БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, СТОХАСТИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: НОВЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Сборник статей
Международной конференции

Москва, РУДН, 15–18 декабря 2014 г.

Москва
Российский университет дружбы народов
2015

УДК 519.2:519.8(063)
ББК 22.17/18
Б53

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) по проекту № 14-01-20380_Г

Под редакцией
А.И. Кириллова, С.А. Розановой

Б53 **Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования** : сборник статей Международной конференции. Москва, РУДН, 15–18 декабря 2014 г. / под ред. А. И. Кириллова, С. А. Розановой. – Москва : РУДН, 2015. – 477 с. : ил.

ISBN 978-5-209-06518-0

В сборнике содержатся материалы докладов по широкому спектру научных результатов в области математики: бесконечномерный анализ, геометрические, топологические и комбинаторные структуры на многообразиях, нелокальные и некорректные задачи, уравнения математической физики, математическое моделирование, приложения математики и информатики.

Представлены также статьи по докладам, содержащим результаты научных исследований в области истории математики и естествознания, педагогики, в том числе методики преподавания математики в школе и вузе, намечены пути повышения мотивации к изучению математики в современном обществе.

УДК 519.2:519.8(063)
ББК 22.17/18

ISBN 978-5-209-06518-0

Организационный комитет

Председатель: В.М. Филиппов, ректор РУДН, академик РАО;
Сопредседатели: С.В. Емельянов, академик РАН, председатель Президиума НМС по математике; А.С. Сигов, президент МГТУ МИРЭА, академик РАН; А.Г. Ягола, заместитель председателя Президиума НМС по математике, профессор МГУ.

Заместители председателя: В.А. Лазарев, директор ЦСО; С.А. Розанова, учёный секретарь НМС по математике, профессор МГТУ МИРЭА; В.М. Савчин, профессор РУДН; Ю.И. Худак, профессор МГТУ МИРЭА;

Члены оргкомитета: М.Н. Андреева, генеральный директор издательства ФИЗМАТЛИТ; Р.М. Асланов, профессор МПГУ; В.В. Афанасьев, ректор ЯГПУ; П.С. Геворкян, профессор АТИСО; О.В. Зимина, профессор МЭИ; С.И. Кабанихин, профессор НГУ, член-корреспондент РАН; А.И. Кириллов, профессор РФФИ; Н.Н. Нефедов, профессор МГУ; Н.Х. Розов, декан МГУ, член-корреспондент РАО; П.В. Семенов, профессор МГПУ; Б.Ю. Стернин, профессор РУДН; В.Н. Чубариков, декан МГУ, профессор.

Международный программный комитет

Б. Баймуханов, профессор (Казахстан); З. Каденова, зам. министра труда и миграции (Киргизия); Е.И. Казакова, профессор (Украина); А.И. Кириллов, профессор (Россия); М.В. Клибанов, профессор (США); М. Мкртчян, зам. министра образования и науки (Армения); Ни Минкан, профессор (Китай); А.Л. Скубачевский, профессор (Россия); В.Д. Степанов, член-корреспондент РАН, профессор (Россия); А. Хасаноглу, профессор (Турция); А.Г. Ягола, профессор (Россия).

В программе конференции были организованы круглые столы, лекции для молодых ученых и доклады по следующим темам:

1. Бесконечномерный анализ и стохастика – руководитель А.И. Кириллов.
2. Геометрические, топологические и комбинаторные структуры на многообразиях – руководители В.М. Бухштабер, П.С. Геворкян.
3. Нелокальные задачи – руководитель А.Л. Скубачевский.
4. Некорректные задачи – руководитель А.Г. Ягола.
5. Математическая физика – И.В. Волович.
6. Математическое моделирование – руководители А.И. Кириллов, Н.Н. Нефедов.
7. Приложения математики и информатики – руководители А.И. Кириллов, В.А. Соколов.
8. Пути повышения мотивации к изучению математики и естественных наук в современном обществе – руководители М. Мкртчян, С.А. Розанова.
9. Развитие математики и математического естествознания – руководитель С.С. Демидов.
10. Проблемы преподавания математики в школе и вузе – руководители С.А. Розанова, П.В. Семенов.

В Москве в Российском университете дружбы народов с 15 по 18 декабря 2014 года прошла международная конференция «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы».

Организаторы конференции: Российский университет дружбы народов (РУДН), Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) (МИРЭА), Центр современного образования (ЦСО)

Проведение конференции поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (Проект № 14-01-20380_Г).

Цель конференции – совместное выяснение новых задач бесконечномерного анализа, стохастики, математической физики и математического моделирования

Проведение конференции призвано способствовать решению следующих фундаментальных проблем:

- Математическое описание сложных систем:

- Классификация нелокальных уравнений, в том числе, стохастических;

- Существование и единственность решений нелокальных стохастических уравнений;

- Условия абсолютной непрерывности распределений на вероятностных бесконечномерных пространствах;

- Свойства плотностей стационарных распределений диффузий на многообразиях;

- Изучение обратных задач математической физики.

и других.

Для выступления с докладами и организации дискуссий были приглашены И.Я. Арефьева (МИ РАН), В.И. Богачев (МГУ), Я.И. Белопольская (ПОМИ РАН), В.М. Бухштабер (МИ РАН), А.Ю. Веретенников (ИППИ РАН), И.В. Волович (МИ РАН), М.С., Ю.Е. Гликлих (ВорГУ), С.И. Кабанихин (НГУ), А.И. Кириллов (РФФИ), В.Д. Лахно (ИМПБ РАН), Р.А. Минлос (ИППИ РАН), И.Б. Петров (МФТИ), А.К. Погребков (МИ РАН), Е.С. Половинкин (МФТИ), И.Г. Поспелов (ВЦ РАН), А.А. Романюха (ИВМ РАН), В.М. Савчин (РУДН), А.Г. Сергеев (МИ РАН), А.Л. Скубачевский (РУДН), А.А. Славнов (МИ РАН), О.Г. Смолянов (МГУ), Н.В. Смородина (СПбГУ), В.Д. Степанов (РУДН), В.Ф. Тишкин (ИПМ РАН), В.Н. Чубариков (МГУ), А.Б. Шабат (ИТФ), Е.Т. Шавгулидзе (МГУ), С.В. Шапошников (МГУ), А.Н. Ширяев (МИ РАН), А.Г. Ягола (МГУ) и другие.

В ходе конференции сделаны и обсуждены пленарные доклады и доклады на следующих семи секциях:

- Бесконечномерный анализ и стохастика

- Геометрические, топологические и комбинаторные структуры на многообразиях

- Нелокальные задачи.

- Некорректные задачи.

- Математическая физика.

- Математическое моделирование

- Приложения математики и информатики.

Параллельно и в связи с конференцией «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы» в РУДН прошла международная конференция «Проблемы математического и естественнонаучного образования». Ее основная цель — способствовать решению фундаментальных проблем теории и методики преподавания для реализации Концепции развития математического образования в Российской Федерации, утвержденной Правительством Российской Федерации 24 декабря 2013 года.

Организаторы конференции: Российский университет дружбы народов (РУДН), Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) (МИРЭА), Научно-методический совет по математике Министерства образования и науки РФ (НМС), Центр современного образования (ЦСО)

Для выступления с докладами и организации дискуссий были приглашены В.В. Афанасьев (ЯГПУ), И.И. Баврин (МПГУ), М.М.Мкртчян (Министерство образования и науки РА), Н.Х. Розов (МГУ), В.С. Сенашенко (РУДН), А.Л. Семёнов (МПГУ), В.М. Филиппов (РУДН), и др.

В ходе конференции сделаны и обсуждены пленарные доклады и доклады на следующих трех секциях:

- Пути повышения мотивации к изучению математики и естественных наук в современном обществе
- Развитие математики и математического естествознания
- Проблемы преподавания математики в школе и вузе

Итоги конференций будут способствовать дальнейшему развитию математики как науки, математических и педагогических научных школ, совершенствованию математического образования в средней школе и вузах.

Оргкомитет

The international conference «Infinite dimensional analysis, stochastics, mathematical modeling: new problems and methods» took place in Russian University of People Friendship (Moscow) on December 15-18, 2014.

The conference is organized by Russian University of People Friendship, Moscow State Institute of Radio technique, Electronics and Automatics (Technical University) and Centre of Modern Education. The conference is supported by the RFBR grant № 14-01-20380.

The conference is expected to help in solving the following fundamental [problems

- Mathematical description of complex systems:
- Classification of nonlocal equations including the stochastic ones;
- Existence and unity of solutions of nonlocal stochastic equations;
- Conditions of absolute continuity pf distributions on infinite-dimensional spaces.;
- Properties of stationary distributions of diffusions in manifolds;
- Solutions of the inverse problems of mathematical physics

and others..

Together with the conference took place the conference on «The problems of mathematical natural science education». The conference is organized by Russian University of People Friendship, Moscow State Institute of Radiotechnique, Scientific and Methodic Council of the Russian Ministry of Science and Education, Electronics and Automatics (Technical University) and Centre of Modern Education. The aim of the conference is to help in realization of the Conception of development of mathematical education in Russian Federation.

Organizing Committee

Содержание

Пленарные доклады

О ПРОБЛЕМАХ КОЛМОГОРОВА, СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЯМИ ДИФФУЗИИ

В.И. Богачев[1], А.И. Кириллов[2], С.В. Шапошников[3]

[1]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Российский фонд фундаментальных исследований, Москва, Россия*
[3]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

e-mail: [1]`viBogach@mail.ru`, [2]`academiaxxi@mail.ru`, [3]`starticle@mail.ru`

Аннотация: Обсуждается современное состояние проблем, поставленных Колмогоров в связи с уравнениями диффузии.

Ключевые слова: уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова, диффузионный процесс, стационарное решение.

ON KOLMOGOROV PROBLEMS RELATED TO DIFFUSION EQUATIONS

Abstract: We discuss the state of the art of research related to the problems posed by Kolmogorov in relation to diffusion equations.

Keywords: Fokker–Planck–Kolmogorov equations, diffusion process, stationary solution.

Введение

В классической работе [1], опубликованной в 1931 году, А.Н. Колмогоров дал определение того, что сейчас называется диффузионным процессом, его матрицей диффузии $A = \sigma^2$ и коэффициентом сноса b, а также сформулировал следующую проблему:

При каких условиях для отображений A и b можно указать диффузионный процесс ξ, для которого они являются коэффициентом сноса и матрицей диффузии? При каких условиях этот процесс ξ однозначно определяется начальными данными?

