим принципам проектирования компьютерных систем учебного назначения, основополагающими из которых являются: принцип целостности; принцип воспроизводимости; принцип нелинейности педагогических структур; принцип адаптации процесса обучения к личности обучаемого; принцип потенциальной избыточности информации.

Наряду с общими принципами проектирования компьютерных систем учебного назначения, процессу дидактического проектирования информационно-аналитических технологий присущи специфические черты, среди которых можно выделить следующие:

- априорная дидактическая система информационно-аналитической подготовки специалистов экономического профиля должна ориентироваться на концептуальную модель научно-методического аппарата решения профессионально-ориентированных экономических задач;
- элементы реальной дидактической системы информационно-аналитической подготовки специалистов экономического профиля должны соответствовать способам, методам и моделям обработки экономической информации, доминирующим в профессиональной деятельности;

• процесс построения и анализа однотипных моделей экономических систем должен основываться на общих методологических подходах и принципах;

• используемое учебно-методическое программное обеспечение должно быть ориентировано на обучаемых, не имеющих специальной математической подготовки, главной задачей которых является понимание только основополагающих идей и принципов, реализованных в изучаемых экономико-математических моделях и методах.

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования по направлению подготовки 080100 Экономика (квалификация (степень) "бакалавр") процесс изучения дисциплин математического цикла направлен на формирование следующих основных (из ФГОС с указанием номера/индекса) компетенций:

– способен собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1);

– способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4);

– способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);

– способен на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6).

Для овладения студентами-экономистами указанных компетенций математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки студента и элементом общей культуры.

Основной принцип, лежащий в основе изучения дисциплин математического цикла, состоит в повышении уровня мотивации у студентов-экономистов за счет внедрения профессионально-ориентированных экономических задач (ПОЭЗ) в процессе обучения.

Первым формальным признаком, характеризующим ПОЭЗ, является степень их неопределенности, которая проявляется не только в неточности (или неполноте) информации об исходных данных, но также и в неопределенности между принятым на основе ПОЭЗ решением и его исходом. По этому признаку (в теории принятия решений он получил название "определенность-риск-неопределенность") профессионально-ориентированные экономические задачи можно разделить на три больших класса:

1. *ПОЭЗ в условиях определенности* (или *детерминированные ПОЭЗ*). Они характеризуются однозначной, детерминированной связью между решением задачи и его исходом, т. е. оперирующей стороне относительно каждой стратегии заранее, до проведения операции, известно, что она неизменно приводит к определенному конкретному результату.

2. *ПОЭЗ в условиях риска* (или *стохастические ПОЭЗ*). Они характеризуются вероятностной связью между принятым решением и его исходом. В этом случае каждая стратегия оперирующей стороны может привести к одному из множества возможных исходов, причем каждый исход имеет определенную вероятность появления. Предполагается, что экономисту-аналитику эти вероятности заранее, до принятия решения, полностью известны (или могут быть определены с любой требуемой для целей исследования степенью точности).

3. *ПОЭЗ в условиях неопределенности*. Они характеризуются тем, что любое принятое решение может привести к одному из множества возможных исходов, вероятности появления которых неизвестны.

Фокус внимания сместим на ПОЭЗ, связанные с финансово-экономическими расчетами. И рассмотрим технологию работы с финансовыми функциями в Microsoft Excel, которые приходят на помощь в решении по математическим моделям финансово-экономических задач.

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К ИЗЛОЖЕНИЮ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Филимоненкова Н. В.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

190005, Санкт-Петербург, 2-ая Красноармейская ул., 4

Тел.: 89052837945, e-mail: nf33@yandex.ru

Изучение функционального анализа характерно для математических факультетов классических университетов. Но и в техническом вузе эта дисциплина встречается в учебных планах некоторых прикладных специальностей: вводный курс с небольшим объемом аудиторных часов (51 – 102). Тесные рамки учебного времени, прикладная направленность и уровень базовой подготовки современных студентов технического вуза не позволяют им освоить столь сложную математическую дисциплину с позиций классического подхода, подразумевающего фундаментальность и самодостаточность подачи сугубо теоретического материала. Кроме того, прагматически настроенных студентов трудно заинтересовать идеей обобщения и формализации математических конструкций, которой пропитан функциональный анализ. Очевидно, мотивация повышается, если приблизить этот курс к вычислительной практике с обязательным привлечением электронных вычислительных средств. Для будущих математиков-инженеров и математиков-программистов необходимо акцентировать прикладную роль функционального анализа, которая сводится к аналитическому обоснованию эффективной работы численных методов.

Среди опубликованных учебных ресурсов лишь немногие ставят и решают похожую методологическую задачу. Например, теоретические учебники В. А. Треногина [1], В. И. Лебедева [2] ориентированы на прикладные специальности, однако слишком объемны и сложны (особенно [1]).

В существующих сборниках задач преобладают теоретические упражнения. Они, как правило, начинаются со слова «доказать», оперируют сугубо абстрактными схемами. Воплощением такого подхода является сборник А. А. Кириллова, А. Д. Гвишиани [3], предназначенный для классических университетов, однако в той или иной мере все задачники по функциональному анализу тяготеют к погружению в формально-логический аппарат. При постановке учебных задач будущим инженерам, как минимум, следовало бы видоизменить форму подачи традиционных сюжетов: перейти от абстрактных к конкретным пространствам, нормам, операторам и от эксклюзивных упражнений на доказательство к более типовым, алгоритмичным вычислениям и построениям. Этот путь реализован в практикуме Белорусского государственного университета [4], хотя и не до конца: в ассортименте задач не хватает «мягкой пищи» – простейших одношаговых упражнений, нацеленных на отработку элементарных инструментов дисциплины. Другой путь приближения функционального анализа к вычислительной практике состоит в том, чтобы поставить в центр задачи применение какого-либо численного метода, вытекающего из теории. Такая тенденция эпизодически проступает в задачнике А. В. Треногина, В. М. Писаревского, Т. С. Соболевой [5]. Следуя учебнику [1], этот задачник основательно штурмует численные приложения функционального анализа, но, к сожалению, в основном со стороны теории, а не практики, причем на солидном уровне абстракции. К тому же применение численных методов естественно требует использования ЭВМ, и такие попытки встречаются в [4], [5], но их вес незначительный.

Можно сделать вывод, что в существующих сборниках задач по функциональному анализу почти нет таких выходов к численным методам, которые были бы по плечу среднему студенту и предполагали бы как математическую аргументацию, так и реализацию с использованием вычислительной техники. Это резонно объяснить несколькими обстоятельствами. Во-первых, сама идеология функционального анализа настроена на взлет абстрагирующей мысли. Во-вторых, учебные траектории этой дисциплины складывались в то время, когда компьютерные технологии были еще далеки от ведущей роли в образовании, а стало быть, их подключение к учебному процессу еще не воспринималось как нечто естественное и необременительное. В-третьих, численные методы по традиции укомплектованы в отдельный курс вычислительной математики. Но как отметил А. Д. Мышкис [6], в техническом вузе «небезопасно выделение всех вычислительных вопросов в отдельный раздел курса математики: такое выделение может существенно понизить идею алгоритмичности в остальных разделах курса, которые оказываются как бы противопоставленными вычислениям и тем самым обескровленными в прикладном отношении». Приближение курса функционального анализа к вычислительной математике служит непрерывности и связности профессиональной подготовки прикладника. Возможно, это даже единственный способ для обустройства функционального анализа в техническом вузе.

Сближение с вычислительной математикой должно быть таким, чтобы полностью довести теоретический факт до числа: проследить проекцию абстрактных идей на плоскость численных методов и дать возможность сразу апробировать методы в вычислительной практике. Конечно, мера этого сближения должна быть разумной, чтобы функциональный анализ не потерял свою идентичность, не подменялся курсом вычислительной математики.

Для решения описанной задачи проведено научно-методическое исследование и сформирован комплекс из двух учебных пособий: «Конспект лекций» [7] и «Сборник задач» [8] по функциональному анализу для технических вузов. Предпринята существенная адаптация теоретического материала, в каждом модуле «Конспекта лекций» сюжетная линия проходит путь от введения основных понятий к доказательству ключевых теорем, имеющих прямой выход к широко известным вычислительным методам. Разработана новая база задач по функциональному анализу. «Сборник задач» включает 58 заданий, 20 вариантов условия в каждом, все задания снабжены образцами решения либо указаниями к решению. Большинство задач являются результатом авторской разработки. Преобладают задания вычислительного характера, что соответствует прикладной ориентации курса. Среди них центральное место занимают 18 достаточно объемных заданий, рассчитанных на численную реализацию в математических пакетах и аналитическую интерпретацию вычислений.

Результаты разработки прошли апробацию в учебном процессе специальностей «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика» СПбГАСУ. Учебный комплекс принят к публикации в издательствах СПбГАСУ и «Лань». Присвоен гриф Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки РФ. Научно-методическое исследование продолжается в направлении аналогичной модернизации курса математического анализа в техническом вузе.

Список литературы

[1] Треногин В. А., Функциональный анализ: учебник, изд. 4-е, испр., М: Физматлит, 2007, 488 с.

[2] Лебедев В. И., Функциональный анализ и вычислительная математика: учебное пособие, изд. 4-е, перераб. и доп., М.: Физматлит, 2005, 296 с.

[3] Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1988. 400 с.

[4] Антоневич А. Б., Ваткина Е. И., Мазель М. Х. и др.; под ред. Антоневича А. Б., Радыно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения: лабораторный практикум. – Минск: БГУ, 2003. 179 с.

[5] Треногин В. А., Писаревский В. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М: Наука, 1984. 256 с.
[6] Мышкис А. Д. О преподавании математики прикладникам // Математика в высшем образовании. 2003, №1, С. 37 – 52.
[7] Филимоненкова Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу. – СПб.: Лань, 2015. (принято в печать)
[8] Филимоненкова Н. В. Сборник задач по функциональному анализу. – СПб.: Лань, 2015. (принято в печать)

СЕТЕВОЕ СОТРУДНИЧЕСТВО ВУЗОВ И РАБОТОДАТЕЛЕЙ В ОБЛАСТИ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ

Хаймина Л. Э., Хаймин Е. С.

Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова
163002, Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17
Тел.: +79217203803, e-mail: l.khaimina@narfu.ru

Сетевое сотрудничество вузов и работодателей по реализации основных образовательных программ является важным фактором модернизации высшего профессионального образования в России. Сетевая форма организации образовательных программ призвана укрепить сотрудничество в различных областях между высшими учебными заведениями, научными институтами и предприятиями и организациями.

После вступления в силу ФЗ-273 «Об образовании в РФ» в САФУ имени М.В. Ломоносова проведена плодотворная работа по развитию сетевого сотрудничества в сфере образования и науки. Основным направлением стала разработка сетевых образовательных программ федеральных университетов. Так с сентября 2014 года в институте математики, информационных и космических технологий (ИМИКТ) САФУ реализуется сетевая магистерская программа «Математическое моделирование социально-экономических процессов» по направлению «Прикладная математика и информатика». В рамках этой программы федеральные университеты-участники проекта будут обмениваться учебными модулями, будет осуществляться академическая мобильность преподавателей и студентов, двойное руководство магистерскими диссертациями и т.п. Происходит объединение ресурсов участников сети, обмен технологиями и многое другое.

Следующее направление, которое активно развивается в ИМИКТ САФУ - это сетевое сотрудничество с ведущими педагогическими университетами и другими университетами России, а также зарубежными партнерами. В качестве примера можно привести сетевую магистерскую программу по направлению «Педагогическое образование» между САФУ и РГПУ имени А.И. Герцена. В настоящее время идет разработка образовательной программы между САФУ, РГПУ и МПГУ.

В САФУ имени М.В. Ломоносова имеется многолетний опыт действующих международных бакалаврских и магистерских программ. Институт математики, информационных и космических технологий в рамках международных проектов BCBU+ и KITENPI программы Kolarctic создал две магистерские программы: «Высокопроизводительные и облачные вычисления» (направление «Прикладная математика и информатика») и «Информационные технологии в медицине и социальной сфере» (направление «Прикладная информатика»), которые успешно реализуются и по сегодняшний день. В частности, все дисциплины магистерской программы «Информационные технологии в медицине и социальной сфере» переведены на английский язык и могут изучаться дистанционно, что открывает возможности для обучения не только российских студентов, но и иностранных студентов. Эта магистерская программа разрабатывалась и реализуется совместно с кафедрой социальной работы и социальной безопасности института комплексной безопасности. В учебный процесс внедряются результаты научных исследований лаборатории измерительных систем и цифровой обработки сигналов, работает совместный научный семинар кафедры.

Сетевое взаимодействие между ИМИКТ САФУ и Центром телемедицины г. Тромсе (Норвегия) – еще одно направление, которое результативно развивается в последние годы. В рамках этого взаимодействия осуществляется не только организация практик, но и двойное руководство магистерскими диссертациями, совместные научные исследования, проектная деятельность с лечебными учреждениями.

Развитие сетевого взаимодействия с предприятиями и организациями, а также научно-исследовательскими институтами при реализации образовательных программ следует рассматривать в контексте усиления роли работодателей в разработке и реализации бакалаврских и магистерских программ. Необходимо системное взаимодействие с работодателями, особая роль в котором отводится базовым кафедрам.

В настоящее время созданы благоприятные условия для углубленного взаимодействия между вузами (использование опыта и наработок партнеров), научно-исследовательскими институтами (внедрение результатов НИР в образовательные программы) и предприятиями и организациями (усиление практико-ориентированной составляющей образовательных программ и решение региональных задач).

Сетевое сотрудничество вузов и работодателей позволяет:

- объединить ресурсы и технологии всех участников сети;
- расширить возможности получения студентами уникальных компетенций;
- увеличить российскую академическую мобильность студентов и преподавателей;
- внедрить механизмы взаимного признания результатов обучения;
- сформировать ресурсные центры подготовки кадров высшей квалификации.

ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В ПОВОЛЖСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Шебашев В.Е., Шарафутдинова Л.Н.

Поволжский государственный технологический университет

424000, г. Йошкар-Ола, пл.Ленина, 3

Тел.: 89278836169, e-mail: sh-ln@yandex.ru

Одним из важных направлений приоритетного национального проекта "Образование" является выявление и поддержка талантливой, ярко мыслящей и проявляющей творческие способности молодежи. Решению этой важной задачи способствует проведение предметных (в частности, математических) олимпиад. В настоящее время мы наблюдаем активизацию вузов в части проведения школьных олимпиад. Так, только Московская межвузовская олимпиада школьников по математике насчитывает сегодня 50 базовых площадок для проведения второго очного тура, объединяя в своих рядах более пяти тысяч школьников.

Всероссийские школьные олимпиады привлекательны и для учеников, а также их родителей и учителей. Очевидно, всероссийские предметные олимпиады школьников не только позволяют выявить наиболее талантливых ребят, но и помогают им определиться с выбором вуза и направлением дальнейшей научной деятельности, победителям и призерам дают льготы при поступлении.

Обсуждая всероссийские школьные олимпиады в стенах Московского государственного университета, ученые подчеркивали, что «школьные олимпиады – это только начало. Поиск талантливой молодежи должен идти и в студенческо-аспирантской среде» [1]. Действительно, если участие в школьных олимпиадах рассматривать как первый опыт ученика в решении нестандартных задач, то активное участие в студенческих олимпиадах формирует у студентов и аспирантов навыки научно-исследовательской деятельности.

В рамках всероссийских студенческих олимпиад (ВСО) в настоящее время проводится достаточно большое количество региональных и всероссийских этапов (туров) предметных олимпиад, однако многие их них носят локальный характер. Также следует отметить, что олимпиад по математике среди них не так уж и много: так в 2014 году в перечень ВСО (III тур) было включено 4 олимпиады по математике из 114; на 2015 год заявлено 6 олимпиад по математике из 148. Локальный характер олимпиад был обусловлен большой территориальной протяженностью нашей страны, и принять участие на всероссийском уровне внутри одной олимпиады могло лишь относительно небольшое количество студентов. Новые инфокоммуникационные технологии открывают перед студенческими олимпиадами невиданные ранее возможности.

Студенческая математическая олимпиада в Поволжском государственном технологическом университете (ПГТУ). Наш университет многие годы является базовым вузом для проведения всероссийского этапа ряда студенческих олимпиад, среди которых, особое место занимает олимпиада по математике. Ранее математическая олимпиада в ПГТУ также носила локальный характер, в ней, как правило, участвовали студенты ближайших регионов: Республики Чувашия, Республики Татарстан, и, в лучшем случае, Кировской области.

Сегодня математическая олимпиада, третий тур которой проводится на базе ПГТУ, является частью системы открытых международных студенческих Интернет-олимпиад, проводимых Национальным фондом поддержки инноваций в сфере образования (НФПИ) по 11 дисциплинам ВПО и 3 дисциплинам СПО. Первые два тура Интернет-олимпиады по математике являются отборочными и проводятся в форме компьютерного тестирования в режиме on-line. При этом первый (вузовский) тур олимпиады проводится в вузах самостоятельно, а второй (региональный) тур проводится в базовых вузах. В первом туре олимпиады могут принять участие все желающие студенты вуза-участника. На второй тур приглашаются студенты, показавшие в своих вузах лучшие результаты. И только призеры второго тура могут быть приглашены на третий всероссийский тур математической олимпиады.

Использование инфокоммуникационных технологий при проведении отборочных туров олимпиады позволило значительно увеличить количество участников и расширить границы математической олимпиады. В первый же год проведения Интернет-олимпиады по математике в 2009 году в ней приняли участие 5422 студента из 248 вузов Российской Федерации, а также стран ближнего и дальнего зарубежья. Российская Федерация была представлена участниками из всех федеральных округов, что доказало своевременность и актуальность расширения форм и развития технологий проведения студенческих олимпиад.

С первого же года проведения ВСО по математике с использованием инфокоммуникационных технологий, олимпиада приняла статус международной [2]. ПГТУ и НФПИ заключен ряд соглашений с зарубежными коллегами, в том числе и с Ариэльским университетом (Израиль), о проведении совместных Интернет-олимпиад по математике. Победители и призеры всероссийского тура олимпиады по математике ежегодно приглашаются к участию в суперфинале, который проводится в Ариэле [3-7]. Международным статусом продиктована необходимость проведения олимпиады на нескольких языках: русском, английском, иврите, китайском (в 2009 г).

Еще одной особенностью Интернет-олимпиады по математике, проводимой на базе ПГТУ, является тот факт, что с 2010 года олимпиада проводится для студентов всех направлений подготовки, реализуемых в системе высшего профессионального образования. Ранее олимпиада проводилась для студентов технических специальностей, сегодня в олимпиаде могут принимать участие все студенты, результаты олимпиады при этом подводятся по пяти профилям:

- биотехнологии и медицин»;
- гуманитарный и юридический;
- специализированный (с глубоким изучением дисциплины «Математика»);
- техника и технологии;
- экономика и управление.

Интерес к Интернет-олимпиаде по математике растет с каждым годом, за 2009-2014 годы в олимпиаде по математике в общей сложности приняли участие около 40 тысяч студентов 15 стран.

Особенности разработки олимпиадных заданий. Использование технологии компьютерного тестирования при проведении отборочных туров олимпиады по математике диктует особые требования к подготовке базы олимпиадных заданий. При разработке олимпиадных заданий первого и второго туров учтены требования, предъявляемые как к олимпиадным заданиям, так и к заданиям, разрабатываемым в тестовой форме. С учетом опасений, высказываемых некоторыми коллегами относительно использования тестовых заданий при проведении олимпиад, в первом туре олимпиады по математике используется не более четырех заданий, а во втором – не более одного задания с выбором ответа. При разработке олимпиадных заданий особое внимание уделяется их дифференцирующей способности.

Тематика заданий первого тура охватывает основных разделы дисциплины: линейная алгебра, векторный анализ, аналитическая геометрия, введение в анализ, дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных, неопределенный и определенный интеграл, дифференциальные уравнения, ряды, элементы функции комплексной переменной. Во втором туре тематика заданий, по сравнению с первым туром, расширяется, например, за счет включения заданий из разделов: кратные и криволинейные интегралы; теория вероятностей. При разработке олимпиадных заданий также учитываются направления и профили подготовки.

Первый тур олимпиады по математике соответствует вузовскому этапу ВСО и является отборочным. Для вузов-участников отсутствуют ограничения числа студентов, участвующих в первом туре. Первый тур олимпиады носит массовый характер, следовательно, каждый участник олимпиады должен найти посильные для себя задания. Вместе с тем, по результатам первого тура необходимо выбрать участников следующего тура. В связи с этим на первом туре участникам олимпиады предлагается до 16 тестовых заданий различного уровня сложности:

- Первый уровень (4 задания) – стандартные задания с незначительным объемом вычислений, но в нестандартной формулировке;
- Второй уровень (8 заданий) – решение задания требует объединения знаний из различных разделов математики;
- Третий уровень (4 задания) – нестандартное применение стандартных подходов.

Задачи первых двух уровней служат для привлечения интереса к решению математических задач у студента со средним уровнем подготовки, показывают ему красоту математики. Задания третьего уровня сложности имеют большую дифференцирующую способность по сравнению с другими заданиями, и позволяют выявить наиболее подготовленных студентов.

Второй тур олимпиады по математике также проводится в форме компьютерного тестирования и служит для выявления победителей по базовым вузам (федеральным округам Российской Федерации и странам-участникам) и для отбора участников III тура. Как и в первом туре, используются олимпиадные задания трех уровней сложности, но со второго по четвертый. Задания четвертого уровня сложности можно отнести к заданиям с нестандартной формулировкой, требующим нестандартных (творческих) подходов к решению, так называемые творческие задания. На втором туре участникам олимпиады предлагаются к решению 12 заданий (по четыре задания каждого уровня сложности). При этом количество заданий с выбором ответа значительно сокращается – не более одного, остальные 11 заданий – с кратким ответом.

При сравнении уровней сложности заданий первого и второго туров можно отметить, что задания второго уровня сложности предыдущего тура соответствуют самым простым заданиям второго тура и т.д.

Третий тур Интернет-олимпиады по математике проводится в традиционной форме: участники предъявляют жюри развернутые, аргументированные решения каждого задания. Традиционная форма проведения заключительного третьего тура олимпиады позволяет включить задания на доказательство некоторых утверждений. Из 12 предложенных задач практикуется включение до 6 заданий на доказательство. Их можно отнести к заданиям следующего (высокого) уровня сложности – задания на доказательство неизвестных ранее свойств с нестандартным использованием известных методик.

Следует отметить также, что тематическое наполнение олимпиадных заданий осуществляется на основе компетентностного подхода. Выделены предметные компетенции, задания разрабатываются с учетом уровня компетенций, что дает возможность судить о способности студентов решать практико-ориентированные задачи, анализировать использованные методы решения, интерпретировать полученные результаты с учетом поставленной задачи [8].

Двойственный характер этапов олимпиады. Как уже отмечалось выше, первый тур Интернет-олимпиады по математике соответствует вузовскому уровню. По результатам первого тура каждый вуз-участник получает сгенерированный службами НФПИ детальный аналитический отчет. На основе полученного отчета вуз вправе самостоятельно подвести итоги вузовского тура олимпиады, как по выделенным направлениям подготовки, так и по другим основаниям (например, факультетам, курсам и т.д.).

Второй тур олимпиады проводится в базовых вузах и соответствует региональному уровню ВСО. По результатам второго тура можно подвести итоги по региону, федеральным округам РФ, странам-участницам. Таким образом, второй тур олимпиады может одновременно рассматриваться как региональным, так и межрегиональным этапом ВСО. Объединив результаты второго тура олимпиады можно провести анализ результатов по направлениям и профилям подготовки студентов, по группам направлений подготовки.

Третий тур олимпиады проводится совместно с коллегами из Ариэльского университета: олимпиаду открывает сеанс видеосвязи, все участники олимпиады решают задания, разработанные международным жюри. Лучшие работы участников ВСО по математике направляются на суд международного жюри, что служит основой подведения итогов третьего тура олимпиады как на всероссийском, так и на международном уровне.

Массовость отборочных туров, проводимых в форме компьютерного тестирования, позволяет провести статистический анализ результатов, в том числе и сравнительный анализ уровня математической подготовки участников первого и второго туров олимпиады. При этом используются различные формы визуализации результатов анализа:

- гистограмма распределения результатов студентов-участников;
- карта коэффициентов решаемости заданий;
- диаграмма ранжирования результатов студентов вузов-участников по проценту набранных баллов;
- диаграмма ранжирования студентов вуза по проценту набранных баллов.
- диаграммы выполнения студентами заданий различного уровня компетентности;
- рейтинг-листы (краткие и развернутые).

С целью проведения сравнительного анализа используется метод наложения форм визуализации по показателям вуза-участника на общий фон.

Технологии, разработанные для проведения Интернет-олимпиад по математике, легли в основу проведения междисциплинарных олимпиад инновационного характера «Информационные технологии в сложных системах», проведенных на базе ПГТУ в 2009, 2010 и 2012 гг в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы [9,10].

Опыт проведения студенческих олимпиад на основе инфокоммуникационных технологий показал перспективность данного направления и необходимость дальнейшего совершенствования и расширения олимпиадного движения [11]. Использование тестовых технологий при проведении отборочных этапов олимпиад позволяет проводить детальный содержательный анализ результатов, и способствуют развитию сетевого взаимодействия между вузами.

Литература

1. http://www.msu.ru/press/smiaboutmsu/provedenie_olimpiad_pomozhet_nayti_odarennykh_shkolnikov.html [Электронный ресурс].

2. Международный статус всероссийской Интернет-олимпиады // Аккредитация в образовании. - 2008. - №31.
3. Поисковик для новых Ломоносовых: Интернет-технологии должны стать основой для возрождения массового олимпиадного движения // Аккредитация в образовании. - 2009. - №35. – С. 50-52.
4. Слагаемые и множители Интернет-олимпиад // Аккредитация в образовании. - 2010. - №39. - С. 48-50.
5. Победителей Интернет-олимпиады ждет суперфинал // Аккредитация в образовании. - 2011. - №48. – С. 72-73.
6. Международные состязания студентов по математике // Аккредитация в образовании. – 2011. - №49.
7. Гори, огонь олимпиады // Аккредитация в образовании. - 2012. - №56.
8. Шебашев, В.Е. Анализ результатов открытых международных Интернет-олимпиад для учащихся профессиональных организаций (СПО) / В.Е. Шебашев, А.А. Колчев, Л.Н. Шарафутдинова // Труды международной научной конференции 24-29 марта, Цахкадзор 2014. Том I: Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное пространство, – с. 515-520.

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Щербатых В.Е.

Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина

399770, г. Елец, Липецкая обл., ул. Коммунаров, д.28

Тел.: 89042922137, e-mail: wega18@mail.ru

Как известно, развитые страны мира признают необходимость приоритетного и опережающего обеспечения фундаментальных естественнонаучных исследований, как гаранта роста страны в области научно-технических инновациях. Считается, что для достижения высокого качества экономического роста, требуется решить задачу постоянного и непрерывного воспроизводства интеллектуального капитала страны, а положительные результаты фундаментальных и прикладных исследований в области естествознания позволяют сделать открытия и во многих других сферах деятельности человека.

В связи с этим, повышение уровня математического образования для многих государств, стало приоритетным направлением. Не случайно в США была создана Национальная комиссия по преподаванию математики и естественных наук в 21-ом веке. Задача этой комиссии сводилась к исследованию качества преподавания, в частности математики, и нахождению путей улучшения подбора кадров, подготовки, сохранения и профессионального роста преподавателей математики и естественных наук в масштабе всей страны. Вот лишь несколько выдержек из доклада : «…математика и естественные науки — это первичный источник непрерывного знания и прогресса нашей цивилизации…», «…американские учащиеся должны повысить уровень знаний в математике и естественных науках, если им предстоит добиться успехов в сегодняшнем мире…», «…поскольку наши дети идут к тому времени, когда их решения будут формировать новую Америку, встаёт вопрос: будут ли они обладать необходимыми математическими и естественнонаучными инструментами, чтобы встретить новые проблемы и извлечь выгоду из новых возможностей?» [1].

Безусловно, качество математического образования является стратегическим вопросом для ведущих стран мира. Действительно, в последнее время стало очевидным, что многие математические методы превратились в универсальные методы исследования, т.е. стали общенаучными инструментами. Это явление связано с тем, что математические методы обладают, в частности, такими свойствами, как четкость в постановке задач, регулируемая точность получаемых оценок, непоколебимая логика рассуждений. Кроме того, изучение математики, использование математических методов в своей работе, формирует особый стиль мышления: абстрактный, логический, нацеленный на поиск закономерностей. Специалиста, грамотно применяющего математические методы, сегодня можно увидеть едва ли не во всех сферах деятельности человека.

Профессор МГУ, математик и педагог И.Ф. Шарыгин так говорил о математическом образовании: «Мы вправе рассматривать наше математическое образование, как весьма мощный стратегический ресурс России. При этом в качестве стратегического ресурса математика и математическое образование могут выступать и внутри России и на внешнем рынке. Но в таком случае вопрос о том, какими должны быть стандарты математического образования, выходит далеко за узко-предметные рамки и становится важнейшим общественно-политическим вопросом», «…Прежде всего, целью математического образования является развитие учащихся, причем развитие самых разных видов: … культурное развитие-… , духовное развитие-…,… эстетическое развитие-…, нравственное развитие (воспитание) -…,творческое развитие-…, … интеллектуальное развитие-…» [2].

Совсем недавно образование в России считалось одним из лучших в мире. Выпускник получал обширный багаж знаний, изучая в полном объеме и гуманитарные и естественные дисциплины. В итоге был разносторонне развитым и хорошо подготовленным к получению высшего или среднего специального образования, причем, мог поступить почти в любой ВУЗ без дополнительной подготовки с репетиторами, даже на факультеты с математическим уклоном.

К сожалению, эти позиции уже потеряны и по-прежнему продолжается процесс снижения уровня школьного образования вообще, и математического образования, в частности. Казалось бы, что в этих условиях отношение в современном обществе к математике (математическому образованию) должно быть бережным, без резких, непродуманных решений. Но не получается.

Сегодня можно увидеть такие непростые ситуации. Разные по профилю подготовки классы обучают школьников математике соответственно по разным программам (которые, как правило, выбирают родители). На выходе получаем: одно и то же качество знаний по математике может иметь совершенно разные оценки: «отлично» в гуманитарном классе и «удовлетворительно» в математическом. При определенных условиях вопрос поступления в ВУЗ может решаться величиной среднего балла аттестата, поэтому при прочих одинаковых оценках, имеем необоснованное преимущество гуманитария. Еще более неприятный момент возникает, когда, например, школьник-гуманитарий в конце 11-го класса вдруг осознает, что ближе ему естественные науки, а времени наверстать упущенное, уже нет. От этого не застрахован ни один выпускник школы. Только «ленивый» не говорил о новой функции школы - «натаскивании на ЕГЭ» , а воз и ныне там со всеми вытекающими последствиями. Вопросов к школе много.

Здесь уместно вспомнить слова Л.Д.Кудрявцева: «…каждый нормальный человек может овладеть любым родом умственной деятельности, в том числе и правильным использованием математических методов, на таком уровне, что он будет нужным, полезным и надежным специалистом…»[3].

Для выправления негативных тенденций школьного математического образования, по мнению автора, необходимо

- вернуться к единым сильным общеобразовательным стандартам;
- сделать экзамен по математике вступительным во все ВУЗы страны на все факультеты;
- уделить особое внимание подбору и качественной подготовке кадров - школьных учителей;
- поднять авторитет учителя (во всех смыслах).

Литература

1) http://www.mccme.ru/edu/index.php?ikey=glenn_ne_pozdno

2) И.Ф. Шарыгин Цели, задачи и стандарты математического образования,- Вопросы тестирования в образовании, 2003, №6, стр. 187-194.

3) Л.Д.Кудрявцев Избранные труды. Мысли о современной математике и ее преподавании, - Т.3, Физматлит, 2008, стр. 28.

Секция 9

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В XIX – XX СТОЛЕТИЯХ: ДИАЛЕКТИКА КОНЦЕПТУАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ

Демидов С.С.

Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН

119330, Москва, Университетский пр-т д. 23, корп. 4, кв. 121

На протяжении 19 века теория дифференциальных уравнений с частными производными развивалась в двух основных направлениях – как общая теория таких уравнений и как теория граничных задач уравнений математической физики. Если основной задачей в первой было нахождение общего решения уравнений, в выражение которого входят произвольные функции, и является необходимым определить как степень произвольности наиболее общего решения, так и, по возможности, само это решение, то основной задачей второго направления – найти решение определённой физической проблемы, удовлетворяющее некоторым начальным и граничным условиям. Каждому из этих направлений посвящены отдельные разделы в знаменитой «Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften»: общей теории – очерк Э. фон Вебера (Bd. H_1, H. 2 – 3; 1900), теории граничных задач – обзор А. Зоммерфельда (Bd. H_1, H. 4; 1900). Д.Ф. Егоров во введении к своей магистерской диссертации «Уравнения с частными производными 2-го порядка по двум независимым переменным» (1899) различает эти направления, подчёркивая «принципиальную разницу в самой постановке вопроса при изыскании интеграла данного уравнения, в зависимости от того, рассматривается ли оно самостоятельно или же как уравнение определённой задачи физики». Общая теория после работ Г. Монжа приобрела геометрический характер и развивалась в тесной связи с дифференциальной геометрией. В рамках этого направления получила замечательное развитие теория уравнений первого порядка (Ж. Лагранж).

Начало нового важного этапа в развитии общей теория дифференциальных уравнений с частными производными положили идеи С. Ли, первое изложение которых содержат его работы 1870-ых годов. Свои исследования Ли начал с теории уравнений 1-го порядка. Следуя идее Ю. Плюккера «обобщённого элемента пространства», он предложил рассматривать уравнение $f(x,y,z,p,q)=0$ (1) не как обычно – в связи с трёхмерным координатным пространством R^3, но в связи с пятимерным пространством R^5, рассматривая набор (x,y,z,p,q), как точку этого пространства. В этом случае уравнение (1) задаёт многообразие размерности 4 в пространстве R^5. Проинтегрировать такое уравнение по С. Ли означает найти все многообразия M_k размерности ≤ 2, координаты точек которого удовлетворяют уравнению (1) и условию $dz - pdx - qdy = 0$.

В таким образом интерпретированной теории получает обобщение и понятие уравнения, и понятие его решения. Так оказывается возможным рассматривать как уравнение с частными производными первого порядка выражение $z = 0$, а двумерное многообразие $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ p = t_1,\ q = t_2$ (которое в R^3 может быть интерпретировано как множество плоскостей, проходящих через начало координат) как его решение. В R^5 Ли выделил класс преобразований, получивших в литературе наименование контактных. В 1872 году С. Ли показал (строгое изложение этих результатов было осуществлено лишь в XX в.), что всегда существует контактное преобразование преобразующее любое уравнение в любое наперёд заданное, в частности, в уравнение $z = 0$. Таким образом, из этого простейшего уравнения можно вычитать всю теорию уравнений первого порядка ! Описание интегральных многообразий уравнения $z = 0$ даёт изящное изложение «лагранжевой теории» уравнений первого порядка.

В последней трети XIX века начинает складываться новая точка зрения на общую теорию дифференциальных уравнений. Становится ясным (С. Ли, А. Пуанкаре), что общее решение в «замкнутой форме» оказывается возможным лишь в исключительных случаях. Многочисленные методы исследования их решений (в том числе приближённые методы) вышли на передний план. Мало по малу формировался взгляд на общую теорию дифференциальных уравнений как на теорию граничных задач для различных типов – эллиптических, гиперболических, параболических – таких уравнений. И хотя изучение общей теории, понимаемой в прежнем смысле, продолжалось (Э. Вессио, Э. Картан, Ж. Драш, Егоров и др.), эти работы оказались в стороне от основного потока исследований по теории уравнений с частными производными.

В 1960-е годы могло казаться, что общая геометрическая теория в итоге уступила свои позиции и выродилась в раздел оказавшийся на обочине главного направления развития теории. Однако, в 70-е годы ситуация начала меняться и эти изменения носили кардинальный характер. Важно заметить, что импульс к переменам исходил не из чистой математики, но из теоретической физики. Именно специалистам в этой области открылась важность вполне интегрируемых уравнений. Хотя такие уравнения и представляют собой большую редкость, но, как выяснилось в последней трети XX века, они играют большую роль в физике.

Таким образом естествознание выдвинуло интегрируемые уравнения на переднюю линию современных исследований и вновь сделало актуальной общую геометрическую теорию дифференциальных уравнений с частными производными. Математики вернулись к казалось забытым результатам по интегрируемым системам Ли, А. Бэклунда, Г. Дарбу, Егорова. В итоге общая геометрическая теория, по казалось бы совершенно объективным причинам вытесненная на обочину основного потока исследований по теории уравнений с частными производными, на новом витке развития математики вновь оказалась в центре событий.

Замечательно то, что к 70-ым годам XX века был уже выстроен математический аппарат, с помощью которого оказалось возможным начать строить эффективную теорию нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными порядка выше первого – теорию, которую невозможно было построить математическими средствами Ли – Егорова.

Новые исследования по общей геометрической теории уравнений с частными производными усилиями Г. Гольдшмидта, С. Стернберга и др. стали частью современной теории дифференцируемых многообразий. В результате синтеза этой теории, коммутативной и гомологической алгебры, алгебраической топологии, алгебраической и дифференциальной геометрии и стали возможны достижения в этой области. Геометрическим аналогом для нелинейных уравнений оказались очень сложные зачастую бесконечномерные геометрические объекты с различными структурами (характеристические конусы, L-лучи и т.д.). Для их изучения А.М. Виноградовым и его учениками было сконструировано так называемое вторичное дифференциальное исчисление, которое и стало эффективным средством построения геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Так ещё вчера выглядевшая бесперспективной и потому, казалось бы, прочно забытая тематика общей геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными вновь оказалась на передней линии современной математики.

О ПЕРЕВОДЕ КУРСА Ж.М.К. ДЮАМЕЛЯ НА РУССКИЙ ЯЗЫК

Ермолаева Н.С.

Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет
198005, Санкт-Петербург. 2-ая Красноармейская ул. д. 4
Тел. : 89214245169, e-mail: naterm@ne2301.spb.edu

Жан Мари Констан Дюамель (1797-1872) всю свою жизнь посвятил не только науке, но и педагогической деятельности. Преподавание он оставил лишь незадолго до своей смерти. Его учебники были очень популярны.

Известно, что первое издание его «Курса анализа для Политехнической школы» появилось в 1840-1841 годах. При преподавании своего предмета, так и в написанных им курсах, он всегда считал своим долгом излагать материал ясно и не теряя строгости, разумеется в рамках развития математики того времени.

Дюамель за свою жизнь написал несколько курсов по дифференциальному исчислению и дифференциальным уравнениям. Впрочем, в России появились в 1856 и 1857 гг. в Журнале министерства народного просвещения две статьи, в которых были нелестные оценки его курсов. Так, например, во втором томе его курса по интегральному и дифференциальному исчислениям отмечалось, что для учащихся будет совершенно непонятно, когда материал излагается отрывочно на частных примерах, без отсутствия общего правила решения задач, в частности по дифференциальным уравнениям. Возможно, поэтому его курс тогда не был переведён на русский язык. Однако в 1870 г. вышел в последний раз курс Дюамеля [1], а вскоре появился и его перевод на русский язык. Напомним, что в то время Дюамель был «главным математиком Франции».

В обширном предисловии [1, с. 4-8] Дюамеля мы выделим несколько интересных деталей. Дюамель писал, что его курс существенно отличается от курсов других авторов, но соответствует тому порядку преподавания, который он считает верным, а потому он излагает материал в историческом порядке. Понятие бесконечно малых он излагает почти так как это было у Архимеда при изучении площади, объёма и т.д. а «главный предмет этого сочинения – это развитие двух важных понятий», т.е. бесконечно малых, объёмов» и т.д. Здесь же он указывает, что необходимо, чтобы полный курс был написан одним математиком.

В предисловии Дюамель пишет: «Наконец, если рассматриваются величины, не имеющие общей меры, и которые поэтому называются несоизмеримыми, то такие величины не представляют ни одного из двух предыдущих понятий, а потому или нужно сказать, что они не имеют отношения, или ещё расширить слова отношением и число, Но в этом последнем случае, недостаточно сказать, что две несоизмеримых величины имеют между собой отношение, и назвать его числом несоизмеримым, - и нужно строго определить понятие о равенстве несоизмеримых отношений. Наш взгляд на это дело отличен от взглядов некоторых геометров и совершенно согласуется с взглядом Эвклида». (Отметим, что несоизмеримые (иррациональные) числа появились до Евклида у Теэтета, а Евклид включил их в свою книгу «Начал».)

Здесь Дюамель имеет в виду прежде всего Шарля Мере, который в 1869 году первый во Франции дал строгое определение несоизмеримых чисел. Сам же Дюамель сравнивал несоизмеримые числа путем их деления.

Этот курс Дюамеля был переведён на русский язык преподавателем Воронежской гимназии П.П. Савостьяновым [1], который был и издателем. Внутри обложки указано» «Дозволено цензурой. Москва, 9 декабря 1870 г.». Значит, перевод Савостьянова был сделан достаточно быстро. В списке литературы [1] указано полное название титульного листа. На обороте этого листа написано: Издание С.А. Степанова и П.М. Савостьянова. Однако инициал Дюамеля – М. показывает, что Савостьянов не знал его полного имени: Жан Мари Констан, из которых основным было первое.

Савостьянов выполнил не только перевод, но, считая курс Дюамеля [1] слишком трудным для учащихся, сделал много подстрочных примечаний. Это были более простые задачи, которыми он снабдил текст. Иногда он приводил более простое доказательство, иногда давал совет: например: «Нужно хорошо запомнить последние две формулы, ибо они будут иметь неоднократное применение, и притом обратить внимание, что они не зависят от того, какова сама кривая». Некоторые его примечания, а их было ровно 124, занимали почти страницу мелким шрифтом. Однако сноски по поводу сравнения несоизмеримых чисел у него не было.

Задуманный Дюамелем второй том не вышел, т.к. автор скончался 4 декабря 1872 года.

Литература

1. M. Duhamel. Membre de l’Institut (Académie des sciences). Основания исчисления бесконечно малых. Перевёл П. Савостьянов. Том первый в двух частях. Часть 1-я: Количества рассматриваемые как пределы. Часть 2-я: Дифференциальное исчисление. Воронеж: типография Г.М. Веселовского. 1871.

ПОЗДНЕСХОЛАСТИЧЕСКАЯ НАУКА О ДВИЖЕНИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ НОВОГО ВРЕМЕНИ

Зайцев Е.А.

Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН

117861, Москва, ул. Обручева, д. 30а, корп. В

Тел.: 89264669262, e-mail: e_zaitsev@mail.ru

Считается, что натурфилософия античности и средних веков отличается от математического естествознания Нового времени своим качественным характером, что в ней при анализе движения не применяются количественные методы. Данное положение может быть обосновано ссылкой на Аристотеля, который писал, что категория количества сказывается о понятиях силы и движения несобственным («привходящим») образом и, поэтому, не может входить в состав знания о них («Категории», VI). Более внимательный анализ, однако, показывает, что и сам Аристотель, и его средневековые последователи все же использовали количественный метод при анализе движения. У Стагирита мы находим описание пространственного перемещения на языке математической теории пропорций («Физика», VII, 5 и «О небе», III, 2 – так называемая «аристотелевская динамика»), а средневековое учение о движении содержало в качестве особого раздела теорию квантификации качеств. Тем не менее, ни античность, ни в средние века не создали математического естествознания, претендующего на адекватное отражение естественного движения. Почему?

Для того, чтобы применение математических методов при описании природы стало возможным, необходимо выполнение нескольких условий. Первое – это условие постоянства действующих сил. Второе – это условие аддитивности, в соответствии с которым совокупное действие нескольких движущих сил должно быть равно математической сумме их действий. В античности и средние века ни то, ни другое условие не могло быть выполнено. Причина состояла в том, что природные силы понимались исключительно анималистически, то есть считались подверженными естественным изменениям, в частности, «усталости». Понятие «усталости» («inclinatio ad quietum» – стремление к покою), являющееся неотъемлемой характеристикой живого существа, определяет, например, принципиальное отличие позднесредневековой теории импетуса от ньютоновского представления об инерции. В то время как Ньютон настаивал на потенциальной бесконечности инерциального движения, его средневековые предшественники исходили из того, что при движении тела, даже в отсутствии сил сопротивления, происходит (вследствие усталости) постепенное исчерпывание импетуса, что приводит к его остановке. Еще одна характеристика животного действия, а именно его волевой характер, была ответственна за нарушение принципа аддитивности сил: и позднеантичные, и средневековые авторы полагали, что в ходе совместного действия нескольких агентов результат значительно превосходит арифметическую сумму результатов тех же агентов, действующих независимо. Так Иоанн Филопон (VI в.), соглашавшийся с тезисом Аристотеля о том, что тела различного веса будут падать в пустоте с различной скоростью, утверждал, что скорость при этом не будет пропорциональна их весу. Ибо «сила тяжести», влекущая тело вниз, не пропорциональна его «весу», иными словами, она не равна сумме «сил тяжестей», влекущих вниз его составные части. Если соединить вместе два тела, каждое из которых весит один фунт, то в результате получится «вес», превышающий два фунта. Наоборот, если разделить груз, весящий два фунта, на две равные части, то каждая из них будет весить не фунт, а меньше. Филопон писал: «Пять камней, обособленных друг от друга, даже если они соприкасаются друг с другом, не произведут движения более быстрого, чем один из них, но если их наложить друг на друга и соединить в один, то целое будет двигаться гораздо быстрее.» Данный вывод опирается на житейское наблюдение, согласно которому «объединенные силы растут, а вследствие раздора даже самые большие разрушаются». Очевидно, что данный постулат несовместим с принципами классической механики. Сходное представление мы находим в трактате средневекового автора Фомы Брадвардина «О пропорциях скоростей в движениях» (1328), положившего начало математической теории движения в поздней схоластике. Брадвардин полагал, что (аристотелевская) теория, согласно которой при удвоении силы происходит удвоение пути, пройденного телом, неверна, поскольку противоречит опыту. А именно, если один человек движет груз с большим трудом и весьма медленно, то два человека будут двигать его со скоростью, которая значительно превысит удвоенную скорость первого движения. Точно также в часах: груз, подвешенный на вращающейся оси, опускаясь, приводит в движение ось или колесо с неощутимой скоростью, тогда как двойной груз будет двигать ту же ось со скоростью, значительно превышающей удвоенную скорость первого движения. Несмотря на то, что указанные качественные соображения по сути исключают возможность использования количественных оценок при описании движения, Брадвардин предлагает оригинальный способ его математического выражения, опирающийся на логарифмическую зависимость между скоростью и силами. Разумеется, в условиях анималистической трактовки сил эпистемологическая ценность «функция Брадвардина» представлялась столь же проблематичной, как и аристотелевской прямой пропорциональной зависимости между силой и скоростью. О проблематичности количественной «динамики» писал еще Аристотель, указывая, что математическое описание движения относится, вообще говоря, к регистру возможного, а не действительного. Он, в частности, отмечал, что при падении вниз одно зернышко лишь в возможности способно произвести действие, равное тому, которое оно произведет, падая в составе большой меры зерна – медимна («Физика», VII, 5). О виртуальном характере математического описания природы свидетельствуют и замечания средневековых перипатетиков. Так, вслед за Брадвардином, на иррелевантность математических формул при исследовании природного движения указывал Иоанн Буридан в комментарии к «Физике» Аристотеля: «Мне представляется, что эти правила (задаваемые функцией Брадвардина – *Е.З.*) не следует приписывать двигателям, обладающим волением и свободой, если только не предположить, что они двигают с максимальной скоростью, с какой только могут … Отсюда следует вывод, что эти … правила действуют или редко, или не действуют никогда.» Тем не менее, Буридан оправдывает применение функции Брадвардина посредством следующего рассуждения: «Не следует говорить о том, что эти правила являются ненужными и вводящими в заблуждение, ибо допустимо, что условия, не выполнимые в отношении природных сил (non adimpleatur per potentias naturales), тем не менее, выполнимы для Божественной силы (per potentiam divinam).» Иными словами, будучи ложными с точки зрения физики, правила Брадвардина могут стать истинными, если их рассматривать с точки зрения возможностей Творца. Выведенная за рамки природы, математическая трактовка движения попадает, таким образом, в сферу возможных божественных волений, в которой заключено все то, что не содержит логического противоречия (в соответствии с позднесредневековым номиналистическим тезисом об абсолютном могуществе Бога – potentia Dei absoluta). В этом и только в этом состоит, согласно мнению Буридана, его эпистемологическая ценность.

Указанная особенность позволяет точнее сформулировать вопрос о предпосылках использования количественных методов в естествознании в Новое время. В силу сказанного выше, проблема может быть переформулирована как вопрос об общих причинах и конкретно-исторических обстоятельствах превращения логически возможного (с точки зрения абсолютного могущества Бога) в реально существующее. Поиск ответа на него должен осуществляться в рамках положения о том, что переход из возможного в действительное осуществляется не в самой природе, а в созидаемом человеческим трудом мире техники. При этом следует учесть особенность развития в предшествующее столетие (XVI в.), которая состоит в колоссальным прогрессе в области технической механики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 12-03-00340а).

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ТВОРЧЕСТВА П.А. НЕКРАСОВА

Исак И.В.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

119991 Москва ГСП-1 Ленинские горы

Тел: 89162115356 e-mail: ygrek75@mail.ru

В докладе предполагается осветить некоторые проблемы, связанные с прикладными задачами теории вероятностей и математической статистики, над решениями которых размышлял П. А. Некрасов. Несомненно, специфика постановки и пути поиска решений этих проблем связаны с его научно-педагогической, но и административной деятельности, основные этапы которых необходимо напомнить.

Павел Алексеевич Некрасов (1853 - 1924), известный российский математик и философ. Окончил физико-математический факультет Московского университета (1878), в 1883 году защитил магистерскую, а в 1886 – докторскую диссертацию. Экстраординарный профессор с 1886, ординарный профессор с 1890 года. Кроме того, декан физико-математического факультета (1890-1893), в 1894 году был избран ректором Московского университета, в 1898 назначен попечителем Московского округа, а в 1905 году был назначен «товарищем» министра Министерства народного просвещения.

Целесообразно также привести сведения об основных направлениях научной деятельности П.А.Некрасова.

Невзирая на огромную загруженность общественной и административной работой, Некрасов продолжал размышлять о наиболее важных для него проблемах, в частности о том, чтобы ввести математические методы не только в естественные, но и общественные науки. Наиболее перспективным направлением ему представлялись теория вероятностей и математическая статистика. И это не случайно, ибо, как ректор университета, попечитель учебного округа, в особенности, - крупный чиновник МНП, он имел дело с огромным статистическим материалом и был хорошо знаком с трудностями его обработки.

Основные идеи Некрасова изложены в обзорной статье, написанной на основании доклада, произнесенного им на заседании Московского математического общества 16 марта 1904 года, посвященного памяти Н.В. Бугаева, а также статье «Философия и логика науки о массовых проявлениях человеческой деятельности». [1,2] Приведем некоторые из идей, высказанных Некрасовым.

Как уже отмечено, методы теории вероятностей и статистики П.А. стремился приспособить к выявлению социальных, психофизических, антропологических законов с целью построения единой теории, которую он называл *формационной теорией жизни*. Отправной точкой для его исследований явились идеи, высказанные Н.В.Бугаевым (1837-1903) в создаваемом им научном направлении,- аритмологии. Некрасов отмечает, что методы классического математического анализа с его ответвлениями ориентированы на исследование непрерывных процессов, в то время, как эти методы неприменимы ко многим явлениям действительности, поскольку в них наличествуют дискретные процессы. В этой связи П.А. размышлял о недостаточности традиционной логики как инструмента научного исследования.

Как и многие ученые того времени, Некрасов понимал недостаточность силлогистики. Он полагал, что основу новой логики должна составить теория вероятностей. Так, вместо типичного силлогизма

Все люди смертны
Сократ – человек
Сократ – смертен,

П.А. предлагает силлогизм «всеобщей или психоаритмологической логики, взятый в отвлечение его от моральной оценки и содержащий лишь меру возможности факта, свойственного обособленному предмету бытия», и приводит пример того, как выглядел бы этот силлогизм в мыслимой им логике [1, стр.38]

Понятно, что без «обработки» соответствующих методов рассматриваемых дисциплин, их соединение невозможно, но сама идея весьма плодотворна. Продолжение развития этой идеи мы видим в современной вероятностной логике; любопытно что в круге идей близких к высказанным Некрасовым появились работы во второй половине XX века, например [3]

Вызывает интерес попытка П.Некрасова математического представления того, что в школе Бугаева называли аритмологическим миросозерцанием:

«Чтобы полнее представить себе общую координацию аритмологического миросозерцания …необходимо представить себя как бы в многомерном (n + 1-мерномъ) пространстве. Число n + 1 есть число разнородных сознанных мерил или оценок, к которым относятся, между прочим, время, три измерения обыкновенного пространства, вероятность и разные моральные оценки личных авторитетов (общих и специальных), вещей, явлений и ожиданий. Оценки эти суть как бы координаты элементов (точек) этого пространства». [1, с. 44]

Разъясняя эту идею, Некрасов приходит к недостаточности традиционной логики, и высказывает мысли, близкие к тем, что впоследствии были развиты, например, польским логиком Я.Лукасевичем (1878-1956)

Литература

1. *Некрасов П.А.* Московская философско-математическая школа и ее основатели // Мат.сборн. М.1904 Т.XXV.№1 Стр.3-249

2. *Некрасов П.А.* Философия и логика науки о массовых проявлениях человеческой деятельности // Мат.сборн. М.1902 Т.XXIII. Стр.463-604.

3. *Janes E.T.* Probability theory as a logic Boston. 1990

НАУЧНО-МИРОВОЗЗРЕНЧЕСКАЯ РЕВОЛЮЦИЯ 16-17 ВЕКА И ИЗМЕНЕНИЕ РОЛИ МАТЕМАТИКИ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ.

Колесников С.Н.

Механико-математический факультет МГУ им М.В. Ломоносова

119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1

Тел.: 89672841466, wiseacre@inbox.ru

В истории мировой науки хорошо известен произошедший в течение 16-17 веков кардинальный перелом в философии, науке и технике, получивший название «научно-мировоззренческой революции». Однако традиционные взгляды на этот период оставляют слишком много вопросов, и прежде всего не дают ответа на главный из них: «почему?». Более того, детальный историко-экономический анализ происходивших в то время исторических процессов [1-2] не дает ответа на вопрос о том, собственно какими причинами были обусловлены кардинальные изменения в экономической, и если так можно сказать, «научной» географии Европы тех времен, а они несомненны и крайне значительны.

В настоящем докладе делается попытка пролить свет на эти события и ответить на вопрос, что же собственно, произошло в научном мировоззрении, по-новому взглянув на роль в них основных научно-исторических персонажей – Коперника, Галилея, Декарта, Ньютона. В частности, совершенно по-иному представляется роль Коперника и его открытия , которые на поверку оказываются совсем не теми, о которых обычно рассказывается в литературе. Гипотеза о вращении Земли не была новинкой к моменту появления знаменитой книги Коперника [4], более того, сам автор называет на первых страницах своих предшественников, хотя и не всех. Интересна не сама гипотеза о вращении Земли, а аргументация Коперника и его общий взгляд на основания научной аргументации, который остается крайне важным и до настоящего времени. Причем, с этой же точки зрения крайне важным оказывается и текст предисловия, написанного неизвестным автором, но вошедшим в оригинальные издания Коперника. А сделанные Коперником важнейшие открытия в механике совершенно забыты и обычно приписываются другим историческим персонажам.

Также совершенно иной, по сравнению с традиционными представлениями оказывается роль И.Ньютона в лице его «трех законов природы» [5], и его взаимоотношения с Декартом [6], последователем которого, а не оппонентом, он оказывается. В современных курсах механики обычно «законы Ньютона» излагаются в совершенно неверной интерпретации, не дающей возможности оценить их первоначальный замысел. В то же время именно книга Ньютона до настоящего времени считается чуть ли не основой всего современного естествознания [7], а автор входит в число самых значительных мыслителей всех времен и народов по версии BBC [8], занимая в этом крайне представительном списке 3 место. Стоит упомянуть, что перовое место в нем очень уверенно занял … К.Маркс, и это также вполне оправданно, хотя и очень необычно для нашего современного мировоззреия.

Для математической аудитории конечно же наиболее интересной является рассказ о том, как изменилась роль математики в науке в течение указанного периода и как это соотносится с дальнейшим прогрессом наук, и, в частности, механики, роль которой в процессах модификации научного мировоззрения оказывается сильно недооцененной. Понятие «механицизма», оказывается не просто сильно упрощенным, но скорее даже утрированным в современных описаниях, по крайней мере, в отечественной литературе. Утратив связь с источником, которым являются законы Ньютона в их изначальной формулировке, оно оказалось интерпретируемым крайне упрощенно и даже неверно.

Рассматривая влияние механики и Ньютона на развитие науки, можно упомянуть о необычайно большом влиянии механики на экономическую науку, которое собственно продолжается до настоящего времени, оставаясь при этом в самых ранних пределах преимущественно статического восприятия экономических процессов. И это притом, что влияние кризисов резко и определенно ставит вопрос о рассмотрении динамических, бифуркационных и стохастических процессов в экономике. Проблема учета динамики в экономических процессах, хотя и была поставлена Кейнсом [3] еще в 1936 году, до настоящего времени не нашла своего решения, скорее всего в связи с тем, что математический аппарат, необходимый для такого решения, сформировался в относительно недавнее время, и еще не успел найти свои приложения в экономике, и, с другой стороны, в экономике выявлено серьезное влияние психологических и иных субъективных факторов в поведении потребителей, учет которых в математических моделях представляется проблематичным. Возможно именно поэтому только недавно исследованные работы Исаака Ньютона, вызывают такой интерес с точки зрения их применения в новых направлениях экономических исследований [9].

Таким образом в исследовании периода научно-мировоззренческой революции 16-17 веков есть еще очень много вопросов, влияние которых на современное состояние науки крайне интересно и подлежит изучению.

Литература

1. Бродель Ф. Материальная цивилизация, экономика и капитализм. XV-XVIII вв. В 3-х тт. М., 1986-1992.

2. Валлерстайн И. Анализ мировых систем и ситуация в современном мире. Пер. с англ. П.М. Кудюкина / Под общ. ред. Б.Ю. Кагарлицкого. СПб., 2001.

3. Кейнс Дж. М. Общая теория занятости, процента и денег. Антология экономической классики. Эконов – М., 1993 г.

4. Коперник Николай. О вращении небесных сфер. Малый комментарий и др. соч.: Пер. И. Н. Веселовского.- М.: Наука, 1964 г.

5. Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского и примечания А. Н. Крылова. М.: Наука, 1989 г.

6. Декарт Р. Сочинения : в 2 т. Т. 1 : пер с лат. и фр. / сост., ред. и примеч. В.В. Соколова. - М.: Мысль, 1994.

7. “The Economist”, Aug 21st 2003, 11:43, http://www.economist.com/node/2003425

8. http://news.bbc.co.uk/hi/english/static/events/millennium/sep/winner.stm

9. http://gtresearchnews.gatech.edu/newsrelease/newton.htm

ОБ ИСТОКАХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ТУРБИН

Коновалова Л.В.

Санкт–Петербургский государственный архитектурно–строительный университет

190005, Санкт–Петербург, 2–ая Красноармейская д.4

Тел.: 89052752129,e–mail: larisavkon@mail.ru

Первое упоминание о турбинах мы находим в рукописях Леонардо да Винчи (1452–1519). Изучение его работ, открытых вновь в конце XVIII– начале XIX столетия, показало, что в них изложены многие идеи, получившие развитие в XVIII–XIX вв. В частности, в рукописях Леонардо да Винчи имеются рисунки турбин (см. [1]).

История турбиностроения начинается с изобретения Сегнером гидравлической машины, которую обычно называют сегнерово колесо. Уроженец Венгрии Янош Андрош Сегнер (1704–1777) – врач, механик, математик родился в Прессбурге (ныне Братислава), окончил Йенский университет и некоторое время работал врачом в Прессбурге. С 1735 года Сегнер – профессор Йенского и Геттингенского университетов, а с 1775 года и университета в Галле. В 1747 году он был избран членом Лондонского королевского общества, а с 1754 года Сегнер почётный член Петербургской академии наук.

Отметим, что Сегнера связывали дружеские отношения с величайшим математиком и механиком восемнадцатого столетия Леонардом Эйлером (1707–1783). На протяжении тридцати лет они вели оживлённую переписку, часть из которой, письма Сегнера к Эйлеру, сохранилась.

В 1750 году в тридцать пятом номере ганноверского журнала “Ганноверские учёные указатели ” Сегнер опубликовал статью: “Описание изобретённой профессором Сегнером из Геттингена гидравлической машины” [2], в которой подробно изложил принцип действия своей машины. В том же 1750 году в тридцать восьмом номере журнала Сегнер поместил вторую статью. В этой работе он описал некоторые незначительные изменения, внесённые в конструкцию машины.

Создание нового мощного двигателя было одной из важнейших технических проблем XVIII века. Эйлер, круг интересов которого был необычайно широк, заинтересовался изобретением Сегнера, о котором узнал не только из упомянутых статей, но и из писем Сегнера. Результатом его размышлений явилось подробное заключение о сегнеровом колесе, представленное Берлинской академии наук, которое позднее он издал в виде двух работ [3,4].

В этих статьях Эйлер разрабатывает теорию сегнерова колеса, даёт расчёт его коэффициента полезного действия и предлагает ряд конструктивных усовершенствований. “1. Что касается горизонтальных трубок, которые присоединены к большому сосуду и которые г. Сегнер предлагает прямыми, то я придал им некую искривлённую форму, но так, чтобы они не откланялись от горизонтальной плоскости, в которой они были первоначально установлены. 2. В отношении ширины труб я предлагаю сделать её переменной так, чтобы число, выражающее ширину в каком–нибудь месте, было бы величиной переменной, зависящей от этого места. 3. Вместо того, чтобы делать у труб отверстия для истечения воды сбоку, как это предложил г. Сегнер, я предлагаю делать трубы в конце искривлёнными, чтобы не нарушать непрерывность и чтобы я мог включить в расчёт не только движение воды в трубах, но также и выход ее в конце труб ”[3, с. 312–313]. Для уменьшения сопротивления воздуха Эйлер предлагает заключить машину Сегнера в цилиндрический колпак, а для уменьшения веса и трения барабану придать форму колокола. Испытания показали, что усовершенствования Эйлера делают сегнерово колесо более эффективным.

В следующей работе “Более полная теория машин, приводимых в движение посредством реакции воды” [5], опубликованной в 1756 году в “Мемуарах Берлинской академии наук”, Эйлер продолжает исследования по теории гидравлических турбин. Он развивает общую теорию движения идеальной несжимаемой жидкости в узких трубах двоякой кривизны, вращающихся вокруг неподвижной оси. Эйлер первым произвёл расчёты водяных турбин. Он вывел уравнение момента сил реакции воды и развиваемой мощности в зависимости от скорости жидкости. Его метод, не потерявший своего значения для практического машиностроения, основан на результатах струйной теории. Теория Эйлера содержит формулы сил и моментов реакции, которые употребляются и в наше время.

Кроме того, он дал описание и чертежи своей принципиально новой гидравлической реактивной турбины, сконструированной с учётом всех сильных сторон машины Сегнера. Эйлер впервые высказал идею разделения турбины на две части: неподвижный направляющий аппарат, имеющий форму цилиндра с двойными стенками, нижняя часть которого заканчивается сплошным рядом трубок, расположенных под определённым углом, и рабочее колесо. В турбине Эйлера вода из трубок поступала в рабочее колесо, представляющее собой конус с двойными стенками, между которыми располагалась система лопаток в форме усечённых эллиптичеких трубок.

Более поздняя работа Эйлера “О приведении в движение кораблей без силы ветра”, опубликованная в Париже в 1771 году, была посвящена уже созданию проекта судового двигателя, работающего на основе использования силы реакции воды. В заключение отметим, что развитие техники в XIX столетии показало высокую эффективность использования силы реакции гидродинамической струи для вращения турбин и недостаточную эффективность её для движения судов.

Литература

1. Вернадский В.И., О науке. М., Наука, 1965.
2. Segner J.A. Eine von dem H–r prof. Segner in Gottingen eingesandte Beschreibung der von ihm erfundenen hydraulischen Maschine.–Hannoverische Gelehrte Anzeigen auf das Jahr 1750,35 Stuck S.136–140.
3. Euler L. Recherches sur l’effect d’une machine hydraulique propose par M. Segner professeur a Gottingen. – Histore de l’Academie royale des sciences, (1750), t. 6, Berlin, 1752, p. 311–354.
4. Euler L. Application de la machine hydraulique de M. Segner a toutes sortes d’ouvrages et de ses avantages sur les autres machines hydrauliques dont on sert ordinairement. – Histoire de l’Academie royale des sciences, (1751), Berlin, 1753, p. 17–53.
5. Euler L. Theorie plus complette des machines qui sont mises en movement par la reaction de l’eau. – Histoire de l’Academie royale des sciences, (1754), t. 10, Berlin, 1756, p. 227–295.

Алгебра отношений А. Де Моргана

Кузичева З.А.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

119991 Москва ГСП-1 Ленинские горы

Август Де Морган (1806 - 1871) – британский математик и логик. Профессор математики Лондонского университетского Колледжа (1828–1831; 1836-1866). Первый президент Лондонского королевского общества (1865).

В математике, которую, как и логику, Де Морган называл очами точного знания, его особенно интересовали основные принципы и их строго логическое развитие. Он выражал сожаление, что математики не более заботятся о логике, чем логики о математике. Он полагал, что основная задача логики состоит в исследовании способов образования выводов, а также общих принципов и правил построения доказательств. Построению теории выводов необходимо предпослать уточнение языка, поскольку логика должна также служить точному выражению мыслей и устранять неясности и двусмысленности, присущие обыденному языку.

В 1847 году вышел трактат Де Моргана «Формальная логика» [1]. Введенное в 1839 году [2] понятие универсума, позволяет Де Моргану считать равноправными положительные и отрицательные термины (классы и их дополнения), используя своеобразные обозначения. Положительные термины он обозначает прописными буквами, соответствующие отрицательные - строчными буквами: X, Y, Z,…; x, y, z,… Универсум он обозначает через U, пустой класс – через u. Таким образом, Де Морган не нуждается в явно заданном знаке операции отрицания. Но хотя прописные и строчные буквы равноправны в употреблении, они визуально различимы.

Над классами универсума Де Морган определяет операции сложения и умножения, т.е. объединения и пересечения и, учитывая наличие отрицательных терминов, получает систему, которая в настоящее время называется *булевой алгеброй.* К сожалению, никто не заметил этой находки Де Моргана, да и сам он, судя по всему, не придал ей особого значения. И это не единственная его находка, затерянная среди текстов, посвященных тому, что он полагал главной своей задачей, - усовершенствованию силлогизмов.

Предложения в силлогистических умозаключениях имеют субъектно-предикатную структуру, существенную роль здесь играет связка - *есть* (*суть*). Де Морган исследовал типы предложений, - традиционные, которые он называл простыми предложениями и так называемые составные предложения. Составными предложениями Де Морган называл предложения, полученные как комбинации простых. Например, «Каждый X есть Y, и каждый x есть y». Эта конъюнкция означает, что X и Y – это один и тот же класс, $X = Y$.
«Каждый X есть Y, и некоторые y не суть x», что равносильно строгому включению X в Y. Иными, словами, связка, как и в случае простых предложений, вроде «Каждый X есть Y», может иметь разный смысл в разных предложениях, хотя звучит (и пишется) одинаково. Как говорил Де Морган, субъектно-предикатная структура предложения скрывает подлинную взаимосвязь субъекта и предиката, поэтому необходимо исследовать, каковы же свойства реальных отношений. Это он и сделал одной из своих «частных задач», что привело его к изучению свойств бинарных отношений и введению алгебраических операций над ними.

Если X имеет некоторое отношение к Y, а Y- то же самое отношение к X, то Де Морган говорит, что это отношение обладает симметричностью (convertibility). Если X имеет некоторое отношение к Y, а Y имеет то же самое отношение к Z, и отсюда следует, что X имеет то же отношение к Z , тогда это отношение обладает транзитивностью (transitiveness). Например, отношения «X старше Y», «X предок Y» - транзитивны; «X равен Y» - симметрично и транзитивно, а отношение «X в ссоре с Y» - симметричное, но не транзитивное отношение. Для обозначения абстрактных отношений он сначала использует черту: X — Y, но произвольные X и Y либо имеют между собой данное отношение, либо нет, в последнем случае Де Морган пишет X — y.

Этот способ обозначения отношений, который использовался в работе [3, 1850], Де Морган изменил в работе 1860 года [4], он стал абстрактные отношения обозначать буквами. Например, «$X..L\ Y$» означает: X находится в отношении L к Y; X – субъект, Y – предикат отношения L. «$X.\ L\ Y$» означает: X не находится в отношении L к Y.

В работе [4] на множестве абстрактных отношений Де Морган определяет операции конверсии, объединения, пересечения и дополнения.

Конверсию отношения L он обозначает посредством L^{-1} ($X\ ..L^{-1}\ Y$ тогда и только тогда, когда $Y..\ LX$).

Объединение отношений M и L обозначается через M, L ($X..\ M,\ L\ Y$ тогда и только тогда, когда $X..\ M\ Y$ или $X..\ L\ Y$).

Пересечение отношений, обозначается как $M\ L'$ ($X..\ ML'Y$ тогда и только тогда, когда $X..\ MY$ и $X..\ LY$).

Дополнение отношения L обозначается через l ($X..\ l\ Y$ тогда и только тогда, когда $X.\ L\ X$).

Таким образом, операции над классами, введенные Де Морганом в «Формальной логике», он распространяет на бинарные отношения. Как уже отмечено выше, современники не слишком внимательно читали его сочинения, не заметили они и алгебру отношений. По существу дела на эту алгебру обратили внимание лишь в 20 веке.

В 1917 г. русский философ и логик С.И. Поварнин опубликовал небольшую работу по логике отношений [5], в которой он дает достойную оценку исследованиям Де Моргана по логике и теории отношений, в частности, он пишет:

«Первый сделал вполне отчетливую попытку положить подобное учение о суждении в основу теории умозаключений и построить настоящую «логику отношений» (и первый дал ей это название) известный английский логик и математик Морган. Исходным пунктом послужило учение о связке, которую он отождествляет с основным отношением» [5, с. 56]

Литература

1. *A. De Morgan*. Formal logic or the calculus of inference, necessary and probable. London, 1847.
2. *Morgan A. De.* First Notions of Logic (preparatory to the study of Geometry). London, 1839
3. *Morgan A. De.* On the syllogism: II. On the symbols of Logic. In: On the syllogism and other Logical Writings by Augustus De Morgan. London, 1966. P. 22 – 68
4. *Morgan A. De.* . On the syllogism: IV, and the Logic of Relations. In: . On the syllogism and other Logical …. P. 208 – 246
5. *Поварнин С.И.* Логика отношений. Ее сущность и значение. Петербург, 1917.

ОБ УЧЕБНО-ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ КАБИНЕТАХ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ В РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ XIX В.

Кутеева Г.А.

Санкт-Петербургский государственный университет

198504, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 28

Тел.: 89119600075, e-mail: gkut@rambler.ru

В данной работе на основе нескольких исторических материалов описано развитие учебно-вспомогательных пособий и кабинетов, связанных с математикой и механикой, в Российских университетах XIX в. (в основном, на примере Санкт-Петербургского университета). Историческими источниками доклада являются 4 устава Российских Императорских университетов и штаты к ним (1804 г., 1835 г., 1863 г, 1884 г.) [1-4], исторические записки, сделанные ректором Санкт-Петербургского университета П.Плетневым [5] и профессором В.В.Григорьевым [6], а также инвентарная книга кабинета практической механики [7], которая хранится на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ.

В уставе 1804 г. [1] есть глава VIII, которая носит название "Об учебных пособиях и Институтах". Согласно параграфу 84 этой главы должно было существовать собрание машин и моделей, которое находилось под ведением Профессора Математики.

В уставе 1835 г. [2] в главе IX "Учебные и вспомогательные пособия и заведения" приводятся 22 пункта "разных учебных пособий, заведений и собраний", среди них есть “технологический кабинет и собрание машин и моделей для Прикладной Математики”.

В исторической записке, читанной ректором Университета П. Плетневым на публичном торжественном акте 8 февраля 1844 года, читаем [5]: "В собрании *моделей для прикладной Математики* есть геодезические приборы и модели элементарных машин, служащих для передачи и преобразования различных движений одного в другое, числом 55. Геодезические приборы, в 1827 году, куплены в военно-типографическом депо, а модели элементарных машин, в 1833 году, изготовлены, по заказу Университета, в артиллерийской Технической школе. Цена тех и других восходит до 1,200 р. сер." В книге, составленной профессором В.В.Григорьевым в 1870 г., указывается уже большее число предметов технологического кабинета [6]: "На устройство *Технологического Кабинета* и собрания машин и моделей по *Прикладной Математике* назначалось уставом 1835 года 1200 руб. асс. ежегодно. Но устроился Технологический Кабинет не ранее как в 1848 году: тогда, со включением элементарных машин и приводов, находилось уже в нем 529 предметов. ”

По уставу университетов 1863 г. [3] технологического кабинета уже не было. Преемником его будем считать кабинет практической механики, т.к. в инвентарной книге кабинета практической механики [7] для нескольких первых предметов указывается место приобретения – из бывшего технологического кабинета. До настоящего времени сохранились и некоторые из предметов (механизмов), описанные в этой книге. На механизмах есть этикетки, с помощью которых можно сопоставить механизмы и записи в инвентарной книге. В содержании инвентарной книги имеем разделы: кинематические и статические модели, движители, приборы, чертежные приборы, математические модели, чертежи, книги и др. Количество предметов мы можем оценить приближенно, по каждому из разделов более ста предметов. В разделе математические модели (более двухсот моделей) были гипсовые, проволочные, картонные модели выписанные, в основном, из Германии по каталогам Бриля и других. Сейчас существуют интернет-каталоги музейных коллекций университетов Германии, где можно увидеть фотографии и описание этих моделей, например [8,9].

По штатам к уставу 1884 г. [4] при Санкт-Петербургском университете существовал уже механический кабинет. Тогда как, в Московском, Харьковском, Казанском университетах, в университете Св. Владимира (Киев), в Новороссийском университете (Одесса) должны были быть кабинеты практической механики. Механический кабинет СПбУ знаменит тем, что в нем находились и механизмы, созданные собственноручно или по чертежам академика П.Л. Чебышева. Их можно увидеть на фотографии из альбома Б.Н. Меншуткина (сделанной в 1899 г.) под номером 32, например, на сайте [10] (а также в проекте "Механизмы Чебышева" [11]).

Таким образом, к концу XIX в. во всех Российских Императорских университетах существовали кабинеты практической механики. Санкт-Петербургский университет обладал богатой коллекцией учебных пособий: деревянные и металлические модели механизмов (кинематические и статические модели), математические модели, приборы, чертежи, книги. Ведущие высшие учебные заведения Италии, Германии, Франции, Швейцарии также имели подобные кабинеты [12].

В "объяснительной записке к плану преподавания на физико-математическом факультете Императорского Санкт-Петербургского университета" (1908 г.) указывается, что "В часы практических занятий руководитель может, в случае надобности, демонстрировать и изучать со слушателями математические приборы и модели (особенно в аналитической геометрии и приложении анализа к геометрии). Рассмотрение таких моделей может в значительной степени содействовать уяснению и лучшему пониманию предмета. Коллекция таких простейших моделей имеется в механическом кабинете университета и может быть предоставлена, в случае надобности, в пользование руководителям практических занятий." Так пожелаем и современным преподавателям с успехом использовать учебные пособия, а может быть и создавать свои.

Литература.

[1] Параллельный свод общих уставов Императорских Росссийских университетов 1863, 1835 и 1804 годов, Дерптского 1865 года. С.-Петербург, Типография В.С.Балашева. 1880. 209 с.

[2] Общий устав Императорских Российских университетов. Штаты Императорских Российских университетов Санкт-Петербургского, Московского, Харьковского и Казанского. Типография Императорского Казанского Университета. 1835. 85 с.

[3] Университетский устав 1863 года. Санкт-Петербург. В типографии Иосафата Огризко. 1863. 128 с.

[4] Общий устав Императорских Российских университетов. Временный штат Императорских российских университетов, управляемых по общему о них уставу // Собрание узаконений и распоряжений правительства, издаваемое при правительствующем Сенате 29 августа. N 92. 1884. с. 1687 - 1732

[5] Первое двадцатипятилетие Императорского Санкт-Петербургского университета. Санкт-Петербург. В типографии Военно-учебных заведений. 1844. 227 с.

[6] Императорский С.Петербургский университет в-течение первых пятидесяти лет его существования. Историческая записка, составленная В.В. Григорьевым. С.Петербург. 1870. 432 с.

[7] Кабинет практической механики. С.-Петербургский университет. Инвентарь.

[8] Mathematische Modelle. Sammlung der Technischen Universitat Dresden. www.math.tu-dresden.de/modellsammlung/

[9] Information Resource on Collections and Museums at Universities in Germany http://www.universitaetssammlungen.de/modell/

[10] Проект "Виртуальная прогулка по Императорскому Санкт-Петербургскому университету конца XIX века" http://virtualtrip.museums.spbu.ru/

[11] Проект "Механизмы П.Л. Чебышева", первое издание: 2009-2011, второе издание: 2009-2014, http://www.tcheb.ru

[12] Мещерский И.В. Преподавание механики и механические коллекции в некоторых высших учебных заведениях Италии, Франции, Швейцарии и Германии. СПб, 1895

ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ В АРАБСКИХ РЕДАКЦИЯХ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА

Лютер И.О.

Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова РАН

109012, Москва, Старопанский пер.1/5

Тел.: 89091528777, email: irina@ihst.ru

В средневековых арабских обработках «Начал» Евклида и комментариях к ним определения параллельных прямых существенно не расходятся с оригинальным определением Евклида. Так, в версии Исхака–Сабита, хронологически третьем переводе на арабский язык «Начал», осуществленном в IX в., параллельные прямые определяются как такие, которые находятся на одной плоской поверхности и, если будут продолжены в обе стороны продолжением неограниченным, не встретятся ни с одной из двух сторон. Аналогично параллельные определяются, например, в наиболее авторитетной обработке «Начал» Насир ад-Дина ат-Туси (1201–1274) и в «Комментарии к введениям Евклида» Ибн ал-Хайсама (965–1039/40). Немного отлично определение из редакции «Начал» Ибн Сины (Авиценны, 980–1037), упустившего условие нахождение прямых на одной плоскости: две параллельные линии – те, которые, если будут продолжены их концы в обе стороны, даже если бы продолжались неограниченно, не встретятся.

Но вот в трактате «Улучшение “Начал” Евклида» Асир ад-Дина ал-Абхари (ок.1200–1264/1265?) подобное определение сопровождено альтернативным определением параллельных как эквидистантных (утверждение, эквивалентное пятому постулату): две параллельные прямые – это две прямые, которые находятся на одной плоскости, и если бы были продолжены по прямой неограниченно, расстояние между ними было бы всегда одним и тем же; расстояние – кратчайшая линия, соединяющая их. Понятие эквидистантных линий, как правило, рассматривалось средневековыми арабскими геометрами не при редактировании и комментировании «Начал», как у ал-Абхари, а в теории параллельных (и у Ибн Сины, и ат-Туси, и Псевдо-Туси и др.). Так, Ибн ал-Хайсам, доказывая существование равноотстоящих прямых с помощью введенного им «одного простого» движения (параллельного переноса) перпендикуляра по прямой, на которой он восставлен, заключает: движением перпендикуляра можно получить две прямые линии, расположенные на одной плоской поверхности, при этом, если они будут продолжены в обе стороны продолжением неограниченным, они не встретятся ни с одной из двух сторон, так как, если расстояния между этими двумя линиями с любой стороны всегда будут расстояниями равными при устремлении их обеих в каждую из двух сторон, то невозможно, чтобы в каком-то месте они встретились; тогда две прямые параллельные линии существуют и таким образом их можно представить.

Первое же определение параллельных как эквидистантных линий, по свидетельству неоплатоника Прокла (V в.), принадлежит Посидонию (II–I вв. до н.э.). В комментарии к «Началам» Евклида ан-Найризи (ум. ок.922), важном источнике сведений историко-математического и методологического характера для средневековых арабских и латинских математиков, приводится обширный комментарий Симпликия (VI в.), посвященный определению параллельных и начинающийся с их определения как равноотстоящих, близкого определению Посидония в передаче Прокла: эти линии называются параллельными, поскольку они сохраняют расстояние, которое между ними, или, другими словами, словно в своем положении они находятся постоянно в одном и том же состоянии относительно расстояния, так, что не встречаются и не образуют одной линии, не отдаляются одна от другой на большее расстояние и не расходятся, и не различаются большим различием. Далее на примере двух скрещивающихся прямых Симпликий показывает, что отсутствие пересечения свойственно не только параллельным прямым, и заключает, что это обуславливает необходимость того, чтобы в определении параллельных утверждалось или их нахождение в одной плоскости (упущенное в определении Ибн Сины), или сохранение расстояния между ними.

Фразу Симпликия «эти линии называются параллельными, поскольку они сохраняют расстояние» можно понять, обратившись к этимологии греческого слова «παράλληλος», означающего «рядом друг с другом, бок о бок» (образовано из «παρά» – «рядом» и «ἀλλήλους» – «друг другу»). Соответствующий арабский термин для параллельных линий – «мутавазийан» (дв.ч.) – представляет собой буквальный перевод этого греческого термина и означает «идущие бок о бок»

Обратим внимание, что, говоря о неограниченном продолжении прямых в определениях параллельных, философ и логик ал-Абхари прибегает к конструкции арабского условно-ирреального предложения, выражающего условно-ирреальное действие, что передано в русском переводе условным предложением с глаголами в сослагательном наклонении гипотетического значения (см. выше его определение эквидистантных). Вполне допустимо, что таким образом ал-Абхари преднамеренно акцентировал фразу, в которой речь идет о возможности бесконечного продолжения прямых, что, помимо обращения в рамках геометрии Евклида с ее ограниченными прямыми и плоскостями к понятию потенциальной бесконечности, еще и противоречит космологии Аристотеля, согласно которой мир конечен и ограничен сферой неподвижных звезд, и его тезису о невозможности существования бесконечных чувственно воспринимаемых тел. Аналогично поступил в своей формулировке определения параллельных и выдающийся философ и логик Ибн Сина, исходя, вероятно, из тех же соображений (см. выше).

На фразе из определения параллельных о бесконечном продолжении прямых специально остановился в своем комментарии Ибн ал-Хайсам. Он подверг критике определение Евклида вследствие невозможности представить утверждаемое в нем бесконечное, «не достигающее конца», продолжение прямых и существование бесконечных прямых. Представить, как он утверждает, можно все только ограниченное (конечное), в том числе и линии. Здесь Ибн ал-Хайсам отвергает даже саму возможность вообразить, помыслить что-либо бесконечное. В качестве решения этой проблемы он предлагает оригинальный метод, позволяющий, по его мнению, представить существование таких бесконечных прямых, в основании которого можно усмотреть аристотелевское понятие бесконечного от прибавления или экстенсивной бесконечности: необходимо взять отрезок и приставить к нему другой отрезок, сохраняя направление первого, при этом такой составленный отрезок существует, затем к свободному концу второго отрезка приставить в его направлении еще один отрезок и т.д.; такие же действия необходимо предпринять по отношению к другому концу первого отрезка. Именно так, утверждает ал-Хайсам, можно представить существование «ограниченной прямой», продолжающейся в обе стороны бесконечно, поскольку ее можно неограниченно продлевать в обе стороны другими присоединенными к ее концам «ограниченными прямыми».

Заметим, что Симпликий в своем комментарии к определению параллельных, следуя схеме, позаимствованной, по-видимому, из комментария к «Началам» Прокла, то есть, анализируя необходимость и сущность каждой фразы определения параллельных Евклида, также не оставил без внимания утверждаемое в нем бесконечное продолжение прямых, что, по его мнению, реализуется в воображении: только в воображении могут прямые бесконечно продолжаться и только в воображении их продолжение может допускаться сферой неподвижных звезд.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-06-00053а).

Литература

1. Лютер И.О. Первые результаты исследования трактата ал-Абхари «Улучшение “Начал” Евклида» по его дублинской рукописи // Историко-математические исследования. Вып. 15(50). М.: Янус-К, 2014. С.84–119.

ИЗ ИСТОРИИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Мельников Р.А.

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

399770, Елец, ул. Коммунаров, д. 28

Тел.: 89513085535, e-mail: roman_elets_08@mail.ru

Ранняя история математического программирования связана с построением простейших экономико-математических моделей. Первой работой в этом направлении стала «Экономическая таблица» французского экономиста *Франсуа Кенэ* (1694–1774). Автор этого труда предпринял попытку раскрыть вопрос, связанный с общественным воспроизводством в целом. Таблица была составлена им в 1759 г., она основана на установлении балансовых пропорций между натуральными (вещественными) и стоимостными (денежными) элементами производства.

В 1874 г. французский экономист, профессор Лозаннского университета *Леон Вальрас* (1834–1910) построил свою экономико-математическую модель.

Математические основы программирования (планирования) обнаруживаются в трудах известных математиков. Например, формирование теории двойственности для задач оптимизации с ограничениями-равенствами началось с работ *Жозефа Луи Лагранжа* (1736–1813), а проблема, связанная с организацией перевозок товаров (известная сейчас под названием «транспортная задача»), была формализована в 1781 г. французским математиком, создателем начертательной геометрии *Гаспаром Монжем* (1746–1818).

Немалый вклад в развитие теории линейных алгебраических уравнений, ставшей своеобразным фундаментом линейного программирования (части математического программирования), внесли немецкий математик *Карл Фридрих Гаусс* (1777–1855) и французский математик *Камилл Жордан* (1838–1922).

Исследованием линейных неравенств, которые также составляют основу задач линейного программирования, одним из первых занялся известный французский математик *Жан Батист Жозеф Фурье* (1768–1830). Его заинтересовала задача определения наименьшего максимального отклонения в системах линейных уравнений. Примерно в 1823 г. ему удалось свести эту задачу к задаче о нахождении самой нижней точки многогранного множества. Идея предложенного им метода для отыскания этого минимума состояла в последовательном перемещении от одной вершины многогранника к другой. Метод, предложенный Фурье, лег в основу симплекс-метода. Изучением этого вопроса занимался также известный бельгийский математик *Шарль Валле Пуссен* (1866–1962).

Большая часть ранних работ посвящена определению условий, при которых система однородных линейных неравенств разрешима. Большинство полученных результатов выражают в той или иной форме взаимосвязь между исходной и двойственной системами.

Теоремы об альтернативных системах линейных неравенств появились в конце XIX века в работах Ю. Фаркаша (1894) и Г. Минковского (1896). Затем появились исследования Г.Ф. Вороного (1908), П. Гордана, Э. Штимке (1915), А. Хаара (1924), Г. Вейля (1935) и других.

В 1896 г. известный немецкий математик и физик (выходец из России) *Герман Минковский* (1864–1909) сформулировал теорему о разрешимости системы линейных неравенств, которая была следствием более общей теоремы о выпуклом теле.

Лемма венгерского математика *Юлиуса Фаркаша* (1847–1930) дала условия существования решения одной и только одной из немногих двух систем линейных уравнений и неравенств.

В теореме *Пауля Альберта Гордана* (1837–1912) утверждается, что однородная система уравнений с неотрицательными переменными имеет решение, в котором, по крайней мере, одна переменная положительна, если в двойственной системе нет решения со строгими неравенствами.

Все эти результаты нашли более ясное выражение в теореме американского математика *Теодора Самуэля Моцкина* (1908–1970) о транспозиции (1954).

Отметим также вклад в теорию линейных неравенств отечественного математика *Сергея Николаевича Черникова* (1912–1987). Он сформулировал принцип узловых решений, развил метод Фурье и алгебраическую теорию бесконечных систем линейных неравенств с условиями конечности.

Настоящий прорыв в математическом программировании произошел в 30–40-х годах XX века. Сначала появились модель «затраты–выпуск» (1936), предложенная американским экономистом российского происхождения *Василием Васильевичем Леонтьевым* (1905–1999) и «модель равновесия» (1937) американского математика венгерского происхождения *Джона фон Неймана* (1903–1957).

Важной вехой в становлении линейного программирования и, особенно в понимании его роли, как средства моделирования, так и решения прикладных задач экономики стала работа [2] советского математика и экономиста *Леонида Витальевича Канторовича* (1912–1986). Она включала девять глав, каждая из которых посвящалась моделированию конкретной экономической задачи (распределения обработки деталей по станкам, максимального уменьшения отходов, задача фанерного треста, наилучшего распределения посевной площади, наилучшего плана перевозок и др.) и три приложения, посвященных методу разрешающих множителей.

Расчет примера, относящегося к задаче фанерного треста, методом разрешающих множителей был произведен *Абрамом Исаковичем Юдиным* (аспирантом Л.В. Канторовича).

Первое, доведенное до использования применение метода разрешающих множителей, касается задачи рационального раскроя и относится к 1948–1950 гг. XX века.

Метод разрешающих множителей стал прообразом симплекс-метода, разработанного в 1947 г. американским математиком *Джорджем Бернардом Данцигом* (1914–2005).

В 1944 г. в книге Дж. фон Неймана и американского экономиста немецкого происхождения *Оскара Моргенштерна* (1902–1977) «Теория игр и экономическое поведение» (1944) была установлена эквивалентность задачи линейного программирования и матричной игры в смешанных стратегиях.

В 1947 г. американский математик и экономист нидерландского происхождения *Тьяллинг Чарльз Купманс* (1910–1985) первым обратил внимание коллег на потенциальные возможности моделей линейного программирования.

Формирование теории двойственности для задач линейного программирования было осуществлено в 1947 г. усилиями Дж. фон Неймана и Дж. Данцига.

В 1948 г. получены важные результаты по нелинейному программированию и теории двойственности группой ученых Принстонского университета: канадским математиком *Альбертом Уильямом Таккером* (1905–1995) и его учениками американскими математиками *Гарольдом Уильямом Куном* (1925–2014) и *Дэвидом Гейлом* (1921–2008).

В 1949 г. в Чикагском университете была проведена первая конференция по математическому программированию. В том же году в терминологический оборот вошли словосочетания «математическое программирование» (*Роберт Дорфман* (1916–2002) – американский экономист) и «симплекс-метод» (Данциг, Моцкин).

Транспортная задача (задача Монжа-Канторовича) также имеет интересную историю, начало которой, как мы уже упоминали, берет с работ Г. Монжа.

В конце 30-х гг. XX в. в СССР была напечатана статья [4] ленинградского экономиста *А.Н. Толстого*, посвященная транспортным моделям линейного программирования и методам их решения.

Транспортная задача в той формулировке, которая сейчас стала уже классической, была впервые приведена в 1941 г. американским математиком *Франком Лоуреном Хичкоком* (1875–1957). В его статье «Распределение продукта из нескольких источников к многочисленным пунктам» были сделаны наброски теории метода, предвосхищающего симплекс-метод; при этом, однако, он не использовал индивидуальных особенностей транспортной задачи, за исключением построения начального решения.

Первые попытки решения задач, родственных транспортной задаче (в частности, для задачи распределения работ по станкам), предпринял Л. В. Канторович в статьях 1940-1942 гг. Он предложил полезный, но неполный алгоритм для решения таких задач.

Статьи А.Н. Толстого, Ф. Хичкока и Л.В. Канторовича не привлекли должного внимания со стороны математической общественности.

В 1944 г. появилась транспортная модель задачи линейного программирования. Она была детально разработана Т. Купмансом.

В 1949 г. в [3] Л.В. Канторовичем и *Марком Константиновичем Гавуриным* (1911–1992) был разработан один из самых важных методов решения транспортной задачи (в сетевой постановке) – метод потенциалов.

В 1951 г. Дж. Данциг разработал аналогичный метод, получивший название модифицированного распределительного метода.

Исследования венгерских математиков *Йенё Эгервари* (1891–1958) и *Денеша Кёнига* (1884–1944) предвосхитили появление некоторых методов линейного программирования. Так, Й. Эгервари опубликовал статью (1931), в которой рассмотрел задачу о нахождении некоторой перестановки единиц в матрице, составленной из нулей и единиц, а Д. Кёниг стал автором первой книги по теории графов (1936).

Исходя из работ Эгервари и Кёнига, Г. Кун в 1955 г. разработал эффективный алгоритмический метод решения задачи о назначениях. Этот метод по понятным причинам получил название – «венгерский метод». Подход Куна в свою очередь лег в основу метода Форда–Фулкерсона (1956) для решения классической транспортной задачи. Авторство в разработке этого метода принадлежит американским математикам *Лестеру Рэндольфу Форду* (р.1927) и *Дилберту Рэю Фулкерсону* (1924–1976).

В 1957 г. венгерский алгоритм был усовершенствован и обобщен на случай произвольной транспортной задачи *Джеймсом Реймондом Манкерсом* (р.1930).

В конце 50-х годов *Александр Львович Лурье* (1903–1970) на основе общих идей линейного программирования, разработал метод решения транспортных задач, который назвал методом разрешающих слагаемых. Затем *Александр Львович Брудно* (1918–2009), используя основные идеи метода А.Л. Лурье, разработал метод дифференциальных рент.

При решении транспортной задачи важную роль играет первый опорный план. Отметим, что его можно найти посредством различных способов: по правилу северо-западного угла, методом минимальной стоимости, методом двойного предпочтения, методом Фогеля и, наконец, по способу Лебедева-Тихомирова.

В 1957 г. появилась монография «Динамическое программирование» американского математика *Ричарда Эрнста Беллмана* (1920–1984). Она положила начало одному из важных направлений в исследовании многошаговых процессов принятия решений – методу динамического программирования.

Значительный вклад в теорию математического программирования и экономико-математические методы внесли *Соул Ирвин Гасс* (1926–2013), *Ральф Гомори* (р. 1929), *Томас Саати* (р. 1926), *Давид Борисович Юдин* (1919–2006), *Василий Сергеевич Немчинов* (1894–1964), *Евгений Григорьевич Гольштейн* (р. 1931), *Виктор Валентинович Новожилов* (1892–1970), *Устав Херманович Малков*, *Геннадий Шлемович Рубинштейн* (1923–2004), *Семен Израилевич Зуховицкий* (1908–1994), *Алексей Алексеевич Милютин* (1925–2001) и многие другие.

Литература

1. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. – М.: Прогресс, 1966. – 600с.
2. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Л.: ЛГУ, 1939. – 68с.
3. Канторович Л.В., Гавурин М.К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. – АН СССР, 1949.
4. Толстой А.Н. Методы устранения нерациональных перевозок при планировании // Социалистический транспорт. 1939. №9. С. 28-51.

ИНДЕКС БОЛЯ, КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И «РИЖСКИЙ ВАРИАНТ ИСПАНСКОЙ ПАРТИИ»

Орлик Л.К., Лаптева Н.А.

Российский государственный социальный университет

129226, г. Москва, ул. Вильгельма Пика, д. 4

Тел. 8(495)7486767, e-mail: Lubov.orlik@gmail.com

Тел.8(916)1803002, email: nadlapteva@yandex.ru

К 150-летию Пирса Боля

Основополагающие результаты теории устойчивости Ляпунова тесно связаны с понятием генеральных показателей решений дифференциальных уравнений. Фундаментальное понятие верхнего генерального показателя было впервые введено латвийским математиком Пирсом Болем в 1913 году [1] .

Пирс Георгиевич Боль родился 23 октября 1865 года в г. Валка (Латвия) в купеческой семье. После окончания гимназии в Феллине (Эстония) в 1884г он поступил в Дерптский университет, который окончил через три года со степенью кандидата. Затем несколько лет работал учителем в Эстонии и Латвии, занимаясь самостоятельно научной работой. В 1889г. Боль опубликовал первые результаты своих исследований, в том числе «Об одном обобщении третьего закона Кеплера». В 1893 г. состоялась защита магистерской диссертации «О представлении функций одной переменной тригонометрическими рядами с несколькими аргументами, пропорциональными одной независимой переменной» в Дерптском университете. В диссертации Боль доказал предложение, из которого вытекает известная теорема о наличии неподвижной точки при непрерывном отображении. Часто эту теорему связывают с именем А. Брауэра, который начал публиковать соответствующий цикл работ лишь в 1909г. (в двумерном случае она вытекает из некоторых работ Л. Кронекера и А. Пуанкаре).

Верхний генеральный показатель, взятый с противоположным знаком, П. Боль назвал *индексом*. Он же рассматривал свойство $\mathfrak{B}(\mathfrak{p}, N)$, называя число *N*-вспомогательным, а число $\mathfrak{p}/$ *N*- главным коэффициентом устойчивости. Боль пришёл к этим понятиям, изучая вопрос об устойчивости постоянно действующих возмущений. Он исходил из той методологической установки, что в задачах «земной» механики всегда существенную роль играет неконтролируемое рассеяние энергии, и поэтому при корректной постановке задач поведение решений должно быть устойчивым относительно малых возмущений уравнений. Причем и невозмущённое уравнение, рассматриваемое Болем, было нелинейным. В этой постановке он установил устойчивость верхнего генерального показателя.

В диссертации Боль доказал предложение, из которого вытекает известная теорема о наличии неподвижной точки при непрерывном отображении. Часто эту теорему связывают с именем А. Брауэра, который начал публиковать соответствующий цикл работ лишь в 1909г. (в двумерном случае она вытекает из некоторых работ Л. Кронекера и А. Пуанкаре).

Своей диссертацией Боль положил начало в то время новому направлению математического анализа – теории почти периодических функций, построив теорию квазипериодических функций. В статье «Об одном дифференциальном уравнении из теории возмущений» (1906 г.) он значительно продвинул эту теорию, доказав для квазипериодических функций несколько существенных теорем.

Пирс Георгиевич Боль интересен ещё и тем, что является автором шахматного дебюта, называемого «рижским вариантом испанской партии». Опубликован он в Baltische Schachbletter (печатное издание рижских шахматистов начала XX века). Упоминание есть у первого советского чемпиона мира по шахматам, доктора технических наук М.М. Ботвинника[2,3]. В [4]приведён обзор уцелевших шахматных партий: Г.Элерт - П.Боль [C84], П.Боль - Э.Вагенхейм [C67] (Рига, 1901).

Вначале первой мировой войны Рижский политехнический институт, где в тот период работал математик, был эвакуирован в Москву, а оттуда в Иваново. В Москву ,затем в Иваново переехал и Пирс Боль. В 1919г. Боль вернулся в Ригу и приступил к работе в организованном тогда Латвийском университете. Но его здоровье ухудшилось и 25 декабря 1921 г. Пирс Боль скончался.

Интерес авторов статьи к математическому наследию Пирса Боля объясняется тем, что в собственных исследованиях используют понятия почти периодической функции и генерального показателя[5,6].

Литература

1. Боль П. Избр. тр. – Рига: Изд. АН Латв. ССР, 1961. –238 с.
2. Ботвинник М.М. Аналитические и критические работы. – М.: Физкультура и спорт,1987. – 211с.
3. Мышкис А.Д., Рабинович И.М. Математик Пирс Боль/с комментарием М. Ботвинника о шахматных партиях Боля. – Рига:Зинатие,1965. –99 с.
4. Орлик Л.К. Латвийский математик Пирс Боль: актуальность идей и современные приложения/ Учёные записки РГСУ,2013.-т.1 , №5 (120).-С.20-30
5. Орлик Л.К. Об экспоненциальной характеристике линейного дифференциального уравнения 1-го порядка в банаховом пространстве// Украинский математический журнал, 1989, – т.41. – №9 – С. 1288-1289
6. Орлик Л.К. Экспоненциальная характеристика эволюционных уравнений в банаховом пространстве. М.: Изд-во ВАРХБЗ, 2005. – .400с.

ИЗ ИСТОРИИ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ В КОНЦЕ XIX – ПЕРВОЙ ТРЕТИ XX ВЕКА

Петрова С.С.

Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, механико-математический факультет

Тел.: 89164385454, e-mail: serd42@mail.ru

Преподавательскую деятельность на физико-математическом факультете Московского университета Леонид Кузьмич Лахтин (1863 – 1927) начал ещё в 1888 г. Однако фигурой, определяющей содержание и направленность преподавания основ математического образования (т. е. курса математического анализа) студентам математического отделения, он стал лишь в 1903 г. – после смерти своего учителя Н.В. Бугаева. В эту роль он входил постепенно, ставши по возвращению на факультет после службы профессором Юрьевского университета в 1892 – 96 гг. основным его помощником. Этот курс, состоявший из трёх частей – Введения в анализ, Дифференциального исчисления и Интегрального исчисления – он продолжал читать ещё в середине 20-ых гг. Одним из его слушателей в 1923/24 уч. г. стал А.П.Юшкевич [2]. Таким образом этот курс оказался «вратами математической учёности» для нескольких поколений математиков, ставших гордостью советской математической науки – это и В.В. Голубев, и В.В. Степанов, и Д.Е. Меньшов, и М.Я. Суслин, и А.Я. Хинчин, и П.С. Александров, и Л.А. Люстерник, и М.А. Лаврентьев, и И.Г. Петровский, и А.Н. Колмогоров, и Л.Г. Шнирельман, и А.О. Гельфонд, и А.Н. Тихонов. В марте 1980 г. в беседе с Юшкевичем Меньшов вспоминал [4, с. 315 – 316]: «На первом курсе (шёл 1912 год – С.П.) анализ читал профессор Л.К. Лахтин … Лахтин читал очень чётко, ясно, но материала давал немного, во всяком случае меньше, чем я уже знал. В общем, его изложение было довольно близко по содержанию к учебнику Поссе». Вопрос Юшкевича: «Каков был уровень строгости курса Л.К. Лахтина ? Когда я слушал введение в анализ у того же Л.К. Лахтина в 1923 г., изложение было довольно упрощённое, быть может, применительно к уровню подготовки многих тогдашних студентов. Меньшов отвечал так: «Нет, в мои студенческие годы Лахтин читал лекции достаточно строго, конечно, по тем временам. В них не доказывались многие теоремы, которые считались очевидными и которые теперь доказываются на первом же курсе (например, существование максимума и минимума у функции, непрерывной на отрезке; обращение непрерывной функции, имеющей на концах отрезка разные знаки, внутри отрезка в нуль и т.п.). По содержанию курс Л.К. Лахтина был даже более сжатый в сравнении с учебником [К.А.] Поссе, и я узнал из него мало нового. Всё же я с удовольствием всё прослушал по второму разу. Помню, что определение предела Лахтин давал с ε и δ, чего у Поссе не было».

Разумеется, составить представление о содержании курса Лахтина и его эволюции составляет интересную задачу, без решения которой невозможно достижение понимания характера развития преподавания анализа в Московском университете. А без этого нельзя построить достаточно полную картину становления Московской школы теории функций, существенную часть предыстории которой составляют лекции Лахтина. К сожалению, материалов, позволяющих судить о его курсе по анализу, сохранилось немного. Литографированных курсов сохранилось дошло до нас очень мало (о них см. в [4]) . Кроме этих курсов в 1925 г. им было издано «Введение в анализ». Недавно в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана мы нашли литографированный машинописный текст на 259 стр.: «Анализ. Записки по лекциям Л.К. Лахтина» Москва, 1899. Судя по всему, эти лекции в части, касающейся дифференциального исчисления, были прочитаны осенью 1899, а в части, касающейся интегрального исчисления, весной и осенью того же года . Изложение дифференциального исчисления близко к бугаевскому, интегральное же ближе к курсам П.А. Некрасова и Поссе. О дальнейшей эволюции лекций Лахтина мы можем отчасти судить по Обозрениям преподавания наук в Императорском московском университете, которые регулярно выходили в предреволюционные годы (вплоть до 1917/18 г.). Из них мы узнаём, что в 1904/1905 г. в числе рекомендуемых руководств он указывает «Курс дифференциального и интегрального исчисления» Поссе 1903 г., а в 1905/1906 в списке появляется недавно изданный во Франции курс Э. Гурса. Когда первый том этого курса вышел в 1912 г. в Москве в русском переводе, осуществлённом А.И. Некрасовым под редакцией Б.К. Млодзеевского, то именно этот курс стал основным, на который он стал ориентировать своё преподавание.

Начиная с 1911 г., он включает в эти списки «Введение в теорию функций одной переменной» Ж. Таннери, вышедшее в Париже в 1904 г. Курс модерн изировался и уже к 1912 году приобрёл тот характер, который удовлетворил даже столь взыскательного слушателя каким был тогдашний студент будущий классик теории тригонометрических рядов Д.Е. Меньшов.