Эта проблема была сформулирована Колмогоровым в терминах выведенных им уравнений второго порядка с частными производными, называющихся теперь уравнениями Фоккера – Планка – Колмогорова и обсуждаемых ниже, где будут также воспроизведены точные формулировки проблем Колмогорова из работы [1] и двух его последующих работ [2] и [3] (все они включены в избранные труды [4]). Краткие формулировки основных проблем Колмогорова из работ [1] – [3] таковы.

• Существование диффузионного процесса с данными коэффициентами диффузии A и сноса b.

• Существование и единственность решений уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова относительно вероятностных мер.

• Существование и единственность стационарных распределений диффузионных процессов и их эргодические свойства. Явное нахождение стационарных распределений для сносов градиентного вида при $A = I$, где I — единичная матрица, т.е. вида $b = \nabla\Psi$.

В дальнейших исследованиях проблемы Колмогорова естественным образом дополнились еще целым рядом вопросов, о которых будет сказано ниже.

Заметный вклад в изучение образовавшегося широкого круга проблем внесли многие крупные ученые, среди которых У. Феллер, К. Ито, Е.Б. Дынкин, Ю. Мозер, Р.З. Хасьминский, Л. Хёрмандер, О.А. Олейник, Р. Варадан, Д. Струк, П. Маллявэн, Н.В. Крылов. Тем не менее ряд базовых проблем даже с весьма элементарными формулировками остаются открытыми.

Далее мы разъясним суть основных проблем Колмогорова и их современное значение, опишем историю поиска их решений и изложим важнейшие достигнутые результаты. Поскольку подробная библиография приведена в книге [5], то мы ограничимся лишь самыми необходимыми ссылками.

Сразу отметим, что весьма существенные отличия проблем данного направления от классических задач теории уравнений с частными производными состоят в том, что

1) по своей сути уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова являются уравнениями относительно мер, а не относительно функций (что особо проявляется в бесконечномерном случае); при этом даже если конечномерное решение имеет плотность, то не накладывается традиционных для уравнений относительно функций ограничений типа оценок роста;

2) решения определены во всем пространстве т.е. нет граничных условий;

3) допускаются очень слабые ограничения на гладкость и рост коэффициентов, в ряде базовых задач вообще нет никаких ограничений, поэтому классические результаты применимы только в частных случаях.

1. Марковские и диффузионные процессы

Обозначим символом $\mathcal{X}$ топологическое пространство состояний некоторой системы. Варианты ее эволюции представляются кривыми $t \in I \mapsto \mathcal{X}$, где $I = [0, \infty)$ или $I = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Допустим, что известно, в каких состояниях находилась система при $t \leq T$, Спрашивается, что можно сказать о ее состояниях при $t > T$? Это, конечно, задача прогноза. Если эволюция системы определяется дифференциальными уравнениями с устойчивыми решениями, то прогноз однозначен и определяется решением задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Эволюция такой системы абсолютно предсказуема. Но в жизни гораздо чаще встречаются другие системы, эволюция которых не может быть точно предсказана. Для них наиболее адекватный способ описания эволюции состоит в использовании вероятностей обнаружения системы в момент времени t в состоянии $\mathfrak{B}$, если в предыдущий момент времени s система находилась в состоянии $\mathfrak{A}$. Обозначим такую вероятность символом $P(s, \mathfrak{A}, t, \mathfrak{B})$. Она называется переходной вероятностью.

Вместо описания эволюции системы с помощью дифференциальных уравнений можно использовать переходные вероятности $P(s, \mathfrak{A}, t, dx) = \delta_{x(t)}(dx)$, где $x(t)$ — состояние системы, которая в момент времени s находилась в состоянии $\mathfrak{A}$, и δ_a — мера Дирака, сосредоточенная в точке a. Если эволюция системы описывается дифференциальным включением, то $P(s, \mathfrak{A}, t, dx)$ — равномерное распределение в некоторой компактной области пространства состояний $\mathcal{X}$.

Эволюция, описываемая вероятностями $P(s, \mathfrak{A}, t, \mathfrak{B})$, называется марковским процессом. Само собой разумеется, что при всех допустимых s, t и $\mathfrak{A}$ верно соотно-

шение
$$P(s,\mathfrak{A},t,\mathcal{X})=1.$$
Кроме того, при всех допустимых s, t, u и $\mathfrak{A}$ должна быть справедлива формула полной вероятности
$$P(s,\mathfrak{A},u,\mathfrak{B})=\int_{\mathcal{X}} P(t,x,u,\mathfrak{B})P(s,\mathfrak{A},t,dx). \tag{1}$$
Это соотношение в теории марковских процессов и в физике обладает целым рядом наименований: уравнение Чэпмена – Колмогорова, уравнение Смолуховского, уравнение Эйнштейна – Смолуховского и др.

Однородным называется марковский процесс, для которого переходные вероятности $P(s,\cdot,t,\cdot)$ зависят лишь от разности $t-s$. В этом случае можно рассматривать (при весьма широких предположениях об измеримости) семейство мер $P(t,x,\mathfrak{A})$, порождающее так называемую переходную полугруппу
$$T_t f(x)=\int_{\mathcal{X}} f(y)\,P(t,x,dy)$$
на пространстве ограниченных измеримых функций. При надлежащих условиях эта полугруппа удовлетворяет уравнению
$$\frac{d}{dt}T_t f=LT_t f, \tag{2}$$
где оператор L (на некоторой области определения) называется генератором процесса.

Марковский процесс в $\mathbb{R}^d$ называется диффузионным (см. [6]), если его переходные вероятности удовлетворяют следующим трем условиям:

для всякого $\varepsilon>0$ выполнены равенства
$$\lim_{t'\downarrow t}\frac{1}{t'-t}\int_{\min|y_i-x_i|>\varepsilon} P(t,x,t',dy)=0; \tag{3}$$
$$\lim_{t'\downarrow t}\frac{1}{t'-t}\int_{\max|y_i-x_i|<\varepsilon} (y_j-x_j)P(t,x,t',dy)=b^j(t,x); \tag{4}$$
$$\lim_{t'\downarrow t}\frac{1}{t'-t}\int_{\max|y_i-x_i|<\varepsilon} (y_j-x_j)(y_k-x_k)P(t,x,t',dy)=a^{jk}(t,x). \tag{5}$$
Векторное поле $b(t,x)=\{b^1(t,x),b^2(t,x),\dots,b^d(t,x)\}$ называется коэффициентом сноса, матрица $A(t,x)=\bigl(a^{ij}(t,x)\bigr)$ — матрицей диффузии.

Если коэффициенты A и b не зависят от t, то диффузионный процесс однороден. Генератором однородного диффузионного процесса является эллиптический оператор второго порядка
$$\frac{1}{2}a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}f+b^i\partial_{x_i}f.$$
Далее мы не будем писать множитель $1/2$ в уравнениях, считая, что он включен в матрицу A.

Таким образом, первая из колмогоровских проблем касается существования диффузионного процесса, для которого заданные отображения A и b являются матрицей диффузии и коэффициентом сноса соответственно. Отметим, что в [1] используются противоположные обозначения: снос обозначается через A, а матрица диффузии через B^2. При цитировании мы будем придерживаться наших обозначений.

Законы распределения случайных элементов конечномерных пространств (и многообразий) можно определять их плотностями относительно меры Лебега. В бесконечномерных пространствах аналогов меры Лебега нет. Как же определять законы распределения случайных элементов таких пространств? Проблема, сформулированная Колмогоровым, подсказывает вариант ответа: эти распределения можно определять отображениями A и b.

В тридцатые годы прошлого века это фундаментальное значение проблемы Колмогорова не могло быть воспринято. Нужно было, чтобы развилась потребность в методах исследования систем с бесконечным числом степеней свободы, т.е. потребность в бесконечномерном анализе. Мы теперь видим, что информация, например, о квантовых системах имеется в форме отображений, а модели квантовых систем определяются мерами. Поэтому каноническим способом развития квантовой теории является построение мер по заданным отображениям типа A и b, т.е. решение проблемы Колмогорова в разных конкретных случаях, точнее — бесконечномерного аналога этой проблемы. Об этом аналоге речь пойдет позже, а сейчас мы изложим некоторые результаты, относящиеся к исходной постановке проблемы. Они интересны не только сами по себе, но и потому, что служат основой для бесконечномерных обобщений.

2. Как решать первую проблему Колмогорова?

Есть два способа. Первый, предложенный самим Колмогоровым — решать уравнения Колмогорова в частных производных. Основная часть нашего обзора касается именно этого. Второй — решать стохастическое уравнение Ито; об этом будет лишь краткий комментарий.

2.1. Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова

Предположим, что переходные вероятности рассматриваемой диффузии $P(s,x,t,E)$ абсолютно непрерывны относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^d$. Это значит, что существует функция $p(s,x,t,y)$ такая, что для всех $s \le t$ из $(0,T)$, для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и всякого измеримого по Лебегу множества $E \subset \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$P(s,x,t,E) = \int_E p(s,x,t,y)dy.$$

В работе [1] Колмогоров доказал, что при определенных условиях из формул (1) и (3)–(5) следует, что функция $p(s,x,t,y)$ удовлетворяет двум уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial s}p(s,x,t,y) = -a^{jk}(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}p(s,x,t,y) - b^j(s,x)\frac{\partial}{\partial x_j}p(s,x,t,y), \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}p(s,x,t,y) = -\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k}\Big(a^{jk}(t,y)p(s,x,t,y)\Big) + \frac{\partial}{\partial y_j}\Big(b^j(t,y)p(s,x,t,y)\Big). \tag{7}$$

Уравнение (7) называется обратным уравнением Колмогорова (сам Колмогоров называл его первым уравнением). В нем аргументы t и y функции $p(s,x,t,y)$ фиксированы. Отметим, что первое уравнение есть в точности уравнение (2) для генератора полугруппы (в случае однородного процесса).

Уравнение (8) называется прямым уравнением Колмогорова (вторым уравнением по терминологии Колмогорова) или уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова. В нем аргументы s и x функции $p(s,x,t,y)$ фиксированы.