Литература

1. *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 года. М.: Наука. 1968.
592 с.

2. *Юшкевич А.П.* Годы учения. // Историко-математические исследования. 2-я серия. Вып. 11 (46). М. 2006. С. 9 – 48.

3. *Меньшов Д.Е.* Воспоминания о молодых годах о молодых годах и о возникновении Московской школы теории функций // Историко-математические исследования. Вып. 27. М. 1983. С. 312 – 333.

4. *Петрова С.С.* К истории преподавания математического анализа в Московском университете: Л.К. Лахтин // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция 2014 г. М.: URSS 2014. С. 364 – 366.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ВЛИЯНИЕ ИДЕЙ БОЛЬЦАНО НА РАЗВИТИЕ АНАЛИЗА XIX ВЕКА

Г.И. Синкевич

СПбГАСУ

190005, Санкт-Петербург, улица 2-я Красноармейская, д. 4

Тел. 89213434388, e-mail galina.sinkevich@gmail.com

Бернард Больцано (Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, 1781−1848) родился и умер в Праге. Его отец – итальянский торговец предметами искусства, мать – из семьи пражских купцов. С 1796 года он посещал лекции в Карловом университете в Праге, в том числе лекции по математике и логике. В 1804 претендовал на должность профессора математики, но неудачно, в 1805 был рукоположен в сан священника и получил степень доктора философии. С 1805 преподавал в университете философию религии, был университетским проповедником, проводя идеи национального возрождения (Чехия была под властью Габсбургов). Влияние Больцано на молодёжь вызвало неудовольствие властей и повлекло церковное расследование, продолжавшееся до 1825 года. В 1819 году он был лишён права на преподавание и получил пожизненную пенсию 300 флоринов в год. С 1820 жил в уединении в провинции. С 1841 до самой смерти Больцано был секретарём Королевского Чешского общества наук, написав в это время свои математические трактаты. При его жизни было опубликовано всего 5 математических работ: 1804 «Размышление о некоторых предметах элементарной геометрии» 1804, где он рассматривает постулат о параллельных; 1810 «К вопросу об обосновании математики» [1]; 1816 «О биномиальном ряде и как следствие из него многочлены и ряды для вычисления логарифмов и показательных величин» [2]; 1817 – «Три проблемы спрямляемости, вычисления площадей и объёмов без применения бесконечно малых и предположения Архимеда» [3],1817 − «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» [4, в русском переводе 5].

После смерти Больцано в Лейпциге в 1851 году был издан его трактат «Парадоксы бесконечного» [6, в русском переводе 7].

Чешские коллеги начали издавать рукописи Больцано с 1930 года. Тематика их разнообразна: философия, теология, логика и методология науки, преподавание, математика. Самой значительной находкой были рукописи Больцано 1830-х годов «Grössenlehre», где он создаёт теорию действительного числа «Zahlentheorie» [8]. Правда, хотя теория строится на основе принципа сечения (за 40 лет до появления определения Дедекинда), Больцано вводит в рассмотрение переменные бесконечно малые и бесконечно большие числа. Может быть, получи его теория завершение и признание, у нас сейчас была бы иная математика. Некоторые его работы утрачены, например, от большого сочинения «Анти-Евклид» остались лишь фрагменты.

В переписке Больцано найдены его свидетельства встреч с О. Коши и горестное недоумение по поводу появления в работах Коши своих идей. Отметим, что критерий сходимости числовой последовательности, определение непрерывной функции и некоторые приложения определённого интеграла впервые опубликованы Больцано, но приписываются Коши в силу его высокого авторитета, научной популярности и непорядочной забывчивости. Это же относится и к запискам, которые Больцано (и не только он) передавал Коши, но затем с изумлением видел эти результаты опубликованными под именем Коши. – об этом [9, 10].

Немногие опубликованные работы Больцано содержат его план реформы анализа XIX века. – Он первый поднял вопрос о строгости, о необходимости освободить анализ и в частности понятие непрерывности от физических и геометрических интерпретаций, о необходимости обоснования арифметики, в его работах содержатся первые примеры непрерывных и нигде немонотонных функций, принцип взаимно-однозначного соответствия, понятие точной верхней границы, множества, предельной точки, метод дихотомии. Мы знаем теорему Больцано-Коши, теорему Больцано-Вейерштрасса – их первые формулировки появились у Больцано.

Во второй половине XIX века работы Больцано стали известны благодаря Герману Ганкелю, который писал о Больцано в своих исторических работах и в статье «Предел» 1869 года [11]. Это была большая программная статья в Энциклопедии наук и искусств, она содержит исторический обзор понятия предела (границы) от античности до середины XIX века и замечательна тем, что показывает картину представлений о пределе незадолго до появления первых работ по теории множеств, концепции числа и непрерывности Мере, Кантора, Дедекинда, Вейерштрасса и Гейне. В ней очень много внимания уделено значимости идей Больцано.

В 1870 году в Тюбингене в серии “Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften” Nr. 153 благодаря Ганкелю был переиздан труд Больцано “Rein analytischer Beweis” (Аналитическое доказательство) с предисловием Ганкеля и его статьёй об осциллирующих функциях (Метод сгущения особенностей).

Благодаря популяризации Ганкеля идеи Больцано проникают в развивающуюся в немецкой математической среде теорию обоснования анализа, формирование концепции непрерывности и действительного числа. Идея покрытия интервалов, появившаяся в работе Больцано «Аналитическое доказательство», была использована Раабе, Дирихле в 1860-х годах (по материалам журнала Крелле) и Гейне в построении 1872 года «Лекции по теории функций» [12, 13]. Как известно, в 1895 году теорема о покрытиях была обобщена Борелем для счётного случая, а в 1898 году Лебегом для несчётного случая.

Таким образом, многие основные понятия и концепции математического анализа XIX века берут своё начало в работах Больцано.

Литература

1. *Bolzano*, B. Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie/ B. Bolzano.−Prag: Karl Barth. – 1804. – 65 s.
2. *Bolzano*, B. Der binomische Lehrsatz und als Folgerund aus ihm der polynomische, und die Reihen bit zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen / B. Bolzano. – Prag: Guderschen Buchhandlung. – 144+3 s.
3. *Bolzano*, B. Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes / B. Bolzano. – Leipzig: Paul Gotthelf Rummel. – 81 s.
4. *Bolzano*, B. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege/ B. Bolzano. – Prag: Gottlieb Haase. – 1817. – 60 s.
5. *Больцано*, Б. Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения / Б. Больцано // Перевод Э. Кольмана // В кн. Кольман Э. Бернард Больцано. М. – 1955. – С. 170–204.
6. *Bolzano*, B. Paradoxien des Unendlichen / B. Bolzano. – Lepzig: Bei C.H. Reclam sen. – 157 s.
7. *Больцано*, Б. Парадоксы бесконечного / Б. Больцано. – Перевод под ред. И.В. Слешинского. Одесса: Mathesis, 1911. – 140 с.

8. *Рыхлик*, К. Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано / К. Рыхлик // Историко-математические исследования. – 1958 г. – XI. – С. 515–532.
9. *Grattan-Guinness*, I. Bolzano, Cauchy and the “New Analysis” of the Early Nineteenth Century / I. Grattan-Guinness // Archive for History of Exact Sciences. – Springer Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. – 1970. – Vol. 6. – No 3-5. – P. 372–400.
10. *Синкевич*, Г.И. К истории эпсилонтики / Г.И. Синкевич // Математика в высшем образовании. – 2012. - №10. – С. 149–166.
11. *Hankel*, H. Grenze / H. Hankel //Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste. – Leipzig. – 1870/71 . – Vol. 90. – p. 185–211.
12. *Синкевич*, Г.И. Генрих Эдуард Гейне. Теория функций // Г.И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 18. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера/ СПбГАСУ. – СПб. – 2012. – С. 6 – 26.
13. *Гейне*, Э.Г. Лекции по теории функций. Перевод и примечания Г.И.Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 18. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. – СПб. – 2012. – С. 26 – 46.

Тройная золотая спираль:
развитие модели Предустановленной гармонии
Московской философско-математической школы

Харитонов А.С., к.ф-.м.н., с.н.с., докторант РГСУ, Москва;
Добрый В.В. специалист МГУ, Москва

В докладе рассматривается модель развития организаций физических и социальных систем по тройной золотой спирали на основе теории симметрии мер хаоса и порядка[1]. Необходимость и возможность разработки теории развития природы и общества к гармонии отношений рассмотрена в трудах Н.А. Умова, Н.В. Бугаева, П.А. Некрасова и др.

Целостные организации не имеют стационарного состояния и находятся в поиске гармонии отношений. Они гибнут или выживают, стремясь к гармонии отношений путём упрощения или усложнения своих структурных параметров. Структурные параметры играют роль естественных механизмов обратной связи, поддерживающие гармонию отношений по золотому сечению [2-4]. Взаимодействие организаций с различными структурами привело к наблюдаемому многообразию форм природы. При этом гармония отношений выполняет три различные функции в самодвижении организаций. Она есть причина самодвижения по спирали, условие выживания и естественный механизм самоуправления. Гармония отношений в организации круговорота энергии неустойчива и её поддержание требует затраты энергии или совершенствования механизмов самоуправления.

Описание природы разрывными функциями к гармонии отношений рассматривали Н.В Бугаев, П.А. Некрасов, Н.А Умов, В.А. Шмаков, А.Е. Снесарев, А.Л. Чижевский, С.И. Покровский в Московской философско-математической школе. В развитии идей этой школы нуждается современное общество.

Особенностью познания законов гармонии отношений является холистическая методология и её принципы триединства и целостности природы, аритмология, наука о разрывных функциях, и фрактальные закономерности усложнения организации объектов природы и общества.

В докладе приводится разработка модели развития по тройной золотой спирали, где две спирали сжимаются, а спираль, характеризующая структурные параметры, разворачивается за счёт спонтанных резонансных взаимодействий, так что инвариант организации системы сохраняется [2-4].

1. Харитонов А.С."Теория симметрии хаоса и порядка: закон Предустановленной гармонии». // Science and Education.2014, Phsics. V.17, P.19-27.

2. Харитонов А. С. Математические начала синтеза принципов дуализма и триединства.//Метафизика, 2012, №3. С. 147-155.

3.Харитонов А. С. Математические начала социальной гармонии //Ученые записки РГСУ. 2013, Т. 2, № 5. С. 99–105.

4. Харитонов А.С." Структурное описание сложных систем" //Прикладная физика №1, 2007, С.5-10.

АКАДЕМИК В.П. ГОРЯЧКИН – ОСНОВАТЕЛЬ ЗЕМЛЕДЕЛЬЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Чиненова В.Н.

Московский Государственный университет им. М.В.Ломоносова

119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, мехмат ф-т

Тел.: 89175446327, e-mail:v.chinenova@yandex.ru

Выдающийся ученый, теоретик сельскохозяйственной машинной техники, основоположник новой научной дисциплины «Земледельческая механика», почётный член АН СССР, академик ВАСХНИЛ Василий Прохорович Горячкин в 1890 г. окончил с отличием математическое отделение физико-математического факультета Московского университета, а в 1894 г. Императорское Московское техническое училище (ныне МВТУ им. Баумана). Учителем и наставником в обоих вузах был Николай Егорович Жуковский.

Будучи в командировке в Германии и Франции В. П. Горячкин понял, что настоящей науки о сельскохозяйственных машинах и орудиях там не было. «Сельскохозяйственное машиноведение» в то время представляло собой элементарное описание устройства машин и орудий, собрание практических указаний о способах их применения, монтажа, установки и регулирования, об их производительности и стоимости, о количестве необходимых рабочих и потребной силе тяги. Но содержание такого «описательного машиноведения» далеко от научных знаний, необходимых для понимания технологических основ работы и механических основ построения машин.

В 1896 г., по приезде из-за границы, Василий Прохорович был назначен исполняющим обязанности адъюнкт-профессора по кафедре учения о с.-х. машинах, орудиях и двигателях в Московском сельскохозяйственном институте (МСИ). С самого начала своей ученой и учебной профессорской деятельности Горячкин направил свои усилия на отыскание и разработку теоретических основ для расчета и построения машин. Ему пришлось пролагать свой путь к науке совершенно самостоятельно. Перед ним оказалось огромное количество разнообразнейших машин и орудий самого различного назначения со многими вариантами и разновидностями. Плуги, конные приводы, сноповязалки, косилки, различные молотилки, сортировки и множество других машин, не имеющих ничего общего между собой, оставляли огромное нагромождение нетронутого наукой, неизученного и даже не описанного техническим языком материала.

Необходимо было прежде всего разобраться во всем его обширном многообразии, вникнуть в его содержание, классифицировать его, выяснить основные задачи изучения каждого вида орудий и машин, найти основы для построения теории и методов расчета каждого из них, т.е. определить, в чем заключаются те вопросы, из решения которых должна состоять наука о с.-х. машинах и орудиях. Эту новую науку, излагая впоследствии ее основы, Горячкин назвал *земледельческой механикой.*

Научные труды академика В. П. Горячкина являются до сих пор классическими в области технических наук. В них помимо разработок теории сельхозмашин получили развитие и такие фундаментальные теоретические вопросы, как теории масс и скоростей, удара и разрушения материалов, клина, резания, подобия, общая схема природных явлений и процессов. Для испытания машин им созданы приборы, применяемые в сельском хозяйстве и металлообработке, машиностроении: плотномер почвы, профилографы, динамографы и др.

На разработку и развитие земледельческой механики потребовались многие годы, а курс «Учение о сельскохозяйственных машинах и орудиях» Василий Прохорович, должен был читать с первого же года. Тем не менее, уже в 1897 г. вышли первые, а в 1898 – все остальные листы лекций Горячкина по этому курсу, изданные литографским способом.

Московское общество сельского хозяйства в 1896, 1897, 1898, 1903, 1908, 1909 и 1910гг. устраивало выставки с.-х. машин и орудий на Бутырском хуторе, принадлежавшем этому обществу и расположенном в непосредственной близости от Московского сельскохозяйственного института. Начиная с 1897 г., Горячкин принимал деятельное участие в этих выставках и руководил испытаниями представленных на выставку машин, а с 1903 г. был председателем экспертных комиссий на этих выставках. Эти выставки и испытания машин и орудий, которые производил Василий Прохорович, дали ему первоначальный материал для изучения конструкций и выяснения теоретических основ их работы и построения.

В 1898 г. вышла в свет первая печатная работа Горячкина - «Отвал», написанная в результате изучения форм рабочих поверхностей плужных корпусов на выставке 1897 г. посредством съемки их профилометром. Вскоре стали выходить в свет его небольшие книжки и брошюры: «Какие бывают плуги», «Плуги», «молотилки» и др. В каждой из работ дано теоретическое освещение устройства и работы машины; в каждой из них автор стремится указать те законы механики, на которых основано действие машины, и требованиям которых должно соответствовать ее устройство.

В 1913 г. вышел в свет Атлас чертежей косилок, жней и сноповязалок. В Атласе представлен для конструкторов в строгой системе, в самой компактной и конкретной форме обширнейший материал, характеризующий во всей совокупности существовавшие тогда конструкции уборочных машин. Горячкиным составлено руководство по написанию «Энциклопедии сельскохозяйственного машиностроения» (он отредактировал 4 тома, 263 авторских листа). Им созданы действующие макеты с оригинальными разрезами и сечениями для демонстрации их на занятиях.

Дальнейшие труды В.П.Горячкина были посвящены разработке теории с.-х. машин. После долгих хлопот ему удалось организовать при своей кафедре первую машиноиспытательную станцию, которая стала центром научной работы и организационной основой его дальнейшей деятельности. Эта машиноиспытательная станция по существу являлась научно-исследовательским институтом, где под руководством В.П. производились глубокие научные исследования.

В1899 г. В.П.Горячким получил звание адъюнкт-профессора, в 1913 г. – профессора.

С 1913 г. он заведовал созданной им машиностроительной станцией. В МСИ Горячкин организовал отделение Инженерного факультета (1915), а в 1928 г. – факультет с.-х. машиностроения.

Как выдающийся ученый и общественный деятель В.П. Горячкин был в 1919 г. выбран и назначен ректором Петровской сельскохозяйственной Академии, как стал называться сельскохозяйственный институт. С 1929 г. он – директор Всесоюзного института сельскохозяйственной механики (ВИСХОМ). Им был организован совет при ВИМе.

После организации всесоюзной академии сельскохозяйственных наук (ВАСХНИЛ) он стал ее действительным членом, а затем и почетным членом Академии наук СССР. В 1935 г. академик В.П.Горячкин был награжден орденом Трудового Красного знамени. Ему было присуждено звание «Заслуженный деятель науки и техники РСФСР», его именем были названы МГАУ и ВИСХОМ.

После смерти Горячкина вышло Собрание сочинений в 7 томах. Почти каждая теоретическая работа, появляющаяся за границей, содержит упоминание имени В.П. Грячкина, как непререкаемого авторитета в области земледельческой механики.

Роль Василия Прохоровича не ограничилась созданием новой научной дисциплины. Он оставил после себя не только научные труды, но и воспитал целую научную школу учеников и последователей. Среди них – автор проекта и строитель «Ростсельмаша», член-корреспондент АН СССР В.Ю. Ганн, академики И.И. Артоболевский, В.А. Желиговский, академики ВАСХНИЛ Н.Д. Лучинский, И.Ф. Василенко, множество докторов, кандидатов наук, инженеров.

Секция 10

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КУРСЫ ДЛЯ МАГИСТРОВ: НОВЫЕ ВЫЗОВЫ ИЛИ ХОРОШО ЗАБЫТОЕ СТАРОЕ

Антонов В.И.

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

Тел.: 88125526750, e-mail: antonovvi@mail.ru

В связи с переходом на систему бакалавр-магистр перед кафедрами математики инженерных ВУЗов поставлена задача разработки и внедрения специальных математических курсов для магистров. Следует заметить, что практика преподавания таких курсов была широко развита в советское время в системе подготовки специалистов. В то время к специальным разделам математики относили следующие: математическая физика, методы вычислений, дополнительные главы математического анализа, методы статистических испытаний. Кроме того, серьезный математический аппарат использовался в курсах теории упругости, гидродинамики, прикладной механики, теплофизики, статистической радиотехнике и ряде других.

Эти курсы базировались на основе достаточно полного курса высшей математики, длительность которого составляла четыре-пять семестров. За это время студенты успевали не только изучить основные разделы математики, но и развить свое абстрактное мышление, понять и осознать место математики в сфере современной науки, научиться решать некоторые проблемы, требующие привлечение развитого математического аппарата.

Связь с выпускающими кафедрами, которые являются заказчиками "выпускаемой продукции" в виде математически грамотных студентов, также осуществлялась за счет привлечения сотрудников кафедры математики к выполнению работ по хозяйственным договорам. Эта работа приводила к взаимному обогащению знаниями и лучшему пониманию задач, стоящих перед общими кафедрами. Таким путем формировался класс творческих людей, будущих двигателей научно-технического прогресса. что совпадало с общей концепцией развития страны.

В настоящее время в связи с изменением общей концепции образования, направленной на воспитание "грамотных потребителей", уровень математической подготовки школьников и студентов объективно снизился. Также произошло и существенным сокращением числа учебных заведений, осуществляющих подготовку квалифицированных рабочих и среднего технического управленческого звена. Понятно, что для решения несложных производственных задач и выполнения простых организационных мероприятий не требуется слишком глубокое знание основ математики, физики и других "мало нужных" наук. Выступая в качестве заказчиков выпускаемых инженеров, современные работодатели все чаще говорят о том, что им не нужны "всякие ваши интегралы", потому что их негде применять.

В связи с изменением целей инженерного образования естественным образом трансформируются и средства для достижения новых целей. Если нет задачи подготовки высококлассных специалистов, то в качестве управляющего воздействия вполне подходит "подушевое финансирование". Ясно, что если не будет ускоренного развития российской промышленности, то не будет и востребованности в большом количестве грамотных и способных к творческому процессу инженеров, конструкторов, технологов и других работников, чей труд во многом определяет технический прогресс.

Конечно, инженерные Вузы не могут стоять в стороне от текущих проблем современного состояния общества. Мы можем и должны взять на себя решение задачи подготовки специалистов среднего звена. Для этого требуется пересмотреть содержание курсов математики применительно к новым обстоятельствам. Однако в условиях резкого сокращения количества преподавателей и возрастания количества студентов, приходящихся на одного педагога, трудно ожидать, что качество подготовки специалистов может возрасти.

Например, при нагрузке в 20 часов в неделю, с учетом того, что , как правило, в неделю выделяется два часа на группу для проведения практических занятий и группа состоит из 20 человек. на одного преподавателя приходится около двухсот студентов в семестре. Ни о какой индивидуальной работе в такой ситуации не может быть и речи. Также следует заметить, что при такой нагрузке и низкой оплате труда стало практически невозможно привлекать сильных математиков к работе на кафедре. То есть поставленные условия диктуют стратегию привлечения как можно большего числа сотрудников на уровне ассистентов и старших преподавателей.

С другой стороны, наличие бакалавриата приводит к необходимости обращения выпускающих кафедр к кафедре математики с предложением преподавания специальных разделов математики. При этом возникает ряд проблем, которые необходимо учитывать при составлении программ новых курсов:

1. Эти курсы должны быть профессионально ориентированными, то есть главным итогом работы должно стать умение применять соответствующие знания, умения и навыки к решению конкретных задач данной специальности.
2. С учетом недостаточных базовых знаний по математике поступивших в магистратуру необходимо вписывать в канву курса повторение разделов, необходимых для восприятия новых методов и подходов, например, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, численных методов, элементов стохастического моделирования и т. д.
3. С точки зрения будущих магистров, которые в основной своей массе работают, их поступление на учебу связано с ожиданием возможностей карьерного роста, повышение своего статуса, прибавки оплаты труда. В этих условиях традиционный метод лекция - практические занятия по задачнику могут вызвать взаимное непонимание цели проводимых занятий.
4. Также необходимо учитывать физическое состояние ребят после напряженного трудового дня.

Все перечисленные и некоторые другие особенности работы с магистрами приводят к выводу, что одним из наиболее эффективных методов проведения занятий является интерактивная форма обучения с привлечением современных компьютерных и дистанционных технологий.

В качестве примера приведу различие в курсах "Математическое моделирование" для направлений подготовки "Техносферная безопасность" и "Технология и организация строительства"

В первом случае основной упор должен быть сделан на модели, описывающие атмосферные и быстропротекающие процессы с учетом сильных энергетических воздействий. Также следует дать понятия о моделях, позволяющих оценить надежность средств защиты в чрезвычайных ситуациях.

Во втором случае следует более подробно рассмотреть модели, позволяющие оценивать статические и динамические параметры процессов, связанных с проектированием зданий и сооружений и также вопросы безопасности и надежности строительных конструкций.

В любом случае совершенно необходимо, чтобы обучающиеся поняли границы применимости рассматриваемых математических моделей, а также пути их развития и совершенствования.

Применение рейтинговой системы в процессе оценки достижений студентов в рамках курса «Дифференциальные уравнения»

Асланов Р.М., Игнатова О.Г.

Московский педагогический государственный университет

г. Москва, ул. Краснопрудная, д.14

Тел.89265215112, e-mail: markovka0@mail.ru

В условиях перехода к ФГОС ВПО актуальной становится проблема оценки достижений образовательных результатов студентов в результате изучения дисциплины. В требованиях ФГОС ВПО результатами освоения конкретных дисциплин ООП бакалавров специальностей «Математика и экономика», а так же «Информатика и экономика» является овладение определенным набором компетенций – общекультурных и профессиональных. Для наиболее развернутой и полноценной оценки на математическом факультете МПГУ вводится балльно-рейтинговая система оценки успеваемости, которая строится на регулярной работе учащегося в течение всего семестра и на систематическом контроле преподавателем уровня учебных достижений. Для введения бально-рейтинговой системы работа студентов по курсу «Дифференциальные уравнения» может быть разбита на 5 типов.

1) Работа студентов на лекциях и семинарских занятиях (ответы на вопросы, решение заданий)
2) Выполнение контрольных работ.
3) Самостоятельная работа студентов (выполнение лабораторных работ)
4) Зачетная работа
5) Сдача экзамена

Итоговая оценка должна быть суммой выполнения всех типов работ.

Нами была разработана такая система оценки работы студентов.

БАЗОВАЯ ЧАСТЬ РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ			
Виды контроля	Тема / форма аттестационной работы	Мин. кол-во баллов	Макс. кол-во баллов
Контроль посещаемости занятий		**5**	**10**
	Посещение лекционных занятий	3	5
	Посещение семинарских и практических занятий	2	5
Текущий контроль работы на семинарских и практических занятиях		**25**	**50**
	Тема 1. *Основные определения и понятия, связанные с дифференциальными уравнениями*	5	10
	Тема 2. *Элементарные типы дифференциальных уравнений первого порядка. Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной*	7	14
	Тема 3. *Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами*	8	16
	Тема 4. *Системы линейных дифференциальных уравнений*	5	10
Рубежный контроль		**10**	**20**
	Выполнение лабораторного практикума(самостоятельная работа)	5	10
	Контрольная работа	5	10

Промежуточная аттестация		**10**	**20**
	Зачет		
Итого		**50**	**100**
К промежуточной аттестации (экзамену) не допускаются студенты, набравшие в течение семестра менее 50 баллов			
Выполнение любого задания на уровне ниже «удовлетворительного» = 0 рейтинговых баллов			

РАСЧЕТ ИТОГОВОЙ РЕЙТИНГОВОЙ ОЦЕНКИ	
от 50 баллов	«зачет»
РАСЧЕТ ИТОГОВОЙ РЕЙТИНГОВОЙ ОЦЕНКИ	
до 49 баллов	«неудовлетворительно»
от 50 до 64 баллов	«удовлетворительно»
от 65 до 84 балов	«хорошо»
от 85 до 100 баллов	«отлично»

Как видно из приведенной таблицы нами проводится систематическая и всесторонняя оценка работы студентов в течение всего периода изучения курса «Дифференциальные уравнения». Так же применение бально-рейтинговой системы позволяет стимулировать работу студентов, посещение ими лекций, а так же семинарских занятий. Такой подход дает возможность наиболее комплексно оценить работу студентов, в том числе и самостоятельную работу по курсу, на которую выделяется существенное количество учебных часов, и более объективно выставить оценку в результате освоения дисциплины.

Список используемой литературы.

1. Беспалько В.П. Педагогика и прогрессивные технологии обучения. / В.П.Беспалько. - М.: ИРПО, 1995. - 206с.

РАЗВИТИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ КАЗАХСТАНА

Баймуханов Б.Б. – д.п.н., профессор, Даулеткулова А.У. – к.п.н.

Казахский государственный женский педагогический университет

050000 г.Алматы, ул. Айтеке би, 99. гл. корпус

тел.: 87717600660, e-mail: aiguldu@mail.ru

Главой государства Казахстана Н.А.Назарбаевым в Послании народу Казахстана от 27 января 2012 года «Социально-экономическая модернизация – главный вектор развития Казахстана» поставлена конкретная задача по развитию функциональной грамотности школьников. В связи с этим Постановлением Правительства Республики Казахстан утвержден Национальный план действий по развитию функциональной грамотности школьников. Настоящий план включает комплекс мероприятий по содержательному, учебно-методическому, материально-техническому обеспечению процесса развития функциональной грамотности школьников. Он призван обеспечить целенаправленность, целостность и системность действий по развитию функциональной грамотности школьников как ключевого ориентира для совершенствования качества образования Республики Казахстан.

Данная задача поставленная Президентом республики актуализируется в процессе вхождения Казахстана в числе 50 наиболее конкурентоспособных стран мира. В условиях решения этой стратегически важной для страны задачи главными функциональными качествами личности являются инициативность, способность творчески мыслить и находить нестандартные решения поставленной проблемы, умения выбирать профессиональный путь, готовность обучаться в течение всей жизни.

Известно, что понятие «функциональная грамотность» впервые появилось в конце 60-х годов прошлого века в документах ЮНЕСКО и позднее вошло в обиход исследователей. Функциональная грамотность в наиболее широком определении выступает как способ социальной ориентации личности, интегрирующий связь образования (в первую очередь общего) с многоплановой человеческой деятельностью. В современном, быстро меняющемся мире, функциональная грамотность становится одним из базовых факторов, способствующих активному участию людей в социальной, культурной, политической и экономической деятельности, а также обучению на протяжении всей жизни.

Передовой опыт казахстанских школ показывает, что на развитие функциональной грамотности учащихся влияют следующие факторы:

- содержание образования (национальные стандарты, учебные программы);
- формы и методы обучения;
- система диагностики и оценки учебных достижений обучающихся;
- программы внешкольного, дополнительного образования;
- модель управления школой (общественно-государственная форма высокий уровень автономии школ в регулировании учебного плана);
- наличие дружелюбной образовательной среды, основанной на принципах партнерства со всеми заинтересованными сторонами;
- активная роль родителей в процессе обучения и воспитания детей.

Результатом развития функциональной грамотности является овладение обучающимися системой ключевых компетенций, позволяющих молодым людям эффективно применять усвоенные знания в жизненной ситуации и успешно использовать в процессе социальной адаптации. Ключевые компетенции – это требование государства к качеству личности выпускника средней школы в виде результатов обучения. В Казахстане выделяются следующие ключевые компетенции выпускника средней школы:

– управленческие (способность к разрешению проблем);

– информационные (способность к самостоятельной познавательной деятельности или умение учиться на протяжении всей жизни);

– коммуникативные (способность к устной, письменной, продуктивной коммуникации на казахском, русском и английском (иностранном) языках);

– социальные (способность к социальному взаимодействию);

– личностные (способность к самоорганизации, самосовершенствованию, жизненному и профессиональному самоопределению, самореализации, быть толерантным);

– гражданские (способность нести ответственность за свою родину на основе казахстанского самосознания и культурной идентичности);

– технологические (способность к использованию технологий, в том числе научных, цифровых на уровне эффективного пользователя).

Кроме ключевых компетенций в рамках отдельных предметных областей выделяются предметные компетенции: освоенные специфические знания, умения, навыки в рамках учебного предмета. Например, по математике от учащихся требуется определять и понимать роль математики в мире, в котором он живет, математизировать предложенную ситуацию: узнать и извлечь из условия математическую часть, заключенную в предложенной информации, и использовать математику для решения проблемы, самостоятельно разработать, проанализировать и интерпретировать созданную математическую модель ситуации, разработать свой способ решения и его математическую аргументацию, включая необходимые доказательства и обобщения.

Ключевые и предметные компетенции как результаты образования должны быть конкретными, измеримыми, достижимыми, реалистичными и определенными по времени.

Для достижение поставленной задачи Президентом республики учебные программы будут с ориентированы на развитие функциональной грамотности школьников и достижение ключевых и предметных компетенций, а также будет обеспечен адекватный уровень автономии школ в регулировании учебного плана за счет определения оптимальной пропорции между инвариантной (обязательной) и вариативной (по выбору школы) частями плана. В дальнейшем учебные планы будут предусматривать выделение необходимого количества учебных часов для обучения чтению, математике и естественнонаучным предметам, чтобы на соответствующем уровне формировать читательскую, математическую, естественнонаучную грамотность (международные исследование PISA).

Обновление форм методов обучения будут обеспечиваться за счет трансляции инновационного опыта передовых учебных заведений в общеобразовательные школы республики и использования современных образовательных технологий, вызывающих у школьников интерес к учебе. Будут внедрены эффективные формы и методы обучения для того, чтобы сформировать основы логического, критического и конструктивного мышления, обеспечивающего успешность достижения образовательных результатов, умение применять полученные знания повседневной жизни.

Процесс развития функциональной грамотности школьников определяет внедрение новой системы оценки, учитывающей результативность всех видов учебной деятельности, процессуальную сторону усвоения учебного материала и проявление индивидуальных и личностных качеств. При этом внешняя оценка будут осуществляться по завершению каждого уровня на соответствие учебных достижений обучающихся заявленным результатам (единое национальное тестирование и др.), а также посредством участия в международных исследованиях (PISA, TIMSS и PIRLS). Участие в международных исследованиях обеспечат оценку динамики развития функциональной грамотности обучающегося, успешности школьников, учителей и школ, а также эффективность мероприятий по обновлению стандартов, учебных программ и учебников.

Международное исследование PISA утверждает, что на уровень функциональной грамотности школьников положительно влияет участие родителей в процессе обучение и развитие детей. Связи с этим в Казахстане разрабатывается методология повышения грамотности родителей, позволяющая им лучше узнать ребенка, увидеть его в разных ситуациях, помочь взрослым в понимании индивидуальных особенностей детей, развитии их способностей, формировании жизненных ценностных ориентиров, преодолении негативных поступков и проявлений в поведении.

Исходя из этого в настоящее время разрабатывается система мероприятий, направленных на активное включение родителей в жизнь школы: создание попечительский советов, ассоциаций родителей, родительских университетов. Данные общественные институты позволяет установить партнерские отношения с семьей каждого обучающегося, создать атмосферу взаимоподержки и общности интересов семьи и школы. При этом будет обеспечен адекватный уровень подотчетности школ и представления полный и открытой информации сообществу об учебных достижениях учащихся и деятельности школы.

В заключение отметим, что система образования Республики Казахстан в настоящее время принимает ряд действенных мер по обновлению содержания образования, созданию учебных программ, учебников, пересмотру программ повышения квалификации и переподготовки учителей, мониторингу способности учащихся применять полученные знания в жизненных ситуациях, а также обеспечить адекватные материально-технические, психолого-педагогические и технологические условия обучения учащихся.

Список источников:

1. Постановление Правительства Республики Казахстан от25 июня 2012 года №832 об утверждении Национального плана действий по развитию функциональной грамотности школьников на 2012-2016 годы – Астана, 11 июля, КазИнформ.
2. Методическое пособие «Профессиональная компетентность учителя по формированию функциональной грамотности учащихся» / Ж.А.Караев, Б.Баймуханов, Р.Б.Ахмедова – Алматы, 2013-204с.

ИНВАРИАНТНЫЙ ПОДХОД К РАЗВИТИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ СТУДЕНТОВ - БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ

Битнер Г.Г.

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева, филиал «Восток»

422981, Россия, г.Чистополь, ул. Энгельса 127-а

89872751675, e-mail: ggbitner@mail.ru

Вследствие жесткой конкуренции современное производство нуждается в специалистах, обладающих способностями быстро переключиться на освоение новой продукции в условиях оперативной перестройки производств. Переход к наукоемким технологиям обусловил новые требования к качественному математическому образованию выпускников – инженеров. Математические знания являются стержневой основой большинства общеобразовательных и специальных дисциплин в техническом вузе.

В этой связи особое значение приобретает проблема развития математической культуры студента - будущего инженера. Для того, чтобы выпускник вуза - будущий инженер был способен быстро и успешно осваивать наукоемкие технологии, активно участвовать в их разработке и внедрении, он должен иметь близкую к традиционной для классических университетов подготовку по математике.

К сожалению, с точки зрения развития математической культуры, существует ряд серьезных недостатков в процессе подготовки инженера в вузе. Выпускники технических вузов часто слабо владеют математическим моделированием, навыками перевода технической задачи на адекватный математический язык, затрудняются в выборе математических методов исследования реальных технологических процессов, имеют низкий уровень математической культуры, что требует от вузов более эффективных путей организации учебного процесса.

Понятие математической культуры значительно шире, чем просто система математических знаний, умений, навыков. Математическое знание является фундаментом математической культуры.

Математика – это часть общечеловеческой культуры. Это позволяет говорить о человеческих аспектах математической культуры. Математическую культуру мы полагаем как субъективное явление. Поэтому она отличается, с одной стороны, динамичностью, изменчивостью за счет тех преобразований, которые происходят в опыте инженера, в его психике и личности. С другой стороны, как объективное явление, математическая культура также постоянно обогащается, совершенствуется в ходе развития математики и тех областей, где она применяется.

Смысл формирования математической культуры мы видим в том, чтобы сделать значимым процесс самосовершенствования при изучении математики и применении в профессиональной деятельности. На наш взгляд, основными принципами развития математической культуры будущего инженера являются: принцип рефлексии, принцип интеграции, принцип саморазвития, культурологический принцип.

Инвариантный подход к развитию математической культуры инженера состоит из двух уровней. Первый уровень - структурный состоит из следующих профессионально-значимых компонентов: предметно-практический, интеллектуальный, мотивационный, волевой, эмоциональный, компонент самореализации, экзистенциальный.

Второй уровень - функциональный. Он включает в себя общие и специфические функции математической культуры. Общие функции математической культуры: гностическая, проектировочная, прогностическая, воспитывающая, диагностическая, мотивационная, аксиологическая, развивающая, рефлексирующая, коррекционная. Специфические функции математической культуры**:** инновационная, информационно-аналитическая, систематизирующая, оценочно- диагностирующая, рационально-личностная.

Системообразующим ядром модели являются профессиональная компетентность и конкурентоспособность как показатели уровня подготовленности инженера к профессиональной деятельности в современных условиях.

Главным в отборе и структурировании содержания математической подготовки студента-будущего инженера выступает деятельностный подход, ориентированный на целостное представление о профессиональной деятельности, ее функциях, и решаемые образовательные задачи.

Наиболее значимыми дидактическими условиями развития математической культуры являются: ориентация дисциплин естественно-математического цикла на развитие математической культуры, направленность математической подготовки на практическую профессиональную деятельность, существенное усиление прикладной направленности курса высшей математики в государственных образовательных стандартах высшего профессионального образования, введение элективных и факультативных курсов, методическое и организационное обеспечение самостоятельной и научно-исследовательской работы студентов.

На основании проведенного исследования можно констатировать, что математическая культура:

- представляет особый вид культуры;
- в большей степени индивидуальна, чем социальна;
- преломляясь через профессиональную деятельность, выражается в более высоком уровне развития личности;
- является межпредметным компонентом общей культуры.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ FLASH-ТЕХНОЛОГИЙ НА ЗАНЯТИЯХ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Брылевская Л.И.

Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

199106, Санкт-Петербург, Васильевский остров, 21 линия д.2;

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

197101, г. Санкт-Петербург, Кронверкский проспект, д.49.

Тел.: +79112901702, e-mail: brylevl@mail.ru

Введение новых учебных стандартов по математике в техническом вузе влечет за собой изменения содержания, формы и методов работы преподавателя, а также приводит к необходимости использования современных информационных технологий в процессе обучения.

В настоящее время Flash-технологии относятся к числу наиболее востребованных средств подачи материала в учебном процессе. Они являются инструментом создания динамических демонстраций, позволяют продемонстрировать поэтапную реализацию алгоритма решения задачи. При этом Flash-ролик можно обеспечить голосовым сопровождением, это уместно в дистанционном обучении или самостоятельной работе студентов.

Flash-технологии имеют целый ряд преимуществ, это и небольшой размер файлов, и определенная универсальность, связанная с тем, что приложения, созданные в Macromedia Flash, могут быть использованы в любых операционных системах, имеющих графический интерфейс. Кроме того, Flash-технологии позволяют использовать сразу несколько инструментов, таких как анимация изображений, встроенный редактор векторной графики, встроенный язык сценариев ActionScript.

Flash-анимация успешно иллюстрирует лекционный материал, в таких разделах как «Функция одной переменной и ее свойства», «Кривые второго порядка», «Кривые в полярной системе координат», «Ряды» (числовые, функциональные, степенные, ряды Фурье) и т.п. Благодаря поэтапной демонстрации построения кривых или визуального динамического построения примеров, иллюстрирующих сложные для восприятия понятия, например, такие как равномерная сходимость, анимация позволяет гораздо быстрее сформировать представления об основных понятиях изучаемого раздела по сравнению с классическим изложением материала с опорой на чисто аналитический аппарат. Flash-анимация, используемая как дополнение к лекции, формирует дополнительный визуальный ряд восприятия учебного материала. Всегда есть возможность, изменяя скорость демонстрации, подчеркнуть важные моменты или воспроизвести их еще раз, что способствует лучшему пониманию и запоминанию изучаемого материала. Flash-технологии позволяют несколько видоизменять процесс преподавания, интенсифицировать обучение и оптимизировать восприятие и усвоение материала.

Применение мультимедиа технологий открывает перспективное направление развития современных компьютерных технологий обучения, но несмотря на все плюсы Flash-технологии имеют ограниченную область применения. Разумеется, не всякий математический материал поддается пошаговой обработке. Время использования флеш-роликов должно быть четко определено, с одной стороны, целесообразностью их использования на том или ином занятии и, с другой, способностью студентов сконцентрироваться на восприятии математического материала, представленного в такой форме.

Современные средства обучения могут сэкономить учебное время, с их помощью мы можем внести разнообразие в формы и методы подачи учебного материала, вызвав интерес к изучаемому вопросу, визуальные образы и эмоциональное подкрепление позволяют надеяться на лучшее усвоение и запоминание материала. Однако злоупотреблять визуальными иллюстрациями математического материала, как нам представляется, тоже нельзя, поскольку чрезмерный упор на пассивное восприятие ограничивает развитие учащихся, они довольно быстро теряют интерес к происходящему.

Сейчас эйфория по поводу возможности тотального использования компьютерных технологий на всех этапах обучения уступает место более взвешенному отношению к применению информационных технологий в образовании. Этому способствует анализ физиологических, психологических, эмоциональных, интеллектуальных особенностей нынешнего поколения студенчества. К сожалению, исследования психологов и педагогов не всегда поспевают за нарастающими изменениями в современном социуме и за технологическими новинками. На сегодняшний день нет строго научно обоснованных критериев, позволяющих сказать, как и в каком соотношении возможно включение различных мультимедиа средств в канву лекции или практического занятия. Неграмотное использование ярких вставок может привести к обратному результату и разрушить с таким трудом выстраиваемый процесс обучения. Формы учебного процесса должны быть в первую очередь эффективными, а не просто эффектными.

Студент не может быть пассивным созерцателем, он должен быть активно вовлечен в процесс обучения. Еще в XIX веке Адольф Дистерверг утверждал: «Развитие и образование ни одному человеку не могут быть даны или сообщены. Каждый, кто желает к ним приобщиться, должен достигнуть этого собственной деятельностью, собственными силами, собственным напряжением. Извне он может получить только возбуждение…». И на фоне нынешнего стремительного развития информационных технологий мы также не можем не согласиться с его словами.

Студенты 1-го и 2-го курсов технических специальностей испытывают серьезные затруднения при изучении курса начертательной геометрии и технического черчения. Затруднения встречаются и у большинства школьников при овладении курсом стереометрии. Основной причиной низкой обучаемости большинство специалистов считают недостаточный уровень развития пространственного мышления. Исследования ученых показывают, что пик развития пространственного воображения приходится на возраст 5-6 лет [1], что формирование восприятия пространства у младших школьников происходит более интенсивно, чем у старших, поэтому становится ясно, насколько важно знакомить учащихся с пространственными формами уже в рамках детского сада, начальной и основной школы.

Ученые многих стран на протяжении двух столетий предлагали курсы ранней геометрии (но по различным причинам вопрос внедрения оставался открытым). Таким образом, напрашивается вывод: для подготовки старшеклассников к изучению стереометрии нужна качественно другая система преподавания геометрии, которая требует создания единого, внутренне завершенного курса изучения геометрии. Нам видится, что решение данной проблемы возможно только в системе непрерывного образования «Детский сад – школа – Вуз» на базе информационных технологий.

В докладе приводится разработанная нами система раннего (с детского сада) преподавания геометрии в средней школе на базе ИКТ.

В своем докладе мы остановимся на следующем аспекте проблемы преподавания геометрии в школе – реализации в школьном курсе геометрии так называемой идеи фузионизма [2], когда плоские и неплоские фигуры изучаются одновременно. При изучении ранней геометрии были заложены принципы – наглядность и деятельность. Реализация данных принципов проходит через весь курс обучения – от рисования, лепки и конструирования в детском саду до динамического моделирования геометрических тел, опорных конспектов, уроков-лекций в старшей школе. Реализация непрерывного преподавания геометрии невозможна без применения информационных технологий. В качестве технического средства используется проектор, мультимедийная доска, ПК.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СПОСОБНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ В КОНТЕКСТЕ ИХ РАЗВИТИЯ

Виситаева М.Б.

Чеченский институт повышения квалификации работников образования

364037, Грозный, ул. Х. Кишиевой, д. 30.
Тел. 8(8712)-22-20-43, maretvis@rambler

В современных условиях происходит переориентация методической системы обучения, связанная с необходимостью нацеливания школьников на профессиональную ориентацию на различные виды профессиональной деятельности, на науку и т.д. на приоритет развивающей функции по отношению к его образовательной, информационной функции,

Как известно, психологами (Н.С. Лейтес, С.Л. Рубинштейн и др.) установлено, что способности – динамическое образование, выявляются и развиваются только в процессе специальным образом организованной соответствующей деятельности, выступает в качестве одного из внешних условий развития способностей. При этом для выявления и развития способностей недостаточно наличие одних внешних условий, также важны и особые внутренние условия, то есть определенные задатки «… от задатков не зависит, возникнет ли у ребёнка определённая способность или нет, а зависит только степень лёгкости и быстроты, с которой он может овладеть разными видами способностей» [1, С. 74-75].

Под математическими способностями в психологии понимаются индивидуально-психологические особенности личности, обусловливающие успешность выполнения математической деятельностью. На основе анализа психолого-педагогической и методической литературы в контексте данного исследования нами разработана иерархичная дифференциация показателей критерия определения уровня развития математических способностей учащихся: *мотивационного*, *познавательного, творчески-ориентированного, творческого (когнитивного)* при изучении математики (схема) [2].

Реализация принципа учета индивидуальных и возрастных особенностей имеющихся возможностей учащихся [3] на практике требует от учителя четких представлений о возможностях каждого ученика, степени его подготовленности, динамике роста его потенциала. С учетом этого должны предлагаться индивидуальные задачи. Важно как предупредить неудачу, так и предлагать способным ученикам задачи, требующие интенсивной работы. Успешность человека информационного общества зависит от степени его личностного развития (от степени раскрытия личностного потенциала, что, в конечном счёте, определяет его жизненный статус, поступки, достижения).

Согласно ФГОС второго поколения [4] учащиеся включались в ситуации самооценки, саморазвития, рефлексии, апробации себя в роли конкретного действующего лица и т.д. В процессе проведения эксперимента нами использована и подвижная, эффективная практика – *формирующее оценивание («formative assessment»),* целью которого является улучшение качества обучения, включающее механизм обратной связи, информирующей учителя о развития математических способностей учащегося; оценивается как результат, так и процесс формирования математических способностей школьников.

Таким образом, нами разработано *критериальное и формирующее оценивание* в контексте развития математических способностей школьников (показатели, критерии развития математических способностей школьников и т.д.) позволяющее как показал проведенный нами эксперимент в различных общеобразовательных учреждениях Чеченской республики [2 и др.] улучшить соответственно в них процесс обучения математике.

После соответствующей корректировки на основе предложенной нами модели можно, на наш взгляд, составить *аналог оценивания математических способностей как для студентов СПО и ВПО, так и специальных способностей для школьников в других предметных областях.*

Схема. Показатели и критерии развития математических способностей школьников

Критерий	Показатели
Мотивационный ($К_1$):	- попытки мотивировать ситуацию в математической деятельности; - оперирование учащимися учебным материалом на основе заданных условий, ориентиров, известных правил и предписаний; действия на узнавание, распознавание и различение понятий (объектов изучения) без определенной последовательности *(наиболее простые проявления формализованного восприятия математического материала);* - проявление природных способностей (задатков) к математике; - попытки объяснить сущность объектов изучения *(попытка аргументировать ситуацию);* - оперирование наглядно-действенным и наглядно-образным мышлением, возможность проявления абстрактного мышления; - фрагментарное овладение элементами алгоритмической культуры.
Познавательный ($К_2$):	- частичная мотивация в математической деятельности; - возможность проявления организаторских качеств (самостоятельности, инициативности и целеустремленности); - описание и анализ действий с объектами изучения недостаточно осознанны *(формализованное восприятие математического материала);* - использование наглядной основы в стандартной задачной ситуации без алгоритмического предписания *(схватывание формальной структуры задачи);* - проявление интереса к математике; - возможность проявления организаторских качеств (самостоятельности, инициативности и целеустремленности и т.д.); - возможность проявления формируемых способностей в стандартных задачных ситуациях; - объяснение сущности объектов изучения *(аргументирование ситуации);* - фрагментарное проявление абстрактного мышления; - умение применять элементы алгоритмической культуры.
Творчески-ориентирован-ный ($К_3$):	- проявление мотивации в математической деятельности; - проявление организаторских качеств (самостоятельности, инициативности и целеустремленности и т.д.); - владение и оперирование учащимися усвоенным учебным материалом на основе заданных условий, ориентиров *(формализованное восприятие математического материала);* - использование наглядной основы в нестандартной задачной ситуации *(схватывание формальной структуры задачи);* - проявление склонностей при решении задач; проявление формируемых способностей в стандартных задачных ситуациях; - осознанное объяснение сущности объектов изучения *(полноценная аргументация);* - проявление абстрактного мышления; - умение применять во всех случаях элементы алгоритмической культуры.
Творческий (когнитивный) ($К_4$):	- мотивация в математической деятельности; - проявление организаторских качеств (самостоятельности, инициативности и целеустремленности) в нестандартных задачных ситуациях; - осознанные действия в нестандартной ситуации; самостоятельные действия по описанию и объяснению объектов изучения *(формализованное восприятие математического материала);* - действия по применению знаний в незнакомых, нестандартных ситуациях для решения качественно новых задач; действия по преобразованию и созданию (новых) объектов изучения *(схватывание формальной структуры задачи);* - проявление формируемых способностей в нестандартных задачных ситуациях; - осознанное объяснение во всех случаях сущности объектов изучения *(полноценная аргументация);* - владение абстрактным мышлением; - владение алгоритмической культурой.

Литература

1. Венгер Л.А. Наша группа. (О развитии познавательных способностей ребёнка). – М.: Знание, 1978.
2. Виситаева М.Б. Оценка развития математических способностей школьников // Педагогика. – 2014. – № 4. – С. 53-57.
3. Лазарев В.А. Педагогическое сопровождение одаренных старшеклассников: Монография. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского. – 2005.
4. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (Утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 17.12.2010 г. № 1897) / http://www.standart.edu.ru/.

ТЕХНОЛОГИИ WOLFRAMALPHA В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ БАКАЛАВРИАТА

Власов Д.А.

Московский государственный гуманитарный университет им. М.А.Шолохова,

Московский институт телевидения и радиовещания «Останкино»

109240, г. Москва, ул. Верхняя Радищевская, 16-18

Тел.: 84956474477, e-mail: DAV495@gmail.com

Значимость математической подготовки бакалавров обусловлена с одной стороны возрастающими профессиональными требованиями (прикладная математика как основа естественно-научных и гуманитарных исследований), с другой стороны математизацией и информатизацией всех сфер деятельности. Одний из важной составляющих математической подготовки бакалавра является изучение количественных методов. Отметим *оправданную целесообразность изучения метода* наименьших квадратов, предложенного Карлом Фридрихом Гауссом и Адриеном Мари Лежандром, бакалаврами различных направлений подготовки. Благодаря своей *относительной простоте и широте применения* к различным ситуациям и проблемам он приобретает особую значимость для развития системы прикладной математической подготовки бакалавров.

В рамках изучения МНК студента бакалавриата следует ознакомить с принципиальными возможностями и практикой исследования количественных характеристик и качественных свойств объектов в области будущей профессиональной деятельности, сведения прикладной задачи к изучению более простых, удобных объектов.

Математическая ценность МНК велика и заключается в приближённом представлении (аппроксимации) заданной функции другими (более простыми) функциями, в нахождении совокупности величин, удовлетворяющих уравнениям или ограничениям, количество которых превышает количество этих величин и т.д.

Прикладная ценность метода сводится к его широкому применению в нейронных сетях, в различных областях медицины, бизнеса, физике, геологии и технике, экономике, социологии, политологии для решения задач автоматизации, прогнозирования и классификации. Большую значимость МНК имеет в социально – экономической сфере: прогнозирование показателей в процессе исследования временных рядов.

Данный метод, обеспечивающий аппроксимацию (приближение) имеет и *научно – философское значение*, заключающееся в замене одних объектов другими, с одной стороны более простыми, с другой в том или ином контексте близкими к исходным, называется аппроксимацией (приближением).

Идея и реализация МНК в общем виде, доступном для восприятия студентами бакалавриата, а так же различные модификации МНК рассмотрены в публикациях автора. Обратимся далее к **практическим аспектам использования** базы знаний и набора вычислительных алгоритмов WolframAlpha **в учебном процессе** (при изучении количественных методов, в частности МНК).

Во-перых, при решении прикладной задачи *WolframAlpha* предоставляет **возможность визуализации экспериментальных данных**. Достаточно просто выполнить построение графиков функций по точкам, полученным, например, в результате проведения эксперимента $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_n, y_n\}$. Используя полученные графики, можно проводить первичный анализ данных: предполагать наличие или отсутствие зависимостей между данными, выдвигать гипотезу о виде зависимости.

Во-вторых, для аппроксимации заданной таблично искомой функции, в *WolframAlpha* существует специальный запрос **fit**, реализующий МНК. В таблице 1 приведем различные варианты его использования. Кроме реализации метода, данный запрос позволяет провести **анализ построенной модели**: получить подробную информацию об адекватности зависимости и корректности выбора формы зависимости посредством анализа соответстсующих числовых характеристик.

Таблица 1. Модели аппроксимации в WolframAlpha.

	Название	*Запрос на реализацию*
1.	*Linear model* Линейная аппроксимация	linear fit $\{x_1, y_1\},\{x_2, y_2\},\ldots,\{x_n, y_n\}$
2.	*Quadratic model* Квадратичная аппроксимация	quadratic fit$\{x_1, y_1\},\{x_2, y_2\},\ldots,\{x_n, y_n\}$
3.	*Cubic model* Кубическая аппроксимация	cubic fit $\{x_1, y_1\},\{x_2, y_2\},\ldots,\{x_n, y_n\}$
4.	*Exponential model* Экспоненциальная модель	exponential fit $\{x_1, y_1\},\{x_2, y_2\},\ldots,$ $\{x_n, y_n\}$
5.	*Logarithmic model* Логарифмическая модель	log fit $\{x_1, y_1\},\{x_2, y_2\},\ldots,\{x_n, y_n\}$
6.	*Polynomial model 4th order* Полиномиальная аппроксимация 4-го порядка	polynomial of degree 4 fit $\{x_1, y_1\},\{x_2, y_2\},\ldots,\{x_n, y_n\}$
7.	*Polynomial model 10th order* Полиномиальная аппроксимация 10-го порядка	polynomial of degree 10 fit $\{x_1, y_1\},\{x_2, y_2\},\ldots,\{x_n, y_n\}$
8.	*Choice by WolframAlpha* Выбор *WolframAlpha*	fit $\{x_1, y_1\},\{x_2, y_2\},\ldots,\{x_n, y_n\}$

Резюме.

1. Целесообразное, дозированное и методически оправданное использование базы знаний и набора вычислительных алгоритмов *WolframAlpha* при изучении количественных методов студентами бакалавриата (как на аудиторных занятиях, так и в процессе самостоятельной исследовательской работы) является **условием более эффективного развития профессиональной компетентности студентов** в соответствии с требованиями ФГОС 3+.

2. Новый учебно-методический комплекс «Количественные методы и математическое моделирование», разработанный автором в образовательной среде *Moodle*, включающий учебную тему «Метод наименьших квадратов», позволяет по-новому **структурировать учебную информацию и реализовать прикладную направленность обучения математики** в бакалавриате в условиях сокращения аудиторной нагрузки. Основу УМК «Количественные методы и математическое моделирование» составляет система управленческих, социальных, экономических задач, решаемых с помощью количественных методов. Разнообразные примеры и задачи иллюстрируют применение рассмотренных количественных методов.

ОБЛАЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Голубев О.Б.

Вологодский государственный университет

160035, Вологда, ул. С.Орлова д.6, корп.7

Тел.: (8172)720256, e-mail: oleg_golubev@mail.ru

Под облачными технологиями будем понимать такую форму обработки данных, при которой компьютерные ресурсы (область на жестком диске, программное обеспечение) предоставляются пользователю как Интернет-сервис. Преимущества использования облачных технологий очевидны: снижение затрат связанных с приобретением программного обеспечения (фактически мы загружаем программное обеспечение из сети Интернет), экономия дискового пространства за счет размещения данных на удаленных серверах, снижение требований к мощности ПК, повышение мобильности работы (мы можем редактировать файлы в удобном месте в удобное для нас время, главное, чтобы был доступ к сети Интернет). Конечно, появляются некоторые проблемы связанные с зависимостью сохранности пользовательских данных от компаний, которые предоставляют услуги cloud computing. Появляются вопросы: достаточно ли надежно защищены данные в облаке? Нет ли вероятности того, что сам владелец Интернет-сервиса решит воспользоваться нашими данными? Конечно, в эпоху сети Интернет многие вопросы, связанные с информационной безопасностью стоят очень остро.

Одним из активных методов обучения математике является метод проектов. Под учебным сетевым проектом будем понимать документально оформленную деятельность обучающихся, организованную с помощью облачных сервисов, направленную на достижение поставленных целей в рамках определенного периода времени. При изучении математики сетевые проекты являются удобным средством для совместной отработки студентами навыков решения задач, проверки уровня знаний, а также формирования интереса к предмету [1].

Использование облачных технологий в обучении математике вызывается следующими причинами:

1. Возможностью проведения непрерывного мониторинга качества полученных знаний.

2. Повышением мотивации обучающихся при использовании облачных сервисов.
3. Возможностью создания информационной образовательной среды для формирования самостоятельной познавательной деятельности обучаемых.
4. Мобильными возможностями облачных технологий.

Сегодня с облачными технологиями пользователи сети Интернет работают практически каждый день. Облачным технологиям еще предстоит сыграть свою роль в развитии дистанционного обучения в отечественной системе образования. Использование облачных технологий повышает доступность и практическую направленность образовательного процесса. Для многих платных приложений уже сегодня существуют бесплатные и полнофункциональные облачные аналоги. Дополнительный плюс их использования в учебном процессе является возможность хранения исходных, промежуточных и конечных материалов в облаке, что значительно повышает мобильность участников учебного процесса.

Литература

1. Голубев О.Б. Интернет-проект в интегрированном курсе Математика и информатика для студентов гуманитарных профилей // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2008.Т.14. №3.С.271-274.

ПРИНУДИТЕЛЬНОСТЬ ДИДАКТИКИ СИСТЕМНО-ИНФОРМАЦИОННОЙ КУЛЬТУРЫ: ЕДИНСТВО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО И УНИВЕРСАЛЬНОГО ОБУЧЕНИЙ

Громыко В.И.[1], Будак А.Б.[2], Васильев Н.С.[3], Казарян В.П.[4], Симакин А.Г.[5],Аносов С.С.[6]

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, фак. ВМиК, каф. АЯ: gromyko.vladimir@gmail.com
2) МГУ им. М.В. Ломоносова, фак. ВМиК, каф. ОМ: abbudak@cs.msu.ru
3) МГТУ им. Н.Э. Баумана, фак. фундаментальных наук, каф. ФН1: nik8519@yandex.ru
4) МГУ им. М.В. Ломоносова, философский факультет, каф. ФЕН: kazaryanvp@mail.ru
5) РУДН, фак. гуманитарных и социальных наук, каф. ОТП: modus-as@mail.ru
6) Банк «Возрождение»: sanosov@cs.msu.su

…главное, в чем нуждается мир, мечтающий о счастье, так это в интеллекте.
А это, в итоге, оптимистический вывод, поскольку интеллект может обогащаться…
Б.Рассел. Нобелевская лекция.

Введение. Инфосфера, обогатившаяся умными машинами с доступной интернет сетью знаний третьего мира, стала системно-информационной культурой (**С-ИК**). Социум откликнулся запросом на ***специалиста****,* способного к экспансии в ***междисциплинарные области*** через ***деятельность со знанием*** в инструментальных системах (ИС). Проблема ***надпредметности***, неуловимая для традиционного обучения (**ТО**), требует разрешения в связи с объемом и сложностью образовательного пространства (**ОП**) учащегося. При возникших требованиях на обучение – непрерывное на жизненном пути и эффективное из-за надпредметности – уже недостаточно перманентных реформ образования [1]. Требуется реформа, в которой следует проявить и явно обеспечить предвосхищение учащегося – переход от общекультурного воззрения к ***естественнонаучному мировоззрению***. Образовательная роль обучения кончилась, учащемуся приходится ***жить в науке***, обучение должно подключить и может состояться при ***самопознании***. Необходимая **т**ехнология строится на **рациональной модели обучения**, Учащегося, погруженного в реалии мира системной деятельности, приобщаем к ***точному протоколу смыслов*** для ***личностного познания*** уровня поиска-***открытия*** смысла, а не уровня знания-использования результата.

1 Рациональное образование. Гуманитарное образование (**ГОБ**) организовано рационально на уровне теорий – языка, мифа, религии, искусства, науки [2]. Но в социуме ГОБ реализуется только как право на культурное воззрение и профпригодность. С-ИК перманентно внедряет рациональное мировоззрение, обеспечивая: системную деятельностью; существование в междисциплинарной культуре; синтез предметов в ИС. Рациональное образование (**РОБ**) включает нас, уже действующих со знанием субъектов, в рациональный мир. РОБ (п.4) – это генезис объективизации Рода, расширяемой за счет Ряда рациональным развитием индивида. Например, в МГУ им. Ломоносова осуществляется интеграция ОП межфакультетскими учебными курсами, а на ВМК действует программа техносфера, включая в ОП изучение современных ИС.

2 Традиционное обучение обеспечивает право на труд. Оно является предметным, т.к. действует от результата в ВУЗе или от псевдо становления понятий-смыслов предмета в школе. Объективизация предмета, добываемая профессиональными исследованиями (явно наблюдается в математике через алгоритмизацию и алгебраизацию), проясняла рациональную сущность. Но в дальнейшем удобный алгебраизированый вид сохранялся в обучении, формируя определяющие черты ТО – предметность и профессиональность. Естественна сопутствующая дидактика_не (**<u>дд-не</u>**): учащийся должен не ошибаться. Она удобна социуму, страдающему примитивными предпочтениями: не можешь – научим, не хочешь – заставим. В С-ИК неэффективность «интеллектуального поднятия тяжести» резко проявляется и обнаруживает фиаско: нет никакого представления о смыслах, необходимых для межпредметной деятельности (**<u>МежД</u>**) мышления. Социум сталкивается с неизбежным: если профи хорош, то – очень хорош; если же плох, то – просто ужасен (опасен). Дидактика привыкания по Успенскому (**<u>дд-прив</u>**) снижает напряженность дд-не. Следует ценить учащегося по уровню вхождения в С-ИК на основании привыкания к представлениям об отличии определяющих понятий синтеза: истины от лжи, знаемого от не знаемого, понимаемого от не понимаемого.

3 Универсальное обучение (**<u>УО</u>**) отвечает **за** формирование ***системного сознания***. Специальность, познаваемая в границах гуманитарного восприятия жизни, требует надпредметного опознания для МежД. УО – следствие ***бифуркации*** образования в С-ИК, фиксирующей завершение общеобразовательного обучения. Бифуркация характеризуется: деятельностью в динамике С-ИК & социальным проявлением – ***непрерывностью образования*** & новым бытием индивида – ***жизнью в науке***. Существующая объективизация культуры средствами интернет (п.4) позволяет строить опознание учащегося на уровне метасмысла, т.е. ***второго сознания*** – знания о познании. В С-ИК естественнонаучная объективизация вынуждает каждого к саморазвитию на жизненном пути самопознания познанного Родом. Опередившая время позитивная дидактика смысла по Колмогорову (**<u>дд-смсл</u>**) оповестила о состоянии математического знания (аксиоматизация, метаматематика, универсальная алгебра), пригодном для постижения предельных системных абстракций. Распространяя на каждого конструктивное дело моделирования, информатика: языки программирования (ЯП) и спецификаций (**ЯС**) & абстрактный тип данных (**АТД**) & объектно-ориентированное программирование (**ООП**) & базы данных (**БД**) & базы знаний (**БЗ**) – к дд-смсл добавляет символическую реальность предельных идеализаций. Объективизация смысла нуждается в развитии ***познавательной естественнонаучной функции*** [2] и возможна на основе языка категорий (**<u>ЯК</u>**) [3].

4 Системно-информационная культура достигла впечатляющего единства фактов, знания, познания, сознания для МежД. Единство предъявлено в интернете миром-3 документов [4], объективизирующих: рост научного знания (**<u>РНЗ</u>**) [5] – историю идей (проблемы, предположения и опровержения) & максимальную концептуальную упаковку & документы ТО. Мышление несостоятельно для познавательной деятельности в мире-3 из-за отсутствия символической формы теорий (ЯК). Продуктивности гуманитарного языка (**<u>ГумЯз</u>**) уже недостаточно. Проблема объективизации достигла предела – онтологии, верифицирующей эпистемологию. Значит, анализ познания ***рода*** по Канту-Кассиреру свелся к формированию системного сознания ***Ряда*** инфосферы. Происходит проверка культуры на состоятельность через новое состояние-процесс эволюционирующего человека **<u>когногенез</u>**. Личностный РНЗ (**<u>ЛРНЗ</u>**) служит экспансии в МежД мышления на основе: зафиксированной ***филогенезом*** истории РНЗ & бытия языка мировоззрения в ***онтогенезе*** & волевой деятельности (цели поведения) критического сознания по системной самоорганизации – от построй самого себя переходим к строй на базе ЯК подсознание. В распоряжении обучения есть дд-смсл для приобщения учащегося к познанию Рода. Но требуется не разрушить «живое чувство целого» по Гете, энтелехию – «единство духа» по Аристотелю, способствуя в метаорганизации при саморазвитии. Чтобы когногенез действовал эффективно, традиционные учебные материалы должно преобразовать для адаптивного пользования в качестве личностного надпредметного ОП (**<u>ЛНОП</u>**). Нужна системная форма познания Рода – междисциплинарная электронная библиотека (**<u>МЭБ</u>**).

5 Язык категорий занимает верхнюю позицию в иерархии дескрипции: геометрия, алгебра, метаматематика, общая алгебра, алгебраические системы, универсальная алгебра. Он фиксирует взросление рациональных средств описания и сравнения теорий. В двойственном мире дела (реальных ИС) есть соответствия: ЯП, ЯС, АТД, ООП, БД, БЗ. Специалист С-ИК обречен овладеть ЯК, т.к. действует в надпредметности. Возникшее единство слова и дела образует новую субстанцию интеллектуальной реальности. Если с помощью **ГумЯз** постигаем объективное содержание мысли, то ЯК служит постижению объективности смысла. Настало время переплавки гуманитарного воззрения в научное опознание. Трансцендентность проблемы «единства духа» обрела реальность инварианта, который надлежит поддержать при самоорганизации учащегося при самопознании своих ограничений (невежества). Обучению следует копировать способ овладения ГумЯз, который открыт Родом как необходимое и продуктивное средство иышления. Субъект также открывает его в использовании на пути сократовского «идеала еще не обретенного знания». Итак, декартизация по объективизации субъекта достигается инкарнацией подсознания системной грамотностью. ЯК надлежит стать субстанцией мыслекода для точной деятельности со смыслами. Формированию ЯК как интеллектуальной реальности способствуют произошедшие переходы в рациональном: от числа к символу + ЯП & от алгебраизации к аксиоматизации + ЯС, АТД & от идеализации к конструктивной формализации + ООП (наследование), БД, БЗ, ИС. В этой возможности формирования опознании – значение дд-смсл, которая для многих оказалась непостижимой.

6 Дидактика открытия (<u>дд-откр</u>) невозможна в ТО из-за профессиональности ГумОБ. Воображаемая борьба за творческое это не движение к ней, т.к. приобщение к разнообразию дел чувствования жизни является только формированием перспективы. Но дд-откр возможна (на метафизическом уровне), когда возникает принудительное («божественное») в целостности духа – соответствие филогенезу. Например, о величии числа невозможно говорить, никто не понимает, все привыкли. Предвосхищение уровня смыслов обеспечивает субстанцию мировоззрения, т.к. в человеке включает продуктивное – мотивацию, энтелехию по Аристотелю, воление по Шопенгауэру. Жизнь в системном мире и инкарнация ЯК переводит трансцендентальное единство апперцепции в статус «здесь» злободневности по Хайдеггеру. С-ИК требует повторения подвига Евклида – приобщение к рациональной объективизации уже через самопознание несоответствия оной. УО выявляет реальность разрывов в концептуальности, поэтому действует в необходимости и естественности прорывов сознания к абстрактным реальностям при деятельности в сети экспансии надпредметного ОП (**<u>НОП</u>**). Это возможно (п.7) при подключении истории идей на основе формируемых вопросов на базе ЛНОП. В С-ИК ущербность социально респектных образовательных услуг очевидна, т.к. формирование рационализма – преодоление заблуждений на критическом начале – требует связки учитель-ученик. Статус духовного наставника – естественная позиция преподавателя в культуре.

7 Технология естественнонаучного сознания. Дело в С-ИК обязывает нарастить интеллект Ряда ***познавательной функцией ЯК*** для рациональной жизни в мире познания и систем. Требуемое обогащение глубокое. Оно сравнимо с наличествующим воплощенным биологическим знанием, предвосхищающим существование в физической среде, Поэтому УО рассматривается как **технология сознания** [6]. На ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова исследуется и реализуется соответствующий проект «Интеллектуальное компьютерное место учащегося» (**<u>ИКМУ</u>**). Цель – эффективное обучение за счет синтеза ТО и УО. Для этого требуется формирование междисциплинарного ОП (**<u>МОП</u>**) всего цикла обучения учащегося в виде онтологической базы знаний (**<u>ОнтБЗ</u>**), доступной для адаптивного пользования в интеллектуальной обучающей системе (**<u>ИОС</u>**). Реализация включает: 1) ИКМУ для действия генетического метода обучения ГРОМ; 2) ИОС в единстве с ЛНОП; 3) базу МОП как ОнтБЗ за счет наследуемой возможности сравнения курсов с их образами на ЯК; 4) дружественный интеллектуальный учитель (**FLINT**) – ядро ИОС – специализированный поисковик, действующий на ЛНОП и обеспечивающий сеансы в реальном времени. Используя алгебраические операции вложение $\mapsto$ и расширение [], удается представить предлагаемое исследование:

ИКМУ = (ИОС + ОнтБЗ)[ГРОМ]; ГРОМ = {(ОП$\mapsto$МЭБ) & (ОП$\mapsto$НОП$\mapsto$ЛНОП)}[ЯК].

Реализация требует **суперкомпьютера** для формирования МЭБ и реализации учебного сеанса реального времени для интеллектуального прорыва на основе **поиска-***открытия* смысла.

Заключение. Расширяющиеся возможности мышления созидаются средствами ЛНОП, т.е. в необходимой для развития и неуловимой в прежней педагогике творческой свободе. На основании языка систем (ЯК) путь рационализации достигает гуманизации образования средой саморазвития, выходя за границы стендового средства при обеспечении жизни в науке. Реализуемый ***переход*** технологии от познания ***века машин к сознанию систем*** использует **рациональную модель обучения**, которая решает проблему универсальных возможностей-способностей специалиста**:**

- ***представление смысла жизни*** – соответствуй сложности – при существовании человека в синтезе гуманитарного переживания и рационального восприятия;
- ***когногенез*** для восприятия познания Рода при культурной эволюции ***социума от инфосферы к ноосфере***;
- ***подключение*** человека как ***деятельного разума*** информационной сети жизни; решением ***исторической задачи*** занято УО – естественный расширяющий наследник веками проверенного ТО.

Проводимое исследование – стратегические информационные технологии при производстве кадров XXIв. – входит как ключевое в перечень приоритетных направлений в области образования и науки, объявленных ректором МГУ В.А. Садовничим в докладе «Современная университетская идея и будущее Московского университета» на Ученом Совете 12.05.2014г.

Непросто, но принудительно прорывается Ряд к **ноосфере**.

Литература

1 Миронов В.В. Размышления о реформе российского образования: Доклад на международной научной конференции «Философия и образование в процессе трансформации культуры», посвященной 70-летию воссоздания философского факультета в структуре МГУ имени М.В. Ломоносова // М.: Издатель Воробъев А.В. – 2011. – 64с.
2 Кассирер Э. Философия символических форм. Феноменология познания // М., Спб.: Университетская книга. – 2002. – Т. 1-3.
3 Маклейн С. Категории для работающего математика // М.: Физматлит. – 2004.
4 Поппер К.Р. Объективное знание. Эволюционный подход // М.: УРСС. – 2002.
5 Кэмпбелл Д.Т. Эволюционная эпистемология // – Сб. Эволюционная эпистемология и логика социальных наук. – М.: УРСС. – 2000. С. 92-146.
6 Громыко В.И. Казарян В.П., Васильев Н.С., Симакин А.Г., Аносов С.С. Рациональное образование как технология сознания // Сложные системы. Междисциплинарный научный журнал. М.: Приятная Компания, №3(8). – 2013. С. 87-108.

МОДЕЛЬ ТЕХНОЛОГИИ ЭКСПРЕСС ОБУЧЕНИЯ ПЕДАГОГОВ РАБОТЕ В СРЕДЕ ИННОВАЦИОННОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ДИДАКТИКИ

Грушевский С.С.

Кубанский государственный университет

350040, г.Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Тел.: (861)2199581, e-mail: inform@math.kubsu.ru

Одной из основных целей системы педагогического образования является подготовка педагогов, готовых создавать учебные материалы в инновационной компьютерно-методической среде. Однако для практики компьютерного обучения характерна ситуация, когда в преподавании большинства педагогов используются готовые наборы компьютерных технологий учебного назначения, основные из них – это электронные учебники, презентации, тестовые системы, Интернет ресурсы. Поэтому актуализировалась проблема разработки технологий эффективного, интенсивного и кратковременного обучения (экспресс обучения) педагогов созданию инновационного методического сопровождения образовательного процесса [1]. Подобная технология разрабатывалась в течение нескольких лет в Кубанском государственном университете [2] и была обобщена нами в виде модели. Апробация модели выполнялась в процессе экспресс обучения педагогов в системах общего и профессионального образования [2].

Структура модели состоит из нескольких модулей. Концептуальный модуль модели включает: цель экспресс обучения педагогов, состоящую в формировании умений самостоятельно проектировать, конструировать и применять различные виды компьютерной поддержки учебного процесса на основе моделей и технологий ИКД. Цель реализуется посредством решения ряда задач:

− обоснование необходимости внедрения новых форм педагогического обучения, ознакомление с концептуальными и нормативными положениями создания электронных ресурсов ИКД;

− изучение структуры фондов учебно-методической информации, инновационных дидактических и программно-информационных моделей в их составе;

− практическое освоение способов создания инновационных дидактических технологий, используемых в среде ИКД;

− самостоятельное проектирование и конструирование технологий ИКД и модификация программных составляющих ресурсов ИКД, использование в профессиональной деятельности сетевых технологий интернет-поддержки экспресс обучения педагогов.

Основой методического модуля являются содержательная и технологическая составляющие экспресс обучения. Первая включает разделы, отражающие: банк учебно-методической информации как средство экспресс обучения и конструирования предметных учебно-методических комплексов; структура, содержание нормативного блока (государственные образовательные стандарты, учебные планы и программы); технологический учебник с программным сопровождением как модель учебника нового поколения [1]; подходы к структурированию изучаемых научных теорий; блоки систематизации и обобщения знаний, а также инновационные формы практических заданий; мотивационный блок. В этой составляющей модели отражена процедура создания методической основы электронных образовательных ресурсов ИКД, которая соответствует структуре научной теории. При этом основным способом создания ресурсов ИКД является метод ориентиров, в рамках которого все построения новых учебных материалов базируются на имеющихся шаблонах, роль которых исполняют созданные ранее типы учебных материалов – герменевтические приёмы, технологии конструктора знаний, веб-презентации и др. [3].

Модуль программного обеспечения также реализуется поэтапно. На первом этапе происходит ознакомление с набором технологий ИКД: интерактивными версиями локальных технологий обучения, тематическими презентациями, тестовыми системами на платформе языков программирования Action Script и Visual Basic, электронными тренажёрами и др. [4]. При этом реализуется принцип предметности обучения, требующий использование контента, соответствующего профилю профессиональной деятельности обучающихся. На втором этапе обучения изучаются аспекты, связанные с созданием ЭОР как современной формы электронных учебных материалов, что отражено в соответствующей модели. Третий этап предполагает освоение учебных курсов, описывающих процедуры создания технологий на программных платформах Flash и HTML [5]. Составляющие контрольно-коммуникативного модуля технологии экспресс обучения функционируют перманентно по мере освоения блоков предыдущего модуля. С этой целью была создана ролевая интернет-модель «Ученик-учитель». Модель дистанционная, так как функционирует с помощью сайта http://ya-znau.

Итак, на основе практики экспресс обучения были сделаны выводы. Вся система экспресс обучения педагогов профессиональной деятельности с использованием средств ИКД обобщённо представляется моделью технологии экспресс обучения, которая отражает цель экспресс обучения педагогов, состоящую в формировании умений самостоятельно проектировать, конструировать и применять различные виды компьютерной поддержки учебного процесса на основе моделей и технологий инновационной компьютерной дидактики; принципы экспресс обучения, которые интегрированы в группы: методологические, методические, технологические; в технологии экспресс обучения реализованы три вида интернет-поддержки посредством сетевых инфокоммуникационных технологий. Цель освоения содержательной составляющей технологии экспресс обучения состоит в повышении квалификации педагогов посредством освоения способов создания новых учебных материалов, в ознакомлении со средствами компьютерной поддержки инновационной педагогической деятельности, в формировании компетенций в сфере использования программных оболочек для разработки электронных учебно-методических материалов.

Литература

1. Архипова А.И., Пичкуренко Е.А., Золотарёв Р.И. Учебник нового поколения: варианты решения проблемы // Школьные годы. 2011. № 34.

2. Золотарёв Р.И., Архипова А.И., Грушевский С.С. Экспресс-обучение педагогов созданию учебных материалов для размещения в сети Интернет // Школьные годы. 2011. № 37.

3. Храмцов П.Б. и др. Основы Web-технологий / под ред. П.Б. Храмцова. М.: ИНТУИТ. РУ «Интернет–Университет информационных технологий», 2007.

4. Грушевский С.С. Архипова А.И. Электронные образовательные ресурсы инновационной компьютерной дидактики как средство информатизации педагогического образования // Историческая и социально-образовательная мысль. 2014. №1.

5. Грушевский С.С. Электронный образовательный ресурс по математике в структуре дистанционного экспресс обучения на основе программы «Учком» // Школьные годы. 2014. № 52.

ДИСТАНЦИОННЫЙ КОМПОНЕНТ В МАТЕМАТИКО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ МАГИСТЕРСКИХ ПРОГРАММАХ

Грушевский С.П., Андрафанова Н.В., Добровольская Н.Ю.

Кубанский государственный университет

350040, г.Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Тел.: (861)2199581, e-mail: spg@kubsu.ru, nat_drofa@mail.ru, dnu10@mail.ru

Реализация математико-педагогических магистерских программ в рамках направлений "Математика" и "Математика и компьютерные науки" предполагает широкое использование в учебном процессе современных компьютерных технологий, в том числе и дистанционных. Целесообразность внедрения дистанционного компонента в магистерскую программу определяется наличием большого объема часов самостоятельной работы, отводимых для дисциплин специализации, исследовательских проектов и производственной практики. Кроме того, использование дистанционных технологий обуславливается и тем обстоятельством, что большинство магистрантов совмещают обучение в магистратуре с работой, а, следовательно, необходимы дополнительные возможности для организации самостоятельной работы: индивидуальные консультации по изучаемым дисциплинам, индивидуальный темп обучения.

Использование дистанционного компонента в подготовке магистров предоставляет следующие возможности:

- ✓ выбор индивидуальной траектории обучения, так как учебно-методические комплексы дисциплин доступны магистранту в любое время.
- ✓ выбор индивидуального темпа изучения учебно-методических материалов без отрыва от производства, на территории, наиболее подходящей магистранту (здесь существует только одно ограничение – возможность доступа к среде передачи информации).
- ✓ разнообразие средств и способов дистанционного обучения, самостоятельный выбор формы и способа представления изучаемых учебных материалов (текст, презентация, видео-занятие и др.).
- ✓ получение дополнительных знаний о современных информационных технологиях.

Использование дистанционных технологий в математико-педагогических магистерских программах имеет особое значение в связи с тем, что магистранты получают возможность освоения методов разработки и приобретения практических навыков применения дистанционных технологий в учебном процессе, освоения современных технологий обучения математики и информатики и т.д. [1]

Программа подготовки магистров математики любого направления базируется на компетенциях, приобретенных студентами в процессе обучения по бакалаврской программе. К таким компетенциям относится ряд IT-компетенций, позволяющих подготовить квалифицированных пользователей программного, в том числе и математического, обеспечения [2, 3]. Умение быстро находить, анализировать и грамотно обрабатывать научно-техническую и естественнонаучную информацию, владение методами математического и алгоритмического моделирования, знание базовых информационно-коммуникационных технологий и умение применять их на практике позволяет магистрантам эффективно использовать дистанционный компонент в процессе обучения.

Учебно-методический комплекс для реализации дистанционной технологии обучения в математико-педагогических магистерских программах должен иметь следующую структуру.

Блок теоретического материала. Этот блок включает в себя программу дисциплины (учебного курса), методические указания по изучению дисциплины (учебного курса), учебное пособие, разнообразные компьютерные формы представления материалов лекций, семинаров, перечень вопросов для подготовки к экзаменам, список научной и учебной литературы.

Блок практических и лабораторных заданий. Этот блок представлен заданиями для практических и лабораторных занятий, методическими указаниями по их проведению.

Блок тестирования. Включает тесты различного уровня, позволяющие оценивать знания магистрантов.

Для реализации дистанционного компонента, кроме наличия современного учебно-методического комплекса по дисциплине, необходимо наличие коммуникационного обеспечения и качественная подготовка кадрового педагогического персонала, реализующего магистерскую программу.

Рассматривая цикл дисциплин подготовки магистров по направлению 010100 «Математика» и 010200 “Математика и компьютерные науки” можно отметить, что и дисциплины общенаучного цикла, и дисциплины профессионального цикла могут включать в себя дистанционный компонент. В набор учебных материалов любой дисциплины профессионального цикла входят задания, которые следует выполнять с помощью информационно-коммуникационных технологий:

- ✓ расчетные задания, выполняемые в математических пакетах и пакетах статистической обработки данных (MathCAD, MatLab, Maple, Mathematica, Statistica, Excel);
- ✓ программирование web-ресурсов образовательного назначения (HTML, PHP);
- ✓ проектирование и наполнение компьютерных учебно-информационных комплексов;
- ✓ изучение технологий защиты информации;
- ✓ знакомство с методами информатизации управления образованием;
- ✓ конструирование учебных ресурсов с использованием мультимедийных комплексов.

Подобные учебно-методические материалы предоставляются как непосредственно на лекционных и лабораторных занятиях, так и трансформируются в дистанционную форму.

Одной из дисциплин магистерской программы является дисциплина «Теория и практика дистанционного обучения». В рамках этого учебного курса выполняются задания по конструированию дистанционных модулей, содержащих разнообразные учебные материалы, в том числе и других дисциплин. Тем самым магистранты формируют необходимые профессиональные компетенции в области технологии дистанционного обучения, а база учебно-методических материалов дистанционного компонента пополняется новыми модулями.

Таким образом, использование дистанционного компонента при реализации математико-педагогических магистерских программ обусловлено не только важностью использования современных компьютерных технологий для эффективной организации учебного процесса, но и необходимостью формирования профессиональных компетенций магистра в области теории и практики использования информационных технологий, в том числе и дистанционных.

Литература

1. Грушевский С.П., Андрафанова Н.В. О математико-педагогических магистерских программах. Известия АлтГУ, 2-2(78), 2013.
2. Грушевский С.П., Добровольская Н.Ю. Проектирование профессионально-педагогической подготовки студентов математических направлений на основе технологий формирования их IT-компетенций. Известия АлтГУ, 2-2(78), 2013.
3. Грушевский С.П., Добровольская Н.Ю. Курс "Информационные технологии в науке и образовании" в процессе формирования профессионально-педагогических компетенций магистрантов математических направлений. // Труды международной научной конференции. ."Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство", Цахкадзор, 2014.

ПУТИ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ СТОХАСТИКЕ В СИСТЕМЕ «ШКОЛА-ВУЗ» С ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ

Дворяткина С.Н.

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

399740, Елец, ул. Коммунаров, д. 28

Тел.: 89155510955, e-mail: sobdvor@yelets.lipetsk.ru

Ключевой проблемой содержательного характера, обозначенной в Концепции развития математического образования в Российской Федерации, является преемственность математического образования между его уровнями [1]. Долгие годы был нарушен важный системный принцип «школа-вуз», и это можно наблюдать при обучении элементам стохастики. Главной причиной этого являлся разрыв между содержанием программ школьного обучения и требованиями, предъявляемыми к физико-математической подготовке в вузах. Сегодня эта проблема законодательно решена. В Федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования установлены требования к результатам освоения основной образовательной программы, касающиеся внедрения новой содержательной линии как на базовом уровне, так и на профильном: «владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению». Однако для практического ее решения потребуются годы.

Прежде чем предложить возможные пути решения обозначенной проблемы, проведем анализ теоретических основ преемственности. В науке преемственность обучения является предметом исследования философии, психологии, педагогики и других наук. Философами преемственность понимается как «связь между этапами и ступенями развития», «движение», «развитие» (Г.Гегель, Э.А. Баллер, В.С. Батурин и др.). В «Философском словаре» дается следующее толкование понятия: «Преемственность - объективная необходимая связь между новым и старым в процессе развития, одна из наиболее существенных черт закона отрицания отрицания...» [2, с.380].

В психологии преемственность рассматривается как «изменение личности», «перспективность в направленности обучения» (Б.Г. Ананьев, А.Г. Асмолов, Л.С. Выготский, В.В. Давыдов, В.С. Леднев и др.). Теоретическую основу деятельностного подхода к организации обучения составила психологическая концепция поэтапного формирования умственных действий и практически опосредованные ею развивающие технологии обучения (П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов, И.И. Ильясов, Н.Ф. Талызина и др.).

В педагогике выявлены как общетеоретические (А.В. Батаршев, Ш.И. Ганелин, С.М. Годник, Ю.А. Кустов, А.Н. Орлов и др.), так и дидактические (Ю.К. Бабанский, Ш.И. Ганелин, Д.Б. Эльконин, А.В. Усова и др.) основы преемственности. Ряд диссертационных исследований посвящен проблемам преемственности между разными этапами школьного (Т.Н. Зотова, Л.П. Стрелкова и др.) и вузовского (Н.Г. Барышникова, Л.А. Горшунова, В.И. Крупич, В.Н. Ревтович, О.А. Саввина, Е.В. Тимофеева, Н.В. Ященко и др.) обучения. Многими педагогами преемственность в обучении рассматривалась как способ организации знаний в программах и учебниках. Между тем ряд педагогов высказывали другое мнение. Так, слова Ш.И. Ганелина не потеряли актуальности и сегодня: «В педагогической литературе проблема преемственности... обычно включалась в принцип систематичности и обусловленной ею последовательности изложения и сообщения знаний учащимся... Ясно, что такая трактовка преемственности лишь как определенной последовательности построения знаний в программах и учебниках и передача знаний учителем односторонняя и недостаточная» [3]. Наиболее устоявшееся определение звучит следующим образом: "Преемственность в обучении - последовательность и системность в расположении учебного материала, связь и согласованность ступеней и этапов учебно-воспитательной работы ".

Если подойти с методологических позиций к дефиниции понятия «преемственность», то приходим к выводу о том, что понятие преемственности возникло как объективная необходимость осмысления широко функционирующего на практике педагогического процесса, обусловливающего непрерывность и цельность обучения. Преемственность при обучении математике в системе «школа - вуз» будем трактовать как базовый дидактический принцип, обеспечивающий эффективность функционирования принципов системогенетичности, фрактальности и фундирования [4]. Все эти принципы взаимосвязаны, взаимозависимы, дополняют друг друга. В практике обучения они находят применение в виде методов, форм, средств организации и проведении учебной работы.

Системогенетический принцип построения содержания курса ТВиМС представляет образование новых систем предметного и метапредметного знания, новых элементов индивидуального опыта, которые получают свою качественную определенность при их генетическом изучении в зависимости от функционирования структур, сложившихся на каждой стадии обучения, в зависимости от способа взаимодействия с реальной действительностью.

Целостность и единство знания, генезис структурных элементов знания обеспечивает принцип фундирования. Принцип фундирования заключается в определение профессионально-ориентированной теоретической основы для спиралевидной схемы развертывания и моделирования базовых учебных элементов математики в направлении развития мышления, личностных и профессиональных качеств бакалавра в системе математической подготовки студентов различных направлений. При этом необходимо обеспечить максимальный развертывающий эффект средствами стохастики и сформировать устойчивый потенциал математической деятельности. Это системный принцип, который управляет организацией дискретно-непрерывного развития на разных иерархических уровнях.

Применение принципа фрактальности в процессе обучения математике с учетом концептуальной направленности на взаимодополнение и взаимопроникновение приводит к интегративному эффекту с лавинообразным нарастанием межпредметных связей. Используя циклический возврат к изученному ранее материалу, но на более высоком качественном уровне, происходит инициация интенсивного роста фрактальных структур.

Реализация принципа преемственности должна осуществляться через его развертывание «во времени» (преемственность между образовательными этапами) и «в пространстве» (преемственность на одном образовательном этапе между дисциплинами и между идеями и понятиями внутри одного предмета). При этом следует обратить внимание на два аспекта преемственности: преемственность в отборе содержания обучения; преемственность в формах и методах работы.

Изучение стохастики, построенной на основе сочетания принципов системогенетичности, фрактальности и фундирования, позволяет глубоко и широко изучить вероятностно-статистические понятия, законы и методы, осуществить контроль их усвоения и понимания, возможность их дальнейшего применения в профессиональной деятельности и обеспечивает мировоззренческую значимость содержания изучаемого материала. Весь опыт преподавания указанного раздела высшей математики свидетельствует о необходимости постепенного и систематического привнесения ТВиМС, прежде всего через задачи, затем на протяжении всего периода обучения, начиная со школьного обучения и продолжая изучение в вузе на младших курсах на базовом уровне, затем в курсе спецсеминаров и спецдисциплин. Практической реализацией преемственности обучения стохастике в системе «школа-вуз» служит адаптивная обучающая система задач (АОСЗ) для организации практических аудиторных занятий и самостоятельной работы по ТВиМС на основе ИКТ. Блок учебно-информационного материала содержит расширяемый банк учебно-познавательных и исследовательских задач по стохастике, который учитывает индивидуальные особенности обучаемых, удовлетворяет личностные образовательные запросы, ориентирован на требуемую глубину изложения материала и на различные специальности и программы смежных курсов. Расширяемый банк учебно-познавательных и исследовательских задач по ТВиМС представлен в виде классификационной матрицы, обеспечивающей эволюцию знаний, умений от простого восприятия и овладения первичными навыками до формирования системы фундаментальных знаний, умений, осознания междисциплинарных структурных и содержательных связей [5;6].

Таким образом, практическая реализация преемственности при организации учебно-воспитательного процесса в вузе заключается в выполнении следующих условий:

– разработка расширяемого банка учебно-познавательных и исследовательских задач для усвоения системы ключевых теоретико-вероятностных понятий, способов действий и операций с ними, для глубокой интеграции междисциплинарного знания;

– преподавание учебного материала должно быть направлено не только на расширение его объема, интегрирование, обобщение содержания, но и на качественное преобразование личного опыта каждого студента;

– установление обратной связи, которая должна быть многоуровневой и носить дискретный характер с минимальной частотой дискретизации для достижения эффективной управляемости процессом обучения;

- обеспечение оперативности контроля учебной деятельности студентов с анализом возрастания или убывания энтропии, и согласно полученным данным по установленной обратной связи, дозирование обращения к банкам учебной информации, что позволит варьировать уровень и глубину междисциплинарных связей.

Литература

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации//Распоряжение Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. №2506-р.
2. Философский словарь / Под ред. И.Т. Фролова. - 4-е изд.-М.: Политиздат, 1981. - 445 с.
3. Ганелин, Ш.И. О преемственности и межпредметных связях. //Преемственность в обучении и взаимосвязь между учебными предметами в 5-8 классах. 1961. №7. С. 15 34, с.5.
4. Дворяткина, С.Н. Инновационный подход к организации учебно-воспитательного процесса, ориентированного на становление целостной личности специалиста // Личность. Культура. Общество.- 2011.- Т.XIII. Вып.4. – 318-325.
5. Дворяткина, С.Н. Обучающая система учебно-познавательных задач по теории вероятностей и статистике как средство управления развитием мыслительной деятельности студентов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия «Педагогика».- 2011.- №4.- С. 89-95.
6. Дворяткина, С.Н. Проектирование обучающей интерактивной системы задач по теории вероятностей и статистике для студентов инженерных и гуманитарных специальностей // Педагогическая информатика. – 2012. - №2. –С. 61-70.
7. Саввина, О.А. Теоретические основы взаимосвязи школьного курса математики и педвузовского курса математического анализа: дис… канд. пед. наук / О.А.Саввина. М., 1996. - 175 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА АНАЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СВОЙСТВ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА

Денисова Н.С.

Московский педагогический государственный университет

119435, г. Москва, ул. Малая Пироговская, д.1, стр.1.

Тел.89032624699, e-mail: nat64916050@yandex.ru

Обычно темы «Треугольник и его свойства» и «Тетраэдр и его свойства» излагаются без установки внутренних связей между ними. Целесообразно использовать метод аналогий при изучение треугольника и тетраэдра.

В учебно-методической литературе метод аналогий встречается эпизодически и при этом демонстрируется только один вид аналогии - аналогия понятий и почти не используется такой вид аналогии как аналогия процессов (например, доказательство по аналогии, построение объектов по аналогии) [2]. Но научить доказывать выдвинутые гипотезы или выдвигать новые - это одна из основных задач подготовки будущего учителя математики.

Отметим и такой вид аналогии, как аналогия между математическими понятиями, в особенности геометрическими понятиями.

Для применения метода аналогии при обучении математике важно выработать у будущих учителей умения осуществлять умозаключение по аналогии, получению новых знаний с помощью аналогии и умозаключения по аналогии.

Использование метода аналогий как метода обучения способствует повышению эффективности обучения математике, в особенности при обучении геометрии: обеспечивает овладение знаниями и их взаимосвязями, способствует развитию творческого мышления, знакомство с методом научного исследования.

Предлагаем фрагмент изложения дисциплины по выбору «Геометрия треугольника и тетраэдра» для студентов бакалавриата по направлению подготовки 050100.62 Педагогическое образование, профиль подготовки Математика и Информатика, в котором прослеживаются глубокие аналогичные связи между медианами треугольника и медианами и бимедианами тетраэдра (т.е. отрезка, соединяющего середины противоположных ребер тетраэдра).

Как известно, медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, начиная от вершин. Верно и обратное утверждение: если три отрезка, каждый из которых соединяет вершину треугольника с внутренней точкой на противоположной стороне, пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2 : 1, начиная от вершин, то эти отрезки являются медианами треугольника.

По аналогии для тетраэдра имеют место следующие утверждения. 1) Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 3:1, начиная от вершин и бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам [1]. 2) Если четыре отрезка, каждый из которых соединяет вершину тетраэдра с внутренней точкой противоположной грани, пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 3:1, начиная от вершин, то эти отрезки являются медианами тетраэдра. А также, если три отрезка, каждый из которых соединяет внутренние точки противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам, то эти отрезки являются бимедианами тетраэдра.

Рассмотрим еще два необходимых и достаточных условия точки пересечения медиан треугольника и тетраэдра.

Точка О является точкой пересечения медиан треугольника АВС тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Точка О является точкой пересечения медиан тетраэдра ABCD тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Отметим, что эти теоремы не только имеют аналогичные формулировки, но и аналогичные доказательства. В первом случае используется утверждение: отрезок AM является медианой треугольника ABC тогда и только тогда, когда $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. А во втором случае утверждение: отрезок AM является медианой тетраэдра $ABCD$ тогда и только тогда, когда $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

Далее можно доказать, что имеет место и аналогичная теорема для бимедиан теораэдра.

Точки M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3 являются внутренними точками ребер AD, BD, CD, BC, AC, AB тетраэдра ABCD и отрезки M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 пересекаются в точке О. Отрезки M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 являются бимедианами тетраэдра тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}+\overrightarrow{ON_1}+\overrightarrow{ON_2}+\overrightarrow{ON_3}=\vec{0}$

Отметим еще одно необходимое и достаточное условии для точки пересечения медиан треугольника и тетраэдра, которые не только имеют аналогичные формулировки, но и доказательства их полностью аналогичны

Внутренняя точка О треугольника АВС является точкой пересечения медиан этого треугольника тогда и только тогда, когда треугольники АОВ, ВОС и СОА равновелики.

Внутренняя точка О тетраэдра ABCD является точкой пересечения медиан тогда и только тогда, когда тетраэдры OABC, OABD, OBCD, OACD равновелики.

Литература

1. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. Том 2.М.МЦНМО, 2006.

2. Щукина Г. И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе.—М.: Педагогика, 1979.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТВОРЧЕСКИЙ ПОДХОД К УЧЕБНОМУ ПРОЦЕССУ – ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Евдокимов А.А.[1)]

Захарова В.И. [1)]

Жаринова Т.А.[1)]

Сагадеева Г.А. [2)]

[1)]*Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики*

Москва, пр. Вернадского,78

[2)]*МКОУ СОШ №9 города АШИ Челябинской области*

Челябинская обл. ,г. Аша, ул. 40-летия Победв,13-70

9634648831 sagadeeva_g@mail.ru

Инновационные технологии(ИнТ) развиваются на стыке научных направлений. Образование в этой области требует междисциплинарную (МД) профессионализацию, которая позволит выпускникам вузов легко адаптироваться на современном рынке труда и в бизнес-среде [1-4].

Это требует и довузовского ознакомления с инновационными технологиями, поиск новых возможностей обеспечения преемственности образования, усиление творческой, практической и социальной составляющих содержания общего образования, в условиях взаимодействия общего дополнительного и профессионального образования. Реализация этого позволит создать новые условия для выбора индивидуальных образовательных траекторий обучающихся.

Разработка и реализация модели взаимодействия общего и дополнительного образования в области инновационных технологий для учащихся школ и студентов необходимы в связи с существованием:

1. тенденции к уменьшению числа часов обязательного изучения основных технических дисциплин (физики, химии, математики, биологии) в довузовской системе образования;
2. тенденции к увеличению доли часов на самостоятельную подготовку студентов в высшей школе (ГОС-3);
3. низкой познавательной активности и откровенного равнодушия большинства студентов и школьников России к инновационным технологиям.

Дополнительное образование проходит через систему мероприятий, направленных на выявление и поддержку технически увлеченной молодежи; клубную деятельность; организацию проектно-исследовательской деятельности учащихся под руководством студентов с широким привлечением научно-технического потенциала базовых кафедр университета; использование дистанционных образовательных технологий. МГТУ МИРЭА, например, организует дополнительное образование в области нанотехнологий, инновационной энергетики, фотоники, наноэлектроники, робототехники («университетские субботы»)[5].

ИнТ – это внедренное новшество, обеспечивающее качественный рост эффективности процессов или продукции, востребованное рынком.

Инновационные технологии 2000-2020 годов

1.Информационные технологии	2.Водородная энергетика
3.Нанотехнологии	4. Интеллектуальные технологии
5.Мыслящие машины	6.Биосенсоры
7.Кремневая фотоника	8.Органическая нанофотоника
9.Анализ текстовых массивов	10.Автомобили без водителя
11.Квантовая криптография	12.Литография дальнего УФ
13.Магнитная память	14.Обратное проектирование
15.Пластмассовые транзисторы	16.Радиочастотные идентификационные теги
17.Специальные вычислительные массивы	18.Средства ИК-противодействия

Основные цели современных образовательных технологий:
- предоставление фундаментального образования, получив которое, учащийся способен самостоятельно работать, учиться и переучиваться;
- формирование у обучающихся креативности, умения работать в команде, способности к самообучению для обеспечения его будущего карьерного роста.

ИнТ развиваются на стыках научных направлений. Междисциплинарный подход и переход от раздельного преподавания отдельных предметов, формирующих естественнонаучные знания у учащихся к конвергенции (взаимному освоению) таких дисциплин как математика, информатика, биология, химия, физика определяют современные концепции в преподавании естественнонаучных предметов.

На факультете «Кибернетика» по специальности 200401 «Биотехнические и медицинские аппараты и системы» читается курс «Биология» во втором семестре, в связи с чем в первом семестре, в отличие от других специальностей факультета, читается курс «Биологическая химия». В первом семестре по программе предусмотрен экзамен с оценкой и кафедральный зачет по лабораторному практикуму. В целях приобщения студентов к внеаудиторным самостоятельным занятиям по биохимии в первом семестре всем студентам предлагается выполнить реферат на тему, связанную с будущей специальностью. Во втором семестре по учебному плану предусмотрен зачет и курсовая работа по биохимии с оценкой. Как правило, подавляющее большинство студентов продолжают развивать тематику рефератов, используя их в качестве литературного обзора по теме курсовой работы. Темы своих курсовых работ студенты выбирают самостоятельно из предложенного преподавателями набора тем по будущей специальности, направленных на углубленное изучение рабочей программы, а также на освещение современных тенденций, методов исследования новых биотехнологий и т.д. Схема построения материала по биохимии: химическое строение объекта - биохимические свойства и роль в процессах метаболизма, предусмотрено использование иллюстраций в виде схем, химических превращений, технологических блоков, таблиц.

Темы курсовых работ студентов I курса факультета «Кибернетика» в 2013-2014 учебном году.

1. Роль жидких кристаллов в организме человека.
2. Флуоресценция внутренних органов животных и человека.
3. Биохимия мозга.
4. Волновая генетика.
5. Биохимический аспект применения наночастиц золота в современной медицине.

6. Генетический код.
7. Эндорфины – гормоны счастья.
8. Гистаминотерапия – современный подход к лечению аллергии.
9. Биохимическая природа совместимости тканей при протезировании органов человека.
10. Перспективы применения модуля барназа-барстар при лечении онкологических заболеваний.
11. Дегенеративные метаболистические процессы в организме человека под воздействием легких наркотиков и анаболических стероидов.
12. Гормональный сдвиг в организме человека и его последствия.
13. Нейродегенеративные заболевания – изменения в тканях мозга.

Оценка курсовых работ происходит при заслушивании сообщения студента на занятиях группы, при активном коллективном участии, с вопросами и высказываниями по содержанию курсовой работы. Хорошие результаты дает соревновательный характер, когда по одной теме заслушиваются два разных сообщения, по различным источникам. Таким образом, фактически соблюдается цепочка - реферат - курсовая работа - студенческая конференция (групповая), лучшие сообщения представляются на ежегодную студенческую конференцию МГТУ МИРЭА. На этих этапах происходит формирование творческого потенциала студента для последующей научной работы.

Обобщенный опыт использования творческого начала при подготовке курсовых работ студентами первого курса очного отделения МГТУ МИРЭА на факультете «Кибернетика» показал значительное усиление мотивации к более углубленному изучению специальных дисциплин на старших курсах. Как правило, курсовая работа используется как литературный обзор для написания дипломной работы.

На факультете «Экономика и управление» силами кафедры химии читается курс «Теоретические основы прогрессивных технологий». Согласно учебному плану, по этой дисциплине предусмотрена курсовая работа с оценкой во II семестре. По этой дисциплине акцент делается на энергоэкологическое образование студентов, ознакомление с некоторыми инновационными технологиями. Учитывая, что сейчас в России все возобновляемые источники энергии, не считая большой гидроэнергетики, дают 0,2% всей вырабатываемой энергии, и наша экономика пока не способна, даже в минимальной степени, использовать ресурсные и существующие технологические возможности солнечной, ветряной, геотермальной энергетики, в ближайшей перспективе надо предложить реальный переход на новую экологически чистую энергию. В ряду альтернативных источников энергии использование водорода является одним из перспективных направлений.

К этой актуальной проблеме, решению задач по ее потребительской ценности привлечены студенты I курса, курсовые работы которых направлены на информатизацию и информационные технологии в области водородной энергетики.

Выполнение курсовых работ студентами происходит в составе и в реальной работе водородного клуба МИРЭА, образованного в 2004 году.

Клуб, как новый тип неформального объединения студентов и школьников не только обеспечивает получение в его рамках традиционного образовательного продукта (ключевые компетенции), осуществляет профориентацию учащихся, но и дает студенту и школьнику возможность максимально использовать свои личные качества и увлечения для их реализации в интересах современных технологий и энергоэкологической безопасности.