При написании статьи [1] Колмогоров не знал, что уравнение (8) уже исследовалось ранее в физической литературе, в частности Фоккером и Планком, но в статье [2] он делает об этом соответствующее примечание.

Процитируем теперь самого Колмогорова из [1] (с упомянутыми изменениями обозначений), пояснив, что (133) — прямое уравнение Колмогорова, (86) — уравнение Чэпмена – Колмогорова (1), (143) означает, что начальное условие является мерой Дирака в точке x, (85) и (142) — условия того, что речь идет о вероятностных мерах:

Основной вопрос относительно однозначности решений состоит в следующем: при каких условиях можно утверждать, что при заданных s и x может существовать лишь единственная неотрицательная функция $f(s,x,t,y)$ переменных t,y, определенная для всех значений y и $t > s$ и удовлетворяющая уравнению (133) *и условиям* (142)–(143)*? В некоторых важных частных случаях на этот вопрос может быть дан положительный ответ; такими являются, например, все случаи, рассматриваемые в ближайших двух параграфах.*

Пусть теперь функции $b(t,y)$ и $A(t,y)$ будут нам заданы наперед; можно поставить вопрос о том, существует ли такая неотрицательная функция $f(s,x,t,y)$, которая, с одной стороны, удовлетворяла бы уравнениям (85) *и* (86) *(как было выяснено в § 11, эти требования необходимы для того, чтобы $f(s,x,t,y)$ могла определять стохастическую схему), а с другой стороны, после предельных переходов по формулам* (122) *и* (124) *приводила бы к этим заданным функциям $b(t,y)$ и $A(t,y)$.*

Для решения подобной задачи можно, например, сперва определить какое-либо неотрицательное решение нашего второго дифференциального уравнения (133)*, удовлетворяющее условиям* (142)–(143)*, а затем исследовать, является ли оно действительно решением нашей задачи. При этом возникают следующие два общих вопроса:*

1. *При каких условиях существует такое решение уравнения* (133)*?*

2. *При каких условиях можно утверждать, что это решение действительно удовлетворяет уравнениям* (85) *и* (86)*?*

Существуют все основания полагать, что эти условия имеют достаточно общий характер.

В более инвариантных обозначениях прямое уравнение Колмогорова можно записать так.

Рассмотрим оператор

$$L_{A,b}\varphi(t,x) = a^{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\varphi(t,x) + b^i(t,x)\partial_{x_i}\varphi(t,x),$$

где используется тензорное правило суммирования по повторяющимся индексам, причем предполагается, что функции a^{ij} и b^i являются борелевскими на $(0,T)\times\mathbb{R}^d$, матрица $A(t,x) = (a^{ij}(t,x))_{i,j\le d}$ неотрицательно определена.

Будем говорить, что ограниченная мера μ на $(0,T)\times\mathbb{R}^d$ (возможно, знакопеременная) удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова

$$\partial_t\mu = L^*_{A,b}\mu,$$

если коэффициенты a^{ij} и b^i на каждом компакте интегрируемы относительно полной вариации $|\mu|$ меры μ и для каждой функции φ с компактным носителем в $(0,T)\times\mathbb{R}^d$ выполнено равенство

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}^d}[\partial_t\varphi + L_{A,b}\varphi]\,d\mu = 0.$$

Это можно записать как следующее равенство в смысле обобщенных функций:

$$\partial_t\mu = \partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\mu) - \partial_{x_i}(b^i\mu).$$

Наконец, если μ задается плотностью, т.е. $\mu = \varrho(t,x)\,dt\,dx$, то приходим к следующему уравнению на плотность (опять понимаемому в смысле обобщенных функций):

$$\partial_t \varrho = \partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\varrho) - \partial_{x_i}(b^i \varrho).$$

Начальное условие для уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова вводится в том случае, когда решения представимы в виде

$$\mu = \mu_t\,dt,$$

где μ_t — ограниченная борелевская мера на $\mathbb{R}^d$. Эта запись означает, что для всякой ограниченной борелевской функции ψ на $(0,T)\times\mathbb{R}^d$ верно равенство

$$\int \psi\,d\mu = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t,x)\,\mu_t(dx)\,dt.$$

Такое представление заведомо возможно при наличии плотности. Решение называется вероятностным, если почти все меры μ_t — вероятностные.

Для решений вида $\mu = \mu_t\,dt$ начальное условие ν понимается как ограниченная мера ν на $\mathbb{R}^d$, для которой при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ верно тождество

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mu_t(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\nu(dx) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mu_t(dx)\,dt.$$

При широких предположениях относительно коэффициентов это сводится к тому, что

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mu_t(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\nu(dx).$$

В случае коэффициентов A и b, не зависящих от t, рассматривается стационарное уравнение Колмогорова (или стационарное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова)

$$L^*_{A,b}\mu = 0$$

относительно ограниченных мер μ на $\mathbb{R}^d$. Оно понимается как тождество

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_{A,b}\varphi\,d\mu = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

В смысле обобщенных функций его можно записать как

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\mu) - \partial_{x_i}(b^i\mu) = 0,$$

а при наличии плотности ϱ меры μ как

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\varrho) - \partial_{x_i}(b^i\varrho) = 0.$$

Если $A = I$ — единичная матрица, то приходим к уравнению

$$\Delta\varrho - \operatorname{div}(\varrho b) = 0.$$

Стационарному уравнению удовлетворяет инвариантная мера диффузии, если она существует. Напомним, что в случае однородного процесса мера μ называется инвариантной или стационарной, если

$$\int_{\mathbb{R}^d} T_t f(x)\,\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mu(dx), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

где $\{T_t\}$ — переходная полугруппа.

При рассмотрении плотностей решений на $\mathbb{R}^d$ удобно использовать классы Соболева $W^{p,1}(\mathbb{R}^d)$, состоящие из функций $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, имеющих обобщенные первые производные из $L^p(\mathbb{R}^d)$. Локальный класс Соболева $W^{p,1}$ состоит из функций f, для которых $\zeta f \in W^{p,1}(\mathbb{R}^d)$ для всякой функции $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Напомним, что по теореме вложения Соболева функция класса $W^{p,1}$ при $p > d$ имеет непрерывную версию.

В указанном представлении уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова имеют смысл в весьма широкой общности на весьма общих пространствах: скажем, для задания стационарного уравнения достаточно иметь оператор L на некотором классе измеримых функций на измеримом пространстве. В частности, естественно появляются бесконечномерные уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. Для упрощения рассмотрим стационарное уравнение Колмогорова

$$L^*\mu = 0 \tag{8}$$

относительно борелевской вероятностной меры μ на пространстве $\mathbb{R}^\infty$ всех последовательностей. Пусть даны числа $\alpha_n > 0$ и борелевские функции b^i на $\mathbb{R}^\infty$. Рассмотрим оператор

$$Lf = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \partial_{x_n}^2 f + b^n \partial_{x_n} f)$$

на гладких функциях f от конечного числа переменных. Пусть функции b^i интегрируемы относительно μ. Указанное уравнение понимается как тождество

$$\int Lf(x)\,\mu(dx) = 0$$

для всех функций f от конечного числа переменных, имеющих ограниченные производные всех порядков. Для каждой такой функции Lf оказывается лишь конечной суммой, так что интеграл имеет смысл. Нетрудно заметить, что проекция μ_n меры μ на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет конечномерному уравнению стационарному уравнению Колмогорова $L^*_{A_n,b_n}\mu_n = 0$ с диагональной матрицей A_n, имеющей на диагонали числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, и сносом $b_n = (b_n^1, \ldots, b_n^n)$, компонента b_n^j которого есть условное математическое ожидание b^j относительно σ-алгебры, порожденной первыми n координатами. Из свойств условного математического ожидания вытекает, что $b_n^j \in L^1(\mu_n)$, однако никаких свойств типа непрерывности или гладкости b_n^j нельзя гарантировать, даже если b^j были очень хорошими функциями (скажем, гладкими функциями от конечного числа переменных, но в числе, большем n). Это обстоятельство мотивирует изучение конечномерных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова с негладкими коэффициентами.

В работе [2] Колмогоров обратился к условиям единственности решений прямого уравнения с заданным начальным условием и установил, что единственность имеет место в случае уравнения с достаточно гладкими коэффициентами на компактном римановом многообразии (постановка задач на многообразиях совершенно аналогична). В работе [3] он исследовал стационарные решения, т.е. решения, не зависящие от t. Поставленный им вопрос можно сформулировать так: когда диффузия с обращенным временем ξ_{T-t} подчиняется исходному уравнению? Аналитически это сводится к вопросу о симметрии оператора $L_{A,b}$ в пространстве L^2 относительно инвариантной меры.

Обычно для решения проблемы Колмогорова связь $p(s,x,t,y)$ с отображениями A и b, выраженная формулами (3), (4) и (5), разрывается. Коэффициенты a^{jk} и

b^j в равенствах (7) и (8) считаются заданными, а функция $p(s,x,t,y)$ — подлежащей определению как решение системы уравнений (7) и (8). При этом требуется не только установить существование решения $p(s,x,t,y)$, но и доказать, что переходные вероятности связаны с заданными A и b формулами (3), (4) и (5). В книгах Струка и Варадана [7] (см. также статью [8]) и Портенко, Скорохода Шуренкова [6] было показано, что из-за этого задача несколько упрощается. Было предложено начать с обратного уравнения Колмогорова (7) с ограниченными и непрерывными по Гёльдеру коэффициентами. Предполагалось еще, что собственные значения матрицы A отделены от нуля (вырожденный случай также исследован в [7]). Теория параболических уравнений, изложенная в [9], утверждает, что уравнение (7) с такими коэффициентами имеет единственное неотрицательное фундаментальное решение $p(s,x,t,y)$. Полученные плотности определяют переходные вероятности. Проверяется, что они удовлетворяют условиям диффузионности (3)–(5). Следовательно, проблема Колмогорова решена. Функция $p(s,x,t,y)$ является решением прямого уравнения Колмогорова (8), поскольку оно следует из условий (3)–(5). Итак, через несколько десятилетий после выхода статьи Колмогорова было найдено первое достаточно общее решение поставленной в ней проблемы, причем при жестких ограничениях на коэффициенты сноса и диффузии.

Ограниченность коэффициента сноса — действительно очень жесткое условие. Ему не удовлетворяют коэффициенты сноса многих диффузий, начиная с классического процесса Орнштейна – Уленбека, у которого коэффициент сноса — линейная функция.