МГТУ МИРЭА — головная организация НАВЭ — Национальной ассоциации водородной энергетики России. Клуб осуществляет водородный всеобуч. По примеру Водородного клуба МИРЭА, подобные студенческие объединения открыты уже в девяти университетах России, Украины и Республики Беларусь. Студентами подготовлено и выпущено учебное пособие по водородной энергетике для подшефных школ МГТУ МИРЭА — «Энергия будущего»; издается журнал «Водородный всеобуч»; студенты, как шефредакторы, побывали на форумах, конференциях и симпозиумах в Санкт-Петербурге, на Урале, в Поволжье, Сочи, встречались с такими интересными людьми, как президент МАВЭ Т.Н.Визероглу (США), вице-президент МАВЭ В.А.Гольцов, президент НАВЭ П.Б.Шелищ, академики РАН Ю.А.Трутнев, С.М.Алдошин, В.Смирнов, А.С.Коротеев и др..

Таким образом, в процессе реального участия студентов в работе Водородного клуба МГТУ МИРЭА формируется новое творческое поколение, которое будет решать актуальные задачи энергетического кризиса.

Литература

1. Сигов А.С., Евдокимов А.А. Междисциплинарная подготовка специалистов в области водородной энергетики и нанотехнологий - Материалы Международной конференции «Водородная энергетика как альтернативный источник энергии». МИТХТ им.М.В.Ломоносова, М.2009, с.13-14
2. Мировая экономика: прогноз до 2020 года / Под ред. акад. А.А. Дынкина / ИМЭМО РАН. - М.: Магистр, 2009. 376 с.
3. Евдокимов А.А., Сигов А.С., Шинкаренко В.В.. Энергоэкологическое образование в России.: Журн.Энергия, т.4.2009, с.59-65.
4. Макаров В.Л., Варшавский А.Е. Наука и высокие технологии в России на рубеже третьего тысячелетия. Социально-экономические аспекты развития. М.: Наука, 2010,636 с.
5. КузнецовВ.В.,.ЕвдокимовА.А. Новые подходы в подготовке инженерных кадров для инновационной экономики. Труды Всероссийской научной конференции «Инновационные стратегии развития науки, техники и общества.Социальная инноватика-2014»,М.: ВНИИгеосистем, 2014 С.18-22

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В СОВРЕМЕННОМ ИНФОРМАЦИОННОМ МИРЕ

Егорова Т.М., Вельмисов П.А.

Ульяновский государственный технический университет

432027, г.Ульяновск, ул.Северный Венец, 32

Тел.: 89603793195, e-mail: velmisov@ulstu.ru

«Математика-царица наук. . . » – так сказал великий ученый Карл Фридрих Гаусс, живший два столетия назад. Это высказывание не потеряло своей значимости (а может быть даже стало особенно актуально) в наше время. Все мировое научное сообщество повернулось к России после запуска первого советского спутника. Всем было понятно, что успехи в космонавтике связаны с высоким уровнем естественно-математического образования высшей советской школы. В настоящее время должный уровень математического образования обязан обеспечить национальную безопасность страны.

Что изменилось в преподавании математики за прошедшие 50 лет? Вообще в истории развития образования происходило три большие эволюции: первая связана с изобретением письменности, вторая - с изобретением печати, третья вызвана информационными технологиями. Каждое изобретение увеличивало качество, доступность, значимость образования и рождало новые технологии. На современном этапе это реализуется внедрением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий.

Причины, по которым необходимо использовать ИКТ в преподавании математики:

1. Социальные (заказ на подготовку специалиста, способного ориентироваться в потоке научной информации, современных информационных технологиях; сокращение времени, отводимого на аудиторные занятия и увеличение доли самостоятельной работы, которую можно модерировать при помощи LMS).
2. Педагогические (использование интерактивных методов обучения как групповых, так и индивидуальных средствами LMS- вики, семинары, практические задания, тесты, интерактивные лекции, эффективные методы самоконтроля, взаимного контроля и мониторинг успеваемости со стороны преподавателя).
3. Методические (возможность быстрой актуализации учебного электронного материала, диффузия математики в информатику, быстрое усвоение понятий при помощи совместной работы над глоссарием и в процессе решения кроссвордов, построенных на основе глоссариев, визуализация изучаемого материала при помощи интерактивных схемокурсов. . .).
4. Психологические (повышение мотивации за счет создания сообществ в социальных сетях, взаимное оценивание работ участниками одной учебной группы или курса, внедрение новых технологий виртуальной реальности).

Реализация обучения математике, физике и информатике на основе использования ИКТ помогает решению проблемы организации системы непрерывного образования, так как возможность осуществления индивидуального подхода к обучению, привлечения в учебный процесс всех заинтересованных субъектов (школа, колледж, вуз, предприятие) сглаживает противоречия между школами и вузами (уровень подготовки школьников - требования вузов к уровню знаний), прививает навыки самостоятельной учебной деятельности и работы с программным инструментарием.

Качество образовательной системы, которая обеспечивает получение комплекса знаний, умений и навыков с помощью дистанционных технологий в значительной мере определяется качеством педагогического персонала, учебных программ и электронного контента. В УлГТУ внедрению электронных технологий и качеству обучения уделяется большое внимание. Электронная обучающая система (ЭОС) «Математика» была создана на кафедре «Высшая математика» в 2007 году. Она постоянно актуализируется и совершенствуется посредством ввода новых интерактивных компонентов, программных инструментов и др. В состав ЭОС входят информационный, методический, теоретический, контрольный блоки и блок формирования компетенций. Существуют процедуры экспертизы, обязательным элементом которых является наличие внешних рецензий и протокола кафедры с рекомендацией к использованию в текущем учебном году. Налажена обратная связь с пользователями, проводятся многочисленные опросы, анкетирования в которых выявляется отношение студентов к тому или иному ресурсу: степень его полезности, удобство работы с ним. Плагин LMS Moodle «Рейтинг разделов учебника» собирает и структурирует БД комментариев и оценок по электронным образовательным ресурсам. ЭОС интегрирован с системами видеоконференцсвязи, электронной библиотекой, видеопорталом. Студентам предоставляется подробная информация о технических, организационных и методических особенностях ЭОС «Математика», в каждом сервисе работает новостная лента.

В блоке «Формирование компетенций» студенты проходят самоконтроль при помощи тестов, решают индивидуальные задания и отправляют их на проверку преподавателю, просматривают видеоматериалы прикладного характера, участвуют в групповых проектах, выполняют лабораторные работы на тренажерах, созданных при помощи программы Adobe Captivate, которые имитируют работу в системе MathCad. Для повышения мотивации студентов был разработан блок «Автоматизированная балльно-рейтинговая система». В режиме on-line она строит график рейтинга группы студентов по дисциплине и отображает положение студента на кривой рейтинга. Цветовая шкала сигнализирует о пороге приближения к критической оценке.

Будущая профессиональная деятельность наших студентов требует практических навыков работы с прикладными пакетами, такими, как: Derive, Mathematica, MATLAB, Maple V и Mathcad. Для передачи результатов работы в этих пакетах в электронную обучающую систему был разработан модуль «Передача результатов обучения в LMS из внешних приложений».

Сейчас перед нами стоят вопросы ближайшего будущего математического образования: каким путем следует обеспечить преподавание математики, чтобы способствовать при этом развитию e-learning и одновременно не отступить от самой сути математики как учебной дисциплины, правильно реагируя на изменения/вызовы, наблюдающиеся в общественной и технологической сферах.

О ПРИМЕНЕНИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНО−ТЕХНИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Зайцева Ж.И., Зайниев Р.М., Губочкина Н.И.

Набережночелнинский институт

Казанского (Приволжского) федерального университета

423810, Набережные Челны, Республика Татарстан, пр-т Мира 68/19, кафедра математики

Тел.: 89172841771, e-mail: zhanna-zji79@mail.ru

Социально−экономические изменения, происходящие в нашей стране, конкуренция на рынке труда выдвигает повышенные требования к качеству подготовки специалистов в области техники, технологии и экономики. Меняется характер труда, в котором все большую роль приобретает интеллектуальная составляющая, происходят колоссальные продвижения в области информации и новейших технологий. Становится очевидным необходимость применения в учебном процессе новых педагогических и информационных технологий в организации профессионального образования студентов технических направлений на основе интеграции математики и информатики [3].

В связи с этим, мы разработали компьютерный учебник [2] с элементом тренажера по теме «Комплексные числа и действия над ними», реализованный в системе Mathematica, содержащий следующие разделы:

- Краткие исторические сведения.
- Краткие теоретические сведения, содержащие основные формулы и теоремы, а также решение типовых примеров.
- Тренажер (10 вариантов). В случае необходимости можно составить любое количество однотипных вариантов.
- Краткие справочные сведения.

Учебник составлен как многоуровневый, при помощи системы гиперссылок можно свободно перемещаться из одного раздела в другой.

Рассмотрим работу тренажера. В каждом варианте есть запись: «Далее выделите скрытую ячейку левой кнопкой мышки, нажмите по очереди Shift+Enter и следуйте дальнейшим указаниям». После того, как выполнено данное указание, на экране появляется диалоговое окно с надписью, что нужно в нем писать (рисунок 1), и тренажер вступает в диалог с пользователем.

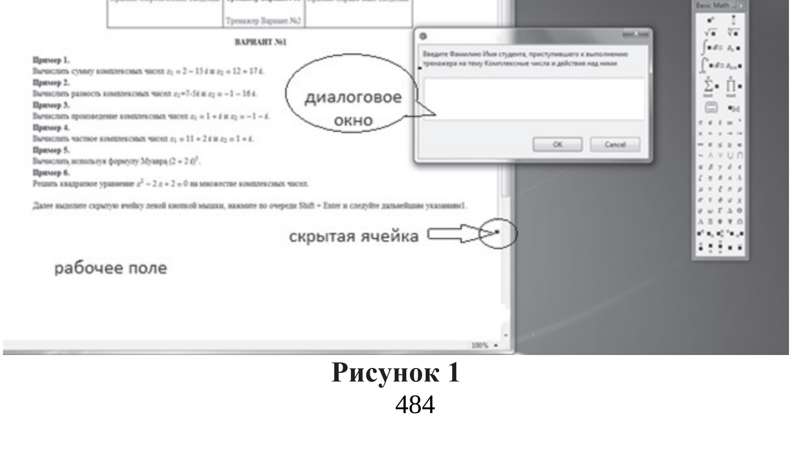


Рисунок 1

В диалоговое окно вводится фамилия, имя, группа студента и номер выполняемого варианта, а также условия примеров. Если ввести другое условие примера, то тренажер ошибки не выдаст и на рабочем поле отразится введенное условие, что позволит проконтролировать подмену. В процессе выполнения примера студент вводит результат промежуточных вычислений и ответ в диалоговое окно, в случае неправильного результата и ответа тренажер выдаст ошибку и студент может обратиться к теоретическому или справочному разделу, и только после того, как будет получен правильный ответ в решении, можно перейти к решению следующего примера; в том случае, когда ошибка повторяется несколько раз (до 3 попыток), тренажер выдает ему правильное решение [1].

Таким образом, можно выполнить следующие действия над комплексными числами:

- Пример 1 . Вычислить сумму комплексных чисел z_1 и z_2.
- Пример 2 . Вычислить разность комплексных чисел z_1 и z_2.
- Пример 3 . Вычислить произведение комплексных чисел z_1 и z_2.
- Пример 4 . Вычислить частное комплексных чисел z_1 и z_2.
- Пример 5. Вычислить, используя формулу Муавра, z^n.
- Пример 6. Решить квадратное уравнение на множестве комплексных чисел.

Есть возможность вывести результат прохождения тренажера через принтер, чтобы можно было проверить соответствие предложенного и выполняемого варианта, какие ошибки совершались и какие ошибки исправлялись, т.е. в распечатке будут содержаться все действия, а также оценка прохождения тренажера. Оценка зависит от количества допущенных ошибок. Всего можно допустить 48 ошибок. Все ячейки учебника нередактируемые, то есть ничего нельзя изменить без специальных последовательных действий, а как это сделать, можно узнать только после подробного изучения системы Mathematica; также это позволяет отследить, сколько раз запускался тренажер в данном варианте. Так как тренажер использует одну ячейку, то, зайдя в нее, можно выйти лишь с двумя результатами: выполнив задание или не выполнив его.

Отметим, что компьютерный учебник с элементом тренажера можно составить для изучения таких тем как «Матрицы и действия над ними», «Вычисление пределов функции», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных», «Вычисление определенных интегралов», «Вычисление площадей, объемов, длин дуг», «Ряды Фурье» и т.д., т.е. в тех разделах математики, где требуется численная характеристика искомых величин.

Таким образом, данный компьютерный учебник с элементом тренажера поможет «подготовить студента к квалифицированному применению компьютера в учебной деятельности, сделать процесс обучения более привлекательным и интересным» [1, с.8], а также его можно использовать на практических занятиях в качестве обучающе-контролирующей программы или в домашних условиях для самостоятельной работы студентов очной, заочной и дистанционной форм обучения.

Литература

1. Зайцева Ж.И., Губочкина Н.И. Компьютерная система mathematica в учебном процессе//Universum: Психология и образование: электрон.науч.журн. 2014. №5-6(6). URL:http://7universum.com/en/psy/archive/item/1376/

2. Капустина Т.В., Зайцева Ж.И. Компьютерный учебник в среде Mathematica// Труды четвертых Колмогоровских чтений.-Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006.-С. 198-204.

3. Зайниев Р.М. Преемственность профессионально-ориентированного содержания математического образования в системе «школа-колледж-вуз».: автореф. дисс…доктора пед. наук.-Ярославль, ЯГПУ им. К.Д.Ушинского, 2012.-42 с.

К ВОПРОСУ ОБ УГЛУБЛЕННОМ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ» СТУДЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ПЕДВУЗА

Ильинская Л.Н.

Московский педагогический государственный университет

107140, Москва, ул. Краснопрудная, д. 14

Тел.: 89265894245, e-mail: lubov-ilinskaya@yandex.ru

Тема «Числовые ряды» в соответствии с действующими программами дисциплины «Математический анализ» изучается студентами в третьем учебном семестре. Согласно программе по направлению бакалавриата профиля «Математика», на изучении этой темы отводится шестнадцать часов аудиторной нагрузки (восемь часов лекций и восемь часов практических занятий) и ровно шестнадцать часов отводится на самостоятельную работу студентов. В процессе самостоятельной работы студенты выполняют домашнее задание, готовятся к лекционным занятиям, и, на наш взгляд, при планировании этого времени, возможно организовать самостоятельное изучение дополнительных разделов темы «Числовые ряды», которые выходят за обязательный уровень усвоения программного материала.

Математический анализ является базовой учебной дисциплиной на математическом факультете педвузов, без должного усвоения которой невозможно оценить уровень профессиональной подготовки будущего специалиста. В первом учебном семестре бывшие школьники осваивают эту дисциплину, используя знания, умения и виды деятельности сформированные в процессе изучения предметов математического цикла в средней школе.

В период становления ФГОС ВПО третьего поколения, отмечается рост часов, отводимых на самостоятельную работу студентов, поэтому уже с первого учебного семестра важно формировать у студентов навыки активной самостоятельной работы, поэтому при четкой организации и контроле за самостоятельной работой студентов эти навыки к третьему учебному семестру должны только развиваться. В своей практике мы уделяем значительное внимание организации и контролю за самостоятельной работой студентов, как аудиторной, так и внеаудиторной, используем различные приемы для ее активизации. В качестве примера можно рассмотреть самостоятельное углубленное изучении темы «Числовые ряды».

На практических и лекционных занятиях в процессе изучения этой темы по программе рассматривается достаточное количество признаков, позволяющих определить сходится или расходится ряд (признаки сравнения, Даламбера и Коши, интегральный признак Маклорена-Коши). Но, в ходе рассмотрения конкретных примеров на исследование сходимости числовых рядов с неотрицательными членами, студенты могут сделать вывод о том, что каждый признак из перечисленных имеет свой недостаток. Например, интегральный признак Маклорена-Коши применим только для интегрируемых функций, признаки Даламбера и Коши так же не применимы для исследования сходимости некоторых рядов, поэтому встает вопрос о рассмотрении дополнительных признаков сходимости числовых рядов. Как было сказано выше, на изучение данной темы по программе имеется достаточное число часов, отводимых на самостоятельную работу, поэтому, если мы планируем, что студенты могут изучить дополнительные, так называемые, нестандартные признаки сходимости числовых рядов, то мы умышленно подбираем примеры, для которых, чтобы ответить на вопрос о сходимости некоторого ряда «стандартные» признаки сходимости «не работают».

К самостоятельной работе можно вынести следующие вопросы: изучить историю становления и развития теории рядов, подробно рассмотреть доказательства признаков сходимости Раабе, Куммера, Бертрана, Гаусса, Жамэ и логарифмического признака, привести примеры, иллюстрирующие их применение, решить вопрос о существовании универсального признака сходимости.

Предложенные вопросы являются достаточно объемными и достойны студенческого исследования, но в связи с достаточным количеством часов для самостоятельной работы, в целях углубленного изучения темы «Числовые ряды», на некоторые можно дать ответ, после самостоятельного изучения дополнительной литературы. Возможно, часть студентов займется историческим аспектом становления и развития теории рядов, кому-то будут интересны доказательства признаков, примеры применения. На практическом занятии, посвященном обсуждению самостоятельного изучения дополнительного материала, можно сделать вывод об отсутствии универсального признака сходимости числовых рядов.

Углубленное изучение темы «Числовые ряды» предполагает совершенствование математической подготовки будущего учителя, развивает навык работы с математической и исторической литературой, готовит студентов к будущим исследованиям.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Карасев В.А.

Национальный Исследовательский Технологический Университет (МИСиС)

117936, Москва, Ленинский проспект, д. 4

Тел.: 89166403624, e-mail: karasev-v-a@yandex.ru

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – “подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности; удовлетворение потребностей личности в получении соответствующего образования”.

Одним из важнейших аспектов высшего технического образования является развитие компетентностного подхода в математическом образовании. В рамках этого подхода ставится цель:

- сформировать у студентов убеждение в важности математических методов для решения профессиональных задач;
- поднять уровень использования математического аппарата при изучении общетехнических и профессиональных дисциплин;
- развить стремление к самостоятельной работе и обучению, умение находить и принимать оптимальное решение различных профессиональных задач.

Однако в последнее время мы всё чаще слышим разговоры о том, что уровень подготовки наших выпускников недостаточно высок. Как правило, причиной этого служит не только слабые способности или низкая подготовка, а неорганизованность студентов – за учёбу они берутся только в конце семестра. Во многих случаях преподаватели вынуждены “закрывать глаза” на явное отсутствие знаний. В связи с этим необходимо приложить усилия, чтобы стимулировать и контролировать работу студентов с самого начала семестра.

Студенты много времени проводят в Интернете в бесполезных занятиях. Необходимо попытаться направить эти стремления в полезное русло. Широкое использование Интернет-системы для подачи учебного материала и контроля знаний позволило бы не только облегчить студентам поиск нужных учебных материалов, но стимулировало бы их самостоятельную работу и повысило бы объективность оценок.

Решение этих задач предусматривает повышение роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиление ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание их творческой активности и инициативы.

Важным фактором для достижения этих целей является разработанная в НИТУ МИСиС в Институте экономики и управления промышленными предприятиями программа (Internet-приложение) для обучения студентов с применением глобальной компьютерной сети Internet. Компьютерная оболочка создана в среде Microsoft Visual Studio 2010 на языке C# с использованием новейшей архитектуры (.NET), технологий объектного Web-программирования, базы данных Microsoft SQL Server Database. Это позволяет использовать её в учебном процессе как внутри университета, так и при обучении удалённых учащихся по сети Internet. В качестве клиентского приложения используется обычный браузер - Internet Explorer.

В докладе излагается опыт преподавания курса математики на кафедре высшей математики в Национальном Исследовательском Технологическом Университете (МИСиС) с использованием информационных технологий, то есть в использовании различных способов подачи информации, обеспечения с помощью интернета эффективной обратной связи между студентом и преподавателем в процессе обучения.

Схема изучения курса с использованием информационных технологий сводится к следующему:

1. Знакомство с теоретическим материалом на лекциях. Использование демонстрационных элементов на лекциях позволяет существенно усилить наглядность изучаемого материала, помогает студенту глубже понять сущность математических методов, заинтересовать студента.

2. Изучение методов или алгоритмов решения задач на практических занятиях на учебных примерах из стандартных задачников, не требующих больших затрат времени и громоздких вычислений.

3. Организация и контроль самостоятельной работы студента во внеучебное время по выполнению индивидуальных тестов и заданий (типовых расчетов) с контролем выполнения и организаций обратной связи в сети Интернет. Для организации учебного процесса, стимулирования систематической самостоятельной работы студентов используется оболочка дистанционного обучения "Dist" на сайте НИТУ МИСиС **econom.misis.ru**. Основное назначение системы:

- обеспечение учебными материалами;
- автоматическое формирование и выдача тестов и заданий;
- организация и контроль самостоятельной работы студентов;
- контроль знаний;
- определение рейтинга студента;
- получение оперативной информации о состоянии учебного процесса.

Разработанная система отражает как традиционную структуру обучения в высших учебных заведениях с использованием групп студентов, специальностей и учебных планов, так и современные тенденции перехода к дистанционному обучению, т.е. возможность обучаться в любое время и в любом месте, по индивидуальным планам и графикам.

Указанная выше программа фактически реализует систему дистанционного обучения с целью стимулирования внутри семестровой самостоятельной работы студентов. Каждый студент, попав на свою страницу на сайте, получает комплект учебных материалов по каждой учебной дисциплине, а также ссылки на дополнительную литературу и справочные материалы, что избавляет его от необходимости их поиска. Но главное - студент обязан пройти изучение учебной дисциплины по траектории. Он последовательно получает порции учебного материала и тесты для проверки усвоения. При неудовлетворительной сдаче теста компьютер возвращает его к повторному изучению соответствующих разделов. В траекторию также включены другие контрольные мероприятия, в частности выполнение индивидуальных типовых расчетов с проверкой промежуточных и окончательных результатов в той же программе, а затем предоставление преподавателю выполненного задания.

Программой контролируются сроки выполнения тестов и заданий, затраченное время. В результате накапливается информация о степени усвоения материала (оценки и баллы). Штрафные баллы за несвоевременное выполнение работ и использование дополнительных попыток стимулируют регулярность работы и внимательное изучение материала.

В соответствии с требованиями траектории предусматривалось не менее одного тестирования в месяц, но предпочтительным являлась еженедельная подача учебного материала и проверка усвоения с помощью теста. Предусматривались также подтверждающие (аудиторные) тестирования. Если в аудитории студент не подтверждает выполнение тестов данной темы, результаты его тестирования по данной теме аннулируются и он должен пройти эту часть траектории заново.

При тестировании используются вопросы различных типов, в том числе, наряду с простыми вопросами типа "да/нет", выбором правильного ответа, последовательности, даются задачи с ответом в виде одного или нескольких чисел. Студенты получают различные тесты и типовые расчеты, что достигается случайным выбором вопросов и задач из соответствующего заложенного банка задач и случайным выбором значений параметров из заданного диапазона их изменений.

Преподаватель в наглядной форме в графическом виде в любой момент может видеть продвижение каждого студента группы по траектории. Может получить информацию об усвоении материала по каждой теме, а также вопросы, на которые студент не смог дать правильный ответ для собеседования, что фактически позволяет исключить пробелы в знаниях.

Наличие протоколов тестирований с данными и правильными ответами уменьшает опасность возникновения конфликтных ситуаций.

Оценки, выставляемые преподавателями на практических и семинарских занятиях, за контрольные работы, домашние задания вводятся преподавателями в компьютер. Наряду с этим осуществляется компьютерный контроль самостоятельной работы студентов (обучение по траектории, тесты), результаты которого автоматически фиксируются в журнале преподавателя и не могут быть изменены.

Все результаты тестирований, контрольных мероприятий, оценки в аудитории, характеристики систематичности выполнения учебного плана и др. собираются в одной базе данных и рассчитывается рейтинг студента.

Текущий рейтинг рассчитывается компьютером непосредственно перед выдачей информации на экран на основании данных о работе всех студентов группы и может измениться при следующем запросе.

Рейтинг определяется как сумма произведений баллов на весовой коэффициент для каждого вида контрольных мероприятий (практические занятия, контрольные работы, тесты самостоятельные, тесты подтверждающие, типовые расчеты, посещаемость лекций и практических занятий, ритмичность).

Для каждого контрольного мероприятия (кроме практических занятий) в расчёт принимается только последняя попытка с понижающим коэффициентом 0.95 за каждую попытку.

Балл за посещаемость (отрицательный) пропорционален числу пропущенных занятий. Максимальный отрицательный балл, заданный в весовых коэффициентах, получают студенты, пропустившие все занятия. Расчёт посещаемости лекций и практических занятий производится отдельно.

Преподаватель перед экзаменом и зачётом получает в дирекции ведомость с рейтингом. Полученный в течении семестра рейтинг учитывается при проставлении экзаменационной оценки.

Существенной частью процесса обучения должно быть современное учебное пособие, которое совмещает учебник, охватывающий весь предусмотренный программой материал, с пособием по практической части курса высшей математики, содержащего руководство к решению типовых задач и примеров по всем разделам учебного курса. В нем должны быть строго и наглядно изложены все необходимые математические понятия, доказаны практически все теоремы. Но при этом следует избегать излишней детализации. Особое внимание должно быть уделено прикладным задачам излагаемого курса. Далее для закрепления навыков решения задач читателю следует предложить контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения с ответами. Таким образом, учебное пособие должно совмещать традиционный учебник, решебник и задачник. При этом оно должно быть достаточно компактным.

Основываясь на изложенных принципах, коллективом авторов подготовлено учебное пособие по математическому анализу, состоящее из двух частей: «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление», изданное в издательстве Илекса в 2011 году в серии «Библиотека бакалавра» [1], [2].

Пособие имеют гриф «Рекомендовано Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по техническим и экономическим направлениям».

Пособие является лауреатом 1-й степени Первого Всероссийского конкурса Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки Российской Федерации «Лучшее учебное пособие по математике» в номинации: «Математика в технических вузах», проводившегося в 2010 году.

В докладе приводятся материалы, используемые при построении траектории обучения по дисциплине «Математический анализ».

Многие преподаватели, использующие данную систему на практике, отмечают более серьёзное отношение студентов к учёбе и улучшение знаний.

Литература

1. Карасев В.А., Лёвшина Г.Д. Математический анализ. Часть 1. Дифференциальное исчисление: Учеб. пособие. – М.: Илекса, 2011. – 296с.

2. Карасев В.А., Карасева В.В., Лёвшина Г.Д. Математический анализ. Часть 2. Интегральное исчисление: Учеб. пособие. – М.: Илекса, 2011. – 283с.

Возможности и ограничения метода математической индукции

Костин С. В.

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики (МГТУ МИРЭА)

119454, г. Москва, просп. Вернадского, д. 78
Тел.: (495) 4330355, e-mail: kostinsv77@mail.ru

Как специалисты в области методики преподавания математики, так и педагоги-практики неоднократно отмечали тот факт, что в процессе обучения школьников и студентов математике значительно полезнее решить одну задачу несколькими разными способами, чем решить одним способом несколько однотипных задач. Тщательный разбор и анализ нескольких, иногда принципиально различных, решений одной и той же задачи расширяет кругозор учащихся, показывает им красоту и внутреннее единство математики, помогает глубже понять возможности различных математических методов и подходов и точнее представить себе тот круг задач, при решении которых, как можно ожидать, именно данный метод окажется более эффективным, чем все остальные методы.

Одним из чрезвычайно эффективных инструментов решения самых разнообразных математических задач и доказательства самых разнообразных математических утверждений является метод математической индукции. Этот метод хорошо зарекомендовал себя и успешно применяется для доказательства тождеств (скажем, для доказательства хорошо известной формулы для суммы квадратов всех натуральных чисел от 1 до n), для доказательства неравенств (скажем, для доказательства очень важного и часто используемого в математике неравенства Бернулли), для доказательства формулы общего члена рекуррентно заданной последовательности (скажем, для доказательства формулы Бине для общего члена последовательности Фибоначчи) и т. д.

Одной из важных сфер применения метода математической индукции являются разнообразные задачи на доказательство делимости чисел. Приведем здесь в качестве примера несколько типичных задач (во всех задачах $n \in \mathbb{Z}$; при отсутствии каких-либо дополнительных указаний следует считать, что $n \in \mathbb{N}$).

1. Доказать, что при всех n число $12^{2n-1} + 11^{n+1}$ делится на число 133.

2. Доказать, что при всех n число $(a+1)^{2n-1} + a^{n+1}$ делится на число $a^2 + a + 1$ (здесь a — произвольное целое число).

3. Доказать, что при всех n число $11^n + 4^{2n} + 50n$ заканчивается на цифры 77.

4. Доказать, что при всех $n \geqslant 0$ число $x_n = 2^{3^n} + 1$ делится на число 3^{n+1}.

5. Доказать, что при всех $n \geqslant 0$ число $x_n = 100\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}7$ делится на число 53.

Все эти пять задач достаточно легко могут быть решены с помощью метода математической индукции.

Задача 1 относится, по нашим наблюдениям, к числу наиболее популярных задач у авторов книг и пособий по математике. Она приводится если не во всех, то во всяком случае в половине книг, в которых идет речь о методе математической индукции. Авторы этих книг, по-видимому, не отдают себе отчет в том, что задача 1 является частным случаем (при $a = 11$) значительно более общей задачи 2 и им никто не мешает (хотя бы для разнообразия) рассмотреть эту задачу при каком-либо другом значении a. Например, при $n = 8$ получается следующая задача, которая, по нашему мнению, ничуть не хуже, чем задача 1:

$1'$. Доказать, что при всех n число $9^{2n-1} + 8^{n+1}$ делится на число 73.

Задача 3 была составлена автором специально для данной статьи. Ее можно переформулировать следующим образом:

$3'$. Доказать, что при всех n число $11^n + 4^{2n} + 50n - 77$ делится на число 100.

Задача $3'$ является достаточно типичной задачей на делимость и может быть решена с помощью метода математической индукции.

Задачи 4 и 5 также несложно решить с помощью метода математической индукции. База индукции (то есть справедливость утверждений при $n = 0$) проверяется непосредственно, а шаг индукции основан на следующих выкладках:

$$x_{n+1} = 2^{3^{n+1}} + 1 = 2^{3^n \cdot 3} + 1 = (2^{3^n})^3 + 1 = (2^{3^n} + 1)\Big[(2^{3^n})^2 - 2^{3^n} + 1\Big] = x_n\Big[x_n^2 - 3 \cdot 2^{3^n}\Big]$$

(отсюда следует, что если $x_n \,\vdots\, 3^{n+1}$, то $x_{n+1} \,\vdots\, 3^{n+2}$) и

$$x_{n+1} = 100\underbrace{11\ldots1}_{n+1\text{ цифр}}7 = 100\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}17 = 100\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}70 - 53 = 10x_n - 53$$

(отсюда следует, что если $x_n \,\vdots\, 53$, то $x_{n+1} \,\vdots\, 53$).

Человеку, прорешавшему с помощью метода математической индукции много однотипных задач на делимость (а в некоторых задачниках, к сожалению, приводятся подборки именно однотипных, похожих одна на другую как две капли воды, задач), может показаться, что метод математической индукции всегда является высокоэффективным и всегда быстро приводит к желаемому результату. Однако это не так. Возможности метода математической индукции, к сожалению, далеко не безграничны, и этот факт, по нашему мнению, не надо утаивать от учащихся, а наоборот, надо вместе с ними рассмотреть также задачи, при решении которых метод математической индукции оказывается малоэффективным или совершенно неэффективным. Хорошим примером, по нашему мнению, здесь может служить следующая задача.

ЗАДАЧА. Доказать, что при всех $n \in \mathbb{N}$ число $x_n = (a+b+c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1}$ делится на число $y = (a+b)(a+c)(b+c)$ (здесь a, b, c — произвольные целые числа, сумма любых двух из которых не равна нулю). ♦

Наиболее естественное для математика решение этой задачи получается, если считать известными определенные сведения из области теории многочленов от нескольких переменных, а именно, следующие три утверждения (для простоты мы формулируем утверждения для многочленов от трех переменных):

Утверждение 1. Если многочлен $P(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ обращается в нуль в каждой точке пространства $\mathbb{Q}^3$, в которой обращается в нуль линейный многочлен $Q(X_1,\ X_2,\ X_3) = r_1X_1 + r_2X_2 + r_3X_3 + s$ (здесь r_1, r_2, r_3, $s \in \mathbb{Q}$), то многочлен $P(X_1,\ X_2,\ X_3)$ делится на многочлен $Q(X_1,\ X_2,\ X_3)$ в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$. □

Утверждение 2. Если многочлен $P(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на попарно взаимно простые многочлены $Q_1(X_1,\ X_2,\ X_3)$, $Q_2(X_1,\ X_2,\ X_3)$, $\ldots$, $Q_s(X_1,\ X_2,\ X_3)$, то многочлен $P(X_1,\ X_2,\ X_3)$ делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на произведение $Q(X_1,\ X_2,\ X_3)$ этих многочленов. □

Утверждение 3. Если многочлен $P(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Z}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на примитивный многочлен $Q(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Z}[X_1,\ X_2,\ X_3]$, то частное $S(X_1,\ X_2,\ X_3)$ лежит в $\mathbb{Z}[X_1,\ X_2,\ X_3]$. (Многочлен $Q(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Z}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ называется примитивным, если его коэффициенты в совокупности взаимно просты.) □

Утверждение 1 доказано, например, в книге [1] (см. лемму 2 на стр. 401). Утверждение 2 является следствием того, что кольцо $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ факториально (см., например, [1], следствие на стр. 401). Утверждение 3 может быть доказано с помощью так называемой леммы Гаусса (см., например, [1], лемма 1 на стр. 400).

Считая утверждения 1, 2, 3 известными, переходим непосредственно к решению.

РЕШЕНИЕ 1. Рассмотрим следующие четыре многочлена из кольца $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$:

$$P(X_1,\ X_2,\ X_3) = (X_1 + X_2 + X_3)^{2n-1} - X_1^{2n-1} - X_2^{2n-1} - X_3^{2n-1},$$

$$Q_1(X_1,\ X_2,\ X_3) = X_1 + X_2,$$

$$Q_2(X_1,\ X_2,\ X_3) = X_1 + X_3,$$

$$Q_3(X_1,\ X_2,\ X_3) = X_2 + X_3.$$

Линейный многочлен Q_1 обращается в нуль в точках $\langle\alpha,\ -\alpha,\ \beta\rangle \in \mathbb{Q}^3$ ($\alpha,\ \beta \in \mathbb{Q}$). В этих точках, как легко видеть, обращается в нуль и многочлен P. Следовательно, согласно утверждению 1, многочлен P делится на многочлен Q_1 в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$. Аналогично доказывается, что многочлен P делится на многочлены Q_2 и Q_3 в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$.

Линейные многочлены Q_1, Q_2, Q_3 являются попарно взаимно простыми. (Два линейных многочлена не являются взаимно простыми лишь в том случае, если все их коэффициенты пропорциональны.) Поскольку многочлен P делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на каждый из многочленов Q_1, Q_2, Q_3, то, согласно утверждению 2, он делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на их произведение, то есть на многочлен

$$Q(X_1,\ X_2,\ X_3) = Q_1Q_2Q_3 = (X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3) =$$

$$= X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2^2X_1 + X_2^2X_3 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + 2X_1X_2X_3.$$

Многочлен P делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на многочлен Q. Поскольку многочлен P — это многочлен с целыми коэффициентами, а многочлен Q — это примитивный многочлен с целыми коэффициентами, то из утверждения 3 следует, что частное S — это многочлен с целыми коэффициентами.

Заменим в равенстве $P(X_1,\ X_2,\ X_3) = Q(X_1,\ X_2,\ X_3)S(X_1,\ X_2,\ X_3)$ переменную X_1 на целое число a, переменную X_2 на целое число b, а переменную X_3 на целое число c. В результате мы получим равенство

$$(a + b + c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1} = (a + b)(a + c)(b + c)S(a,\ b,\ c).$$

Поскольку S — многочлен с целыми коэффициентами, то число $S(a,\ b,\ c)$ является целым числом. Следовательно, число $x_n = (a + b + c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1}$ делится на число $y = (a + b)(a + c)(b + c)$.

Утверждение задачи доказано. ♦

Как мы уже сказали выше, приведенное решение является, по-видимому, наиболее естественным для профессионального математика. Единственный недостаток этого решения заключается в том, что в нем существенно используются факты и утверждения из общей теории многочленов от нескольких переменных, а также факты и утверждения из общей теории колец, которые достаточно далеко выходят не только за рамки школьного курса математики, но и за рамки курса математики стандартного технического вуза.

Можно ли решить данную задачу, оставаясь в рамках известной из школы теории многочленов от одной переменной и используя лишь хорошо известное для таких многочленов следствие из теоремы Безу, а также тот факт, что при делении многочлена с целыми коэффициентами на двучлен со старшим коэффициентом, равным единице, в частном снова получается многочлен с целыми коэффициентами?

Да, можно. Соответствующее решение весьма поучительно и заслуживает, по нашему мнению, очень тщательного разбора на занятии с учащимися. Приведем это решение (его можно найти также, например, в книге [2], см. решение задачи 2.30 на стр. 129–131).

В этом решении нам понадобятся следующие два хорошо известных учащимся (как школьникам, так и студентам) утверждения.

Утверждение 4. Для любых p, $q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, имеют место равенства:

(а) $p^k - q^k = (p-q)(p^{k-1} + p^{k-2}q + p^{k-3}q^2 + \ldots + q^{k-1})$;

(б) $p^{2k-1} + q^{2k-1} = (p+q)(p^{2k-2} - p^{2k-3}q + p^{2k-4}q^2 - \ldots + q^{2k-2})$. $\square$

Утверждение 5. Если $R(X)$ — многочлен с целыми коэффициентами и целое число x_0 является корнем многочлена $R(X)$, то существует многочлен с целыми коэффициентами $R_1(X)$ такой, что $R(X) = (X - x_0)R_1(X)$. $\square$

После этого краткого напоминания приступаем непосредственно к решению задачи.

РЕШЕНИЕ 2.

Если $n = 1$, то $x_1 = 0$ и делимость $x_1 \vdots y$ имеет место.

Далее рассматриваем случай $n \geqslant 2$.

Необходимо по-отдельности рассмотреть два случая: случай, когда все три целых числа a, b, c равны друг другу и случай, когда хотя бы два из этих чисел различны.

Случай 1. Все три числа a, b, c равны друг другу: $a = b = c \neq 0$.

Имеем:

$$x_n = (a+a+a)^{2n-1} - a^{2n-1} - a^{2n-1} - a^{2n-1} = (3a)^{2n-1} - 3a^{2n-1} =$$
$$= 3a^{2n-1}(3^{2n-2} - 1) = 3a^{2n-1}[(3^2)^{n-1} - 1] = 3a^{2n-1}[9^{n-1} - 1^{n-1}];$$
$$y = (a+a)(a+a)(a+a) = (2a)^3 = 8a^3.$$

Разность $9^{n-1} - 1^{n-1}$ делится на $9 - 1 = 8$ (это вытекает из утверждения 4а), а число a^{2n-1} делится на a^3. Поэтому число x_n делится на y. $\square$

Случай 2. Хотя бы два из чисел a, b, c различны. Не ограничивая общности, можно считать, что $b \neq c$.

Рассмотрим следующий многочлен от одной переменной X:

$$P(X) = (X+b+c)^{2n-1} - X^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1}.$$

Применим утверждение 4а к разности $(X+b+c)^{2n-1} - X^{2n-1}$, а утверждение 4б к сумме $b^{2n-1} + c^{2n-1}$. В результате получим, что $(X+b+c)^{2n-1} - X^{2n-1} = (b+c)Q(X)$, где $Q(X)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами, а $b^{2n-1} + c^{2n-1} = (b+c)A$, где A — некоторое целое число. Итак,

$$P(X) = (b+c)Q(X) - (b+c)A = (b+c)G(X),$$

где $G(X) = Q(X) - A$.

Число $x = -b$ является корнем многочлена $P(X)$, а значит, и корнем многочлена $G(X)$. Следовательно, согласно утверждению 5, $G(X) = (X+b)G_1(X)$, где $G_1(X)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Итак,

$$P(X) = (b+c)(X+b)G_1(X).$$

Число $x = -c$ является корнем многочлена $P(X)$, а значит, и корнем многочлена $G_1(X)$. Следовательно, согласно утверждению 5, $G_1(X) = (X+c)G_2(X)$, где $G_2(X)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Итак,

$$P(X) = (b+c)(X+b)(X+c)G_2(X).$$

Заменим в этом равенстве переменную X на число a. В результате мы получим равенство

$$(a+b+c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1} = (a+b)(a+c)(b+c)G_2(a).$$

Поскольку G_2 — многочлен с целыми коэффициентами, то число $G_2(a)$ является целым числом. Следовательно, число $x_n = (a+b+c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1}$ делится на число $y = (a+b)(a+c)(b+c)$.

На этом рассмотрение случая 2 закончено. □

Утверждение задачи доказано. ♦

Мы привели два решения задачи. И первое, и второе решение основывалось на различных свойствах многочленов (в первом решении — многочленов от нескольких переменных, во втором решении — многочленов от одной переменной).

А что же метод математической индукции — можно ли его тоже каким-либо образом применить для решения рассматриваемой задачи?

Автор статьи долго размышлял над этим вопросом, прежде чем ему удалось наконец найти решение рассматриваемой задачи, основанное на методе математической индукции.

Сразу оговоримся, что это решение оказалось достаточно громоздким. Тем не менее, мы считаем полезным как с учебной, так и с методической точки зрения разобрать с учащимися и это решение. Наша цель здесь заключается в том, чтобы помочь учащимся как можно точнее и как можно полнее осознать возможности и ограничения, достоинства и недостатки такого важного инструмента решения математических задач, каким является метод математической индукции.

Итак, мы переходим к третьему решению задачи, на этот раз, к решению, основанному на методе математической индукции.

РЕШЕНИЕ 3.

Символом S_n, $n \geqslant 0$, мы будем обозначать для краткости следующий симметрический многочлен от трех переменных X_1, X_2, X_3:

$$S_n = X_1^n + X_2^n + X_3^n$$

(многочлен S_n называется n-й степенной суммой от трех переменных).

Лемма. При любых числах n, p, q таких, что $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$, $pn - q - 3p \geqslant 0$, имеет место следующее тождество:

$$S_{pn-q} = A_p S_{pn-q-p} - B_p S_{pn-q-2p} + C_p S_{pn-q-3p},$$

где $A_p = X_1^p + X_2^p + X_3^p = S_p$, $B_p = X_1^p X_2^p + X_1^p X_3^p + X_2^p X_3^p$, $C_p = X_1^p X_2^p X_3^p$. □

Доказательство. Путем непосредственного раскрытия скобок и приведения подобных членов легко убедиться в справедливости следующего равенства:

$$X_1^{pn-q} = A_p X_1^{pn-q-p} - B_p X_1^{pn-q-2p} + C_p X_1^{pn-q-3p}.$$

Складывая это равенство с аналогичными равенствами, которые получаются в результате замены переменной X_1 на переменную X_2 и на переменную X_3, получаем требуемое равенство. □

Замечание. При $p = 1$, $q = 0$, $n \geqslant 3$, доказанное в лемме тождество принимает следующий вид:

$$S_n = A_1 S_{n-1} - B_1 S_{n-2} + C_1 S_{n-3},$$

где $A_1 = X_1 + X_2 + X_3 = \sigma_1$, $B_1 = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 = \sigma_2$, $C_1 = X_1X_2X_3 = \sigma_3$.

Это не что иное как известная формула Ньютона для симметрических многочленов (см., например, [3], стр. 46). Входящие в эту формулу многочлены σ_1, σ_2, σ_3 называются элементарными симметрическими многочленами от трех переменных. □

Запишем доказанное в лемме тождество при $p = 2$, $q = 1$, $n = k$, $k \geqslant 4$:

$$S_{2k-1} = A_2 S_{2k-3} - B_2 S_{2k-5} + C_2 S_{2k-7},$$

где $A_2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = S_2$, $B_2 = X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_3^2$, $C_2 = X_1^2X_2^2X_3^2$.

Заменим в этом равенстве переменную X_1 на целое число a, переменную X_2 на целое число b, а переменную X_3 на целое число c. В результате мы получим равенство

$$S_{2k-1} = A_2S_{2k-3} - B_2S_{2k-5} + C_2S_{2k-7}, \qquad (*)$$

где $S_n = a^n + b^n + c^n$, $A_2 = a^2 + b^2 + c^2 = S_2$, $B_2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$, $C_2 = a^2b^2c^2$.

Собственно, для дальнейшего решения задачи нам понадобится только формула $(*)$, которую можно было бы доказать просто с помощью громоздкой выкладки (раскрыв все скобки и приведя подобные члены). Тем не менее, мы посчитали целесообразным вывести формулу $(*)$ в несколько более общем контексте, заодно перекинув мостик от этой формулы к хорошо известной формуле Ньютона для симметрических многочленов.

Теперь мы переходим собственно к доказательству утверждения задачи с помощью метода математической индукции.

База индукции. При $n = 1, 2, 3$ утверждение задачи верно. Это проверяется непосредственно (автор данной статьи, чтобы самому не производить громоздкие выкладки, использовал пакет Maple):

1) если $n = 1$, то $x_1 = (a+b+c)^1 - a^1 - b^1 - c^1 = 0$ делится на число $y = (a+b)(a+c)(b+c)$;

2) если $n = 2$, то $x_2 = (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(a+c)(b+c)$ делится на число $y = (a+b)(a+c)(b+c)$;

3) если $n = 3$, то $x_3 = (a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 = 5(a+b)(a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$ делится на число $y = (a+b)(a+c)(b+c)$. $\square$

Шаг индукции. Пусть $k \geqslant 4$. Предположим, что утверждение задачи верно при $n = k-1$, $n = k-2$, $n = k-3$, и докажем, что тогда утверждение задачи верно при $n = k$. Имеем:

$$x_k = (a+b+c)^{2k-1} - a^{2k-1} - b^{2k-1} - c^{2k-1} = (a+b+c)^{2k-1} - S_{2k-1} \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} (a+b+c)^{2k-1} - A_2S_{2k-3} + B_2S_{2k-5} - C_2S_{2k-7} = (a+b+c)^{2k-1} -$$

$$-A_2[(a+b+c)^{2k-3} - x_{k-1}] + B_2[(a+b+c)^{2k-5} - x_{k-2}] - C_2[(a+b+c)^{2k-7} - x_{k-3}] =$$

$$= A_2x_{k-1} - B_2x_{k-2} + C_2x_{k-3} + (a+b+c)^{2k-7}\{(a+b+c)^6 - A_2(a+b+c)^4 + B_2(a+b+c)^2 - C_2\}.$$

Числа x_{k-1}, x_{k-2}, x_{k-3} делятся на число y по предположению индукции. Тот факт, что число x_k делится на число y, будет доказан, если мы докажем, что «фигурная скобка» в последней строке вычислений делится на y.

Это действительно так. Проще всего в этом убедиться с помощью какого-либо математического пакета (например, с помощью пакета Maple):

$$\{\ldots\} = (a+b+c)^6 - (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^4 + (a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)(a+b+c)^2 - a^2b^2c^2 =$$

$$= (a+b)(a+c)(b+c)(a+b+2c)(a+c+2b)(b+c+2a) \,\vdots\, y = (a+b)(a+c)(b+c). \ \square$$

База индукции и шаг индукции доказаны. Итак, согласно принципу математической индукции, утверждение задачи верно при всех $n \in \mathbb{N}$. ⧫

Обратим внимание на то, что в данном решении был использован несколько усложненный вариант метода математической индукции, когда для доказательства справедливости утверждения задачи при $n = k$ мы предполагали справедливость утверждения задачи при трех предыдущих значениях n ($n = k-1$, $n = k_2$ и $n = k-3$), а не только при $n = k-1$.

Еще одна особенность этого решения заключается в привлечении вычислительной техники, без которой проведение выкладок стало бы чрезмерно утомительным.

Это еще раз говорит о том, что современный математик (как, впрочем, вообще любой современный исследователь) должен активно использовать весь арсенал доступных средств и способов решения задачи. Вычислительная техника, кстати, часто помогает не только произвести громоздкие и рутинные вычисления, но также помогает обнаружить важную закономерность, построить объект или конфигурацию с требуемыми свойствами, сконструировать контрпример к какому-либо утверждению.

Подводя итог нашей статьи, мы хотели бы отметить три обстоятельства. Во-первых, крайне важно, чтобы учащиеся владели различными модификациями метода математической индукции (например, встречаются задачи, в которых надо делать шаг индукции от $n = k - 2$ к $n = k$; встречаются задачи, где используется возвратная индукция и т. д.). Во-вторых, при применении метода математической индукции крайне важно правильно сформулировать доказываемое утверждение. Встречаются ситуации, когда более сильное утверждение с помощью метода математической индукции доказывается проще, чем более слабое (так называемый «парадокс индукции»). В-третьих, и это, наверное, самое главное, крайне важно, чтобы учащиеся четко понимали, что метод математической индукции не всесилен, встречаются задачи, в которых он не приводит к цели или же приводит к неоправданному усложнению решения. Опыт, приобретаемый в процессе решения математических задач, а также математическая интуиция помогают понять, целесообразно или нет в данной задаче применять метод математической индукции.

Мы надеемся, что наша статья заинтересовала читателей и будем благодарны за любые комментарии или замечания по затронутым нами вопросам.

Литература

[1] Винберг Э.Б. Курс алгебры. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Факториал Пресс, 2002. 544 с.

[2] Волков Ю.В., Ермолаева Н.Н., Козынченко В.А., Курбатова Г.И. Практические занятия по алгебре. Комплексные числа, многочлены. СПб.: Лань, 2014. 192 с.

[3] Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2002. 240 с.

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУАНАЛИЗУ В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Ли О.В.

Московский педагогический государственный университет

107140, Москва, ул. Краснопрудная, д.14, каб. 304 а

Тел.: 89164406162, e-mail: essyya@gmail.com

В данной статье рассматривается структура содержания лабораторного практикума по математическому анализу в системе электронного обучения будущих учителей информатики.

На сегодняшний день актуален вопрос о дистанционной форме обучения в высших учебных заведениях, в том числе, в педвузах. Для осуществления дистанционной формы обучения необходимы новые информационные технологии. Под новыми информационными технологиями мы понимаем: компьютерные обучающие программы (электронные учебники, тесты, тренажеры), мультимедиа-технологий (с использованием ПК, видеотехники, накопителей на оптических дисках), электронные библиотеки, средства телекоммуникации (электронная почта, телеконференции, сети связи и т.д.), база данных и т.д.

Необходима платформа, на которой бы разрабатывался электронный курс для дистанционной формы обучения. Наиболее распространенными платформами системы электронного обучения являются Moodle, eLearning Server, *iWebinar*.

Moodle, eLearning Server, iWebinar - виртуальные обучающие среды, предназначенные для дистанционной и заочной форм обучения. Данные системы представляют собой веб - приложения, предоставляющие возможность создавать учебные порталы (сайты) для онлайн - обучения.

Мы будем рассматривать вопрос об организации лабораторно-практических занятий по математическому анализу в системе электронного обучения будущих учителей информатики. Наш электронный курс может использоваться не только для дистанционной и заочной форм обучения, но и для очной и очно-заочной.

Рассмотрим на схеме структуру содержания лабораторного практикума по математическому анализу в учебном портале педвуза (Рис.1).

На схеме представлены три блока (учебно-методический материал, техническая база, контроль успеваемости) и взаимосвязь между этими блоками.

Для курса математического анализа нами были разработаны рабочая программа в подготовке бакалавров по направлению педагогического образования (профиль: информатика) в соответствии с требованиями ФГОС ВПО и учебного плана, два учебных пособия («Лабораторный практикум по математическому анализу с использованием информационных технологий», авторы: Асланов Р.М., Ли О.В.; «Математический анализ. Краткий курс», авторы: Асланов Р.М., Ли О.В., Мурадов Т.Р.), которые могут использоваться в качестве лекционного материала и для практических, самостоятельных и контрольных заданий.

Современный преподаватель высшей математики не может игнорировать тот факт, что применение новых информационных технологий и соответствующей им программно – технической платформы в преподавании курса математического анализа в педвузе является актуальной проблемой на сегодняшний день.

Данная проблема заключается в повышении уровня заинтересованности студентов в изучении тем данной дисциплины и в проблеме интеграции накопленных методических знаний и дидактических материалов с возможностями информационных технологий.