Заметим, что в работе [1] Колмогоров начинал решение поставленной им проблемы с прямого уравнения (8), а не с обратного. При этом Колмогоров использовал не теорию уравнений параболического типа (ее тогда не существовало), а следующее преобразование времени и пространства состояний:

$$s' = \varphi(s), \quad t' = \varphi(t), \quad x' = \psi(s,x), \quad y' = \psi(t,e),$$

В новых переменных

$$p(s,x,t,y) = \frac{\partial\psi(t,y)}{\partial y} p'(s',x',t',y'),$$

$$b'(t',y') = \Big[\frac{\partial^2\psi(t,y)}{\partial y^2} a(t,y) + \frac{\partial\psi(t,y)}{\partial y} b(t,y) + \frac{\partial\psi(t,y)}{\partial t}\Big] \Big/ \frac{d\varphi(t)}{dt},$$

$$a'(t',y') = \left[\frac{\partial\psi(t,y)}{\partial y}\right]^2 a(t,y) \Big/ \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Очевидно, что с помощью (зависящего от времени) преобразования координат можно сделать матрицу диффузий единичной и коэффициентом сноса, равным нулю. Иными словами, прямое уравнение Колмогорова превращается в классическое уравнение диффузии. Фундаментальное решение этого уравнения является плотностью переходной вероятности винеровского процесса. Колмогоров нашел несколько решений поставленной им проблемы как образов винеровского процесса. Позднее такой подход получил развитие в так называемом исчислении Маллявэна.

2.2. Стохастическое уравнение Ито

В 1942 году Ито [10] предложил иное, нежели Колмогоров, определение диффузионного процесса и развил новый подход к описанию диффузионных процессов.

Пусть заданы коэффициенты $a^{jk}(t,x)$ и $b_j(t,x)$. Формула (5) показывает, что матрица $a^{jk}(t,x)$ симметрична и ее собственные значения неотрицательны. Поэтому полярное разложение матрицы $A(t,x)$ имеет вид

$$A(t,x) = \sigma(t,x)^* \sigma(t,x). \tag{9}$$

Заметим, что матрица $\sigma(t,x)$ определена неоднозначно. Для любой унитарной матрицы $U(t,x)$ матрица $U(t,x)\sigma(t,x)$ определяет по формуле (14) ту же матрицу диффузии $A(t,x)$, что и матрица $\sigma(t,x)$. Конечно, неотрицательная матрица σ определяется уже однозначно.

Ито ввел стохастическое уравнение

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t b(s,\xi(s))ds + \int_0^t \sigma(s,\xi(s))dw(s), \tag{10}$$

носящее с тех пор его имя, дав ему строгую интерпретацию в виде некоторого интегрального тождества. В (15) фигурирует винеровский процесс $w(\cdot)$. Главная трудность, которую пришлось преодолевать Ито заключалась в интерпретации интеграла по dw.

Если матрица диффузии единична или стала единичной после преобразования фазового пространства, уравнение Ито упрощается и принимает вид

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t b(t,\xi(s))ds + w(t). \tag{11}$$

Это стандартное нелинейное интегральное уравнение. По крайней мере, для липшицевых коэффициентов оно обладает единственным обычным решением (однако лишь совсем недавно Дэви [11] удалось решить долго стоявшую проблему о единственности обычного решения этого интегрального уравнения при почти всех траекториях в случае ограниченного b; несколько упрощенное, но все еще весьма трудное доказательство дано в [12]).

В (15) (и в (16)) винеровский процесс считается заданным, а решением проблемы Колмогорова является процесс ξ. Строго говоря, это больше, чем требуется. Поэтому такое решение называется сильным. Требуется несколько иное: найти процессы $\xi(\cdot)$ и $w(\cdot)$, связанные равенством (15) или (16). Такое решение называется слабым. Оно существует при более слабых ограничениях на коэффициенты $b(t,\xi(t))$ и $\sigma(t,\xi(t))$, см. [13].

В первых и ставших уже классическими теоремах о существовании и единственности решений уравнения Ито предполагалось, что коэффициенты липшицевы, а следовательно, растут не быстрее $|x|$. Такое ограничение роста исключает многие интересные случаи.

Р.З. Хасьминский [14] развил теорию уравнений Ито для случая, когда коэффициенты лишь локально липшицевы, но при этом существует так называемая функция Ляпунова.

Далее мы будем рассматривать только коэффициенты A и b, не зависящие от t.

3. Функции Ляпунова

Функцией Ляпунова называется неотрицательная функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, такая, что

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty.$$

Использование функций Ляпунова состоит в том, что вместо ограничений на рост коэффициентов с помощью нормы используются неравенства

• $L_{A,b}V \le cV$ — для существования диффузии, а также единственности вероятностных решений уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова;

• $L_{A,b}V \le -1$ вне компакта — для существования и единственности стационарных решений.

Конечно, кроме функции Ляпунова нужны еще некоторые условия на коэффициенты. Для существования достаточно непрерывности, причем в случае локально липшицевой матрицы A хватит и локальной ограниченности сноса b, а для единственности в случае локально липшицевой матрицы A и локальной ограниченности b достаточно невырожденности A.

Большинство из предложенных до сих пор ограничений на рост коэффициентов, использованных для доказательства существования решений, можно сформулировать с помощью подходящей функции Ляпунова. Поэтому использование функций Ляпунова в исследованиях стохастических уравнений является наиболее общим методом.

Метод Хасьминского позволил получить широкие достаточные условия разрешимости стохастических уравнений Ито в конечномерных пространствах, а тем самым и разрешимости уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова.

Приведем один из основных положительных результатов, дающий ответ на вопросы Колмогорова при широких условиях (см. [5] и [15]).

Теорема 1. *Пусть матрица диффузии A локально липшицева и невырождена, снос b измерим по Борелю и локально ограничен.*

(i) *Пусть существует функция Ляпунова V, для которой $L_{A,b}V \le cV$. Тогда для всякой вероятностной меры ν на $\mathbb{R}^d$ существует единственное вероятностное решение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова с начальным условием ν. При этом это решение задается положительной плотностью ϱ, которая локально гёльдерова в $(0,T)\times\mathbb{R}^d$, а функции $x \mapsto \varrho(t,x)$ при почти всех t входят в локальный класс Соболева $W^{p,1}$ при всех конечных p.*

(ii) *При указанных условиях имеется единственный диффузионный процесс с матрицей диффузии $2A$ и сносом b.*

(iii) *Пусть существует функция Ляпунова V, для которой $L_{A,b}V \le -1$ вне некоторого компакта. Тогда существует единственное вероятностное решение μ стационарного уравнения $L^*_{A,b}\mu = 0$, причем это решение задается положительной плотностью ϱ, входящей в локальный класс Соболева $W^{p,1}$ при всех конечных p. Кроме того, мера μ является единственной инвариантной вероятностной мерой упомянутого в* (ii) *процесса.*

Полезным практическим следствием этих результатов является то, что при $A = I$ и оценке

$$|b(x)| \le C + C|x|\ln(1+|x|)$$

они обеспечивают существование единственного вероятностного решения параболического уравнения (с любым вероятностным начальным условием) и единственность (но не существование) вероятностного стационарного решения.

В ситуации (iii) меру μ восстанавливать можно так: для вычисления интеграла от ограниченной борелевской функции ψ по мере μ надо моделировать диффузию ξ_t из (ii), находить математическое ожидание $\mathrm{E}\psi(\xi_t)$ и переходить к пределу при

$t \to \infty$. При более точной информации о функции Ляпунова здесь может быть даже получена оценка скорости сходимости.

Что будет, если отказаться от условия существования функции Ляпунова?

В этом случае может не существовать вероятностных решений параболического уравнения, а вероятностное решение может оказаться неединственным. Для $d \geq 3$ примеры имеются в [5] (см. также пример ниже) даже для $A = I$ и гладкого $b(x)$, оцениваемого через $|x| \ln^2(1 + |x|)$. Для $d = 1, 2$ таких примеров нет.

В случае неединственности решений может не выполняться уравнение Чэпмена – Колмогорова (1) (а в случае единственности это уравнение выполнено).

Кроме того, может не существовать ненулевых решений стационарного уравнения (скажем, для $b = 0$). Однако есть примеры (см. [5]), когда имеется единственное вероятностное решение стационарного уравнения и без наличия функций Ляпунова. Все же некоторое условие обращения теоремы Хасьминского есть (см. предложение 5.3.10 в [5]).

Теорема 2. *Если функции $a^{ij}/(1+|x|^2)$ и $b^i/(1+|x|)$ ограничены, причем существует вероятностное решение μ стационарного уравнения $L^*_{A,b}\mu = 0$, то найдется непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова V с первыми производными, лежащими во всех локальных классах Соболева $W^{p,1}$, для которой $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} L_{A,b}V(x) = -\infty$. В частности, решение μ единственно.*

Отметим, что для единственности стационарного вероятностного решения также достаточно условия $L_{A,b}V \leq cV$ со стремящейся к бесконечности функцией Ляпунова, но это условие не обеспечивает существование таких решений.

Для $d = 1$ стационарное уравнение имеет не более одного вероятностного решения независимо от функций Ляпунова, но для $d > 1$ это не так даже для $A = I$ и гладкого b. Более того, примеры неединственности построены даже с градиентными сносами. Во всех таких примерах имеется бесконечно много линейно независимых вероятностных решений. Неизвестно, всегда ли так обстоит дело в случае неединственности.

Отметим одно важное обстоятельство, связывающее стационарное уравнение Колмогорова с параболическим. Стационарное уравнение имеет вероятностное решение при значительно менее широких условиях, чем параболическое (например, его нет для нулевого сноса, когда параболическое уравнение прекрасно разрешимо). Однако если имеется вероятностное решение μ стационарного уравнения $L^*_{A,b}\mu = 0$, то (при наших обычных локальных условиях относительно коэффициентов) в пространстве $L^1(\mu)$ существует сильно непрерывная полугруппа субмарковских операторов T_t, генератор которой совпадает с $L_{A,b}$ на классе C_0^∞. Такая полугруппа неединственна, но возможен следующий ее выбор, обозначаемый через T_t^μ: для $f \in C_0^\infty$ функция $T_t^\mu f$ строится как предел решений задач Коши для оператора $L_{A,b}$ на расширяющихся шарах с нулевыми граничными условиями и начальным условием f. При наличии функции Ляпунова такая субмарковская полугруппа единственна, причем мера μ инвариантна относительно нее.