В нашем исследовании мы рассматривали вопрос о разработке методики проведения лабораторного практикума по математическому анализу с использованием информационных технологий в подготовке бакалавров по направлению педагогического образования (профиль: информатика). Предложенная нами методика позволяет решить данную проблему в области преподавания курса математического анализа с использованием новых информационных технологий.

Структура содержания лабораторного практикума по математическому анализу в учебном портале

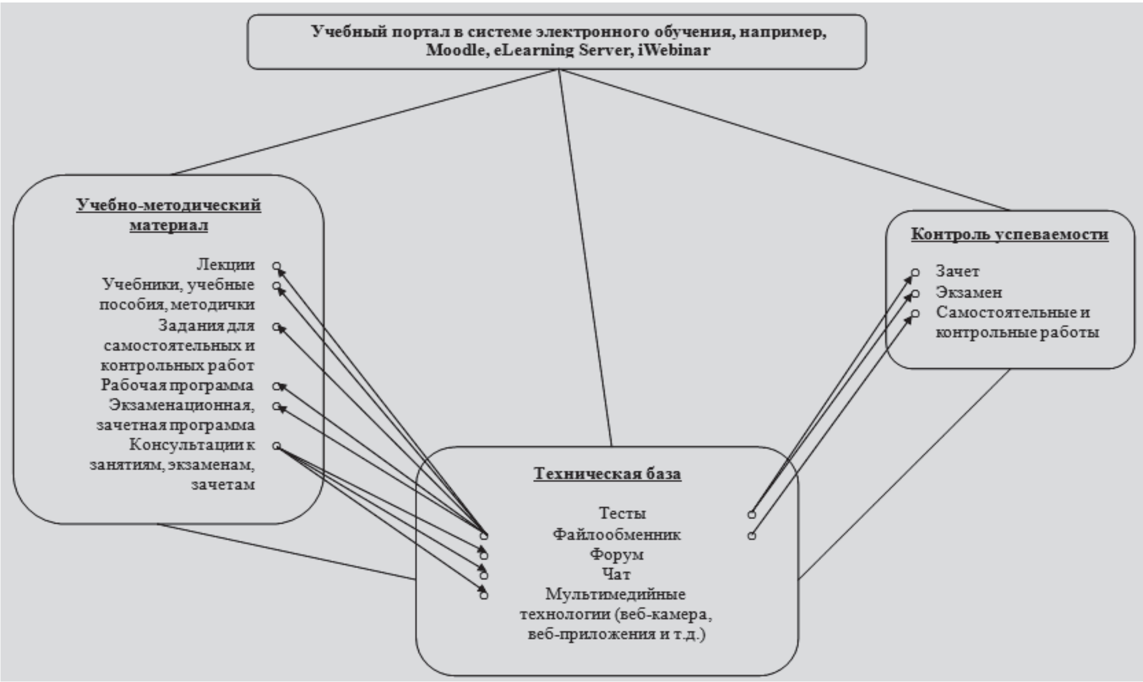


Рис.1

ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЙ ПОДХОД ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ УЧАЩИХСЯ СРЕДНЕГО И СТАРШЕГО ЗВЕНА

Лобанова Н.И.

Муниципальное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района»

357911, г. Зеленокумск, ул. Советская, 14

Тел.: 89064931183, e-mail: lobantchik@yandex.ru

Математика всегда была неотъемлемой и существеннейшей составной частью человеческой культуры, она является ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса и важной компонентой развития личности [1].

В России в настоящее время дискутируется вопрос о кризисе школьного математического образования, которому всегда, по сложившейся традиции, уделялось большое внимание. Успехи выдающихся российских математиков в подготовке высококвалифицированных кадров и их участие в закладке фундамента школьной математики, достижения российской науки, во многом базирующиеся на математическом знании, вызывают не только необходимость сохранения накопленного потенциала, но и стимулируют дальнейшее развитие математического образования в Российской Федерации. Система математического образования, сложившаяся в современной России, является прямой наследницей советской системы. Необходимо сохранить ее достоинства и преодолеть серьезные недостатки. Повышение уровня математической образованности сделает более полноценной жизнь россиян в современном обществе, обеспечит потребности в квалифицированных специалистах для наукоемкого и высокотехнологичного производства [2].

Проблемы преподавания математики в современной школе необходимо решать с учетом огромного опыта, накопленного на пути активизации самостоятельной работы школьника. Задача воспитания творческой активности школьников до сих пор не теряет своей актуальности. Ее решение связано с преодолением многочисленных противоречий и ряда проблем, присущих процессу обучения.

Противоречие между массовостью школьного математического образования, неизбежно приводящей к известной стандартизации, и подчеркнуто индивидуальным характером познания (выход из этого противоречия в дифференциации обучения) оказывает негативное влияние на весь процесс обучения.

Уровневая дифференциация, является главным видом дифференциации при обучении во всех классах. Выделяется уровень обязательной подготовки, который задает нижнюю границу усвоения материала, на его основе формируются повышенные уровни овладения курсом. Основная особенность уровневой дифференциации состоит в дифференциации требований к знаниям и умениям учащихся. Школьники получают право и возможность, выбирать тот уровень усвоения, который соответствует их потребностям, интересам, способностям, обучаться в одном классе и по одной программе.

В 5 - 6 классах формируется фундамент математических знаний. Привыкнуть к новым требованиям позволяет дифференцированный подход к обучению математике, облегчая адаптацию пятиклассников к новым условиям. Соответственно, в классе могут быть выделены две группы обучающихся: группа базового уровня и группа повышенного уровня. Если ученик свободно овладел материалом, соответствующим стандарту, возможен переход из группы базового уровня в группу повышенного уровня. Можно осуществлять деление на группы условно, оно существует только для учителя, чтобы не травмировать психику ребёнка и не развивать в нём комплекс неполноценности.

Иной смысл принимает технология личностно - ориентированного обучения в 10 - 11 классах, так как меняется отношение к учебе самих школьников. Обучение старшеклассников принимает более индивидуализированный характер. У учащихся, которые собираются изучать на достаточно глубоком уровне физику, технические научные и прикладные дисциплины, математическая подготовка должна быть достаточно фундаментальна. Эта категория школьников должна с легкостью и изяществом производить в этих дисциплинах все математические выкладки. Но обучение на более высоком уровне должно включать базовый уровень как часть. На сегодняшний день базовый уровень обеспечен стандартами и минимумом содержания образования.

Свою работу учителю необходимо переориентировать на индивидуальный подход к учащимся, а это в свою очередь потребует создания нового научно - методического обеспечения, самой широкой дифференциации обучения. Учителю потребуется глубокая психологическая перестройка, отход от ряда традиционных установок, разработка новых приемов и форм обучения.

Цели уровневой дифференциации состоят в обеспечении всех школьников базовым уровнем подготовки, представляющем собой государственный стандарт образования, и одновременном создании условий для умственного развития учащихся, проявляющих интерес и способности к математике.

Изучение и преподавание математики играет ключевую роль в образовательной системе; с одной стороны оно обеспечивает готовность учащихся к применению математики в других областях, с другой стороны – выступает в роли системообразующего звена, существенно влияя на интеллектуальную готовность школьников к учению, а также на содержание и методики преподавания многих школьных предметов [2].

Литература

1. Тихомиров В.М. «О некоторых проблемах математического образования». Всероссийская конференция «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков». Дубна, сентябрь 2000. – М.: МЦНМО, 2000. С. 3-15.
2. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. Утверждена распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. № 2506-р.

О ПРОБЛЕМАХ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ

Малыгина О.А., Игонина Т.Р., Кольцова Е.В., Руденская И.Н.,

Таланова Л.И., Чекалкин Н.С.

Московский государственный технический университет радиотехники,электроники и автоматики, Россия

Москва, пр-т Вернадского, д.78

Тел. 8916-162-05-35, e-mail: malygina58@mail.ru

Анализ процесса обучения математическим дисциплинам будущих выпускников технических университетов позволяет выделить ряд проблем.

Обучение высшей математике строится при предположении наличия у студентов полноценно усвоенных знаний и умений по элементарной математике. В то же время, анализ результатов тестирования студентов 1- ого курса ряда технических университетов по элементарной математике указывает на существование разрыва между имеющимися у учащихся математическими знаниями и умениями по школьной программе и требованиями к ним со стороны курса высшей математики.

При обучении высшей математике не осуществляется целенаправленное формирование умений учиться самостоятельно; развитие способностей к самообразованию и самосовершенствованию происходит стихийно и медленно. На сегодня существует противоречие между потребностями общества в производстве творчески мыслящего и деятельного человека и выпуском специалистов, ориентированных только на пассивное усвоение знаний и умений.

Основной акцент в процессе обучения высшей математике делается на получение только математических знаний и умений, не происходит целенаправленного формирования методологических компетенций. На основе методологических компетенций в совокупности с математическими происходит самостоятельное изучение нового материала, строится деятельность по исследованию объектов, решаются профессиональные проблемы.

Обучение высшей математике осуществляется изолированно от решения профессиональных задач выпускаемого специалиста, бакалавра, магистра. Учащиеся при изучении математических курсов почти не связывают возможности математики с решением проблем познания и преобразования действительности. Математика остается абстрактным и обособленным приобретением вузовского образования. Целостная картина взаимосвязей высшей математики с различными общенаучными и специальными предметами не формируется как при изучении математики, так и при изучении других дисциплин.

При изучении математических дисциплин не в полной мере реализуется воспитывающая функция обучения. Сюда можно отнести игнорирование описания исторического пути становления и развития той или иной математической науки, игнорирование мировоззренческих аспектов.

Педагоги высшей школы, ведущие предмет «Высшая математика», имеют хорошую фундаментальную подготовку по специальности «математика», но, как правило, не владеют в совершенстве психолого-педагогическими аспектами своей профессии. Процесс обучения высшей математике, организации усвоения материала строится в высшей школе в основном эмпирическим образом, без учета достижений педагогики и психологии. В связи с этим, проблема подготовки преподавателя высшей математики для технического вуза является актуальной наряду с проблемой подготовки высококвалифицированного специалиста, бакалавра, магистра.

При построении содержания обучения высшей математике следует учитывать динамическое развитие математических наук, расширение их прикладных аспектов, построение новых методов исследования. С другой стороны, всегда существуют временные рамки, ограничивающие учебный процесс, причем, по некоторым специальностям имеется тенденцию к их уменьшению.

Решение вышеперечисленных проблем предполагает совершенствование содержательной и процессуальной сторон обучения высшей математике. Особенно это относится к подготовке студентов, обучающихся по техническим направлениям, где высшая математика играет важнейшую роль. В качестве теоретического основания для модернизации содержания обучения и организации усвоения курса высшей математики предлагаются принципы теории деятельности и идеи системного подхода, что и нашло отражение в экспериментальной модели курса высшей математики для технического университета [1, 2].

Литература:

1. Малыгина О.А. Обучение высшей математике на основе системно-деятельностного подхода. М.: URSS, 2007. 256с.

2. Аксененкова И.М., Малыгина О.А. Чекалкин Н.С., Шухов А.Г. Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения. М.: URSS, 2009. 208 с.

БАЗОВЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ

Мищенко Т.М.

Федеральное государственное научное учреждение
«ИНСТИТУТ СОДЕРЖАНИЯ И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ»
Российской академии образования

119526 Москва, пр. Вернадского, д. 93, корп. 1 кв. 16

Тел. 8-903-747-91-96, e-mail: tmmish@yandex.ru

Гусева Н.И.

Московский педагогический государственный университет

117485 Москва,ул. Краснопрудная, д. 43

Тел. 8-903-063-00-29, e-mail: ngus12@mail.ru

Заключительное повторение курса планиметрии преследует цель систематизировать и обобщить ранее полученные учащимися знания о свойствах плоских фигур и умения и навыки, применять полученные знания при решении задач.

Анализ федеральной программы позволяет сформулировать и определить:

цели и задачи обучения планиметрии, как систематическое изучение свойств основных геометрических фигур на плоскости, развитие логического мышления, пространственных представлений и геометрической интуиции; а так же создание у учащихся такого запаса геометрических знаний и умений, который позволит им успешно изучать смежные дисциплины и курс стереометрии;

уровень и объем умений и навыков, обязательных для овладения учащимися в процессе изучения курса планиметрии, характеризуется рациональным сочетанием логической строгости и геометрической наглядности, направленностью на применение геометрического аппарата на вычисления величин углов, длин отрезков, площадей плоских фигур; на доказательства новых свойств геометрических фигур и их построения;

Организация обобщения и систематизации знаний учащихся по курсу геометрии на основе систематизации методов, с которыми учащиеся познакомились в процессе изучения, неоднократно обсуждались на страницах методической литературы. Все авторы сходятся в оценке это подхода, как способствующего развитию математического кругозора.

Исследование процесса решения геометрических задач показывает, что в большинстве случаев активно применяется многократное моделирование их условий на различных промежуточных языках - словесном, графическом, формально-алгебраическом и т.д., при этом используются разнообразные математические модели. Специфика геометрии заключается в том, что важнейшим языком представлений используемых математических моделей является наглядно графический язык геометрических рисунков и чертежей. Применительно к геометрическим задачам, применение теории требует выделения в заданной геометрической ситуации таких геометрических фигур и их соотношений, которые позволяют применить ранее изученные методы доказательства геометрических утверждений.

Как известно процесс решения геометрической задачи состоит из следующих шагов: **1)** выделить условие задачи и заключение; **2)** отразить условие задачи на чертеже; **3)** выделить конфигурацию, необходимую для поиска решения задачи; **4)** если конфигурация, необходимая для поиска решения задачи, не найдена, выполнить дополнительные построения, необходимые для решения задачи; **5)** если необходимо, повторить шаги 3 и 4.

Таким образом, число логических шагов определяется числом последовательно выделяемых геометрических конфигураций, выделение которых происходит в процессе поиска логических обоснований, являясь их наглядным образом.

Если же в условии задачи конфигурация уже задана, так, например, происходит в упражнениях на прямое применение изучаемых теорем, то ее выделение, естественно, не требуется. **Первая группа методов**. Конфигурация определяет применение той или иной теоремы, выражающей свойства или признаки фигур и их элементов или формулы. **Вторая группа методов**. Если данная или полученная в результате дополнительного построения конфигурация определяет отношения фигур или их элементов, то здесь, принято говорить о нескольких методах: признаки равенства треугольников, признаки подобия треугольников, теорема Пифагора, теоремы синусов и косинусов, неравенство треугольника, преобразования плоскости и т.д. Отдельно здесь же рассматриваются методы, которые возникают в процессе решения задач, условие которых задает конфигурацию, состоящую из двух или более различных фигур. Например, при рассмотрении взаимного расположения двух окружностей, двух прямых, прямой и окружности, треугольник и окружность, четырехугольник и окружность, многоугольник и окружность и т.д. Эти методы позволяют проводить как обоснование логических шагов решения задачи, так и вычислять длины линейных элементов или градусные мер углов фигур. **Третья группа методов**. Методы доказательств: метод от противного, метод перебора вариантов, алгебраический метод, метод подобия, метод геометрических мест точек и др. **Четвертая группа методов**. Это формулы для вычисления длин линейных элементов, формулы площадей фигур.

Выделены четыре группы методов, применяемых в геометрии для решения задач на вычисление линейных элементов, площадей фигур, нахождения градусной меры углов, решения задач на доказательство и построение. Такая систематизация методов позволяет создать методику повторения курса планиметрии. На **первом этапе** методы первой и четвертой группы позволяют систематизировать учебный материал, отражающий свойства и признаки основных фигур планиметрии, а именно, треугольников, четырехугольников, многоугольников, окружности и круга. Таким образом, весь учебный материал курса организуется по принципу наиболее полного описания свойств и признаков каждой из перечисленных геометрических фигур. Повторение теорем о свойствах и признаках фигур планиметрии позволяет систематизировать умения учащихся проводить доказательные рассуждения, т.е. умения исследовать, что требуется для доказательства того или иного утверждения. Особенностью второго этапа повторения является то, что умения учащихся проводить поиск логических обоснований или логических закономерностей свойств геометрических фигур получают дальнейшее развитие, но уже на новых и более сложных геометрических конфигурациях. Поэтому умение выделять более сложные (по сравнению с первым этапом) геометрические конфигурации выступает на первое место. Другой особенностью второго этапа повторения является возможность и неизбежность повторения методов первой и четвертой групп методов планиметрии. На **третьем этапе** методы третьей группы позволяют проводить поиск свернутых доказательных рассуждений, так и сведение более сложных геометрических построений к более простым. Этот третий этап подводит итог в изучении всего богатства методов и приемов решения геометрических задач, демонстрирует эффективность совместного их использования.

Таким образом, курс повторяется в три этапа, и на каждом этапе происходит сочетание повторения учебного материала с некоторыми моментами повторения и закрепления навыков поиска доказательных рассуждений и решения содержательных задач. Характерной чертой предложенного приема организации повторения является то обстоятельство, что учащимся предлагается многократно возвращаться к ранее пройденному материалу.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО МАТЕМАТИКЕ В КОНТЕКСТЕ ТРЕБОВАНИЙ ФГОС (ПЛЮС) И СТАНДАРТОВ CDIO

Муханов С.А., Муханова А.А.

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)

107023, г. Москва, ул. Б.Семёновская, д. 38

Тел.: 89032925944, e-mail: smukh@rambler.ru

Современные преобразования, происходящие в российском обществе, требуют адекватных изменений в системе профессиональной школы. В результате разработки стандартов ФГОС (плюс) требования к результату (компетенции) были упорядочены, сокращены, унифицированы в части ОК; уточнены формулировки компетенций; предусмотрена возможность выбора вида ПД в соответствии с профилем в соотношении с набором компетенций. Во многом стандарты ФГОС и ФГОС (плюс) перекликаются с результатами обучения в рамках инициативы CDIO. В основе инициативы CDIO: «Conceive–Design–Implement–Operate» лежит освоение студентами инженерной деятельности в соответствии с моделью: «Задумка–Проектирование–Реализация–Управление».

В январе 2004 г. в рамках инициативы CDIO были приняты 12 стандартов для описания программ CDIO. [1] В этих стандартах были определены специальные требования к программам CDIO, которые могут выступать руководством для реформирования и оценки образовательных программ. В 2013 году Агентство стратегических инициатив приступило к внедрению концепции CDIO во всей отечественной системе образования.

Попробуем установить соответствие между компетенциями ФГОС (плюс) по направлению 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» (стандарт пока не утвержден) в рамках одной конкретной дисциплины, а также обсудим возможности реализации активного практического подхода. Результат работы сведем в таблицу (Таблица 1 Соответствие компетенций ФГОС и CDIO Syllabus). В качестве примера возьмем курс «Математика». Будем основываться на соответствующей рабочей программе, разработанной на кафедре «Высшая математика» МГМУ (МАМИ).

Данная таблица устанавливает подробное описание приобретенных личностных, межличностных и профессиональных компетенций, соответствующих установленным целям программы, что соответствует стандарту 2 CDIO.

Стандарт 3 требует, чтобы учебный план включал в себя взаимодополняющие учебные дисциплины и был нацелен на интегрирование в преподавании личностных, межличностных компетенции, а также компетенций создавать продукты и системы. Это достигалось выделением в рамках предмета модулей, направленных на формирование определенных Знаний-Умений-Навыков (ЗУН). Затем с участием всех кафедр под руководством представителей выпускающих кафедр осуществлялось проектирование взаимосвязанной системы выделенных ЗУН. Таким образом, строился интегрированный учебный план, которому необходимо было подчинять внутреннюю логику строения курса.

Таблица 1 Соответствие компетенций ФГОС и CDIO Syllabus

Компетенции по ФГОС (плюс)	CDIO Syllabus (Версия 2.0)	Средства формирования компетенций
ОК-1 способен к абстрактному мышлению, анализу, синтезу	2.3 Системное мышление	Лекции, в том числе: проблемные лекции, лекции-визуализации, лекции с заранее запланированными ошибками, лекции-беседы, Семинары, Текущий и итоговый контроль.
ОК-6 готов действовать в нестандартных ситуациях, нести социальную и этическую ответственность за принятые решения;	2.4 Позиция, мышление и познание	Коллективные методы работы, в том числе: • кейс-технологии (анализ конкретной ситуации), • ролевые игры.
ОПК-2 готов к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач профессиональной деятельности;	3.2 Коммуникации 3.3 Коммуникации на иностранных языках	Подготовка и защита рефератов в СДО кафедры, коммуникация с преподавателем и сокурсниками в рамках обсуждения рефератов в СДО, подготовка пояснительной записки с обоснованием расчетов междисциплинарного проекта
ОПК-3 готов руководить коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	3.1 Работа в команде	Коллективные методы работы, в том числе: • пресс-конференция, • привлечение лучших студентов к консультированию отстающих, • групповая работа в СДО.
ОПК-5 способен на научной основе организовать свой труд, самостоятельно оценивать результаты своей деятельности	2.1 Аналитическое обоснование и решение проблем	Работа в СДО кафедры Планирование пути прохождение рубежных контрольных точек, выполнение проектов
ОПК-6 способен самостоятельно или в составе группы вести научный поиск, реализуя специальные средства и методы получения нового знания	2.2 Экспериментиро-вание, исследование и приобретение знаний	Коллективная работа по разработке wiki-глоссария в системе ДО. Дисциплинарный и междисциплинарный проекты.

В соответствии со стандартом 5 предполагается участие студента в учебно-практических заданиях по проектированию и созданию изделий на начальном уровне. Это реализуется путем выполнения проектов, в соответствии со стандартом 7. Мы согласны с Бутаковой С.М. и др. в том, что «полноценные учебные и социальные проекты возможно и целесообразно разрабатывать в рамках дисциплин изучаемых на специальных кафедрах (курсовые и дипломные проекты) и во внеаудиторное время (социальные проекты). А в рамках естественнонаучной дисциплины «Математика» в контексте реализации стандарта 7 CDIO студенты будут выполнять интегрированные исследовательские задания проектного типа, чаще всего либо информационные, либо практико-ориентированные, так как такие задания в дальнейшем будут постепенно готовить студента к проектной деятельности по выбранному направлению, а также демонстрировать контекст будущей профессиональной деятельности». [2]

Основным упором при организации самостоятельной работы студентов, на наш взгляд, должна стать индивидуальная и коллективная работа в системе дистанционного обучения (СДО) кафедры/факультета, так как современные системы ДО позволяют организовать эффективные коммуникации участников образовательного процесса, их совместную работу и оценивание, что задается также стандартом 11 инициативы CDIO.

В заключении отметим, что подготовка студентов с использованием принципов Всемирной инициативы CDIO представляет собой процесс, направленный на овладение студентами профессиональных компетенций, задаваемых ФГОС, ориентированной на удовлетворение существующих потребностей образовательной системы, а также направленной на совершенствование обучения студентов.

Литература

1. Всемирная инициатива CDIO. Стандарты: информационно-методическое издание / Пер. с англ. и ред. А.И. Чучалина, Т.С. Петровской, Е.С. Кулюкиной; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 17 с.

2. Бутакова С.М., Братухина Н.А., Арасланова М.Н., Кубикова Н.Б. Проектирование образовательного процесса по математике в контексте стандартов CDIO // Фундаментальные исследования. – Пенза: 2014. – № 6-7. – С. 1497-1503.

ИНТЕРАКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ РАЗЛИЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

ОЛЬНЕВА А.Б.

Московский государственный университет путей сообщения

e-mail:a.olneva@gmail.com

В настоящее время большинство предприятий нуждается в активной реструктуризации, которая тормозится из-за отсутствия знаний, ресурсов, должного уровня менеджмента, координации и сотрудничества между акционерами и государством, стратегии развития предприятий. Нужны кадры нового поколения. На современном этапе преобразований в образовании мы видим, что математические методы становятся необходимыми для всех направлений научной и практической деятельности специалиста.

Многоплановость проблемы повышения эффективности и качества профессиональной подготовки в вузе нуждается в хорошей организации математического образования. Важность математического образования не требует дополнительных доказательств и продолжает быть одной из главных составляющих в системе фундаментальной подготовки специалиста.

В соответствии с ФГОС реализация учебного процесса в вузах предусматривает проведение занятий в интерактивных и активных формах. Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, определяется главной целью ООП, особенностью контингента обучающихся и содержанием конкретных дисциплин, определяется конкретным ФГОС (по программам бакалавриата они составляют до 20 процентов аудиторных занятий).

Внедрение интерактивных методов при обучении – одно из направлений совершенствования подготовки студентов в вузе. Реализация принципа интерактивности поможет решить задачи: демократизации образовательного процесса; интеграции в европейское и мировое образовательное пространство; активизации участия обучающегося в получении образовательного результата; формирования творческих общепрофессиональных компетенций. Интерактивное обучение – это диалоговое обучение, в ходе которого осуществляется взаимодействие педагога и студентов, непосредственное или опосредованное (чаще всего с помощью компьютерной техники).

Преподавателю недостаточно быть компетентным в области своей специальности и уметь передавать базу знаний студентам. Использование активных подходов в предметном обучении является наиболее эффективным, ибо студенты легче вникают, понимают и запоминают материал, который они получают посредством активного вовлечения в учебный процесс. Поэтому основные методические инновации связаны сегодня с применением интерактивных методов обучения, они становятся важнейшим стратегическим фактором.

Учебный процесс, в котором используются интерактивные методы обучения, включает в процесс познания без исключения всех студентов группы. Совместная деятельность означает, что каждый вносит свой особый индивидуальный вклад, в ходе работы идет обмен знаниями, идеями, способами деятельности.

Организуются индивидуальная, парная, групповая работа, используется проектная работа, ролевые игры, можно осуществлять работу с документами и всевозможными источниками информации. Интерактивные методы основаны на принципах взаимодействия, активности обучаемых, опоре на групповой опыт, обязательной обратной связи. Получаем среду такого образовательного общения, которая характеризуется открытостью, взаимодействием участников, равенством их аргументов, накоплением совместного знания, возможностью взаимной оценки и контроля. Ведущий педагог имеет возможность вести студентов к самостоятельному поиску.

Активность педагога уступает место активности студентов. То есть из объекта воздействия студент становится субъектом взаимодействия, активно участвует в процессе обучения, конструирует индивидуальный образовательный маршрут.

Развитие интерактивного обучения в вузе осуществляется через освоение новых методик, однако не забываем, что новое - это чаще всего хорошо забытое или утраченное старое. Заметим, что компьютер в интерактивных методах обучения имеет большое значение. Это: компьютерное тестирование (входное, текущее в семестре, итоговое и т.п.); выполнение индивидуальных, практических творческих заданий при изучении математических дисциплин; интернет-консультирование по изучаемой дисциплине или по вопросам творческих или исследовательских работ.

Кроме того, компьютер в интерактивных методах обучения позволяет проводить презентации слайдов лекции; во время семинара-дискуссии использовать интерактивные панели и доску; слайд-кейс, презентации решений ситуаций.

Применение интерактивных методов обучения зависит от характера образовательной программы (основная или дополнительная); специфики учебных дисциплин; целями и задачами конкретных занятий; возрастными и другими особенностями обучающихся; возможностями и предпочтениями преподавателя, ведущего изучение учебной дисциплины.

В связи с решением возникших проблем коллективами кафедр (общеобразовательных и выпускающих) разрабатывается содержание, прежде всего, самостоятельной деятельности будущих бакалавров и магистров, представленное системой самостоятельных математических работ по каждой учебной дисциплине с учетом уровней предварительной изученности теоретической и практической составляющих самостоятельных работ с основой в виде типовых и индивидуальных учебных работ; продумывается организация самостоятельной деятельности, основанная на групповой дифференциации и поэтапном педагогическом сопровождении при использовании учебных пособий; вводятся основанные на рейтинговой системе оценок показатели развития и саморазвития проектно-конструктивных способностей как основного элемента профессиональной компетентности бакалавра совместно с усвоением математического аппарата.

На наш взгляд для хорошей организации обучения студентов по учебным предметным дисциплинам на кафедре надо: иметь относящиеся к конкретному учебному предмету необходимые учебно-методические пособия; справочники; учебники и научную литературу по большинству вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение; создать банк данных тестирования студентов по изучаемым темам, внедряя систему регулярного контроля качества выполняемой работы; наладить работу преподавателей кафедры по научному консультированию студентов по изучаемым вопросам, осуществляя систему обратной связи «студент-преподаватель»; иметь на кафедре рабочую программу (тематический план отдельных вопросов) каждой учебной дисциплины в электронной версии с тем, чтобы студенты могли пользоваться этими «направляющими» документами процесса обучения; создать и внедрить систему учета работы студентов в течение семестра для получения результирующей семестровой оценки по изучаемой дисциплине.

Использование компьютерных технологий для оценивания промежуточных, текущих и итоговых результатов воспроизведения запоминаемого материала упорядочивает содержание и очередность выполняемых действий, побуждает к размышлениям о рассматриваемых информационных единицах, углубляя чувство удовлетворения запоминанием и осознанием его значимости. Каждому студенту следует ориентироваться на формирование индивидуальной образовательной траектории и интенсивную работу на протяжении всего срока обучения.

Особого внимания и подготовки во всей этой работе по организации математического образования требует и хорошо организованная методическая работа педагогов.

MODERN PROBLEMS OF MULTI-LEVEL LEARNING MATHEMATICS IN HIGH SCHOOL

Vera T. Petrova
Moscow Physical Techniques Institute (State University)
141700, Moscow region, Dolgoprudny, Institutsky per., 9
Tel. 89165890108, e-mail: petrovavt@gmail.com

Oleg A. Matveyev
Moscow State Regional University
105005, Moscow, Radio str., 10a
Tel: 89037001531, e-mail: matveyevoa@mail.ru

Maria N. Dmitrieva
Ryazan State Medical University
390026, Ryazan, Vysokovoltnaya str., 9
Tel: 89109014172, e-mail: dmitr05@yandex.ru

The introduction of the United State Examination (USE) in Russia led to the situation that the school education significantly decreased the level of mathematical training of modern school-leavers, and, as a consequence, students. Last repeatedly stated numerous studies at various stages of the introduction of USE in the national secondary school [1], [2], [3], [4]. Thus, it became urgent problem of teaching mathematics in high school in those professions where this subject is primary.

The attempts of universities to solve the problem, essentially induced by secondary school, in the form of additional (preparatory) year of study (for example, in ore) or additional courses in the school course of mathematics (most universities), as a rule, are ineffective. The main reason for this is that required either an additional year of study, or significantly increases the workload of hours of additional training students that, as a rule, suffer from the inability to organize their academic work.

Modern high school put before the problem of teaching students a specific subject (particularly mathematics), learning to learn - i.e., correctly and optimally organize their learning activities, but it is filling up deficiencies of mathematical culture, which gave high school. Of course, you can reduce and simplify courses of higher mathematics (as it is done by many, if not most universities), but not solved, and compounded by, the main task of teaching mathematics in high school - education logical culture, logical literacy and self-control when performing scientific or engineering developments. Besides, the courses of higher mathematics serve as a base to explore the major special items. Thus, not addressing the main methodological problems in the study of mathematics in high school, on the merits, leads to defective special education (engineering, technical, pedagogical, and so on). Consequently, we need a serious reorganization of the educational process. A significant role is played and methods of teaching, and the principles of the textbooks used in the educational process. Let us focus on the latter.

According to the theory of educational books every modern textbook performs several quite specific didactic functions, among which the most important classification N. F. Talyzina [5] as follows:

1. Information,	5. Coordinating,
2. Transformational,	6. Consolidation and self-control,
3. Systematizing,	7. Self-education,
4. Integration,	8. Developing and educational.

N. I..Tupalski [6], determining the specificity of the textbook for high schools additionally allocated the following functions:

1. Informative,	5. Reference,
2. Research,	6. Self-control,
3. Practical training,	7. Methodological

4. Stimulating, 8. Socio-pedagogical.

At the present stage, given the problems of the higher school, induced secondary school significantly increases the role of the following components features: secure and self-control, motivation to acquire new knowledge (self-education), developing communication.

From this we can conclude that at the heart of modern textbook of mathematics (not just higher) must be *problematic presentation* of his material wherever possible. To this, given the significant differentiation of knowledge of students, especially freshmen, a textbook of mathematics (and mathematics teaching at the graduate school) must be adapted to the existing knowledge of the student, and therefore the way of teaching should be based on the ideas of *differentiated and be multi-level learning.*

In accordance with the theory of learning in building the educational process and the implementation of the textbook for the course of higher algebra and geometry one of the authors [7], we implement three levels of presentation of educational material: reproductive (or base), productive and transformational (or creative). The latter implies fluency training material and the ability to solve problems fairly of serious level. A major research objective was to determine the ratio of the content and scope of the levels of educational material to encourage students to master academic material at a higher educational level.

Researchers conducted at various universities, such as high-level requirements knowledge of mathematics and technology (Moscow Physical Techniques Institute), and more ordinary (Moscow State Regional University, Ryazan State Medical University)showed that the increase in content and information volume of the first (base) to the second (production) level should be approximately 30%. Interestingly, the same study showed that a significant deviation from a value of 30% leads to formalization in learning and declining interest of students to learn the material. Experiments to determine the optimal ratio of content of data volumes, productive and creative levels are in the process of research.

References

1. Петрова В.Т., Матвеев О.А. On one intensive higher mathematics teaching model in modern universities // The8th Congress of the Intern. Society for Analysis, its Applications and Computation. – M., PFUR, 2011.
2. Петрова В.Т. Интенсификация обучения при многоуровневом преподавании математики в современных университетах. // Проблемы совершенствования математической подготовки в школе и в вузе, – М., МПГУ, 2012.
3. Петрова В.Т., Матвеев О.А. On modeling in the Process of Intensive Higher Mathematics Teaching in Modern Universities // Progress in analysis/ Proceedings of the 8th Congress oh the ISAAC, Moscow, August 22-27, 2011 – M., PFUR,2012
4. Петрова В.Т., Матвеев О.А. О многоуровневом обучении высшей математике в современных университетах. // М., МГОУ, «Вестник МГОУ», серия " Педагогика", вып. №4. 2012.
5. Талызина Н.Ф. Место и функция учебника в учебном процессе // Управление процессом усвоения знаний. Психологические основы. – М., МГУ, 1984.
6. Тупельский Н.И. Основные проблемы вузовского учебника. – Минск, Вышейшая школа, 1976.
7. Петрова В.Т., Лекции по алгебре и геометрию – т.1 -312с., т.2. - 344с., М., ВЛАДОС, 1999.

ЧЕМУ УЧАТ МНОГИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ?

Розов Н.Х.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

119991 Москва, Ленинские горы, МГУ

E-mail: fpo.mgu@mail.ru

Наши многочисленные специалисты-теоретики по «методике преподавания математики в школе» регулярно и в изобилии публикуют журнальные статьи и тезисы докладов на конференциях, посвященные тем или иным математическим и методическим вопросам, сообщению решения конкретных задач. Делается ли это для того, чтобы познакомить широкий круг школьных преподавателей математики с действительно передовым опытом преподавания, изложить действительно новые методические или содержательные находки, высказать действительно оригинальные мысли о совершенствовании школьной программы и преподнесения её тем учащимся? Или подобные публикации в очередной раз повторяют уже всем хорошо известное, сообщают прописные старые истины, содержат готовые решения задач без всякого обсуждения того, как их использовать в реальном процессе обучения – и всё это преследует банальную цель «отметиться публикацией».

К сожалению, весьма значительная часть таких публикаций относится ко второму типу. Снова и снова повторяются или перелагаются (подчас с точностью до обозначений) одни и те же теоретические рассуждения. Снова и снова приводятся решения задач − широко и давно известные, много раз уже публиковавшиеся и, что самое печальное, подчас весьма неудачные. Никакого оригинального методического анализа или нового осмысления, никаких психолого-педагогических или содержательных рекомендаций, никаких соображений и указаний о способах и формах конкретного, практического использования излагаемого материала действующими учителями в их реальной школьной деятельности.

Более того, многие из этих статей, к сожалению, свидетельствуют о низком профессиональном уровне их авторов и могут нанести прямой вред обучению школьников и, тем более, воспитанию их креативного мышления, если учитель действительно решит взять такие статьи на вооружение.

О МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Русаков А.А.

ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет

приборостроения и информатики»

Россия, 107996, Москва, Стромынка, 20

e-mail: vmkafedra@yandex.ru

7 мая 2012 года Президент Российской Федерации подписал указ № 599 «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки» и поручение главы государства на разработку Концепции развития математического образования РФ. Концепции развития математического образования в Российской Федерации, утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р. Над созданием Концепции развития математического образования РФ работали различные научно-педагогические, математические сообщества (под руководством Алексея Львовича Семенова, академика РАН и РАО ректора Московского государственного педагогического университета, под руководством Виктора Антоновича Садовничего, академика РАН ректора Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и др.).

Члены НМС по математике после заседания. Академик РАО Колягин Ю.М., профессор МГУ Бутузов В.Ф., профессор МФТИ Шабунин М.И., академик С.М Никольский, профессор МГУ Русаков А.А. (слева направо)

Научно-методический совет (НМС) по математике Минобразования России – это государственно-общественный орган, осуществляющий координацию деятельности научно-педагогической общественности образовательных учреждений направленной на развитие содержания математического образования, его научно-методического обеспечения и на повышение качества математической подготовки школьников, абитуриентов, студентов, аспирантов [1]. Работой НМС руководили такие выдающиеся ученые как академики Андрей Николаевич Колмогоров и Андрей Николаевич Тихонов.

В 2000 году в Великих Татрах (Словакия) НМС организовал и провел конференцию «Образование, наука и экономика в вузах на рубеже тысячелетий», председателем организационного и программного комитетов был великий русский математик и педагог академик Сергей Михайлович Никольский. В материалах Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах на рубеже тысячелетий» опубликованы результаты личных исследований в России, СНГ и за рубежом члена НМС профессора Московского университета В.М. Тихомирова, обобщённых им, позволили ранжировать цели математического образования, которые по своей практической значимости группировались вокруг следующих тем:

Великие Татры 2000 г. Академик РАН С.М. Никольский, профессор Ягола А.Г.

- *интеллектуальное развитие,*
- *ориентация в окружающем мире,*
- *формирование мировоззрения,*
- *физкультура мозга,*
- *подготовка к будущей профессии,*
- *подготовка в Вуз.*

Примерно так представляют себе цели математического образования отечественные учителя, математики, педагоги, деятели просвещения, хотя в развитых странах Запада на первое место ставят подготовку к профессии.

25 сентября 2012 г. на заседания Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки РФ, в который входят представители ведущих вузов России (зав. кафедрами математики, проректоры, профессора), с докладом «К разработке концепции математического образования РФ. Почему математика нужна каждому?» выступил академик Алексей Львович Семенов. Основной вывод его выступления, текста его Доклада Совету при Президенте Российской Федерации по науке и образованию следует, что мы на пути создания фактически во многом новой отечественной системы получения и воспроизводства знаний, необходимой для решения задач национального развития РФ. Анализ мирового опыта развития математического образования позволяет выделить три его важные тенденции [2]:

- понимание необходимости математического образования для всех людей (и в том числе для всех школьников и студентов) и широкая постановка соответствующих исследований (в том числе педагогических, что привело к появлению значительного числа новых базовых и альтернативных учебников по математике);
- стремление к включению общеобразовательных математических курсов в учебные планы на всех ступенях общего и профессионального образования

- глубокая дифференциация математической подготовки студентов вузов и школьников.

Делегация Академии информатизации образования в составе президента Ваграменко Я.А., ректора ПГУ им. Т.Г. Шевченко Берила С.И., главного учёного-академика секретаря президиума АИО профессора Русакова А.А. была приглашена весной 2014 года Институтом математики и информатики Болгарской академии наук на 43-ю Весеннюю международную конференцию Союза болгарских математиков. Болгарские ученые осуществляют национальную программу информатизации образования, во многом ориентированную на западные традиции, однако проявляют большой интерес к нашему российскому опыту. И вообще, все то, что касается России, по прежнему воспринимается там с большой заинтересованностью, сохраняется дух принадлежности к единому славянскому миру.

Академики А.Л. Семенов (Россия) и Б.Х. Сендов (Болгария) обсуждают проблемы развития математического образования (март 2013 г.)

Мы о многом беседовали с выдающимся ученым, ранее бывшим ректором Софийского университета, президентом Болгарской академии наук, председателем национального парламента, крупным математиком ***Благовестом Христовичем Сендовым***, книги которого широко издавались в России, в том числе учебник по математическому анализу, написанный вместе с ректором МГУ им. М.В. Ломоносова В.А. Садовничим.

Конференция состоялась в г. Боровец, где автор статьи выступил с пленарным докладом. Был организован и хорошо работал круглый стол «Концепции развития математического образования», который проходил под руководством академика РАН, академика и члена президиума РАО А.Л. Семенова, ректора МПГУ. В недрах самой математики (после работ Н.Бурбаки в 1960-70г.) сейчас вновь существенно переоценивается понятие о ее предмете, об исходных и всеобщих его признаках. Это обстоятельство тесно связано с определением природы самой математической абстракции, способов ее выведения, т.е. с логической стороной проблемы, которую нельзя не учитывать при обсуждении уже реализации[1] «Концепции развития математического образования» (и естественно при создании учебного предмета по математике и информатике). Из активной дискуссии участников круглого стола, а среди них были представители 7 стран, акцентируем внимание, учитывая утвержденный план мероприятий Министерства образования и науки Российской Федерации, на следующем:

1. Всякий объект информационных технологий, проектируется в первую очередь, как математический объект. Более того материальный объект все чаще проектируется сначала в цифровой форме, затем из цифровой формы создается экранный и одновременно материальный образ (трехмерная печать – прототипирование).
2. Математическое образование и математическая деятельность – включают сферу прикладной математики и информатики. В частности, создание средств и инструментов ИКТ является прежде всего математической деятельностью.
3. Информационная, цифровая цивилизация, экономика, основанная на знании, требуют новых видов и уровней математической грамотности, культуры и компетентности, как от профессионалов в области математики и информатики, так и от простых граждан.
4. Сознательное владение компьютерной техникой также невозможно без математических знаний.
5. Самая важная, сложная и проблемная область цифровых технологий при изучении математики является применение цифровых образовательных ресурсов. Более простая часть – информационные источники, в первую очередь открытый банк заданий, затем учебные тексты (учебники и т.д.).

Нам хорошо известны автоматизированные Пакеты программ электронного тестирования, с последующей автоматической проверкой результатов тестирований. Здесь есть еще достаточное количество проблем, наверное прежде всего связанных с разнообразием видов теста (а значит и формы ответа), с развитием информационного ресурса эти Пакеты будут совершенствоваться. В современных условиях последовательного увеличения нагрузки преподавателя вуза остро стоит проблема автоматизации всего учебного процесса, и здесь уже есть различные наработки. Педагогическая наука серьезно отстает от практики. Методологической, дидактической проблемой является формирование принципов составления учебных заданий, например по математике, с выполнением требований:

- автоматической проверки решения задачи;
- автоматического сопровождения при решении задачи (говорят об интерактивности Пакета);
- сохранение прежнего качества подготовки по математике.

И не специалист сознает и понимает, не всякий ответ математической задачи может быть сегодня проверен с помощью программных средств, ну а с проверкой и сопровождением самого хода решения трудности могут быть непреодолимыми. Большая и кропотливая работа требующая пересмотра и ревизии лекционных курсов и комплектов задач к ним, позволяющая автоматизировать процесс обучения математике.

---

[1] Приказ №765 Минобрнауки России от 3.04.2014г. Об утверждении плана мероприятий Министерства образования и науки Российской Федерации по реализации Концепции развития математического образования в Российской Федерации, утвержденной распоряжением
Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г.

В октябре этого года мы продолжили обсуждение реализации концепции на конференции Приднестровского государственного университета имени Т.Г.Шевченко (г. Тирасполь ПМР) в «Русском центе» университета. Коллектив научно-исследовательской лаборатории «Дидактика математики» ПГУ им. Т.Г.Шевченко ознакомил с результатами исследования сотрудников лаборатории, которое проводилось согласно плану по следующим направлениям:

- Изучение теоретических основ определения качества математического образования;
- Исследование математической подготовки на уровне начальной школы;
- Исследование математического образования на уровне основной школы;
- Исследование управленческих проблем математического образования развивающей направленности;
- Математическое образование одаренных учащихся и студентов;
- Математическое моделирование при обучении решению текстовых задач;
- Формирование универсальных учебных действий и исследовательских компетенций;
- Проблемы оценки качества математического образования;
- Разработка концептуальных требований к качеству математического образования.

В «Русском центре» ПГУ им. Т.Г. Шевченко, октябрь 2014.
Декан фиэико-математического факультета Стамов И.Г., профессор Русаков А.А., президент Академии информатизации образования Ваграменко Я.А.

Об актуальности темы исследования говорит хотя бы тот факт, что наметилась тенденция снижения качества образования, которая выявилась ещё при первых контрольных замерах учебных достижений учащихся начальной и основной школ. Исследования лаборатории «Дидактика математики» социально значимы и открыты, они доступны через наши публикации [3], [4], [5], а рекомендации по использованию моделирования размещены на сайте сотрудника лаборатории с открытым доступом.

Среди принципов математического образования особое место занимает один из кардинальных вопросов: должен ли соблюдаться в вопросах математического образования принцип свободы или оно в значительной мере должно использовать элементы принуждения? Академик РАН В.В. Козлов, считает что азы точных наук нужны каждому: «Учеба в школе - это в принципе не такое уж приятное дело. Скажу жестче; любая школа содержит некий элемент насилия, поскольку ребят заставляют изучать то, к чему у многих из них душа не лежит» (газета Известия 22.01.2010). Старшее поколение помнит, что в Советское время государство контролировало все стороны жизни каждой личности, и образование было единым для всех, учились все по единым учебникам, единым предметам, и возможность выбора сводилась к минимуму. Очевидно, однако, и то, что человеку необходимо предоставить возможность выбора. Но без определённого стимулирования к получению образования, массовое образование невозможно. Необходимо именно стимулирование, создание такой атмосферы в обществе, когда образованность, широта взглядов были бы среди основных критериев оценки личности. Видными академиками учёными-математиками России (А.Н.Тихонов, С.М.Никольский) считалось естественным, чтобы в начальной и частично в основной школе свобода выбора была несколько ограничена, и чтобы обучение в значительной мере было единым, но чтобы каждому была понятна его необходимость и разумность, а далее могло бы идти ветвление и «многоуровневость».

Наряду с принципом свободы в вопросах образования рекомендуется руководствоваться принципом разумного консерватизма, включающего в себя преемственность с взвешенным учётом положительного опыта, накопленного отечественным математическим образованием.

Понятно, что естественнонаучное образование, как и наука в целом, не является гарантом разумного и устойчивого развития общества. Однако сегодня мы сознаем, что в XXI веке роль знаний станет определяющей, что успешными и благополучными смогут стать только те общества, которые научатся ценить и развивать интеллект, а также эффективно использовать этот потенциал в интересах всех его членов. Именно поэтому очень хочется надеяться, что сегодня не повторятся ошибки прошлых лет и веков, а российское образование вместе со всей страной не погрузятся во тьму.

Литература

1. **http://www.cso-nms.ru**
2. Русаков А.А. Деятельность Академии информатизации образования по развитию отечественного и международного образовательного пространства, Информатизация образования и науки №4 (24)/2014, стр.119-127.
3. Русаков А.А., Гайдаржи Г.Х. Теоретико-методологические аспекты проектирования концепции математического образования, ISSN 1310-2230 Mathematics and Informatics. Bulgarian Journal of Educational Researh and Practice, Volume 57 Number 4 2014 – p.492-502.
4. Русаков А.А. Методологические аспекты реализации концепции математического образования в условиях построения информационного общества, материалы VIII Международной научно-методической конференции «Совершенствование математического образования – 2014: проблемы и пути их решения» ПМР, г. Тирасполь, 15-18 октября 2014 года, издательство Приднестровского государственного университета, 3300 г. Тирасполь ул. Мира 18, С 35- 44
5. Rusakov A. On the self-learning activities of university students, ISSN 1313-3330 Proceeding of the 43 Spring conference of the Union Bulgarian mathematicians, Borovetz, april 2-6, 2014/–p.211-217.

К ВОПРОСУ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С МОДУЛЕМ

Русаков А.А., Русакова В.Н.

ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет

приборостроения и информатики»

Россия, 107996, Москва, Стромынка, 20

e-mail: vmkafedra@yandex.ru

ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет»

Россия, 302015, г.Орел, ул. Комсомольская, 95

e-mail: v.n.rusakova@yandex.ru,

Решение задач с модулем – одна из наиболее сложно усваиваемых учащимися тем школьной математики, что подтверждает, в том числе, большое количество ошибок в таких типовых задачах, встречающихся на ЕГЭ [1].

Чаще всего предлагаемое учащимся старших классов и студентам решение задач с модулем предполагает «раскрытие модулей» входящих в выражение [2],[3]. Что подразумевается под таким решением? Числовая прямая разбивается на интервалы, на каждом из которых подмодульные выражения сохраняют знак. То есть чисто механически выполняются следующие действия (рассмотрим простейший случай – «раскроем модуль» в выражении $|x-a|$):

1) приравнивается к нулю многочлен, стоящий подмодулем: $x-a=0$;
2) находятся его корни: $x=a$;
3) определяются промежутки, на которых многочлен сохраняет знак: положителен ($x-a>0$ при $x>a$) и при «раскрытии модуля» выражение записывается в неизменном виде – просто опускается знак модуля (получаем: $x-a$) или отрицателен ($x-a<0$ при $x<a$) и при «раскрытии модуля» перед выражением ставится знак «минус» (получаем: $-(x-a)=-x+a$).

Далее задача решается отдельно на каждом из данных промежутков, а ответом становится совокупность полученных решений.

При таком решении задач от учащихся ускользает геометрическая интерпретация модуля числа. Как следствие, трудности вызывает даже решение тривиального уравнения с модулем $|x|=a$ (не говоря о соответствующих неравенствах). Причем опрос учащихся, успешно справляющихся с такими заданиями, показывает, что главную роль играет просто выученное решение данного уравнения, а не понимание геометрического смысла модуля и его свойств. Отсюда частые ошибки в чуть более сложных заданиях. А ведь с геометрической точки зрения на модуль числа сразу видно, что на числовой прямой есть две точки, расстояние от которых до нуля равно *a*. Это точки *a* и *–a*. Значит, у уравнения $|x|=a$ есть два решения: $x=a$ и $x=-a$.

Между тем, в 6 классе понятие модуля вводится как расстояние. Вот, например, некоторые факты, которые содержатся в учебнике [4] (см. рис. 1):

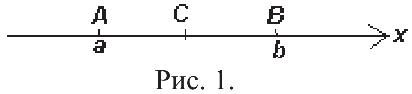


Рис. 1.

1) Расстояние от точки A(*a*) до начала отсчета, т.е. до точки O(0), называют модулем числа a и обозначают $|a|$.
2) Расстояние между точками *a* и *b* равно модулю разности координат этих точек: $|a-b|$.

Но далее работа с модулем не получает должного подкрепления, поэтому встречаясь с этим понятием в старших классах, школьники делают много ошибок, задачи, связанные с модулем считаются трудными, решаются подчас очень громоздко.

Например, рассмотрим уравнение $|x+1|+|x-3|=4$ [4].

1 способ. Рассмотрим решение через «раскрытие модулей», описанное выше.

Числа –1 и 3 (корни уравнений $x+1=0$ и $x-3=0$ соответственно) разбивают числовую прямую на три интервала, на каждом из которых подмодульные выражения сохраняют знак.

При $x\in(-\infty;\ -1)$ имеем $x+1<0$ и $x-3<0$, т.е. $|x+1|=-(x+1)=-x-1$ и $|x-3|=-(x-3)=-x+3$.

При $x\in[-1;\ 3]$, $x+1>0$ и $x-3<0$, т.е. $|x+1|=x+1$ и $|x-3|=-x+3$.

При $x\in(3;\ +\infty)$, $x+1>0$ и $x-3>0$, т.е. $|x+1|=x+1$ и $|x-3|=x-3$.

Т.о. на каждом из промежутков получаем,

$$\begin{cases}x\in(-\infty;\ -1),\\ -x-1-x+3=4;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;\ -1),\\ x=-1;\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing$$

или

$$\begin{cases}x\in[-1;\ 3],\\ x+1-x+3=4;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[-1;\ 3],\\ 0\cdot x=0;\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-1;\ 3]$$

или

$$\begin{cases}x\in(3;\ +\infty),\\ x+1+x-3=4;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(3;\ +\infty),\\ x=3;\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$$

Совокупность решений дает ответ: $x\in[-1;\ 3]$

2 способ. Рассмотрим решение при помощи геометрической интерпретации модуля.

На числовой прямой найдем все точки с координатой *x*, сумма расстояний от которой до точек с координатами –1 и 3 равна 4 – геометрическая интерпретация данного уравнения.

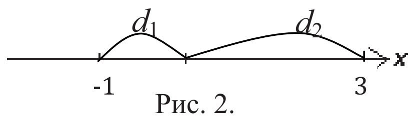


Рис. 2.

Очевидно (см. рис. 2), что $d_1+d_2=4$ при любом $x\in[-1;\ 3]$.

Если говорить о простоте и наглядности геометрического метода решения задач с модулем, можно привести такой практический пример. Необходимо построить магазин таким образом, чтобы расстояние до него от двух домов было одинаковым. Естественное решение задачи – строить нужно в середине отрезка, соединяющего эти дома. Формально этот ответ не совсем точен, так как геометрическим местом точек на плоскости, равноудаленных от двух данных является серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки. Но с точки зрения здравого смысла из всех таких точек разумно выбрать ту, для которой требуемые расстояния не только равны, но являются и наименьшими из возможных. Действительно, если K – произвольная точка серединного перпендикуляра к отрезку AB, а C – середина этого отрезка, то KA > CA, так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета (см. рис. 3).

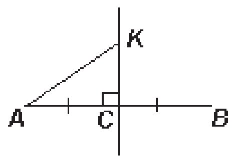


Рис. 3.

Эта несложная задача дает «ключ» к решению некоторых уравнений, содержащих модуль числа. Вот несколько примеров.

1. Решите уравнение: $|x-2|=|x-4|$.

Решение. Условие задачи означает, что надо найти на координатной прямой точку, которая равноудалена от точек $A(2)$ и $B(4)$. Понятно, что это середина отрезка AB, то есть $C(3)$. Следовательно, решением уравнения является $x=3$ (см. рис. 4).

Ответ: 3.

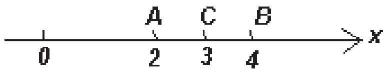


Рис. 4.

Более того, с той же легкостью можно решать и некоторые неравенства с модулями.

2. Решите неравенство: $|x + 1| \geq |7 - x|$.

Решение. Из определения модуля следует, что *модули противоположных чисел равны*, а для того, чтобы использовать формулу расстояния между точками, под знаком модуля должна стоять разность координат. Поэтому, данное неравенство удобно переписать в таком виде: $|x - (-1)| \geq |x - 7|$. Тогда его решением будут все точки координатной прямой, для которых расстояние до $A(-1)$ не меньше, чем расстояние до $B(7)$. Понятно, что этим свойством обладает точка $C(3)$ – середина отрезка AB, а также все точки лежащие правее точки C (см. рис. 5). Таким образом, решением неравенства являются все числа, большие или равные трем, то есть $x \geq 3$.

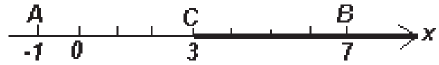


Рис. 5.

Ответ: $[3; +\infty)$.

Переформулируем исходную задачу. Пусть магазин требуется построить так, чтобы сумма расстояний от него до двух домов была наименьшей. Интуиция подсказывает, что магазин надо строить на отрезке, соединяющем эти дома, но в какой точке? Оказывается, что в любой точке этого отрезка! Действительно, ***какую бы точку M на отрезке AB мы не выбрали, сумма расстояний от нее до концов отрезка одна и та же, и она равна длине отрезка AB*** (именно это свойство использовано при решении указанного выше примера вторым способом).

Если же выбрать произвольную точку N на прямой AB вне отрезка, то сумма расстояний от нее до точек A и B, очевидно, будет больше, чем длина AB. Аналогично, если точка K не лежит на прямой AB, то $KA + KB > AB$ по неравенству треугольника (см. рис. 6). Полученный факт позволяет решать простейшие задачи о сумме двух модулей.

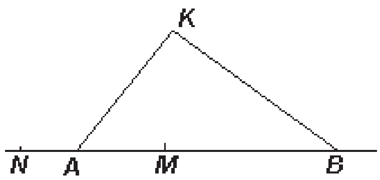


Рис. 6.

3. Найдите наименьшее значение выражения $|x + 4| + |x - 2|$.

Решение. Рассмотрим на координатной прямой точки $A(-4)$ и $B(2)$ и найдем такие точки, сумма расстояний от которых до точек A и B наименьшая. Эти точки, как было доказано, лежат на отрезке AB, а искомая сумма равна длине отрезка AB, то есть равна 6 (см. рис. 7).

Рис. 7.

Ответ: 6.

Можно также решать уравнения и неравенства.

4. Решите уравнение: $|x + 4| + |x - 2| = 10$.

Решение. Найдем на координатной прямой точки, сумма расстояний от которых до точек $A(-4)$ и $B(2)$ равна 10. Понятно, что на отрезке AB они лежать не могут, иначе эта сумма была бы равна 6, значит, они лежат вне этого отрезка. Искать их можно, например, так: заметим, что для любой точки N, лежащей на координатной прямой вне отрезка, сумма $NA + NB = 2NC$, где $C(-1)$ – середина отрезка AB. Действительно, $NA = NC + 0{,}5AB$, $NB = NC - 0{,}5AB$ (или наоборот).

Таким образом, искомые точки удалены от точки $C(-1)$ на расстояние 5. Получим, что решением уравнения являются два числа: 4 и –6 (см. рис. 8).

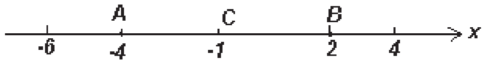


Рис. 8.

Ответ: –6; 4.

5. Решите неравенство: $|x + 4| + |x - 2| > 10$.

Решение. Из предыдущих рассуждений следует, что решением неравенства являются точки координатной прямой, лежащие левее числа –6 и точки, лежащие правее числа 4.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (4; +\infty)$.

Усложним задачу. Пусть теперь вдоль прямой дороги стоят семь домов, причем расстояния между соседними домами не обязательно одинаковы. В какой точке дороги надо построить магазин, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

Обозначим дома по порядку точками A_1, A_2, ..., A_6, A_7 на прямой, а искомую точку – через X (см. рис. 9). Для того, чтобы сумма $XA_1 + XA_7$ была наименьшей точка X должна находится на отрезке A_1A_7. Сумма $XA_2 + XA_6$ – наименьшая, если точка X лежит на отрезке A_2A_6, а сумма $XA_3 + XA_5$ – наименьшая, если X лежит на отрезке A_3A_5. Следовательно, сумма $XA_1 + XA_2 + XA_3 + XA_5 + XA_6 + XA_7$ – наименьшая, если точка X принадлежит всем трем отрезкам, то есть лежит на отрезке A_3A_5. Осталось сделать наименьшим расстояние от X до A_4. Понятно, что это произойдет в том случае, если эти точки совпадают. Таким образом, магазин надо строить около четвертого дома, причем полученный результат никак не зависит от расстояний между соседними домами!

Рис. 9.

6. Найдите наименьшее значение суммы: $|x-1| + |x-2| + ... + |x-11|$.

Решение. Условие задачи означает, что на координатной прямой надо найти точку, сумма расстояний от которой до точек $A_1(1)$, $A_2(2)$, ..., $A_{11}(11)$ будет наименьшей. По аналогии с только что рассмотренной задачей получим, что это точка $A_6(6)$. Остается подсчитать сумму расстояний от этой точке до остальных: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)\cdot 2 = 30$.

Ответ: 30.

7. Где проводить турнир? (Задача взята из замечательной книги *Р. Хонсбергера* «Математические изюминки» [6]).

В Нью-Йорке шахматных мастеров больше, чем на всей остальной территории США. Планируется провести шахматный турнир с участием всех мастеров. Решено, что турнир будет проведен в таком месте, чтобы сумма расстояний всех переездов была наименьшей. Нью-Йоркские мастера считают, что этому критерию удовлетворяет их город, а мастера с Западного побережья настаивают на том, что турнир надо проводить в городе, который является «центром тяжести» всей совокупности мест, в которых живут шахматисты. Кто из них прав?

Оказывается, правы мастера из Нью-Йорка! Докажем это. Рассмотрим всех мастеров, живущих не в Нью-Йорке, и каждому из них дадим в пару какого-то из шахматистов Нью-Йорка. Для каждой такой пары сумма переездов будет наименьшей, если турнир проводить в городе, лежащем в любой точке отрезка MN, где M – место жительства выбранного шахматиста, а N – Нью-Йорк. Значит, искомая сумма расстояний не меньше, чем сумма длин всех таких отрезков. Эти отрезки имеют единственное пересечение – точку N, поэтому, для всех уже рассмотренных шахматистов искомая сумма наименьшая, если турнир проводить в N. Остались не рассмотренными только те мастера из Нью-Йорка, которым не хватило пары, но для них проведение турнира в Нью-Йорке также оптимально.

Литература

1. Бубен С.В. Математика: полный сборник задач для подготовки к централизованному тестированию / С.В. Бубен, В.В. Казаченок. – Минск : Аверсэв, 2011. – 511 с. – (Школьникам, абитуриентам, учащимся).

2. Демонстрационные варианты КИМ ЕГЭ// Официальный информационный портал Единого государственного экзамена http://www.ege.edu.ru/ru/main/demovers/

3. Русаков А.А., Чубариков В.Н. Преподавание математики в специализированных физико-математических школах// Современные проблемы преподавания математики и информатики: Материалы научно-методической конференции: В 3 ч. - Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2004. - Ч.III.

4. Зубарева И.И. Математика. 6 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2009. – 264 с.
5. Кожухов С.К. О методической целесообразности решения задач разными способами // Актуальные проблемы обучения математике (К 155-летию со дня рождения А.П. Киселева) : Труды Всероссийской заочной научно-практической конференции. Орел : Издательство ОГУ, Полиграфическая фирма «Картуш», 2007. – С. 120-123.
6. Хонсбергер Р. Математические изюминки – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 176 с. – (Б-чка «Квант». Вып. 83).

СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ РЕАЛИЗАЦИИ ЗДОРОВЬЕСБЕРЕГАЮЩЕЙ НАПРАВЛЕННОСТИ УЧЕБНО-ВОСПИТАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Салаватова С. С., Сандулова Л.М.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

453103, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49

Тел.: 89173792705, e-mail: sssalavatova@mail.ru

Салаватов М. Х.

Стерлитамакский институт физической культуры (филиал) УралГУФК

453100, г. Стерлитамак, ул. Садовая, 20

Тел.: 89053575361, e-mail: mh23091998@gmail.com

Проблема сохранения здоровья учащихся на сегодняшний день выделяется в качестве одной из наиболее острых как в различных официальных документах по образованию, так и в деятельности ученых и учителей-практиков.

Наше исследование, связанное с реализацией здоровьесберегающей направленности обучения различным школьным дисциплинам, в том числе и математике, проводится в рамках деятельности научно-образовательной лаборатории методических исследований Стерлитамакского филиала БашГУ (научный руководитель – проф. С. С. Салаватова).

Выбор системно-структурного подхода в качестве методологической базы исследования, подход к учебно-воспитательному процессу как целостной системе позволяет нам утверждать, что каждая школьная дисциплина, в том числе и математика, выступают в качестве структурных клеточек-подсистем (элементов-дифференциалов), составляющих учебно-воспитательный процесс школы, поскольку цели, содержание, методы, формы и средства обучения этих дисциплин строятся в соответствии с целями и требованиями целостного учебно-воспитательного процесса. Отсюда, все предметы должны в определенной мере вносить свою лепту в достижение общих целей школы, в том числе и целей сохранения и формирования здорового образа жизни. В этой связи перед каждым учителем возникает принципиально важный вопрос: как следует осуществлять обучение, в частности обучение математике, чтобы оно способствовало сохранению и укреплению здоровья за период обучения в школе, научило школьников использовать полученные знания в повседневной жизни.

Реализация здоровьесберегающей направленности обучения математике как подсистемы учебно-воспитательного процесса в школе предполагает, прежде всего, обогащение его целевого компонента через введение в этот компонент, соответственно, новой дополнительной задачи. То есть, кроме традиционных задач, стоящих перед обучением математике в школе, возникает еще и задача реализации здоровьесберегающей направленности. Целевой компонент системы, являясь его системообразующим компонентом, вносит свои коррективы в содержательный и технологические компоненты системы.

Изменение в содержании школьного математического образования в рамках тематики исследования мы видим на сегодняшний день в использовании текстовых задач, фабула которых содержит те или иные сведения о здоровом образе жизни, способствует профилактике вредных привычек учащихся и т.п. В дополнение к существующим в классической методике обучения математике классификациям текстовых сюжетных задач (в частности, предполагающим выделение задач с обучающими, воспитательными, развивающими и др. функциями в соответствии с целями образовательного процесса), нами проведена новая классификация таких задач: продифференцированы сюжетные задачи с нормативной, оценочной и регулятивной функциями. Сюжетная математическая задача будет отнесена нами к задачам с нормативной функцией, если в процессе ее решения обучающиеся приобретают знания, идеи, моральные понятия, принципы, выражающие ценности здорового образа жизни. Если же решение задачи позволяет школьникам выполнять оценку и самооценку своих действий, то такая сюжетная задача относится к задачам с оценочной функцией. И, наконец, сюжетную математическую задачу отнесем к классу задач с регулятивной функцией, если результаты ее решения позволяют формировать нравственные убеждения, которые оказывают существенное влияние на поведение школьника и регулируют его. Дифференциация эта условная, поскольку одна и та же задача может выполнять несколько функций.

Технологический компонент системы включает в себя технологии двух видов: здоровьесберегающие и здоровьесозидающие технологии.

К здоровьесберегающим технологиям мы относим те технологии, которые позволяют избегать в учебно-воспитательном процессе стрессовых для детей ситуаций, создают благоприятную эмоциональную обстановку на уроке, то есть технологии, направленные на сохранение физического, психического, социального, нравственного и духовного здоровья обучаемых. Среди них, в первую очередь – игровые технологии, технологии включения учащихся в целостную деятельность, технологии нейролингвистического программирования. Как показывает анализ опыта и исследования специалистов при обучении математике из трех каналов восприятия информации (аудиального, визуального и кинестетического) акцент делается обычно на визуальный канал. Мы же разрабатываем комплекс заданий, при которых визуальный канал «отдыхает». Среди таких заданий, к примеру, использование устных упражнений с закрытыми глазами: учитель диктует ряд вычислительных примеров, а ученики, положив головы на парту, закрыв глаза, производят в уме вычисления. А затем, подняв руку, не открывая глаз, пальчиками показывают ответ. Обычно упражнения составляются так, чтобы в ответе получилось число не более пяти. Пример такого упражнения: к 85 прибавить 15, разделить на 20, умножить на 2 и разделить на пять, прибавить минус 2, умножить на 250, прибавить 1 (в ответе получим 1). Такие упражнения позволяют, кроме того, развить внимание и память школьников, они интересны и полезны школьникам и тем, что дают возможность изменить положение тела в ходе урока. В состав здоровьесберегающих технологий мы включаем также использование на уроках математики физкультминуток. Физкульминутки снимают усталость, напряжение, позволяют переключаться с одного вида деятельности на другой, что обеспечивает улучшение кровообращения и снабжения кислородом клеток головного мозга, и, как следствие этого, способствуют снижению или снятию умственного напряжения. Особенностью использования разработанных физкультминуток является то, что они связаны с определенной математической темой.

К здоровьесозидающим технологиям мы относим те технологии, которые направлены на приобретение обучающимися знаний о нормах здоровья, оценку ими отрицательных и положительных влияний на здоровье, регулирование собственного поведения по отношению к сохранению здоровья. Конкретными примерами таких технологий в нашей модели являются использование в учебном процессе математических задач с тремя названными выше функциями, привлечение к составлению таких задач самих обучаемых, использование тематических дидактических игр в системе урочной и внеурочной работы, в ходе которых также используются задачи с нормативной, оценочной и регулятивной функциями.

Естественно, что обогащение целевого компонента и, соответственно, содержания уроков математики требует и дополнительного времени, что невозможно компенсировать только за счет поиска оптимальных технологий внутри одного предмета. Перспективы нахождения дополнительного времени мы видим в использовании интеграции с другими дисциплинами.

Как показали результаты опытно-экспериментальной работы, реализация здоровьесберегающей направленности обучения математике возможна и полезна. Такая работа, кроме приобщения подрастающего поколения к ведению здорового образа жизни, понимания ценности здоровья, его сохранения и развития, повышает интерес школьников к математике, практическую значимость уроков математики в глазах школьников и их родителей.

ПРОБЛЕМА МИНИМУМА ТРЕБОВАНИЙ К ШКОЛЬНОМУ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Седова Е. А., Троицкая С. Д.

Институт содержания и методов обучения РАО

103062, Москва, ул. Макаренко, д. 5/16

Тел.: 89036127361, e-mail: sedova@ismorao.ru

Система образования в Российской Федерации, действуя в соответствии с законодательством Российской Федерации и нормами международного права, признает право каждого человека на образование. Это право закреплено Конституцией РФ (ст. 43, ч. 1). В соответствии с Всеобщей декларацией прав человека (ст. 26) «образование должно быть направлено к полному развитию человеческой личности». При этом в Международном пакте об экономических, социальных и культурных правах (ст. 13) конкретизировано, что для реализации права на образование служат «школы, отвечающие тому минимуму требований для образования, который может быть установлен или утвержден государством».

Основным документом, регулирующим отношения в области образования в нашей стране, является Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». В нем отражена указанная выше гуманистическая тенденция в отношении образования каждого человека и ее неизбежные ограничения: «свобода выбора получения образования согласно склонностям и потребностям человека, создание условий для самореализации каждого человека, свободное развитие его способностей, включая предоставление права выбора форм получения образования, форм обучения, организации, осуществляющей образовательную деятельность, направленности образования в пределах, предоставленных системой образования» (ст. 3, ч. 1, параграф 7). Право на образование в интересах полного развития личности подкреплено положением о диверсификации общего образования − «дифференциации содержания с учетом образовательных потребностей и интересов обучающихся, обеспечивающих углубленное изучение отдельных учебных предметов, предметных областей соответствующей образовательной программы (профильное обучение)» (ст. 66, ч. 4).

С другой стороны, помимо права на образование, каждый человек в нашей стране имеет определенную обязанность: Конституция устанавливает обязательное основное общее образование (ст. 43, ч. 4), в Законе «Об образовании в Российской Федерации» к обязательным уровням образования отнесены начальное, основное и среднее общее образование (ст. 66, ч. 5). По завершении освоения основных образовательных программ основного общего и среднего общего образования предусмотрена обязательная государственная итоговая аттестация (ст. 59, ч. 3-4), которая во втором случае проводится в форме единого государственного экзамена (там же, ст. 13).

Здесь уместно сделать одно замечание: в истории отечественного образования двадцатого века отчетливо прослеживается тенденция чередования периодов диверсификации общего образования с периодами «стабильности», которым с определенным временным сдвигом соответствуют периоды, когда окончание школы и поступление в вузы происходит преимущественно без экзаменов (например, в 90-х годах прошлого века – по системе «школа-вуз», по «спискам ректора» и т.п.) или по результатам сдачи унифицированных экзаменов соответственно. На сегодняшний день применительно к математическому образованию мы имеем иную картину – симбиоз диверсифицированного школьного образования и, в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего общего образования (далее ФГОС СОО), обязательного для всех единого государственного экзамена по математике (часть II, параграф 10). Это противоречие усугубляется тем, что такие понятия как минимум содержания образования, требования к уровню подготовки выпускников, тем более программа для поступающих в вузы и т.п. ушли из педагогического лексикона. Содержание среднего общего образования определяется содержательным разделом основной образовательной программы (ФГОС СОО, часть III, параграф 14), которую каждое образовательное учреждение разрабатывает и утверждает самостоятельно (ФГОС СОО, часть III, параграф 16).

Очевидно, что формирование и развитие математического мышления школьников можно проводить на весьма различном математическом содержании. Свидетельством тому является наличие в настоящий момент нескольких десятков учебников по математике в Федеральном перечне учебников на 2014-2015 учебный год, и на практике ученики одного возраста учат одни и те же предметы по разным учебникам. В связи с этим сосредоточим внимание на собственно педагогической проблеме: специфика математического знания такова, что в этих условиях содержание школьного математического образования у разных авторов может сильно различаться. Поэтому круг заданий, которые можно предлагать выпускникам различных школ на ЕГЭ по математике без опасения попасть на материал, который кем-то из экзаменуемых не изучался, относительно узок. Между тем, слово экзамен ведет происхождение от латинского слова exigo, обозначавшего первоначально стрелку у весов [1]. И как ни парадоксально, мы в XXI веке пришли к «взвешиванию» математической подготовки при помощи одной только стрелки, без четко и однозначно заданной шкалы.

Таким образом, в условиях проведения обязательной для всех государственной итоговой аттестации по математике в форме единого государственного экзамена необходимо решить проблему установления минимума требований к школьному математическому образованию. Учитывая специфику математического знания, этот минимум должен составлять основу содержания всех математических дисциплин, изучаемых в школе [2], но не в виде перечня дидактических единиц, обязательных для изучения, как это было сделано в образовательных стандартах первого поколения (2004), а в виде единого списка понятий и фактов (алгоритмов, теорем и т.д.), обязательных для изучения и одинаково формулируемых во всех учебниках. Фактически это означало бы фиксацию основных понятий и логических связей между ними, а, следовательно, фиксацию некоего минимального фундаментального курса для той или иной математической дисциплины, который должна содержаться в КАЖДОМ учебнике по этой дисциплине. Такое «ограничение свободы» на уровне содержания образования даст возможность при формировании экзаменационных работ по математике перейти к качественно иному составу задач (к примеру, можно будет включать задачи на доказательство). Если же к этому добавить и фиксацию очередности изучения понятий и теорем (еще некоторое «ограничение свободы»), то это позволит проводить централизованный мониторинг усвоения математики школьниками в течение всего периода обучения, а это означает, что его итоги можно будет использовать не только для констатации «положения дел», но и в целях коррекции образовательного процесса.

В заключение остается отметить, что математика в нашей стране относится к числу обязательных школьных предметов ‑ это наша традиция. ЕГЭ по математике является обязательным для всех выпускников школы – это требование времени. Хорошая и прочная математическая подготовка, необходимая «обычному» человеку, не может быть измерена той же процедурой, какой измеряются нюансы в математической подготовке одаренных детей. Установление минимального фундаментального курса математики позволит выстроить добротный и промежуточный, и итоговый контроль. А лучшие из лучших учеников вполне могут показать себя на олимпиадах и в устных собеседованиях.

Литература

1. Энциклопедический словарь Ф. А. Брокгауза и И. А. Ефрона [Электронный ресурс]. − СПб: Брокгауз-Ефрон, 1890-1907. – Т. XL (79). – с. 224. – URL: http://www.runivers.ru/lib/book3182/10210/.

2. Дорофеев, Г. В., Седова, Е. А., Троицкая, С. Д. Концепция профильного курса математики [Текст] // Математика в школе. – 2006. − № 7. − С.14-25.

АКТУАЛИЗАЦИЯ ПОСТКЛАССИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ В РАМКАХ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИН ИНФОРМАЦИОННО - МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦИКЛА

Семеновых Д.Н., Орлик Л.К.

Российский государственный социальный университет

129226, г. Москва, ул. Вильгельма Пика д.4

Тел. 8(916)8393492, email semjonovych@mail.ru

Тел. 8(917)5125903, email lubov.orlik@gmail.com

Современный подход к моделированию динамических систем основан на постклассических междисциплинарных математических теориях детерминированного хаоса, фрактальной геометрии, теории катастроф, теории клеточных автоматов, теории метаигр и теории драмы, теории возможностей. Математическая модель как специальная форма кодирования информации, содержащая в себе потенциальное знание, обеспечивающее предсказательную способность модельного прогнозирования, часто базируется на новых логиках: квантовой, пороговой, темпоральной, нечёткой. «Язык» нелинейной науки включает такие понятия, как самоподобие, бифуркации, странные аттракторы, нечёткие множества и события.

Новые понятия вводятся в связи с профессионально ориентированными математическими моделями, в которых демонстрируется широчайший диапазон масштабной инвариантности.

В рамках базовых курсов – фрагментарно и на регулярной основе – авторами осуществляется пропедевтика новых понятий, теорий и моделей [1]. Элементарное введение, предшествующее глубокому систематическому изучению предмета, позволяет вырабатывать навыки распознавания классов решаемых задач, умение выделять объект из контекста, умение не зависеть от окружающего задачу шумового фона, а также формирует первичные представления о методах решения.

Так, в курсе математического анализа при изучении числовых последовательностей рассматривается самоподобная геометрическая прогрессия $\ldots,\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\ 1,2,4,8,\ldots$ с коэффициентом скейлинга 2. Качественный анализ геометрической прогрессии приводит к понятию бифуркации.

При изучении понятия предела последовательности конструируется суммарная длина звеньев ломаной Коха: $L_0 = 1,\ L_1 = 4/3,\ L_2 = 16/9,\ldots,\ L_n = (4/3)^n$, вычисляется $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \infty$. Замкнутая ломаная Коха образует фрактальную антенну - «снежинку». Составляется формула $T_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ для подсчета числа треугольников со стороной $l_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ и площадью $S_n = \frac{S_0}{9^n} = \frac{\sqrt{3}}{4\cdot 9^n}$, а также вклад площадей этих треугольников в площадь снежинки $T_n \cdot S_n = 3/4 \cdot (4/9)^n \cdot S_0$. Используя формулу суммы членов бесконечно убывающей прогрессии для n-ой итерации площади снежинки

$$\left(1+\frac{3}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right)S_0,$$

получается $\left(1+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)S_0 = \frac{8}{5}S_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5}$. Вводится понятие размерности Хаусдорфа. Канторово множество рассматривается как конструктивный фрактал и находится его размерность $D(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ и размерность ломаной Коха $D(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$.

При обобщении понятия арифметической и геометрической прогрессий рассматривается рекуррентное соотношение, задающее арифметико-геометрическую прогрессию (АГП):

$U_1 = a_1$, $U_{n+1} = qU_n + d$, где q - знаменатель, а d – разность АГП,

а также формула ее общего члена

$$U_{n+1} = q^n \left(U_1 + \frac{d}{q-1} \right) + \frac{d}{1-q}.$$

Формула общего члена АГП моделирует социальную мобилизацию населения. Вычислительный эксперимент с помощью пакета прикладных математических программ Mathcad позволяет, в зависимости от значений параметров q и d АГП, привести интерпретацию сценариев этой модели в терминах мобилизации: избирательной, рекламной, военной, PR-кампании. Рекуррентная формула допускает также толкование сценариев торга в рамках паутинной модели рынка [2].

Применение рекуррентной формулы АГП является фундаментом для дальнейшего изучения разностных и дифференциальных уравнений, которое предваряется рассмотрением понятия производной. В качестве иллюстрации применения производной рассматриваются экономические термины, в первую очередь, предельные величины в экономике – предельные издержки, предельная норма замены. Далее, в развитие понятия производной вводится определение эластичности функции в форме логарифмической производной. Эластичность интерпретируется в фундаментальных категориях рыночной экономики: спроса и предложения. С помощью этого понятия формализуется гипотеза автомодельности (самоподобия) роста населения, которая приводит к степенному закону этого роста. Показатель степени и есть эластичность численности населения по времени.

Изучение разностных и дифференциальных уравнений насыщается модельными интерпретациями социальных, экономических, политических, экологических и технических процессов. Динамическая сложность современного социума влечёт глоболокальное многообразие, пронизанное бифуркациями. Данный этап нелинейного саморазвития социума, находящегося в разных темпомирах, знаменует переход к обществу, основанному на упорядоченном хаосе [3]. «Жесткая» модель естественного роста

$$x_{t+1} = q \cdot x_t, \quad q = const$$

рассматривается как модель народонаселения Мальтуса, модель радиоактивного распада, барометрическая формула, закон развития электроники Мура, динамики тезауруса человека.

Далее осуществляется переход от жесткой модели к «мягкой» модели Ферхюльста с переменным мальтузианским коэффициентом $q = r(1 - x_t)$, где управляющий параметр $r = const$:

$$x_{t+1} = r(1 - x_t)x_t.$$

Полученное логистическое уравнение, во-первых, увязывается с бифуркацией удвоения периода. Во-вторых, на основе анализа Р. Мэя и научно-популярной версии Фейгенбаума, осуществляется сценарное прогнозирование динамики распространения эпидемий (биотерроризм), слухов, массовых беспорядков, компьютерных вирусов, уравнение интерпретируется как модель роста биологической популяции и модель диффузии инноваций [4].

В разностной логистической модели диффузии инноваций

$$x_{t+1} = r(M - x_t)x_t, \qquad (1)$$

где x_t - число лиц, принявших инновацию к моменту времени *t*, рассматриваются следующие параметры: M - максимально возможное число лиц, способных адаптировать данное нововведение и r – управляющий параметр, от величины которого зависит характер динамики. Для исследования этой модели соответствующим выбором масштаба уравнение (1) преобразуется к виду

$$x_{t+1} = r(1 - x_t)x_t. \qquad (2)$$

Здесь x_t - доля лиц, принявших инновацию к моменту времени *t*. Качественный анализ модифицированной модели (2) основан на бифуркационной диаграмме. Вычисления показали, что при переходе параметра r через критическое значение $r_1 = 3$ происходит бифуркация: вместо одной точки покоя ξ_1 появляются две новые ξ_2 и ξ_3. Переход r через следующее бифуркационное значение r_2 $(3 < r_2 < 4)$ приводит к появлению четырёх новых точек покоя ξ_4, ξ_5, ξ_6, ξ_7, то есть к рождению цикла S^4. Дальнейшее увеличение r обнаруживает аналогичные бифуркационные значения $r_3, r_4, r_5 ...$, связанные с рождением циклов S^8, S^{16}, S^{32}, ..., S^{2n},.... Наблюдаются каскады удвоения периода: последовательные бифуркации удвоения следуют одна за другой так, что на конечный отрезок изменения параметра $r \in [3; r_\infty)$, $r_\infty = \lim_{n\to\infty} r_n = 3.56994...$ приходится бесконечное число удвоений.

При изучении модели приводится интерпретация возможных сценариев диффузии инноваций:

1) при $0<r<1$ неразвивающийся во времени, монотонно угасающий процесс диффузии инноваций;

2) при $r>4$ модель теряет смысл, так как последовательность значений $x(t)$ стремится к $-\infty$;

3) при $1<r<3$ доля лиц, принявших инновацию колеблется, стремясь к единственному значению ξ_1=0,6296, которое является точкой покоя

4) при $3<r<4$ наблюдаются каскады удвоения периода. А именно:

при $r = 3.1$ после нескольких итераций формируемая последовательность получается периодической. Доля лиц, принявших инновацию, колеблется между двумя точками покоя $\xi_2 = 0.557$ и $\xi_3 = 0.764$, чередуясь через единицу времени;

при $r = 3.5$ двухтактный цикл стал четырёхтактным, а доля лиц, принявших инновацию, колеблется между четырьмя точками покоя.

Далее рассматривается разностная модель диффузии инновации с запаздыванием: $x_{t+1} = rx_t(1 - x_{t-1})$. И здесь приводится интерпретация возможных прогнозных сценариев:

1) при $0 < r < 2$ доля лиц, принявших инновацию, колеблется, то увеличиваясь, то уменьшаясь, стремясь к единственному положению равновесия $\xi = 0.46$ (рис. 1);

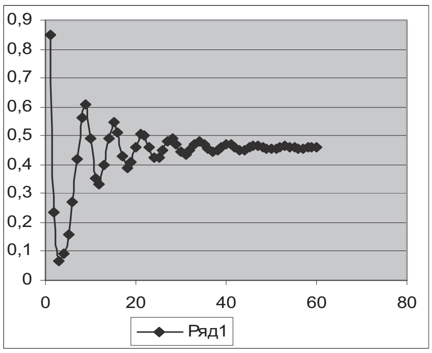


Рисунок 1

2) при $r > 2$ систему охватывают периодические колебания. Качественное изменение динамики говорит о том, что $r = 2$ является точкой бифуркации – положение равновесия сменяется предельным циклом, так называется изолированное периодическое решение уравнения (рис. 2).

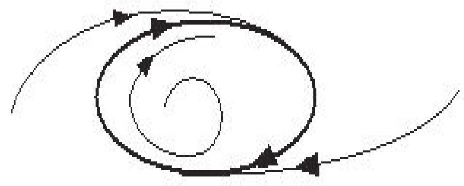


Рисунок 2

3) При $r > 2.27$ поведение системы перестает быть стабильным. Динамика распространения диффузии инноваций становится апериодической, не видно какой-либо закономерности. Поведение динамической системы «принявшие – не принявшие диффузию инноваций» кажется случайным, подверженным непредсказуемым внешним воздействиям (рис.3,4).

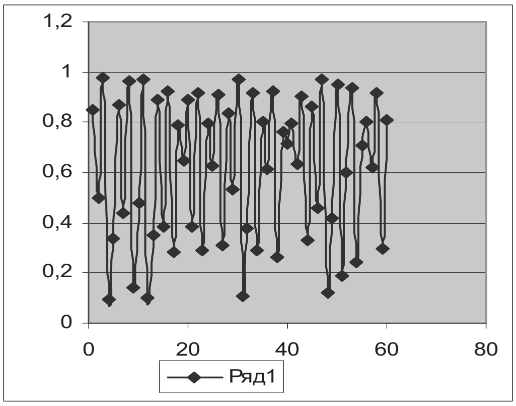


Рисунок 3

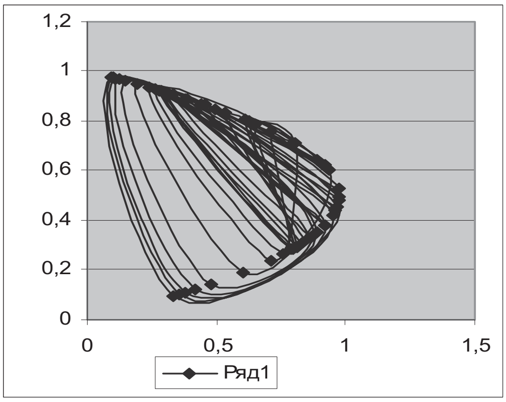


Рисунок 4

Показывается, что с использованием чувствительности хаотических режимов, в некоторых случаях с помощью так называемых джокеров можно перейти на стабильные траектории развития процесса распространения диффузии инноваций. Джокер – правило или алгоритм, определяющий поведение объекта в небольшой области фазового пространства (области джокера), в которой неопределённость в поведении объекта резко возрастает. Таким образом, джокер может радикально изменить ход процесса – сделать установившийся процесс распространения диффузии инноваций периодическим или хаотическим, или, напротив, внести упорядоченность в поведение системы [5].

Далее при изучении разностных уравнений более высоких порядков рассматривается уравнение динамики популяций Хатчинсона с одним запаздыванием и малым параметром ε, определяющим постоянную скорость миграции в однородный ариал:

$$x_{t+1} = \lambda \cdot x_t (1 - x_{t-1}) + \varepsilon,$$

в котором мальтузианский коэффициент $\lambda \geq 1$. Наличие запаздывания при малом ε приводит к усложнению динамических свойств. Эффекты, связанные с большими изменениями вследствие малых воздействий, характерны для задач с запаздыванием в теории нейронных сетей, радиофизике, медицине, химии [6].

Переходя от разностных уравнений к дифференциальным, снова затрагиваются задачи, связанные с прогнозированием, и, в связи с этим, рассматривается модель катастрофы «сборка»[7]. Ей соответствует дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + bx + a,$$

для анализа стационарных точек которого изучается кубическое уравнение

$$x^3 - bx - a = 0 \qquad (3).$$

Дается представление о формуле Кардано для решения кубического уравнения, в частности, рассматривается величина $Q = \left(-\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, в зависимости от знака которой определяется количество вещественных корней. Условие $Q = 0$ или, что равносильно, $4b^3 - 27a^2 = 0$, задает на плоскости $(a,\ b)$ полукубическую параболу (рис.5) – бифуркационную кривую. Известно [8], что если параметры a и b находятся в области $Q > 0$, то есть где расположена точка P_1, то кубическое уравнение имеет один вещественный корень. Если (a, b) лежит в области $Q < 0$, то есть где находится точка P_3, то три вещественных корня, если же в области $Q = 0$, то есть на кривой с точкой P_2, то уравнение имеет два вещественных корня; и, наконец, при $a = b = 0$ (точка P_0) один корень кратности три. Малое «шевеление» в окрестностях точек P_0 и P_2 может привести к катастрофе.

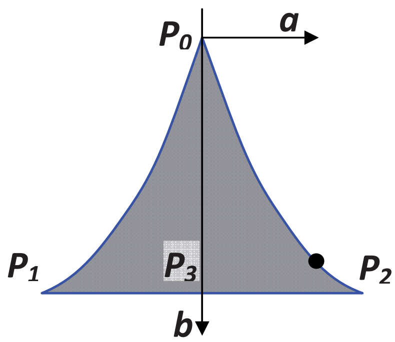


Рисунок 5

Переходя в пространство с координатами $(a,\ b,\ x)$ рассматривается поверхность катастроф как множество решений кубического уравнения (3). Каждому значению параметров a и b внутри бифуркационной кривой соответствуют два различных состояния системы (бимодальность). На поверхности катастроф можно наблюдать явление гистерезиса, когда поведение системы существенно зависит от предыстории процесса [9].

В качестве иллюстрации модели катастрофы «сборка» рассматривается эвристическая модель динамики эпидемии (рис.6). Учитываются два фактора влияния на динамику эпидемии: численности населения (X) и числе доэпидемических вакцинированных (Y). Поверхность катастроф - множество решений кубического уравнения с параметрами X, Y в пространстве (X, Y, Z) - проецируется на плоскость XY. Каждой точке вне закрашенной области соответствует только одно решение. Каждой точке внутри закрашенной области соответствуют два значения зависимой переменной ***Z***–какое именно, зависит от предыстории.

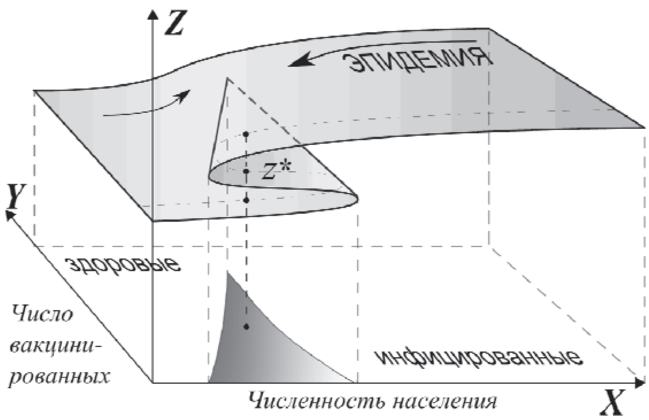


Рисунок 6

Вертикальная прямая пересекает поверхность катастроф в трёх точках, но промежуточное значение z^* считается недопустимым. Анализ показывает, что при высоком уровне вакцинации (***Y*** велико) и увеличении ***X*** скачков не происходит, система функционирует плавно и за конечное время эпидемия прекратится. При низком уровне вакцинации населения или её отсутствии необходимое изменение ***X*** приводит к резкой смене ситуации – эпидемия меняет свою динамику скачком с нижнего листа на верхний и обратно. В промежуточной ситуации, при достаточно больших ***X*** и ***Y*** достигается положение равновесия, и эпидемия будет продолжаться в течение длительного времени.

В связи с анализом модели катастрофы «сборка» также приводится пример псевдомодели спекулятивного характера исследования творческой личности, принадлежащий английскому математику К. Зиману, и воспроизведенный В.Арнольдом [10].

При изучении дифференциальных уравнений исследуется также устойчивость нелинейных систем по первому приближению. Рассматривается базовая модель Вайдлиха формирования общественного мнения: либерально-тоталитарного (ЛТ) фазового перехода. Каждый сценарий интерпретируется в терминах траекторий в фазовом пространстве системы двух дифференциальных уравнений квазисредних

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\tau} = \tilde{\gamma}x + (\tilde{k}-1)y, \\ \dfrac{dx}{d\tau} = -\tilde{\mu}x + \tilde{\mu}\tilde{\beta}y, \end{cases}$$

где x – относительная переменная внутреннего предпочтения, у - относительная переменная публично выражаемого политического мнения, а параметры трендов: $\tilde{\gamma}$ - влияния внутреннего предпочтения, $\tilde{k}$ - давления мнения, $\tilde{\mu}$ - скорости эволюции предпочтения, $\tilde{\beta}$ - склонности к поддержке мажоритарного мнения(>0) или склонности к инакомыслию (<0). Их анализ способствует пониманию механизма стабилизации и разрушения тоталитарного режима. Варианты реализации сценариев ЛТ-перехода зависят от простейших типов точек покоя линейной однородной дифференциальной системы первого приближения [11].

Изучая основы дискретной математики, исходя из стартового понятия множества, для универсального множества U вводится понятие нечёткого подмножества A как множества пар $\{(x, \mu_A(x) \mid x \in U\}$, в котором $\mu_A(x)$- функция принадлежности. Используя приближенные методы нахождения собственного вектора, оценивается, следуя методу Саати, степень согласованности мнений эксперта о вхождении объектов в нечеткое множество. Далее, с помощью построения функции принадлежности на основе согласованных показаний эксперта, оценивается степень вхождения каждого элемента в нечеткое множество [12].

Развивая в дальнейшем понятие нечеткого множества и демонстрируя применение нечетких множеств для решения прикладных задач, в курсе «Методы оптимизации» рассматривается проблема оптимального распределения инвестиций между проектами, в которых данные о доходах представлены размыто - указан лишь ожидаемый доход и возможные границы его изменения. Для математической обработки таких данных используются нечеткие треугольные и трапециевидные числа. Вводится понятие α-уровня нечеткого множества, и для каждого значения α-уровня составляется и решается (как численно, так и аналитически) задача параметрического линейного программирования

$$f(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(k_i t+p_i)x_i \to \max$$

$$\begin{cases} A\cdot \vec{x}^T \le \vec{b}^T \\ \vec{x}\ge 0, \end{cases}$$

где А – матрица, $\vec{b}$ - вектор с известными элементами, $t\in[0;1]$ - параметр.

Эффективный анализ реальных конфликтов базируется на теории метаигр Н. Ховарда и теории анализа и разрешения конфликтов Н. Фрезера и К. Хайпеля. Назначение этих теорий – определение кооперативных исходов в играх с нулевой и ненулевой суммой с любым количеством исходов, не индентифицируемых ни минимаксной, ни максиминной стратегиями, ни критерием Нэша. Данные теории позволяют анализировать и контролировать реакции и контрреакции игроков, учитывать эмоции при принятии решений, расширять класс стабильных исходов, основанных на согласующихся с предпочтениями и несогласующимися с предпочтениями санкций. Помимо классических моделей (дилемма заключенного, цыпленок, семейный спор) в рамках данных теорий изучается модель Кубинского кризиса 1962 г. [13], строятся реальные векторы предпочтений участников (СССР и США) и исследуются стабильные, нестабильные и секвенциально санкционируемые исходы [14].

Литература

1. Орлик Л.К. Актуализация и пропедевтика постклассических математических теорий в курсе математики. - Социальное образование и социальная история России: опыт изучения и проблемы подготовки кадров для социальной сферы. Сборник материалов XIV Всероссийского социально-педагогического конгресса. - М.:Издательство Перо, стр. 253-254.
2. Орлик Л.К. Практикум по алгоритмизации и вычислениям в среде Mathcad (учебное пособие) .-М: Изд-во РГСУ,2012.-176 с.
3. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая.- Ижевск: НИЦ" Регулярная и хаотическая динамика", 2005.-528с.
4. Пайс А. Гении науки. -М.: Институт компьютерных исследований, 2002.-448с.
5. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Г., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: Подходы,результаы,надежды.-М.:КомКнига,2006.-200с.
6. Терроризм: проблемы, модели, сценарии: монография /под ред. Орлик Л.К.-М: МПИ ФСБ России, 2009.-248с.
7. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов: Учебное пособие для высших учебных заведений. – Изд. 2-е, перераб. И доп. – М.: Логос, 2001.-296 с.
8. Люсьенн Феликс. Элементарная математика в современном изложении.- М.:Просвещение, 1967.-457с.
9. Бауэр Ф.Л., Гооз Г. Информатика. Вводный курс. В 2-х частях. Ч.1. Пер.с нем. – М.: Мир, 1990. – 336 с.
10. Арнольд В.Н. Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. – 128 с.

11. Вайдлих В. Социодинамика: системный подход к математическому моделированию в социальных науках. – М.: Едиториал УРСС,2005. –480с.
12. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении: Учеб. Пособие. – 3-е изд. – М.: Дело, 2004. – 440 с.
13. Семеновых Д.Н. Особенности моделирования в курсе математики для студентов социологических специальностей.- Социальное образование и социальная история России: опыт изучения и проблемы подготовки кадров для социальной сферы. Сборник материалов XIV Всероссийского социально-педагогического конгресса. - М.:Издательство Перо, 2014, стр. 292-294.
14. Светлов В.А. Конфликт: модели, решения, менеджмент. – СПб.: Питер, 2005. – 540 с.: ил.

О МЕТОДИЧЕСКИХ ПРИНЦИПАХ ПРИМЕНЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ В ВУЗЕ

Синчуков А.В.

Московский государственный университет экономики,

статистики и информатики (МЭСИ)

119501, г. Москва, ул. Нежинская, 7

Тел.: 84954116633, e-mail: avsinchukov@gmail.com

На сегодняшний день применение информационных технологий в учебном процессе – неотъемлемая часть профессиональной деятельности любого вузовского преподавателя, обусловленная не только развитием технологий и компьютеризацией общества, но и декларируемая в нормативных документах. Системное внедрение информационных технологий в процесс преподавания математических дисциплин в ВУЗе призвано служить средством оптимизации по ряду критериев – качеству обучения, его эффективности и временных затрат преподавателя.

Применение информационных технологий в обучении математическим дисциплинам призвано разнообразить не только формы работы с учебным материалом, но и обогатить его содержание, в том числе и за счет рассмотрения новых классов прикладных задач, имеющих непосредственную связь с будущей профессиональной деятельностью студентов; позволяет активизировать самостоятельную работу студентов по подготовке к занятиям и выполнению учебных заданий.

Средства информационных технологий, применяемые в процессе преподавания математических дисциплин можно разделить на два класса – сетевые ресурсы (системы дистанционного обучения, электронные библиотеки, справочники и т.п.) и профессиональные математические пакеты (программные средства поддержки профессиональной математической деятельности). В рамках настоящего сообщения рассмотрим ключевые методические принципы использования профессиональных математических пакетов в процессе обучения студентов математическим дисциплинам и пути их реализации при использовании динамической математической среды GeoGebra.

Наряду с традиционными дидактическими принципами организации обучения математике, применение информационных технологий предполагает реализацию:

- *принципа «новых задач»* (состоит в определении, исходя из анализа содержания учебного материала, межпредметных связей, уровня подготовки студентов, класса задач, которые в силу объективных причин не рассматриваются или рассматриваются не в полном объёме, при изучении традиционных методов, но могут быть рассмотрены за счет использования компьютера);
- *принципа непрерывного развития* (по мере своего развития, база «новых» задач подвергается перекомпоновке, обновлению и т.п.)
- *принципа системности* (использование информационных технологий осуществляется не в рамках отдельно взятой математической дисциплины, а в рамках группы математических дисциплин, в содержании каждой из которых

выявлены те разделы, изучение которых целесообразно с использованием информационных технологий).

Рассмотрим применение указанных принципов на примере использования среды GeoGebra в рамках изучения темы «Исследование функций с помощью производной» курса математики для студентов бакалавриата информационных направлений.

Как показывает практика, исследование свойств функций с помощью первой и второй производных не вызывает затруднений у студентов информационных направлений, однако это вызвано в том числе тем, что большинство учебных задач приводят к «решаемым» уравнениям и неравенствам. В тех случаях, когда в результате дифференцирования возникают уравнения и неравенства нестандартных типов студенты, как правило, не справляются с поставленными задачами. Второй момент, вызывающий затруднение графическая интерпретация проведенного исследования. Встроенные инструменты среды GeoGebra позволяют избежать указанных проблем. Еще одним из направлений применения среды GeoGebra при изучении данной темы является рассмотрение *задач с параметрами*, которые практически отсутствуют в стандартных курсах высшей математики. Динамические иллюстрации, в зависимости от значений параметров, позволяют не только зафиксировать необходимые для наличия требуемых свойств значения, но и в динамике проследить зависимость их друг от друга.

Кроме того, среда GeoGebra позволяет преподавателю генерировать большие массивы типовых индивидуальных задач, упрощает их проверку и выводит на новый уровень – уровень динамических иллюстраций – разрабатываемые к занятиям наглядные методические материалы (презентации лекций и т.д.)

Привлечение студентов к выполнению заданий (как на практических занятиях, так и в рамках самостоятельной работы) в среде GeoGebra с одной стороны расширяет класс рассматриваемых задач, позволяет включить в него нестандартные задачи, с другой – способствует повышению эффективности учебного процесса, меняет формы и методы проведения занятий по математике.

О ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА И КОНСТРУКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ» НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ МОСКОВСКОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Тесля О.Ю.

ФГБОУ ВПО Московский педагогический государственный университет

Москва, ул. Малая Пироговская, д.1

Тел.:89165047991,e-mail: oyu.teslya@m.mpgu.edu

На протяжении многих лет студенты математического факультета Московского педагогического государственного университета имели возможность достаточно глубоко изучать методы изображений плоских и пространственных фигур. Названный раздел являлся весомой составляющей основного курса геометрии. К моменту изучения дисциплины «Элементарная геометрия. Стереометрия» на четвертом курсе, у студентов в достаточной степени были сформированы пространственные представления, образно-графическое мышление, навык построения верного, наглядного иллюстративного чертежа (геометрической модели) для решения стереометрической задачи.

В дальнейшем, в связи со значительным сокращением часов, отводимых на изучение геометрических дисциплин, данный раздел был фактически изгнан из основного курса. Ясно, что такое положение привело к снижению уровня подготовки будущих учителей математики, в частности, в практике решения стереометрических задач.

В некоторой степени решить проблему помогла кафедра информатики математического факультета, предоставив преподавателям кафедры геометрии возможность разработать и внедрить в образовательный процесс курс «Геометрическое моделирование» для студентов, обучающихся по направлению «Педагогическое образование, профиль - математика и информатика». В настоящее время курс называется «Компьютерная графика и конструктивная геометрия»; он относится к вариативной части профессионального цикла и является дисциплиной по выбору для профилей «Информатика» и «Информатика и математика»

Основной концепцией курса стала интеграция раздела «Методы изображения» и статичной компьютерной графики (на примере графического редактора CorelDRAW X3). Такой подход объясняется следующими обстоятельствами.

Использование компьютера позволяет строить учебные курсы, которые органично объединяют знания из разных предметных областей.

Современные студенты проявляют интерес в большей степени к компьютерной графике, чем к геометрии. Интегрированный курс не вызывает отторжения учащихся, как случается при изучении геометрии.

Компьютерная графика – это специальная область информатики, занимающаяся, методами и средствами создания и обработки изображений с помощью программно-аппаратных вычислительных комплексов. Компьютерная графика при изучении графических дисциплин представляет собой прогрессивный, удобный инструмент создания чертежей. Как показывает практика, освоить необходимый минимум работы с графическим редактором возможно за одно-два занятия. Подобные компьютерные технологии в значительной степени расширяют педагогические возможности и положительно влияют на учебный процесс. Применение компьютерной графики способствует развитию образного мышления. Цвет графических изображений, гармоничность чертежа воздействуют на мысли и чувства, стимулируя воображение, что также имеет большое образовательное и психологическое значение.

Но компьютер – это средство, применение которого определяется целями обучения. В данном случае главной целью является овладение теоретическими знаниями и практическими навыками в области построения изображений плоских и пространственных фигур, решении задач на этих изображениях. Деятельность по решению задач остается основной практической составляющей курса. Решение задач на построение геометрических объектов требует выполнения некоторой конструктивной деятельности, включающей поисково-аналитическую и комбинаторно-синтетическую деятельность.

В то же время студенты овладевают основными средствами и практическими приемами работы с профессиональным графическим редактором, учатся самостоятельно принимать решения по использованию тех или иных инструментов редактора, решать задачи визуализации графических изображений.