В общем случае мера μ не обязана быть инвариантной. Достаточным условием инвариантности является плотность образа $L_{A,b} - I$ на C_0^∞ в $L^1(\mu)$. Известно также достаточное условие неинвариантности в терминах анти-функций Ляпунова (см. [5], с. 310), для упрощения приводимое в случае $A = I$: если есть ограниченная функция $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ и число $\alpha > 0$ такие, что $u > 0$ и $L_{A,\widehat{b}}u \geq \alpha u$, где $\widehat{b} = 2\nabla\varrho/\varrho - b$, то μ

не инвариантна для полугруппы $\{T_t^\mu\}_{t\geq 0}$. Это же верно при наличии ограниченной функции $w\in C^2(\mathbb{R}^d)$ и числа $\alpha>0$, для которых $w>0$ и $L_{A,b}w\geq \alpha w$.

Пример 1. Существует гладкое поле b_0 в $\mathbb{R}^3$, для которого при $A=I$ задача Коши для уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова имеет два различных вероятностных решения. Построение проведем в два этапа.

1. Пусть $b_0(x)=-2x-6e^{x^2}$, $L=L_{1,b_0}$. Можно показать, что вероятностная мера $\nu=\pi^{-1/2}e^{-x^2}\,dx$ является решением уравнения $L^*\nu=0$, образ $L-I$ не плотен в $L^1(\nu)$, причем нет знакопеременных решений и ν — единственное вероятностное решение. Пусть

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x} e^{-s^2}\,ds.$$

Тогда имеем $L_{1,\widehat{b}}u\geq u$, где $\widehat{b}(x)=-2x+6e^{x^2}$; как указано выше, мера ν не является инвариантной для полугруппы $\{T_t^\nu\}_{t\geq 0}$, следовательно, образ $L-I$ не плотен в $L^1(\nu)$. Эта мера лишь субинвариантна.

2. Пусть теперь $C(y)=\bigl(C^1(y),C^2(y)\bigr)$ — гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^2$, для которого есть два различных вероятностных решения σ^1 и σ^2 уравнения $L_{I,C}^*\sigma=0$. Как отмечено выше, такие поля есть. Положим

$$\mu_t^1\equiv\nu\otimes\sigma_1,\quad \mu_t^2=(\nu-T_t^*\nu)\otimes(\sigma_2-\sigma_1)+\nu\otimes\sigma_1,$$

где мера $T_t^*\nu$ задана так:

$$\int f\,d(T_t^*\nu)=\int T_t^\nu f\,d\nu,\quad f\in C_0^\infty.$$

Легко проверить, что μ_t^1 и μ_t^2 — вероятностные решения задачи Коши

$$\partial_t\mu=L_{I,b}^*\mu,\quad \mu|_{t=0}=\nu\otimes\sigma_1,$$

где $b(x,y)=\bigl(b_0(x),C^1(y),C^2(y)\bigr)$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^2$.

Имеется много работ по бесконечномерным обобщениям результатов Хасьминского (см. ссылки в [5]), в частности в [16] – [20] такое обобщение было использовано для решения одной задачи, о которой пойдет речь в следующем параграфе. Специфика бесконечномерного случая определяется тем, что в бесконечномерных пространствах ограниченные множества не предкомпактны.

Случай градиентного сноса, рассмотренный Колмогоровым в [3], имеет особое значение для физики. Ему посвящен следующий раздел.

4. Логарифмический градиент меры

Для вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^d$ с плотностью ϱ, обладающей соболевским градиентом $\nabla\varrho$, логарифмический градиент задается формулой

$$\beta=\frac{\nabla\varrho}{\varrho},$$

причем на множестве $\{\varrho=0\}$ полагают $\beta=0$.

Легко видеть, что даже в случае гладкой плотности в общем случае мера не восстанавливается однозначно по ее логарифмическому градиенту. Например, используя стандартную плотность $\varrho_0(x)=(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$, можно задать две разные вероятностные меры с одинаковым логарифмическим градиентом $-x + 2/x$: одна задана плотностью $\varrho_1(x) = x^2\varrho_0(x)$, а вторая – плотностью $\varrho_1(x)/2$ на $(-\infty, 0]$ и плотностью $3\varrho_1(x)/2$ на $(0, +\infty)$.

Однако для локально интегрируемых по Лебегу логарифмических градиентов уже есть единственность. Достаточным условием единственности является и локальная интегрируемость $\exp(\varepsilon|\beta|)$ при каком-либо $\varepsilon > 0$ относительно хотя бы одной вероятностной меры с таким логарифмическим градиентом.

Отыскание меры по ее логарифмическому градиенту представляет собой частный случай решения стационарного уравнения Колмогорова:

$$\Delta\mu - \operatorname{div}(\beta\mu) = 0.$$

Это следует из формулы интегрирования по частям для $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Delta\varphi\varrho\, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \langle\nabla\varrho, \nabla\varphi\rangle\, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \langle\beta, \nabla\varphi\rangle\, \varrho\, dx.$$

Важной особенностью указанного специального уравнения оказывается то, что оператор $L_{I,\beta}$ симметричен на области определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ в гильбертовом пространстве $L^2(\mu)$. Оказывается, что верно и обратное: если μ — вероятностное решение стационарного уравнения $L_{I,b}^*\mu = 0$ локально интегрируемым относительно μ борелевским сносом b, причем оператор $L_{I,b}$ симметричен на области определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ в гильбертовом пространстве $L^2(\mu)$, т.е.

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_{I,b}\varphi\psi\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi L_{I,b}\psi\, d\mu,$$

то мера μ обладает плотностью из локального соболевского класса и b есть ее логарифмический градиент. Фактически это и есть основной результат статьи Колмогорова [3].

Замечательным образом оказывается, что понятие логарифмического градиента имеет естественный бесконечномерный аналог, хотя и без апелляции к плотностям ввиду отсутствия аналога меры Лебега.

С.В. Фоминым (см. [21]) была введена формула интегрирования по частям для меры μ на бесконечномерном пространстве X:

$$\int_X \partial_h f(x)\, \mu(dx) = -\int_X f(x)\beta_h(x)\mu(dx), \tag{12}$$

где h — вектор из X. Функция $\beta_h(x)$ называется логарифмической производной меры μ по направлению h. Она является плотностью Радона – Никодима производной μ_h меры μ по направлению h относительно меры μ. Здесь уже отнюдь не для всякого вектора h имеется логарифмическая производная. Пространство таких векторов может быть всюду плотным, но не может совпадать со всем пространством.

Имеется и естественный аналог векторной логарифмического градиента. Этот объект был введен и исследован в работах [22], [23]. Для его задания требуется наличие плотно вложенного в X сепарабельного гильбертова пространства H. Это вложение позволяет каждому непрерывному линейному функционалу l на X сопоставить единственный вектор $h = j(l) \in H$, для которого $l(k) = (h, k)_H$ для всех $k \in H$. Например, если $X = \mathbb{R}^\infty$ — счетная степень прямой и $H = l^2$, то функционалу $x \mapsto c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ сопоставляется вектор $(c_1, \ldots, c_n, 0, 0, \ldots)$.

Борелевское отображение $\beta\colon\ X \to X$ называется логарифмическим градиентом меры μ, если для каждого непрерывного линейного функционала l на X верна формула

$$\int_X \partial_{j(l)} f(x)\,\mu(dx) = -\int_X f(x)\langle l, \beta(x)\rangle\,\mu(dx),$$

иначе говоря, $\beta_{j(l)} = \langle l, \beta(x)\rangle$.

Условия, при которых у меры существует логарифмический градиент, приведены, например, в [24]. Если рассматривается мера μ на $\mathbb{R}^\infty$, равная произведению вероятностных мер на прямых с плотностями $p_n(x_n)$, то для $H = l^2$ в качестве логарифмического градиента получаем отображение $\beta(x) = (p'_n(x_n)/p_n(x_n))_{n=1}^\infty$.

Если мера μ на $\mathbb{R}^\infty$ (необязательно такого вида) имеет логарифмический градиент $\beta = (\beta^n)_{n=1}^\infty$, то непосредственно проверяется, что, как и в $\mathbb{R}^n$, она удовлетворяет стационарному уравнению Колмогорова (8) с оператором L, в котором $\alpha_n = 1$ и $b^n = \beta^n$.

В.И. Авербух, О.Г. Смолянов и С.В. Фомин в известной статье [21] писали: «интересно было бы указать (необходимые или достаточные) условия того, что данная вещественная функция на X есть плотность производной какой-нибудь меры при каком-нибудь ненулевом приращении». Постановка такой проблемы приглашала к созданию нового раздела бесконечномерного анализа, дополняющего дифференциальное исчисление мер подобно тому, как в классическом анализе теория первообразных дополняет дифференциальное исчисление функций и форм.

В конечномерном случае при наличии соболевской плотности ϱ меры μ равенство (12) можно представить в виде

$$\beta_h(x) = \frac{\partial}{\partial h}\ln\varrho(x).$$

Этим объясняется название функции $\beta_h(x)$.

Очевидно, что ϱ (при некоторых технических условиях) удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial\varrho(x)}{\partial h} = \beta_h(x)\varrho(x)$$

Оно имеет решение

$$\varrho(\alpha h + r) = C(r)\,e^{\int_0^\alpha \beta_h(th+r)dt}, \qquad (13)$$

где r — элемент линейного подпространства, дополняющего одномерное подпространство, содержащего h.

Ясно, что такие выражения в конечномерном пространстве мало информативны, а в бесконечномерном пространстве невозможны. Поэтому формулировку проблемы Авербуха, Смолянова и Фомина нужно изменить. В работах Кириллова [16] – [20] это было сделано следующим образом: предлагается восстанавливать меру μ по всему ее логарифмическому градиенту. Как объяснено выше, в конечномерном случае это соответствует нахождению решения стационарного уравнения Колмогорова, симметризующего заданный оператор.