Формы проведения занятий по курсу компьютерной графики и конструктивной геометрии – лекции и практические занятия. На лекциях рассматриваются примеры решения задач и реализации построений в графическом редакторе, которые в обязательном порядке затем выполняются студентами на практических занятиях. Также, студенты получают список задач, каждая из которых оценивается некоторым количеством баллов для определения рейтинга студента к аттестации. Это стимулирует самостоятельность учащихся, заставляет преодолевать трудности. Самостоятельно решенные задачи являются, пожалуй, главным показателем достижения целей курса. (Уместно вспомнить слова Конфуция: «Скажи мне – и я забуду, покажи мне – и я научусь, дай мне сделать – и я пойму».) Кроме того, для успешной реализации решения задачи посредством графического редактора студентам приходится предварительно выполнять построения и классическим способом – вручную.

Среди задач, предлагаемых студентам, – задачи на построение сечений многогранников и круглых тел, комбинаций многогранников и круглых тел. Например:

1. Построить тень в пучке параллельных лучей, падающих от треугольной пирамиды $SABC$ на данную пятиугольную призму, если известно, что тень от точки S падает в данную точку D.
2. Дано полное изображение пятиугольной призмы и четырехугольной пирамиды. Построить их а) комбинацию; б) пересечение.
3. Куб повернули на 90° вокруг прямой, проходящей через середины параллельных ребер, не лежащих в одной грани. Изобразить их комбинацию.
4. Дано изображение шара. Построить изображение куба, описанного около шара.
5. Одна из вершин нижнего основания треугольной призмы находится внутри конуса, а одно из ребер верхнего основания этой призмы касается поверхности конуса. Изобразить комбинацию фигур.

Методической проблемой, связанной с реализацией курса, является отсутствие учебной литературы по обучению компьютерной графике студентов педагогических специальностей.

Перспективой развития курса «Компьютерная графика и конструктивная геометрия» является методически обоснованная возможность использования динамических графических редакторов.

Таким образом, курс «Компьютерная графика и конструктивная геометрия» являет собой одно из возможных решений проблемы организационно-педагогического и методического обеспечения геометро-графической подготовки студентов. Целесообразно сделать этот курс обязательным для изучения студентами педагогического направления, профили «Математика и информатика», «Информатика».

О ПРОБЛЕМАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Тестов В.А.

Вологодский государственный университет

160000, Вологда, ул. Ленина, д.15

Тел. 8172710133, e-mail: vladafan@inbox.ru

Правительством РФ в декабре 2013 г была принята концепция развития математического образования. Необходимо начать работу по ее реализации, нацелив усилия на решение основных проблем, которых накопилось не мало. Одна из основных проблем – низкая мотивация к изучению математики школьников и студентов. Причин такой низкой мотивации несколько: недооценка математического образования в обществе; перегруженность программ техническими элементами и устаревшим содержанием; устаревшая вербальная форма предъявления математических знаний, в то время как молодые люди предпочитают символические и графические формы.

Исследования отношения учащихся к изучению математики выявили основные факторы, оказывающие отрицательное воздействие на их отношение. Один из таких факторов - необходимость решения большого количества задач со сложными выкладками. Для решения таких задач видимо следует в большей степени привлекать компьютер. Другой фактор, на который указали учащиеся - скучность, не эмоциональность предмета. Преодолеть этот фактор могут помочь и новые учебники, а главное – мастерство учителя. Третий фактор - необходимость постоянной опоры на прошлый опыт. Можно оправдываться тем, что это специфика математики, а можно эту специфику обратить во благо: постоянно и ненавязчиво проводить повторение, добиваясь более глубокого понимания и более прочного усвоения. Наконец, учащиеся указывают на большое количество непонятных терминов, символов, определений, которые необходимо запомнить. Совершенно ясно, что не следует требовать от школьников запоминания сложных формулировок, а подводить их к этому надо постепенно, используя на первых этапах изучения упрощенные, наглядные модели сложных понятий.

Обеспечение наглядности обучения математике лежит в основе развития познавательного интереса, который является ведущим мотивом учебно-познавательной деятельности. Для развития познавательного интереса могут использоваться такие известные приемы как, занимательность; стимулирование творческого подхода, инициативы и самостоятельности в познании; создание позитивной психологической атмосферы, ситуации успеха. Однако этих, вполне обоснованных и проверенных практикой классических приемов, недостаточно при организации изучения математики.

В современных условиях интерес к математике должен поддерживаться многообразием ее приложений, а также компьютерными инструментами и моделями. Тем самым, проблема развития интереса к изучению математики тесно увязывается с оптимальным решением другой проблемы – проблемы содержания образования, которое продолжает устаревать и остается формальным и оторванным от жизни. Математические методы за последние полстолетия стали более общими и разнообразными. Сочетание с гигантскими возможностями компьютеров позволило оформиться принципиально новому направлению научного познания – математическому моделированию и математическому эксперименту. В математике возникли новые важные разделы, требующие своего внедрения, как в вузовскую, так и в школьную программу по математике (теория графов, теория кодирования, фрактальная геометрия и др.). Эти новые направления в математике обладают большим методологическим, развивающим и прикладным потенциалом.

Наряду с включением в программу новых разделов математики, ряд чисто технических вопросов вполне может быть исключен из школьной программы без особого ущерба для развития математического мышления, важно лишь сохранить при этом традиционное ядро обучения математике. Как отмечал на Всероссийском съезде учителей математики в 2010 г В.М. Тихомиров, важнейшая задача математического просвещения – возбудить в человеке интерес к самому себе, как к мыслящей личности. Каждый человек должен научиться рассуждать и решать задачи. «Всех» надо обучать на общедоступном и осмысленном материале, чтобы у учащихся не закрадывалась мысль о заумности и бессодержательности нашего предмета.

К сожалению, такие мысли возникают у многих школьников. Например, они никак не могут понять, почему в век информационных технологий надо строить геометрические фигуры так же, как это делали древние греки, с помощью циркуля и линейки. Гораздо более интересными для них являются задачи из теории графов или из теории кодирования, которые не включены в школьную программу. Поэтому представляется, что целый рад традиционных разделов школьной математики следует оставить только для учащихся уже имеющих устойчивый интерес к математике и склонных к творчеству и размышлениям.

При работе с одаренными к математике учащимися необходимы совсем другие подходы в подборе содержания обучения. Для таких учащихся надо подбирать темы исследовательского характера, темы научных рефератов, циклов задач, математических проектов и экспериментов и пр. Важной составляющей школьной жизни России становятся школьные научные конференции. Выступления учеников с докладами на научных конференциях заметно способствует становлению устойчивого интереса учащихся к изучению математики. Здесь многое зависит от учителя, от уровня его профессиональной подготовки, от его умения видеть, искать, находить и ставить задачи.

Поэтому одной из главных проблем математического образования является кадровая. Роль учителя в математическом образовании особенно велика, при обучении математике ученик очень часто сталкивается с проблемой понимания и, как показывает опыт, с ней ученик без диалога с учителем справиться не может, даже при использовании самых современных информационных технологий. Математическое знание плохо совмещается со случайными постройками и требует особой культуры, как усвоения, так и преподавания. Поэтому учитель математики был и остается толкователем смыслов различных математических текстов.

От учителя зависит очень многое, зависит от уровня его профессиональной подготовки, от его умения создавать атмосферу творчества, видеть, искать, находить и ставить задачи. Однако учителей, которые могут качественно преподавать математику, учитывая, развивая и формируя учебные и жизненные интересы обучающихся в России не хватает. Поэтому все более остро встает проблема подготовки квалифицированных учителей математики. Хотя эта проблема и обозначена в концепции, однако не указаны пути ее решения, за исключением одного направления – студентам необходимо решать задачи элементарной математики в существенно большем объеме, чем сегодня. Разумеется, это важное направление, но это необходимо делать не в ущерб фундаментальной математической подготовке. А такая опасность вполне реальна, поскольку Минобрнауки предлагает в качестве основной модели подготовки педагогических кадров прикладной бакалавриат, программа которого предполагает замену значительного объема теоретических курсов на практический компонент. Такая замена может только усилить «рецептурность» знаний студентов, не будет способствовать вовлечению их в научно-исследовательскую деятельность, а значит, не будет способствовать повышению качества подготовки учителей математики.

При решении этой проблемы следует опираться на опыт таких стран, как Финляндия, которая, согласно данным Международной программы оценки PISA, по качеству школьного образования удерживает первое место. Причина успеха финнов в учителях, которые на сегодня одни из лучших в мире, и объясняется это большим престижем профессии педагога. Конкурс в педагогический институт в Финляндии достигает 100 чел на место. Начинающим учителям требуется иметь степень магистра, зато и зарабатывают они больше всех других категорий выпускников финских университетов. В Финляндии своевременно осознали, что в эпоху глобализации их главное стратегическое оружие – учитель. Вот этого понимания очень недостает нашему правительству.

КОНКУРСЫ ПО СОСТАВЛЕНИЮ И РЕШЕНИЮ КРАЕВЕДЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ: ОПЫТ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Томилова А.Е.

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова

163002, Архангельск, набережная Северной Двины, д.17

Тел.: 89212916299, e-mail: a.tomilova@narfu.ru

В целях повышения интереса учащихся к математике, традициям, культуре и истории родного края, популяризации математических знаний на базе Института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова, начиная с 2013 года, проводится конкурс по составлению краеведческих математических задач «Архангельская область в математических задачах». Особенность этого конкурса состоит в том, что в нем могут принимать участие даже учащиеся начальной школы, не обладающие высоким уровнем математической подготовки.

Приведем примеры задач, составленных учащимися 3-7 классов.

Задача 1. «Растительность Кенозерского национального парка». (Овчинников Семен, 5 класс)

Общая площадь Кенозерского национального парка примерно равна 140 тыс. га, леса занимают 74,2% от всей территории. Преобладающими являются хвойные насаждения, которые занимают 81,7% лесопокрытой площади, из них сосновые – 50,3%. Среди лиственных лесов доминируют березняки – 94,8%. **С**колько гектаров земли в парке занимают сосновые насаждения? Сколько гектаров земли занимают березняки? Результат округлить до десятых.

Задача 2. «Орнитофауна Кенозерского национального парка» (Михнов Михаил, 3 класс).

В Кенозерском национальном парке обитает 263 вида птиц. Одна из них – чёрный стриж. Известно, что один стриж съедает около 40 тыс. насекомых за сутки. Сколько насекомых съедят 5 стрижей за 10 дней?

Задача 3. «История села Ошевенское». (Третьяков Владислав, 7 класс).

В марте 1881 года в Ошевенском погосте состоялся Григорьевский торжок. Главная торговля производилась суровским, бакалейным и колониальным товаром. Обороты простирались по привозу до 12015 рублей. Привезли некоторое количество поморской рыбы. Хлеба, соли и льняного семени привезли на 198 рублей больше, чем поморской рыбы, а глиняной и деревянной посуды на 250 рублей больше, чем хлеба, соли и льняного семени. Тележных ящиков и колёс на 336 рублей меньше, чем посуды, а стоимость привезенных лошадей была на 39 рублей больше стоимости посуды. Привоз кожи на 425 рублей меньше всех перечисленных товаров. Кроме того прочего товара выставили на продажу на сумму 8820 рублей. На какую сумму привезли каждого товара? (Задача составлена на основе заметки, опубликованной в Олонецких губернских ведомостях за 1881 год).

В 2013 году на конкурс представлялись презентации, включающие:

- формулировку краеведческой задачи, составленной самими учащимися, либо найденной ими в архивных материалах, либо записанной со слов жителей Архангельской области;
- решение задачи (желательно несколькими способами);
- информацию, раскрывающую источники и содержание краеведческого материала, включенного в сюжет задачи, а также описание вклада учащегося в постановку задачи.

Наибольшее предпочтение учащиеся уделили составлению задач, отражающих исторические и духовно-культурные, а также природно-географические особенности региона.

Поэтому в 2014 году в качестве номинаций конкурса были выбраны:

– «Задачи о Кенозерском национальном парке»;
– «Задачи о храмах и монастырях Северной земли»;
– «Музей Малые Корелы в математических задачах»;
– «Задачи о Великих Поморах»;
– «Задачи о тайнах и красотах Северной земли»;
– «Математические секреты народных ремесел Поморья».

Опыт проведения в 2013 году первого конкурса также показал, что для оценки достоверности составленных учащимися задач необходимо включение в экспертное жюри не только преподавателей математики, но и специалистов в области краеведения. В 2014 году в качестве членов жюри были приглашены представители ФГБУ «Национальный парк «Кенозерский», музея «Малые Корелы»; отдела религиозного образования и катехизации Архангельской и Холмогорской Епархии, туристической компании ООО «А Турс».

По итогам первого конкурса были уточнены требования к краеведческим задачам. На конкурс принимались сюжетные математические задачи, составленные учащимися и удовлетворяющие следующим требованиям:

– задача должна обладать краеведческой ценностью;
– задача должна обладать математической ценностью;
– презентация задачи должна обладать этической и эстетической ценностью.

Эти требования были положены в основу критериев экспертной оценки конкурсных работ учащихся.

Конкурс «Архангельская область в математических задачах» в 2013 году получил продолжение в рамках студенческого проекта «Инициатива». Работы финалистов и участников составили содержательную основу студенческого конкурса по решению математических краеведческих задач «Реши задачу – узнай об Архангельском крае». В основном это были сюжетные математические задачи, содержащие сведения об исторических и духовно-культурных, природно-географических особенностях региона, а также об известных людях Поморья. Участникам конкурса предлагалось решить 19 математических краеведческих задач. Приведем примеры задач учащихся.

Задача 1. «Великие люди Поморья» (Ким Валерия, 6 класс).

Архангельская земля, кроме М. В. Ломоносова, дала миру многих известных людей. В 1746 г. родился Баранов Александр Андреевич (русский купец, первый Главный правитель русских поселений в Америке). Он прожил 73 года. После его смерти пройдёт 1/10 века, когда на свет появится Иоанн Кронштадтский (священник Православной Российской церкви, настоятель и проповедник), который прожил 79 лет. Андрей Михайлович Курочкин (судовых дел мастер, строитель первых кораблей в Архангельске) родился, когда купцу было 24 года, и умер через 18/25 века. Шубин Федот Иванович (великий русский скульптор и художник), на 30 лет старше А.М. Курочкина, прожил 65 лет. В каком веке умер скульптор? Укажите годы жизни этих известных людей?

Задача 2. «500-летие Свято-Троицкого Антониево – Сийского монастыря» (Лашутина Елизавета, Мальцева Анастасия, 6 класс)

В каком году будет отмечаться 500-летие Свято-Троицкого Антониево-Сийского мужского монастыря, если до закрытия советской властью он существовал 400 лет? Спустя 72 года после закрытия началось восстановление монастыря архимандритом Трифоном (Плотниковым). В 2012 году отмечалось 20-летие со дня восстановления монастыря.

В конкурсе приняли участие студенты различных институтов САФУ имени М. В. Ломоносова.

Мы надеемся, что студенты будут в дальнейшем участвовать не только в решении задач, составленных школьниками, но и составят свои задачи. Для таких студентов мы планируем расширить возрастные рамки конкурса «Архангельская область в математических задачах». Кроме того, планируем расширить географию конкурса «Архангельская область в математических задачах» и привлечь к участию учащихся всех районов области.

ИЗМЕНЕНИЕ ИНЖЕНЕРНОГО МЫШЛЕНИЯ И РАЗВИТИЕ НОВЫХ ФОРМ ИНЖЕНЕРНОЙ КУЛЬТУРЫ

Хохлова Л.И.

Мурманский государственный технический университет

183010, г. Мурманск, ул. Спортивная, 13

Тел.: 89113095938, e-mail: xoxlovaluda@rambler.ru

Основные принципы университета со времен Гумбольдта - академическая свобода и единство исследования и преподавания. Университетские институты планировались Гумбольдтом так, что в совокупности они должны были собрать под одной крышей всех участников под знаком исследования[1].

Сейчас «исследование» приравнено к процессу получения научно-технической инновации. Инновационное развитие в России интерпретируется как «модернизация». Но, сразу заметим, что «модернизацию» следует рассматривать и как социокультурное явление, которое будет работать, если задействовать его во всей полноте. Поэтому, можно сказать, что будущее инженера есть работа мышления, интеллекта, воображения и тех социальных групп, которые освоили определённые технологии работы. Может быть, возможность такой работы, будет сформирована через те инженерные сообщества, которые, своевременно усваивая фундаментальные исследования, предскажут образ той новой технической среды, в которой мы будем жить через несколько лет.

Очевидно, чтобы правильно отвечать вызовам современности, современному инженеру необходима общая мировоззренческая образованность, гибкий, креативный ум, понимание междисциплинарных связей, хорошая математическая культура. В современной педагогике необходимо развивать интуитивное мышление. Его можно развивать с помощью иррационального, целостного, а не только причинно-следственного познания действительности. В свое время Л.И.Мандельштам определил программу выработки «нелинейной культуры, включающей надежный математический аппарат и физические представления, адекватные новым задачам, нелинейную интуицию, годную там, где оказывается непригодной интуиция, выработанная на линейных задачах».

В частности, «нелинейные задачи», придется решать и в связи чрезвычайно актуальной на современном этапе проблемы нового освоения Арктики. В МГТУ на данном этапе создан Центр по разработке арктических компетенций современного инженера, так как решение проблемы связано с наличием обученных и подготовленных рабочих, инженерных и научных кадров. Задачами центра являются: кадровое обеспечение сервисной экономики морепользования, подготовка (переподготовка, повышение квалификации) высококвалифицированных кадров для работы на арктических, в том числе шельфовых проектах. По словам И.Сечина эффективное раскрытие потенциала новых типов запасов и работа на шельфе требуют развития в России мощного сервисного сектора и зачастую разработки уникальных технологий. С этой целью «Роснефть» создаст важнейшие предпосылки для создания пула инновационных технологий и компетенций по всем ключевым направлениям своего дальнейшего развития.

Хорошо известно, что «в период реконструкции кадры решают всё». Если это перефразировать, то в период прорывной технологической перестройки, прорывных инноваций «кадры тоже решают все». Процесс подготовки современных инженеров должен включать отказ от глобального применения редукционизма, обучение действиям в условиях неопределённости, умению оценивать риски и т.д. Следует признать, что профессиональная подготовка специалистов инженерного профиля без учета гуманитарной компоненты приводит к тому, что технические и технологические изобретения не соответствуют мировым стандартам, противоречат интересам общества и приводят к негативные последствиям, поэтому наряду с техническим дисциплинами необходимо формирование своеобразной инженерной этики, как специальной дисциплины.

В этом контексте интересен вопрос о формировании профессиональных компетенций, необходимых для успешной работы в Арктике, например таких: готовность и способность обучаться самостоятельно; поиск и использование обратной связи; склонность к размышлениям о будущем: привычка к абстрагированию; внимание к проблемам, связанным с достижением поставленных целей; готовность решать сложные вопросы; исследование, окружающей среды для выявления ее возможностей и ресурсов; готовность использовать новые идеи и инновации для достижения цели; знание того, как использовать инновации; уверенность в благожелательном отношении общества к инновациям; способность принимать решения; персональная ответственность; способность побуждать других людей работать сообща ради достижения поставленной цели; способность разрешать конфликты и смягчать разногласия; способность эффективно работать в качестве подчиненного; терпимость по отношению к различным стилям жизни окружающих; понимание плюралистической политики; готовность заниматься организационным и общественным планированием.

В некотором смысле, это и есть те компетенции, которые заложены в рабочих программах инженеров. На современном этапе развития общества именно в соответствии с этим необходимо перестроить преподавание фундаментальных наук в вузе. В понятиях и концепциях этих наук студент должен видеть, прежде всего, целостную картину мира. Это означает, что фундаментальные знания должны приобретаться не разрозненными частями, а в единой системе – комплексно. И осваиваться не только в своем непосредственном значении, но и в качестве жизненных смыслов, ценностей и моральных норм. Моделирование - база всех разделов физики и механики, так как каждая теория опирается на выбор адекватных физико-математических моделей. Создание моделей позволяет человеку осознать, каким образом можно лучше адаптироваться к окружающему миру и изменить его с целью улучшения своей жизни. Современный этап развития инженерной деятельности характеризуется системным подходом к решению сложных научно-технических задач, обращением ко всему комплексу социальных гуманитарных, естественных и технических дисциплин. Изменение инженерного мышления и развитие новых форм инженерной и проектной культуры, привело к появлению новых системных и методологических ориентаций, к выходу на гуманитарные методы познания и освоение действительности.

Литература.

1. H.Schnädelbach, Philosophie in Deutschland 1831-1933Frankfurt am Mein, 1991.

К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ШКОЛЕ

Черноусова Н.В.

Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина

399770, Елец, ул. Коммунаров д. 28

Тел.: 89056802848, e-mail: chernousovi@mail.ru

Российское правительство утвердило концепцию математического образования, предполагающую значительную модернизацию учебных программ на всех уровнях образования. Авторы выделили три основные проблемы развития математического образования. Одна из них — низкая мотивация школьников и студентов, которая связана с недооценкой математического образования и перегруженностью программ техническими элементами и устаревшим содержанием. Еще одна проблема касается содержания математического образования, которое, по словам авторов, продолжает устаревать и остается формальным и оторванным от жизни. И третьей проблемой авторы называют кадровую, поскольку в России не хватает учителей и преподавателей вузов, которые могли бы качественно преподавать математику.

Концепция, по мнению авторов, должна позволить модернизировать содержание учебных программ по математике на всех уровнях образованиях.

Важнейшая задача математического просвещения – развить в человеке интерес к самому себе, как к мыслящей личности. Именно этот тезис развивал на Всероссийском съезде учителей математики в 2010 году профессор МГУ В.М. Тихомиров. К сожалению учителей, которые могут преподавать математику, не только качественно излагая основное содержание дисциплины, но и развивая и формируя учебные, жизненные интересы обучающихся не хватает.

Проблема подготовки квалифицированных учителей математики обозначенная в Концепции развития математического образования, связана с совершенствованием математической и методической подготовки студентов. Будущие учителя должны уметь не только решать задачи из школьных учебников и учебных пособий по математике, но и четко и правильно излагать решение задач, анализировать ошибочные решения, самостоятельно составлять задачи, уметь выполнять поиск решения задач.

Практика обучения математике свидетельствует о том, что основными причинами неумения студентов решать задачи являются:

- незнание тех математических фактов, которые необходимо использовать (базис решения задачи);
- неумение устанавливать зависимости, являющиеся следствиями ранее изученного материала;
- незнание того, как нужно мыслить, в какой последовательности и какие действия производить в процессе поиска решения задачи, в процессе решения задачи [2].

То есть, основной причиной является слабо развитый процессуальный аспект познавательной самостоятельности студентов.

Возникает вопрос: какая система математических задач поможет сопоставить необходимое условие эффективного формирования знаний, умений и навыков с условиями формирования познавательной самостоятельности студентов, развития интереса личности к обучению в целом?

Нами был выполнен структурный анализ текстовых алгебраических задач, предложенных в задачниках по математике для студентов педагогических факультетов, который показал, что наборы задач, обеспечивающие обязательный уровень математической подготовки студентов, имеют ряд недостатков. Одним из существенных недостатков является то, что в этих наборах задач имеет место значительный процент повторов задач, имеющих одну и ту же структуру. Например, на структуры (O—O и O O—O) сложности S = 4 и S = 6 предлагается примерно 79% задач.

В теории и методике обучения математике В.И. Крупичем [1] выделена основная структура школьных математических задач (одиннадцать структур). Теоретически и экспериментально установлено, что основная структура позволяет строить системы задач с учетом системного принципа целостности, т.е. обладающих свойством структурной полноты. Ее содержание является предметом усвоения знаний, умений и навыков, направляет и стимулирует учебно-познавательную деятельность как школьников, так и студентов, способствует формированию познавательной самостоятельности студентов.

Эта система имеет вид:

1. O сложность S=1
2. O O сложность S=3
3. O—O сложность S=4
4. O O O сложность S=4
5. O O—O сложность S=6
6. O—O—O сложность S= 6
7. O O O O сложность S = 5
8. O O O—O сложность S=7
9. O O—O—O сложность S= 8
10. O—O—O—O сложность S=8
11. O—O O—O сложность S=8.

В школе математика более построена на решении задач и доказательстве теорем. В отличие от вузов, где все-таки преобладает система воспроизведения готового знания.

Необходимо осознание студентами понятия «задача» не только как средства и цели обучения, а как предмета изучения. Будущих учителей необходимо учить самостоятельной математической и методической деятельности. Необходимо формирование у будущего учителя математики системной методологии. Реализация целостного подхода в обучении математике потребует выделения основной структуры систем задач и систематизации их по степени возрастания сложности, проблемности, трудности.

«Математику изучать надобно, поскольку она в порядок ум приводит», – говорил в свое время великий русский ученый Михаил Ломоносов. Концепция математического образования, утвержденная в конце прошлого года, имеет основную цель – вывести российское математическое образование на лидирующие позиции в мире. «Математика в России должна стать передовой и привлекательной областью знания и деятельности, получение математических знаний – осознанным и мотивированным процессом», – говорится в документе. Для этого потребуется модернизация учебных программ математического образования на всех уровнях, повышение качества работы преподавателей-предметников, поддержка лидеров математического образования, популяризация этой области знаний среди населения [3]. Очень хочется надеяться, чтобы написанные на бумаге цели и мероприятия затем были претворены в реальную жизнь.

Литература

1. Крупич В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. - М.: Прометей, 1995. - 210с.
2. Методика обучения высшей математике в средней школе России: история становления. Хрестоматия: Для студ. физико-мат. фак. высш. учеб. заведений /Сост. Р.З. Гушель, В.П. Кузовлев, О.А. Саввина. - Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2002.
3. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс] // Заказанный документ из интернет-версии Консультант Плюс. Заказ от 14.11.2014 (дата обращения 14.11. 2014 г.).

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ ПРАКТИКУМОВ И КУРСОВ ПО ВЫБОРУ ЛИНИИ МЕТАПРЕДМЕТНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «ТАБЛИЦА МЕНДЕЛЕЕВА В ПРИРОДЕ»

Шапошникова И.А. [1], Евдокимов А.А.[1] , Мекеко Н.М.[2]

[1] МГТУ МИРЭА,venerasibir@gmail.com, 7(495)434-8029, [2]РУДН

In order to form the integrity of the world and systematize the pupils knowledge, it is possible to include the system of transdisciplinary integrated courses **«Periodic Table in the Nature»** in the 7th to 11th school grade educational program.

Courses for 6 -7 grades: **«Periodic Table in Living Organisms»** and **«Periodic Table in the Inanimate Nature»** embrace the content of the various sections of biology, chemistry, geography, geology, ecology on the role of chemical elements in living organisms and in inanimate nature. Courses are aimed not only to develop the cognitive interest, but also to develop the universal education activities.

Laboratory workshops: **«Nonmetals in nature»** (8-9 grades), **«Metals in inanimate nature»** (8-9 grades), **«Metals in living organisms»** (10-11 grades). During these workshops pupils learn to conduct a mini-research, to make an experiment at home and to carry out the educational projects on the Natural Sciences. Having studied the transdisciplinary (integrated) courses, students will gain a holistic understanding of the role of chemical elements in the nature and will acquire the practical work skills of the implementation of the environmental monitoring on the existence of certain cations and anions in air, water and soil. These workshops will help to orientate the students in professions of geologist, ecologist, chemist, pharmacist, specialist on valeology and hygiene

Как известно, педагогикой обосновывается применение в обучении ряда общедидактических (самостоятельность, совместная деятельность, опора на опыт обучающегося, индивидуализация обучения, системность обучения, контекстность обучения, осознанность обучения) и методических принципов (актуализация результатов обучения, элективность обучения, развитие образовательных потребностей), которые являются определяющими в системе образования.

Успешность в обучении будет зависеть от правильно выбранной стратегии, именуемой подходом. Будучи компонентом системы обучения, подход выступает в качестве общей лингводидактической основы обучения и дает представление об избранной стратегии обучения, которая служит основанием для выбора методов и приемов преподавания.

В современных условиях лишь формирование знаний уже не является главной целью образования. Сегодня ценится способность применять знания и умения для решения конкретных ситуаций и проблем, возникающих в реальной деятельности. В этих условиях актуальность компетентностного обучения очевидна.

Его сущность заключается в развитии у обучаемых способности самостоятельно решать познавательные, коммуникативные, организационные, нравственные и иные проблемы на основе использования полученных знаний.

Другими словами с позиций компетентностного подхода уровень знаний определяется способностью решать проблемы различной сложности на основе имеющихся знаний. Компетентностный подход не отрицает значения знаний, но он акцентирует внимание на умении использовать полученные знания.

При традиционном подходе педагогические цели на практике фокусируются на непосредственных результатах обучения. Эти результаты могут и не иметь особой ценности для обучаемых, поэтому их цели концентрируются на достижении некоторых формальных показателей (отметка, способность сдать экзамен и т.д.). Компетентностный подход дает возможность согласовывать ожидания преподавателей и обучаемых. То есть, компетентностный подход соответствует объективным потребностям обучающихся.

Вместе с тем он соответствует и направлениям творческих поисков преподавателей. Эти поиски связаны с реализацией идей внедрения инновационных технологий в учебный процесс, которые отражают попытки решить проблему мотивации учебной деятельности, создать модель «учения с увлечением».

Кроме того, компетентностный подход предусматривает перевод процесса обучения на самообучение, предполагая проблематизацию содержания самостоятельной работы, познавательную самостоятельность и самооценку.

Однако для этого потребуется реорганизация учебного процесса, и прежде всего, применение метапредметного подхода, который вбирает в себя лучшие дидактико-методические образцы развития предметной формы знания, но он при этом открывает новые перспективы развития для такой образовательной формы, как учебный предмет и учебное занятие.

В школьном курсе имеются достаточно обширные, но весьма разрозненные сведения о значении ряда химических элементов для жизнедеятельности бактерий, грибов, растений, животных и человека, они рассматриваются фрагментарно, обрывочно в образовательных курсах «Биология», «Химия», «Экология», «Естествознание», «Природоведение», «География», «ОБЖ». Но единого целостного взгляда на роль химических элементов *в живом организме* и *в неживой природе* нет.

Для формирования целостности мира, систематизации фактических знаний учащихся, возможно включение в образовательную программу с 7 по 11 класс системы метапредметных курсов.

Пропедевтические курсы для 6-7 классов: **«Таблица Менделеева в живых организмах»** и **«Таблица Менделеева в неживой природе»**, в которых охватываются знания различных разделов биологии, химии, географии, геологии, экологии о роли химических элементов в живых организмах, в неживой природе и направлены не только на развитие познавательного интереса, но и на развитие универсальных учебных действий.

Лабораторные метапредметные практикумы: **«Неметаллы в природе»** (8-9 классы), **«Металлы в неживой природе»** (8-9 классы), **«Металлы в живых организмах»** (10-11 классы) при изучении которых учащиеся не только знакомятся с физическими и химическими свойствами химических элементов, их применением в различных областях деятельности человека, круговороте элементов в природе, но учатся выполнять мини-исследования, проводить домашний эксперимент и выполнять учебные проекты по естественным наукам. Освоение практикумов поможет в ориентации учащихся по профессиям геолог, эколог, химик, фармацевт, специалист по валеологии и гигиене. Изучив метапредметные курсы, учащиеся будут иметь не только целостное представление о роли химических элементов в природе, но также приобретут навыки практической работы по проведению экологического мониторинга воздуха, воды и почвы на наличие определенных катионов и анионов.

Формы работы на занятиях: анкетирование, лекция, исследование, семинарское занятие, круглый стол, дискуссия, практическая работа, проект, конференция, деловая игра, работа в микрогруппах, ИКТ.

Формы обратной связи: отчетное задание по практической работе, домашнему эксперименту, анализ результатов исследования, публичное выступления, реферат, таблица, викторина, фотовыставка, коллаж, коллекция, эссе, проектная работа, компьютерная презентация, памятка «Как оказать первую помощь при отравлении».

Формы контроля: домашний эксперимент, реферат, проектно-исследовательские работы, итоговое тестирование, игра, итоговая конференция и др.

Новизна курсов состоит:

- ***впервые в школьной практике рассматриваются отдельно химические элементы по их биологической роли в живых организмах:*** элементы-органогены; макроэлементы; жизненно необходимые микроэлементы; условно жизненно необходимые, токсические элементы.
- ***впервые в школьной практике рассматриваются отдельно химические элементы по географической классификации:*** литофильные, халькофильные, сидерофильные, атмофильные, биофильные элементы.

Проведение занятий в виде семинаров. Семинар является специфической формой организации учебной деятельности, предполагающей творческое изучение программного материала, основанной на индивидуальной и групповой форме деятельности учащихся. Семинары могут проводиться в виде диспутов, дискуссий, круглых столов, дидактических игр и др. В результате каждого занятие возможно *создание нескольких образовательных продуктов* разнопрофильной направленности по выбору учащихся.

В универсальном учебном пособии по биологии, химии и экологии ***«Таблица Менделеева в живых организмах»*** для каждого химического элемента составлены статьи. Материал каждой из 40 статей изложен в следующем порядке: русское и латинское названия хим. элемента, роль элемента в жизни растений, грибов, микроорганизмов, роль элемента в жизни животных и для человека, основные источники поступления химического элемента в организм, наиболее известные и используемые человеком соединения и их химические формулы, интересные факты под заголовком «А знаете ли вы?». Есть раздел «Некоторые факты о значении некоторых других химических элементов в живых организмах», он содержит информацию о применении еще 8 элементов для живого организма.

В универсальном учебном пособии по химии, географии и экологии ***«Таблица Менделеева в неживой природе»*** для каждого химического элемента составлены статьи о 49 металлах и 16 неметаллах. Материал каждой из статей изложен в следующем порядке: русское и латинское названия химического элемента, отношение элемента по геохимической классификации, происхождение названия элемента, физические и химические свойства химического элемента (уравнения химических реакций металла или неметалла с простыми и сложными веществами и условия протекания реакций), нахождение в природе: в литосфере (химические формулы, иллюстрирующие состав минерала или полезного ископаемого данного элемента), в атмосфере и гидросфере, применение металла или неметалла и его соединений, способы промышленного получения металла или неметалла, экология элемента, интересные факты под заголовком «Это интересно!». В некоторых статьях есть справочная информация их истории, географии, литературы и других наук, поясняющая содержание статьи. Статьи о химических элементах объединяются согласно их положению в таблице Д.И. Менделеева.

Практикум – это особая форма организации работы, при которой учащиеся сами выполняют поставленные учебные задачи в аудитории, лаборатории, окружающей среде, оценивают свою работу и обсуждают результаты.

Метапредметный лабораторный практикум ***«Металлы в неживой природе»*** по химии, географии, физике и экологии для 8-9 классов предназначен для учащихся, ориентированных на поступление в классы естественно-научного профиля старшей школы и средние специальные учебные заведения, а также для профильного обучения старшеклассников, избравших естественнонаучный профиль. Практикум может стать базой для развития исследовательской компетентности учащихся за счет выполнения исследовательских проектов. Курс рассчитан на использование в средних общеобразовательных учреждениях как в рамках изучения предметов по выбору, так и во внеклассной и внешкольной работе. В практикуме 12 практических работ, каждая из которых начинается рубрикой «Задание для работы с текстом», содержащих задания различной сложности с использованием приемов чтения (ознакомительное, поисковое, изучающие, аналитическое и пр.) В рубрике "Нахождение в природе" рассматриваются географические аспекты изучения металлов. Это прежде всего пространственное размещение их на планете в целом, в отдельных регионах и странах. Учащиеся при знакомстве с содержанием этого раздела пособия приобретут или повторят уже имеющиеся начальные знания в области таких наук как минералогия, тектоника, геохимия ландшафта, географическое ресурсоведение, география природных ресурсов. Это знания о горных породах и минералах, содержащих металлы, о способах и времени образования их в земной коре, о размещении крупнейших месторождений руд металлов по регионам и странам, о величине запасов рудного сырья и об объемах его добычи и производстве металлов. Содержание раздела сопровождается картосхемами, диаграммами и таблицами. Завершается каждая практическая работа следующими рубриками:

- Ответьте на вопросы
- Выполните микроисследования
- Выполните домашний эксперимент
- Выполните задания
- Решите задачи

Практикум завершает блок из шести исследовательских работ по проведению экологического мониторинга воздуха, воды и почвы на наличие определенных катионов и анионов: Ca^{2+}, Mg^{2+}, NH_4^+, Cu^{2+}, Fe^{3+} , Ca^{2+}, Cl^- , SO_4^{2-} ,CO_3^{2-} и др. Каждое задание построено в определенном алгоритме: «Справочные материалы для работы. Оборудование, приборы и материалы. Цель и задачи работы. Порядок выполнения работы. Результаты исследовательской работы. Информация для запоминания.»

Метапредметный лабораторный практикум ***«Неметаллы в природе»*** по химии, географии, биологии и экологии для 8-9 классов. В практикуме 13 практических работ о 16 неметаллах и 5 исследовательских работ. Практикум – это не просто книга для чтения, а своеобразный навигатор в мире информации. Много важного и интересного материала, дополняющего и расширяющего практикум, учащиеся смогут найти в сети Интернет, в частности в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов. В практикуме после каждого занятия имеется задание для выполнения работы в ресурсах интернета.

Метапредметный лабораторный практикум ***«Металлы в живых организмах»*** по химии, биологии и экологии для 10-11 классов предназначен для учащихся, ориентированных на поступление в высшие учебные заведения естественно-научного профиля. В практикуме 18 практических работ о 34 металлах и 18 исследовательских работ по проведению химического анализа продуктов питания и лекарственных препаратов, содержащие расчетные задачи фармацевтического и экологического содержания.

УМК линии «Таблица Менделеева в природе» включает:

1. Болгова И.В., Шапошникова И.А., Фандо Р.А. Таблица Менделеева в живых организмах//М.: «Биология» ИД «Первое сентября», 2008. – №№3-14.
2. Шапошникова И.А., Болгова И.В. Таблица Менделеева в живых организмах. Универсальное учебное пособие по биологии, химии и экологии// М.: Издательство Бином. – 2010. – 248 стр., ил.
3. Шапошникова И.А., Молчанова М.М., Болгова И.В., Жаринова Т.А. Неметаллы в природе. Метапредметный лабораторный практикум по химии, географии, физике, биологии и экологии// М.: Издательство Перспектива. – 2012. – 163 стр., ил.

4. Шапошникова И.А., Молчанова М.М., Жаринова Т.А. Металлы в неживой природе. Метапредметный лабораторный практикум по химии, географии, физике и экологии// М.: Издательство Перспектива. – 2012. – 256 стр.
5. Шапошникова И.А. Металлы в живых организмах. Метапредметный лабораторный практикум по химии, биологии и экологии// М.: Издательство Бином. – 2013.
6. Шапошникова И.А., Молчанова М.М. Таблица Менделеева в неживой природе. Универсальное учебное пособие по химии, географии и экологии// М.: Издательство Бином. – 2013.
7. Шапошникова И.А. Методические рекомендации для метапредметных лабораторных практикумов линии «Таблица Менделеева в природе» // М.: Издательство Перспектива. – 2013.
8. Шапошникова И.А., Жаринова Т.А., Кузнецова И.А. Естественно-научные проекты. Учебно-методическое пособие по экологии, биологии, химии, географии и физике // М.: Издательство Перспектива. – 2013.

ОБ ОДНОМ КУРСЕ ПО ВЫБОРУ

Щербатых В.Е.

Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина

399770, г. Елец, Липецкая обл., ул. Коммунаров, д.28

Тел.: 89042922137, e-mail: wega18@mail.ru

Речь пойдет о курсе по выбору «Интегралы с параметрами», который читается автором на выпускных курсах физико-математического факультета. Есть несколько причин знакомить студентов с этим материалом на 4-ом курсе. Как показывает опыт, некоторые из приведенных ниже интегралов вызывали большой интерес у студентов еще в процессе изучения дисциплины «Математический анализ», но без соответствующих знаний подступиться к таким интегралам было нелегко. Кроме того, освоение данного курса помогает студентам заблаговременно готовиться к государственной итоговой аттестации, поскольку знакомство с интегралами, зависящими от параметров, предполагает высокий уровень исходных знаний.

Вот лишь неполный перечень разделов математического анализа, которые нужно пройти для успешного освоения курса «Интегралы с параметрами».

1) Сходимость (равномерная сходимость) функциональных последовательностей и рядов (например, предел функции можно определить, как сходимость функциональной последовательности - используется в определениях);
2) Разложение функций в ряд (например, разложением в ряд вычисляется интеграл Лапласа $I = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$) ;
3) Непрерывность и предел функции нескольких переменных, равномерное стремление к предельной функции (например, в утверждении о предельном переходе под знаком интеграла требуется равномерное стремление к предельной функции);
4) Перестановка двух предельных переходов (предлагается обобщенная формулировка теоремы, сформулированной ранее в курсе математического анализа);
5) Неопределенный интеграл, свойства и методы интегрирования;
6) Определенный интеграл, свойства;
7) Несобственные интегралы 1-го и 2-го родов, признаки сходимости (например, при исследовании на равномерную сходимость интегралов вида $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cos x\, dx$);
8) Кратные интегралы и способы их вычисления (для интегрирования под знаком интеграла, например, когда в интеграле $I = \int_0^1 \frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ заменяется выражение $\frac{arctgx}{x}$ равным ему интегралом $\frac{arctgx}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$);
9) Простейшие дифференциальные уравнения (когда используется прием дифференцирования под знаком интеграла);
10) Элементы теории функций комплексного переменного (например, при вычислении интеграла $I = \int_0^\infty e^{a\cos x} \sin(a \sin x) \frac{dx}{x}$) .

В процессе освоения курса, студенты знакомятся с различными видами интегралов, в том числе с замечательными интегралами [1]:

- Фруллани $\left(\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx\, , a, b > 0 \right)$;

- полными эллиптическими $\left(E(k) = \int_0^{\pi/2} \left(1 - k^2 sin^2\varphi\right)^{\pm\frac{1}{2}} d\varphi\right)$;

- Эйлера $\left(B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, a,b > 0 \text{ ; } \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \text{ , } a > 0\right)$;

- Лежандра $\left(\int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x} \pm 1} dx \text{ , } m > 0\right)$;

- Лапласа $\left(\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \text{ ; } \int_0^\infty \frac{\mathrm{x}\sin\beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \text{ , } \alpha, \beta > 0\right)$;

- Френеля $\left(\int_0^\infty \sin x^2 dx \text{ ; } \int_0^\infty \cos x^2 dx\right)$ - эти интегралы не зависят от параметра, но вычисляются с применением данной теории ;

- функцией Бесселя $\left(J_0 = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\Theta) d\Theta\right)$;

- Раабе $\left(R_0 = \int_0^1 \ln\ \Gamma(a) da\right)$.

Несомненно, элементы данного курса могут входить в рамки дисциплины «Математический анализ», но только фрагментарно. В этом случае объем изучения будет ознакомительным, поэтому невозможно будет показать многообразие методов исследования, потенциал практического применения, без чего вообще интегральная тематика будет неполной.

Как отдельная дисциплина, курс «Интегралы с параметрами» реализует принцип системности обучения на основе внутридисциплинарных связей, сочетает в себе фундаментальность, профессиональную направленность, что приведет к повышению качества будущего специалиста и, соответственно, его конкурентоспособности.

Литература

1) Г.М.Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3т., Т.2, М.-Физматлит, 2003,800с., ISBN 5-9221-0156-0.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ, КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ: УРОКИ ИСТОРИИ

Щербатых С. В.

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

399770, Липецкая обл., г. Елец, ул. Коммунаров, д. 28

Тел.: 89155592967, e-mail: shcherserg@mail.ru

Интересным и поучительным, на наш взгляд, представляется анализ многообразия событий и фактов по истории обучения статистике, комбинаторике и теории вероятностей в отечественных средних учебных заведениях. Он позволит, с одной стороны, уточнить противоречивые сведения и в результате восстановить полную и достоверную картину обучения науке о случайном в средней школе, выявить позитивные и негативные моменты в практике её преподавания, а с другой стороны, спрогнозировать перспективы обучения данному разделу математики в современной общеобразовательной школе.

1. Обучение элементам статистики, комбинаторики и теории вероятностей в школах России XIX – начала XX вв.

Мысль о введении элементов теории вероятностей в средней школе была высказана ещё её основателем – французским учёным Пьером Лапласом (1749-1827). В 1814 году он писал, что «... нет науки более достойной наших размышлений, и было бы полезно ввести её в систему народного образования». Однако в России преподавание элементов теории вероятностей в школе началось гораздо позже, чем статистики и комбинаторики. Было установлено, что первоначально в школьное обучение вошла статистика (представленная описательной статистикой в гимназических курсах, с 1804 по 1844 гг.), затем комбинаторика (которая оставалась стабильной на протяжении длительного времени во всех типах средних учебных заведений России, с 1845 г.) и уже впоследствии вошли элементы теории вероятностей (причём только в программы коммерческих училищ, с 60-х гг. XIX века).

Одним из мотивирующих факторов введения элементов статистики, комбинаторики и теории вероятностей в среднюю школу является их связь с реальной жизнью. Именно поэтому практическая направленность обучения должна служить ориентиром при построении стохастической линии в общеобразовательной школе. Так, до революции 1917 г. реализация практической направленности обучения статистике, комбинаторике и теории вероятностей неоднократно подвергалась определённой трансформации. Первоначально практическая направленность в обучении теории вероятностей стояла во главе угла (что иллюстрируют первые публикации на русском языке), затем стали выделяться чисто теоретические аспекты этой дисциплины (учебник В.Я. Буняковского и др.). Следует отметить, что в учебниках и проектах программ конца XIX – начала XX вв. практическая направленность занимала лидирующие позиции, а вот в утверждённых программах (программы коммерческих училищ по математике 1914 г.) и в проекте, предложенном П.А. Некрасовым, она не получила должного освещения. Эта традиция нашла отражение и в современном стандарте, в котором указаны лишь чисто математические понятия стохастической составляющей в школе.

2. Опыт отечественного школьного обучения элементам комбинаторики, статистики и теории вероятностей в советский период.

Попытки введения элементов статистики, комбинаторики и теории вероятностей в школьную математику предпринимались и после революции 1917 г. Существовала преемственность между передовыми дореволюционными методическими идеями и школьными программами в советское время. В частности, идеи, предложенные профессором П.А. Некрасовым, были признаны актуальными.

В этот период создается единая трудовая школа с определёнными образовательными и воспитательными задачами. Так, в проекте необязательной примерной программы, разработанной Наркомпросом в 1918 г., имелся раздел «Соединения и основы теории вероятностей». В 1919 году в объяснительной записке к программе второй ступени Единой Трудовой Школы-коммуны для физико-технических групп указывается, что «теория вероятностей должна войти в курс математики» со ссылкой на активное использование статистического метода в современной физике.

Развитие в 20-х гг. XX века популяционной генетики, опирающейся на методы теории вероятностей и статистики, ещё раз доказало важность науки о случайном как в математике – науке, так и математике – учебном предмете.

Элементы теории вероятностей входили в примерные программы по математике советской школы, и по ним был в 1926 году издан учебник С.П. Виноградова. В 1925 г. для школ II ступени и рабочих факультетов вышла программа, в которую вошли следующие вероятностные вопросы: «Понятие о вероятности явлений. Сложение и умножение вероятностей. Понятие о “законе больших чисел”, его опытная проверка. Элементы математической статистики. Закон случайных ошибок».

О присутствии комбинаторики в школьном обучении можно судить по содержанию программ 1933, 1934 гг. При этом вышеназванные программы не нашли реального воплощения в жизни. Это объясняется двумя основными причинами: слишком велик объём материала; нехватка квалифицированных преподавательских кадров.

Программы 1947, 1952, 1954, 1956, 1961, 1963 гг. предусматривали изучение лишь комбинаторики. В раздел «Арифметика» для технического класса отделения экспериментальных наук программы 1956 г. было включено понятие «вероятность события» и вычисление вероятностей. Однако эти программы не были претворены в жизнь. Впоследствии в течение длительного периода в средних школах изучались лишь элементы комбинаторики, которые исчезли из программ в 1960 г.

Вопрос о модернизации математического образования в отечественной школе был поставлен в начале 60-х годов XX века выдающимися математиками Б.В. Гнеденко, И.И. Кикоиным, А.Н. Колмогоровым, А.И. Маркушевичем, А.Я. Хинчиным, И.М. Ягломом, что обусловлено широким проникновением науки о случайном в практически каждую область человеческой деятельности.

Программа по математике 1967 года содержала такую тему, как «Начала теории вероятностей», на изучение которой отводилось 23 часа в 10 классе в курсе «Алгебра и начала анализа». Однако при утверждении новой программы начала теории вероятностей пришлось пока отклонить и рекомендовать как факультатив; тогда же А.Н. Колмогоровым была дана его разработка.

Новая программа по математике была введена в 1973 г. В ней имелся раздел, связанный с началами теории вероятностей, содержащий комбинаторные тождества, схему Бернулли, треугольник Паскаля.

Реформой 80-х годов элементы теории вероятностей и статистики вошли в программы профильных классов, в частности физико-математического и естественнонаучного, а также в факультативный курс изучения математики.

Фактологический анализ вопроса обучения элементам статистики, комбинаторики и теории вероятностей в советской средней школе позволил выявить ряд как позитивных, так и негативных моментов. К позитивным моментам, на наш взгляд, следует отнести непрекращающуюся борьбу за введение науки о случайном в школу, показ её значимости для описания процессов реальной действительности (характерно для первой половины XX в.), а к негативным – незавершённость стохастической линии (игнорирование статистической составляющей), что не могло не сказаться на качестве сформированности стохастического мышления учащихся того времени, преобладание формального подхода к изложению материала взамен естественному (с начала реформы 60-х до 90-х гг. XX в.).

3. Современный этап в отечественном обучении школьников стохастике.

В 2004 г. утверждаются федеральный компонент базисного учебного плана и примерные учебные планы для средней школы, государственный образовательный стандарт начального общего, среднего общего и среднего (полного) общего образования по математике. Отличительной особенностью этих стандартов является включение в школьные программы содержательной линии – «Анализ данных», предполагающей изучение элементов статистики, комбинаторики и теории вероятностей. Согласно действующему стандарту, новая линия пронизывает содержание математического материала на уровнях основной и средней (полной) школ. Изучение комбинаторики, теории вероятностей и статистики начинается с 5 класса и заканчивается в 11 классе. При этом изучение стохастики в 5 классе начинается со статистики (в этом отличие всех учебных пособий, написанных в настоящий период).

В последние годы появились новые школьные учебники, учебные пособия как для основной, так и для старшей школы. Проведя сравнительно-сопоставительный анализ этих учебников, можно сделать ряд выводов:

1) авторы каждого учебника и пособия для старшей ступени общеобразовательной школы начинают изложение стохастической линии с «нуля», либо весь материал подчинён повторению ранее изученного в основной школе (А.Г. Мордкович, И.М. Смирнова), что говорит об отсутствии преемственности между основной и старшей ступенями общеобразовательной школы;

2) для каждого учебника характерна незавершённость стохастической линии, выраженная отсутствием статистической составляющей (за исключением учебника под редакцией Н.Я. Виленкина для 10-11 классов);

3) в каждом учебнике преобладает классический, формальный подход в изложении теоретического материала в ущерб естественному подходу, базирующемся на частотном определении вероятности;

4) нет единого взгляда на изложение тех или иных стохастических фактов, общего содержательного наполнения;

5) излагаемый материал оторван от реальной жизни.

Можно констатировать, что в настоящий момент нет ни одного учебника, который бы в полной мере отражал идеи стохастической линии школьного курса математики.

Проведённый ретроспективный анализ указывает на то, что включение в содержание школьного образования элементов стохастики можно рассматривать как результат более полуторавекового движения за внедрение в отечественную среднюю школу элементов статистики, комбинаторики, теории вероятностей. Исторический опыт указал на существенную трудность, возникшую в результате введения стохастической составляющей в школьное обучение, – несбалансированное отражение её профессионально-прикладного потенциала. Содержание материала было отвлечено от реальной жизни, поэтому многие учителя были за его изъятие из школьной программы. И лишь с наступлением XXI века при сложившихся благоприятных условиях элементы статистики, комбинаторики и теории вероятностей в своём новом обличии (стохастика) вновь возвращаются в среднюю школу.

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, СТОХАСТИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: НОВЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Тезисы и тексты докладов

Международной конференции 15-18 декабря 2014 года

Издание подготовлено в авторской редакции

Технический редактор *Н.А. Ясько*
Компьютерная верстка *М.Н. Заикина*
Дизайн обложки *М.В. Рогова*

Подписано в печать 09.12.14 г. Формат 60×84/8. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 70,0. Тираж 150 экз. Заказ 1737

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. (495) 952-04-41