Исходная постановка проблемы Авербуха, Смолянова и Фомина заменяется такой: *указать необходимые или достаточные условия того, что данное отображение есть логарифмический градиент какой-нибудь меры.*

Отметим, что эта задача вполне нетривиальна уже в двумерном случае (в одномерном ответ дается указанными выше явными формулами). Даже само существование решений — непростой вопрос. Например, для весьма гладкого тождественно нулевого отображения вероятностных решений нет! Предположим для упрощения, что речь идет о гладких сносах на $\mathbb{R}^d$. Тогда если b есть логарифмический градиент вероятностной меры μ, то b есть градиентное поле, т.е. имеет вид $b = \nabla V$, где V — гладкая функция (а именно, V — логарифм плотности). Пусть теперь заранее не дано, что b есть логарифмический градиент, но известно, что это градиент гладкой функции, причем существует некоторое вероятностное решение стационарного уравнения Колмогорова с данным сносом. Обязательно ли это решение имеет плотность вида ce^V? Оказывается, что не всегда! Пример такого рода был указан в [25], где было показано также, что ответ оказывается положительным при дополнительном условии существования функции Ляпунова.

5. Почему важно уметь восстанавливать меру по ее логарифмическому градиенту?

На пространствах бесконечной размерности практически нет других способов определить меру, чем с помощью логарифмических производных. Здесь мы кратко объясним, как задача о восстановлении меры по ее логарифмическому градиенту оказывается фундаментальной для важнейших разделов квантовой физики.

Начнем с вероятностной интерпретации квантовой теории. Решение $\psi(t, x)$ уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,x) + V(x)\psi(t,x) \tag{14}$$

имеет такую вероятностную интерпретацию: $|\psi(t,x)|^2$ есть плотность вероятности распределения x в момент времени t. Это постулат М. Борна, за который ему была присуждена Нобелевская премия 1954 года.

Первое уравнение Шрёдингера для волновых функций систем с бесконечным числом степеней свободы было предложено в статье В. Гейзенберга и В. Паули, опубликованной в 1929 году. Математическому исследованию таких уравнений посвящено много работ (см., например, [26] – [29]), хотя удовлетворительной общей теории пока нет.

Но какова вероятностная интерпретация решений бесконечномерного аналога уравнения Шрёдингера (14)?

В конечномерном случае можно сформулировать постулат Борна и так: отображение $\operatorname{grad}\ln|\psi(t,x)|^2$ есть логарифмический градиент вероятностного распределения x в момент времени t. В такой форме постулат Борна имеет смысл и в бесконечномерном случае. Но чтобы находить само вероятностное распределение, нужно уметь восстанавливать меру по ее логарифмическому градиенту.

Здесь возникает так называя вторая математическая задача канонического квантования.

В уравнении (14) волновая функция $\psi(t, x)$ принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}^d)$. Если пространство состояний реализовано как $L^2(\mathbb{R}^d, \varrho(x)dx)$, то уравнение Шрёдингера имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\Delta\varphi(t,x) + \frac{1}{2}\nabla\ln\varrho(x)\cdot\nabla\varphi(t,x)\right] + W(x)\psi(t,x). \tag{15}$$

Заметим, что в (15) и (13) входит не плотность ϱ, а ее логарифмический градиент $\beta(x) = \nabla\ln\varrho(x)$. При этом соотношение (13) наводит на мысль поискать такое отображение $\beta(x)$, для которого $W(x)=0$, т.е. решить уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{4m}\big[\operatorname{div}\beta(x)+\frac{1}{2}|\beta(x)|^2\big]+V(x)=0 \tag{16}$$

Это — первая из двух математических задач канонического квантования, поставленных и исследованных в цикле работ Кириллова [16].

Если решение уравнения (16) найдено по крайней мере как некоторый сходящийся процесс, то возникает вторая математическая задача канонического квантования: найти вероятностную меру μ, логарифмический градиент которой равен β.

Мера μ называется вакуумной. Она полностью определяет модель. Например, гамильтониан системы является оператором Дирихле с квадратичной формой

$$\int_X \langle\nabla\psi(x),\nabla\psi(x)\rangle\,\mu(dx).$$

Связь мер, стохастических процессов и квантовой теории подробно описана в [19].

6. Как восстанавливать меру по ее логарифмическому градиенту?

В статьях Кириллова [16] – [20] представлены первые решения задачи о восстановлении меры по ее логарифмическому градиенту для мер на линейных пространствах конечной и бесконечной размерности.

Идея такова: искать инвариантные меры для диффузий, определяемых стохастическим уравнением

$$d\xi(t)=\hat{K}^2\beta(\xi(t))dt+\sqrt{2}\hat{K}dw(t). \tag{17}$$

Здесь $\hat{K}$ — некоторый постоянный оператор. Его можно и нужно подбирать, чтобы улучшить поведение решений уравнения (17). Конечно, подход основан именно на том, что мера с заданным логарифмическим градиентом и в бесконечномерном случае будет решением стационарного уравнения Колмогорова. Тот факт, что диффузия существует, если уже есть мера с данным логарифмическим градиентом, был установлен в [23]. Однако вопрос о конструктивном способе нахождения самой меры μ по уравнению в этих работах не поднимался.

Итак, задача об определении меры по ее логарифмическому градиенту является частным случаем проблемы Колмогорова, но случаем особым.

Требуется не только выяснить, при каких условиях существует диффузионный процесс с коэффициентом сноса $b(t,x)=\hat{K}^2\beta(x)$ и матрицей диффузии $a(t,x)=2\hat{K}^2$. Нужно еще выяснить условия, при которых

1) этот диффузионный процесс имеет стационарное распределение;

2) это стационарное распределение дифференцируемо;

3) логарифмический градиент стационарного распределения равен данному β, фигурирующему в коэффициенте сноса $b(t,x)=\hat{K}^2\beta(x)$.

Все эти условия были найдены. Вместе с тем выявились интересные связи проблем Колмогорова с теорией меры.

7. Последующие результаты

Исследование поставленных Колмогоровым проблем привело ко многим другим интересным задачам. Перечислим некоторые из них.

• Каковы локальные и глобальные свойства решений параболических и стационарных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова? Каково поведение плотностей решений на бесконечности?

• При каких условиях на коэффициенты решение в классе вероятностных мер обладает непрерывной и положительной плотностью?

• Что изменится при расширении класса допустимых решений до множества всех ограниченных знакопеременных мер?

Аналогичные проблемы возникли и в бесконечномерном случае. К таким проблемам сводятся фундаментальные задачи квантовой теории и статистической физики.

При изучении этих задач были найдены широкие условия существования и единственности (с точностью до множителя) решения стационарного уравнения Колмогорова в классе плотностей, интегрируемых на $\mathbb{R}^d$. В частности, было установлено, что при $A = I$ для единственности вероятного решения достаточно, чтобы функция $\langle b(x), x\rangle$ росла не быстрее, чем $|x|^2 \ln |x|$, а для единственности интегрируемого решения — убывала не быстрее $-|x|^2 \ln |x|$, причем эти оценки неулучшаемы.

Кроме того, найдены условия отсутствия нулей плотностей решений и найдены нижние оценки плотностей в случае сингулярного (локально неограниченного и неинтегрируемого по мере Лебега) коэффициента сноса. Эти условия сформулированы в терминах локальной интегрируемости по решению некоторых функций (типа экспоненты) от коэффициента сноса и в классе такого рода условий оптимальны. Получены верхние и нижние оценки плотностей решений стационарного уравнения Колмогорова в $\mathbb{R}^d$ с существенно неограниченными коэффициентами.

Подробное изложение этих результатов и ссылки можно найти в книге [5] (см также [31] – [34]). Обзор о вырожденных уравнениях дан в [35].

В бесконечномерном случае направление исследований, основы которого были заложены в [16], позже дополнилось еще двумя подходами. В одном из них мера восстанавливалась по логарифмическому градиенту как предельная точка последовательности мер на пространствах все большей размерности. Никаких уравнений при этом решать не требовалось (см. [19], [20], а также [24]). Второе направление описано в заключительной главе книги [5]. Оно основано на прямом уравнении Колмогорова и особенно на его стационарном варианте, причем существенно использует результаты теории параболических уравнений в конечномерных пространствах. Общим для всех результатов является использование функций Ляпунова. При исследовании процессов в бесконечномерных пространствах выяснилось, что прямое уравнение Колмогорова больше пригодно для решения проблемы Колмогорова и других задач о мерах, чем обратное.

8. Открытые проблемы

Даже в конечномерном случае остаются открытые вопросы, непосредственно связанные с исходными постановками самого Колмогорова (первый поставлен еще в [1], [2]) и притом имеющие элементарные формулировки.

1. Верно ли, что в случае $d = 1$ при $A = 1$ и гладком b параболическое уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова имеет единственное вероятностное решение для всякого начального вероятностного распределения? Существуют ли примеры неединственности в случае $d = 2$? Напомним, что такие примеры есть при $d > 2$.

2. Может ли симплекс вероятностных мер, удовлетворяющих стационарному уравнению Колмогорова с $A = I$ и гладким b быть конечномерным, но отличным от

точки? Напомним, что при $d = 1$ он не может содержать более одной точки, а при $d > 1$ есть примеры бесконечномерных симплекс вероятностных решений.

3. Может ли стационарное уравнение Колмогорова с $A = Id$ и гладким b иметь ненулевое знакопеременное решение, но не иметь вероятностных решений? При $d = 1$ такое невозможно.

4. Пусть $A = I$ и снос b бесконечно дифференцируем, причем существует функция Ляпунова $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, для которой $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$ и $L_{A,b}V(x) \le -1$ вне некоторого шара. Обязательно ли найдется такая функция Ляпунова $W \in C^2(\mathbb{R}^d)$, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} W(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{|x|\to\infty} L_{A,b}W(x) = -\infty$?

5. Пусть $A = I$ и снос b бесконечно дифференцируем, причем существует вероятностное решение $\varrho\, dx$ стационарного уравнения Колмогорова $L^*_{A,b}\mu = 0$, для которого $|b| \in L^1(\varrho\, dx)$, т.е. функция $|b|\varrho$ интегрируема по $\mathbb{R}^d$. Верно ли, что функция $|\nabla\varrho|$ интегрируема? Имеется положительное решение близкой задачи: если функция $|b|^2\varrho$ интегрируема, то интегрируема и $|\nabla\varrho|^2/\varrho$, откуда следует и интегрируемость функции $|\nabla\varrho|$.

Сравнительно мало исследованы вопросы единственности решений уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова (в том числе стационарных) для негладких (скажем, лишь непрерывных) матриц диффузии или вырождающихся матриц диффузии. Однако можно признать, что в конечномерном случае исходные задачи Колмогорова в основном решены в случае невырожденных и достаточно регулярных матриц диффузии. Совершенно иная ситуация в бесконечномерном случае. Здесь даже для довольно специальных уравнений (скажем, стохастических аналогов уравнений Навье – Стокса) известно сравнительно мало. Упомянем несколько открытых вопросов про общие уравнения на бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве. Для упрощения рассмотрим лишь стационарное уравнение Колмогорова на пространстве l^2, заданное оператором вида

$$Lf = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \partial^2_{x_n} f + b^n \partial_{x_n} f)$$

на гладких функциях от конечного числа переменных. Пусть $\alpha_n > 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, $b = (b^n)\colon\ l^2 \to l^2$ — ограниченное непрерывное отображение. Как и выше в случае $\mathbb{R}^\infty$, стационарное уравнение Колмогорова

$$L^*\mu = 0$$

относительно борелевской вероятностной меры μ на l^2 понимается как тождество

$$\int Lf(x)\,\mu(dx) = 0$$

для всех функций f от конечного числа переменных, имеющих ограниченные производные всех порядков.

6. Пусть ограниченное b бесконечно дифференцируемо по Фреше, имеет ограниченные производные всех порядков и ограниченный носитель. Верно ли, что всякое вероятностное решение μ уравнения $L^*\mu = 0$ положительно на всех шарах?

7. Единственно ли вероятностное решение при указанных условиях?

Видимо, ответ на последний вопрос отрицателен. Во всяком случае, если не требовать ограниченности носителя b, то известны контрпримеры даже с непрерывным линейным оператором b.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект N 14-11-00196).

Литература

1. Kolmogoroff A. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., 104:1 (1931), 415–458; рус. пер.: Колмогоров А.Н. Об аналитических методах в теории вероятностей. Успехи мат. наук. 1938. Вып. 5. С. 5–41; см. [4].

2. Kolmogoroff A. Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse // Math. Ann. 1933. B. 104. S. 149–160; рус. пер.: Колмогоров А.Н. К теории непрерывных случайных процессов. См. [4].

3. Kolmogoroff A. Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze // Math. Ann. 1937. B. 113. S. 766–772; рус. пер.: Колмогоров А.Н. Об обратимости статистических законов природы. См. [4].

4. Колмогоров А.Н. Избранные труды. Т. 1–6. Наука, М., 2007.

5. Богачев В.И., Крылов Н.В., Рёкнер М., Шапошников С.В. Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. ИКИ, Москва — Ижевск, 2013.

6. Портенко Н.И., Скороход А.В., Шуренков В.М. Марковские процессы. Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 46. ВИНИТИ, М., 1989.

7. Stroock D.W., Varadhan S.R.S. Multidimensional diffusion processes. Springer-Verlag, Berlin – New York, 1979.

8. Stroock D., Varadhan S.R.S. On degenerate elliptic-parabolic operators of second order and their associated diffusions // Comm. Pure Appl. Math. 1972. V. 25. P. 651–713.

9. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., Мир, 1968.

10. Itô K. On stochastic differential equations. Memoirs Amer. Math. Soc. 1951. N 4; рус. пер.: Ито К. О стохастических дифференциальных уравнениях. Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей N 1. С. 78–116. ИЛ, М., 1959.

11. Davie A.M. Uniqueness of solutions of stochastic differential equations // Int. Math. Res. Not. IMRN 2007, no. 24, Art. ID rnm124, 26 pp.

12. Shaposhnikov A.V. Some remarks on Davie's uniqueness theorem // Proc. Edinburgh Math. Soc.

13. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Наук. думка, Киев, 1982.

14. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Наука, М., 1969.

15. Gyöngy I., Krylov N. Existence of strong solutions for Itô's stochastic equations via approximations // Probab. Theory Related Fields. 1996. V. 105, N 2. P. 143–158.

16. Кириллов А.И. О двух математических проблемах канонического квантования. I, II, III, IV //Теор. мат. физ. 1991. Т. 87, N 1. С. 22–33; 1991. Т. 87, N 2. С. 163–172; 1992. Т. 91, N 3. С. 377–395; 1992. Т. 93, N 2. С. 249–263.

17. Кириллов А.И. Броуновское движение со сносом в гильбертовом пространстве и приложения в теории интегрирования // Теория вероятн. и ее примен. 1993. Т. 38, N 3. С. 529–533.

18. Кириллов А.И. О задании мер на функциональных пространствах с помощью числовых плотностей и континуальных интегралов // Матем. заметки. 1993. Т. 53, N 5. С. 152–155.

19. Кириллов А.И. Бесконечномерный анализ и квантовая теория как исчисления семимартингалов //Успехи матем. наук. 1994. Т. 49, N 3. С. 43–92.

20. Кириллов А.И. О восстановлении мер по их логарифмическим производным // Известия РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59, N 1. С. 121–138.

21. Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. Тр. Моск. мат. об-ва. 1971. Т. 24. С. 133–174.

22. Albeverio S., Høegh-Krohn R. Dirichlet forms and diffusion processes on rigged Hilbert spaces // Z. Wahr. theor. verw. Geb. 1977. B. 40. S. 1–57.

23. Albeverio S., Röckner M. Classical Dirichlet forms on topological vector spaces — construction of an associated diffusion process //Probab. Theory Related Fields. 1989. V. 83. P. 405–434.

24. Богачев В.И. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика Москва — Ижевск, 2008.

25. Богачев В.И., Кириллов А.И., Шапошников С.В. Инвариантные меры диффузий с градиентным сносом //Докл. РАН. 2010. Т. 434, N 6. С. 730–734.

26. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. Наука, М., 1973.

27. Albeverio S., Høegh-Krohn R., Mathematical theory of Feynman path integrals. Lecture Notes in Math., V. 523. Springer, New York, 1976 (2nd ed.: 2008).

28. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. Наука, М., 1983.

29. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. Изд-во МГУ, М., 1990.

30. Богачев В.И., Кириллов А.И., Шапошников С.В. О вероятностных и интегрируемых решениях стационарного уравнения Колмогорова // Докл. РАН. 2011. Т. 438, N 2. С. 154–159.

31. Богачев В.И., Кириллов А.И., Шапошников С.В. Интегрируемые решения стационарного уравнения Колмогорова // Докл. РАН. 2012. Т. 444, N 1. С. 11–16.

32. Богачев В.И., Кириллов А.И., Шапошников С.В. Стационарное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова с потенциалом // Докл. РАН. 2014. Т. 438, N 2. С. 154–159.

33. Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V. On uniqueness problems related to elliptic equations for measures // J. Math. Sci. (New York). 2011. V. 176, N 6. P. 759–773.

34. Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V. On uniqueness problems related to the Fokker–Planck–Kolmogorov equation for measures //J. Math. Sci. (New York). 2011. V. 179, N 1. P. 7–47.

35. Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V. On uniqueness of solutions to the Cauchy problem for degenerate Fokker–Planck–Kolmogorov equations // J. Evol. Eq. 2013. V. 13, N 3. P. 577–593.

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО В ЖИЗНИ ОТЕЧЕСТВЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СООБЩЕСТВА (К 150-ЛЕТИЮ ОБЩЕСТВА)

С.С. Демидов[1], Т.А. Токарева[2]

Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН, Москва, Россия

e-mail: [1]`serd42@mail.ru`, [2]`tantokareva@yandex.ru`

Аннотация: Обсуждается роль Московского математического общества в развитии математики в России, а также в становлении отечественного математического сообщества. Особо отмечается общественный характер этой организации, позволивший ей даже в советский период вести политику до известной степени независимую от партийно-правительственных властных структур.

Ключевые слова: Московский университет, Математический сборник, российское математическое сообщество

THE MOSCOW MATHEMATICAL SOCIETY IN THE LIFE OF DOMESTIC MATHEMATICAL COMMUNITY (TO THE 150 ANNIVERSARY OF SOCIETY)

Abstract: We discuss the role of the Moscow Mathematical Society in the development of mathematics in Russia, as well as in the development of national mathematical community.We emphasize the public nature of this organization, which made it possible for the Society even during the Soviet period to conduct a policy to a certain extent independent of the party and government authorities.

Keywords: Moscow university, Mathematical sbornik, Russian mathematical community

Первая попытка организации математического общества в Москве была предпринята группой преподавателей и студентов университета еще в 1810 г. [1, с. 316; 2]. Однако просуществовало оно недолго: тогдашняя первопрестольная еще не обладала достаточным количеством активных профессиональных математиков, способных поддерживать его нормальную деятельность. Необходимые для этого условия сложились лишь к 1860-м гг., когда в Москве сформировался математический центр европейского уровня. Его созданию способствовала сама атмосфера, царившая в российском обществе того времени – в период судьбоносных преобразований в социальной жизни, случившихся в России после восшествия на трон в 1855 г. Александра II. Самой известной из тогдашних реформ стала отмена в 1861 г. крепостного права.

Из преобразований, имевших прямое отношение к рассматриваемому нами вопросу, назовем фундаментальные изменения в организации системы народного образования, в частности, образования высшего. Принятый в 1863 г. новый университетский устав увеличил в университетах число позиций для представителей математических наук , а также содержал рекомендации об учреждении при университетах научных обществ.

В этой атмосфере в 1864 г. при Московском университете было создано Математическое общество. Первое его заседание было собрано 15(27) сентября на квартире профессора Н.Д. Брашмана, состоявшего в то время на пенсии и по состоянию здоровья уже не имевшего возможности посещать университет. Он же был избран его президентом. Вице-президентом общества стал А.Ю. Давидов, а секретарем В.Я. Цингер. Первоначально общество состояло из 14 человек. Среди них были как преподаватели университета (астроном Ф.А. Бредихин, математик Н.В. Бугаев, механик Ф.А. Слудский, физик Н.А. Любимов), так и других учебных заведений: профессор Московского высшего технического училища А.В. Летников, скромный преподаватель математики немецкой гимназии (Московского петропавловского училища) К.М. Петерсон. Среди первых членов общества всего лишь один оказался не москвичем – это был воспитанник Московского университета, проживавший в Петербурге академик П.Л. Чебышев.

Поначалу Общество преследовало в своей деятельности очень скромные цели. Как следует из протокола его первого заседания, «цель Общества есть взаимное содействие в занятиях математическими науками» [3, с. 472]. Однако вскоре выяснилось, что лидеры Общества ставили перед ним более амбициозные цели. Так, представляя в 1866 г. документы (и среди них проект нового устава) для его утверждения в Министерство народного просвещения (а утверждено оно было в январе 1867 г.), они так сформулировали стоящие перед Обществом задачи: «Московское математическое общество учреждается с целью содействовать развитию математических наук в России» [4, с. III].

На четвертом заседании Общества 15 декабря 1864 г. его руководители высказали мнение, что доклады, прочитанные на заседаниях, заслуживают публикации. И уже в апреле 1865 г. было принято решение об издании журнала. Первый том журнала, получившего наименование «Математический сборник», появился в октябре 1866 г. и был посвящен памяти скончавшегося в мае того же года основателя и первого президента Н.Д. Брашмана. Так началось издание одного из самых влиятельных математических журналов XX века [5].

Последняя треть XIX – начало XX вв. – время становления и активного развития Общества. Как мы уже сказали, в год своего создания оно насчитывало всего 14 членов, из которых только один был иногородним. В 1913 г., накануне Первой мировой войны, оно состояло из 112 членов, 34 из которых жили в Москве, 57 – в различных городах Империи, а 21 составляли иностранные члены Общества. Таким образом, Общество приобретало общероссийский характер.

Влияние Общества на научную жизнь в России было чрезвычайным. Его деятельность стала важным фактором в становлении и развитии российского математического сообщества. «По своему значению, – писал А.П. Юшкевич [1, с. 317], – Московское математическое общество уступало только Академии наук».

Общество регулярно собиралось на свои заседания и по докладам, произнесенным на этих заседаниях, а докладчиками выступали ученые из разных городов Империи (информация о них публиковалась на страницах «Математического сборника»), можно судить об эволюции математических исследований не только в Москве, но и во всей стране. О том значении, которое придавали Обществу московские математики, говорит тот факт, что его руководителями избирались крупнейшие ученые – достаточно взглянуть на список президентов Общества. Вот первые его президенты: Н.Д. Брашман (1864–1866), А.Ю. Давидов (1866–1886), В.Я. Цингер (1886–1891), Н.В. Бугаев (1891–1903), П.А. Некрасов (1903–1905), Н.Е. Жуковский (1905–1921), Б.К. Млодзеевский (1921–1923). Еще более внушительно выглядит список (он будет приведен ниже) последующих руководителей Общества.

И, конечно, Общество стало ведущей силой в преобразовании Москвы на рубеже XIX–XX вв. в заметный в Европе центр математических исследований, известный достижениями в области прикладной математики (Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин), дифференциальной геометрии (К.М. Петерсон, Б.К. Млодзеевский, Д.Ф. Егоров), а также результатами по проективной геометрии (К.А. Андреев, А.К. Власов), теории чисел (Н.В. Бугаев), теории функций комплексного переменного (П.А. Некрасов) и теории вероятностей (П.А. Некрасов).

Для исследований москвичей стали характерными интерес к приложениям, предрасположенность к геометрии и ясным геометрическим конструкциям, а также стремление к философскому осмыслению предмета и методов развиваемой ими математики. При этом доминирующими в их среде стали интерес к идеалистической и даже религиозной философии. Этот интерес стал основанием для закрепившегося за московской школой этого периода наименования философско-математической.

Лидером этой школы стал наиболее влиятельный в Москве того времени математик Н.В. Бугаев. Оригинальный философ, он стал автором собственной философской системы – «эволюционной монадологии». Его философские идеи стали основанием для особого интереса к разрывным функциям. Создание теории таких функций Бугаев рассматривал как одну из важнейших задач современной математики и пытался вместе со своими учениками решить ее в рамках так называемой «аритмологии» [6].

Деятельность Московской философско-математической школы протекала в условиях острого конфликта с другой более известной тогда в Европе школой – Петербургской школой или школой Чебышева (А.А. Марков, А.М. Ляпунов и др.). Основанием для этой конфронтации стали, прежде всего, разногласия идейного порядка, определивших, в известной мере, математическую ориентацию столичных школ: позитивизм, либеральный демократизм и антимонархизм, доминировавшие в петербургской среде, с одной стороны, воинствующий антипозитивизм, увлеченность идеалистической и даже религиозной философией, православие и монархизм, присущие москвичам, с другой.

Противостояние математиков двух столиц наложило отпечаток на жизнь всего российского математического сообщества последней трети XIX – первой трети XX вв., создав в нем известное напряжение. Это напряжение приводило к конфликтным ситуациям, зачастую заканчивавшихся открытыми столкновениями. Так случилось, например, в случае споров о методе, предложенном В.Г. Имшенецким в работах 1887–1891 гг.: методе нахождения дробно-рациональных интегралов линейных дифференциальных уравнений с целыми рациональными коэффициентами. Эти работы, вызвавшие критику со стороны А.А. Маркова, А.Н. Коркина и других петербургских математиков, были поддержаны москвичами – К.А. Андреевым, П.А. Некрасовым и др. Другим примером может служить критика А.А. Марковым знаменитых результатов 1888 г. С.В. Ковалевской, касающихся уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки. На стороне Ковалевской опять выступили москвичи. Все эти конфликты обсуждались на заседаниях Московского математического общества, выступавшего в роли арбитра. Здесь со всей отчетливостью проявилась особенная роль Общества, столь важная в период становления российского математического сообщества – роль общественной организации. Притом организации, деятельность которой носила не местный (московский!), но общенациональный характер. Уже в первую половину столетия своего существования в вопросах, имевших значение для всего российского математического сообщества, Московское математическое общество брало на себя роль общенационального.

Разумеется, особо важную роль играло Общество в развитии математических исследований в самой Москве, начавшей трансформироваться из заметного в Европе центра математических исследований в одну из ведущих мировых математических столиц.

Хотя, как мы уже говорили, к началу XX в. Москва заявила о себе как о заметном центре математических исследований, москвичи не были в восторге от положения сообщества, третируемого академическим Петербургом. Они искали тематику, разработка которой позволила бы им выйти на передовые линии современных исследований. При этом тематика эта должна была быть по возможности удаленной от сюжетов разрабатывавшихся математиками северной столицы. И такую тематику они нашли – ею оказалась новая теория функций действительного переменного, зародившаяся в 90-е гг. XIX в. в работах французских математиков Э. Бореля, А. Лебега и Р. Бэра. В этих работах на базе теории множеств Г. Кантора строилась новая теория разрывных функций – цель которую безуспешно пытался достичь в своей аритмологии Н.В. Бугаев с учениками. Один из них Д.Ф. Егоров даже начал с работы по аритмологии свою научную карьеру. Однако, будучи математиком с великолепной интуицией, он быстро разочаровался в бугаевской аритмологии и в качестве темы своих дальнейших исследований избрал дифференциально-геометрическое направление, развитие которому в Москве положил К.М. Петерсон. И хотя на этом пути ему сопутствовала удача – в 1899 г. он защитил магистерскую диссертацию «Уравнения с частными производными 2-го порядка по двум независимым переменным. Общая теория интегралов, характеристики», в 1901 г. – докторскую «Об одном классе ортогональных систем», основные результаты которой вошли во второе издание известного трактата Г. Дарбу «Lesons sur les systumes orthogonaux et les coordonnÿes curvilignes» (Paris, 1910), назвавшего в честь него класс Е-поверхностей), он не забывал и аритмологических сюжетов своей юности – теорию разрывных функций [7]. Познакомившись с работами по теории функций действительного переменного молодых французских математиков он сразу увидел в ней чаемую покойным Бугаевым теорию разрывных функций и увлекся ею. В 1911 г. в «Comptes Rendus» Академии наук Франции появилась заметка «О последовательности измеримых функций», содержавшая теорему, известную ныне как теорема Егорова, а уже в 1912 г. – в том же журнале статья его ученика Н.Н. Лузина «К основной теореме интегрального исчисления» о С-свойстве. Так началась история знаменитой Московской школы теории функций или, как ее часто называют, школы Егорова–Лузина. Ее рост был стремительным, успехи поразительными. В 1915 г. публикуется знаменитый труд Н.Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд», в который наряду с его собственными достижениями включены и результаты одного из первых его учеников – А.Я. Хинчина. Уже в годы предшествующие революционным событиям 1917 г. Лузиным и его учениками – Хинчиным, Д.Е. Меньшовым, П.С. Александровым, М.Я. Суслиным – были получены результаты, заявившие о появлении в Москве одной из наиболее интересных школ современной Европы.

Безусловно, в этом успехе присутствует и вклад Московского математического общества. На его заседаниях докладывались основные результаты по теории множеств и теории функций действительного переменного, полученные москвичами. Особую роль в становлении школы сыграл организованный при Обществе в 1902 г. студенческий математический кружок [8; 9]. Его первым секретарем был П.А. Флоренский, а его преемником Н.Н. Лузин. Проблематика теории множеств и теории функций занимала особое место на заседаниях этого кружка. И хотя с началом войны 1914 г., а тем более после революции 1917 г. и разразившейся впоследствии гражданской войны издательская деятельность чрезвычайно снизила свои обороты (так сначала замедлился, а затем и вовсе остановился выпуск «Математического сборника»), тем не менее, как мы уже отметили выше, в 1915 г. свет увидела выпущенная отдельным первым номером 30-го тома «Математического сборника» диссертация Н.Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд».

Особенное значение имела деятельность Общества в тяжелые для науки и образования 1917–1923 гг. Это был период, когда университетская жизнь лишь теплилась – сложности с продуктами и топливом вынудили многих преподавателей покинуть город. Продолжались заседания Общества, которые собирали всех математиков, которые на момент их проведения оказывались в городе. Президенты Общества оставались в Москве на протяжении всего трудного периода. И Общество взяло на себя роль не только организатора московской математической жизни, но и одного из созидателей общегосударственного (теперь уже советского) математического сообщества. Такой его роли способствовал случившийся в 1918 г. перенос столицы в Москву. Важным обстоятельством стало то, что в 1923 г. президентом Общества стал Д.Ф. Егоров – выдающийся математик и замечательный организатор [7].

Прежде всего Егоров поставил задачу возобновления издания «Математического сборника» [5]. И в 1924 г. в Госиздате увидел свет 31-й его том. Учитывая складывающуюся ситуацию в советской уже науке, он изменил характер журнала, преобразовав его из издания прежде всего московского во всесоюзное и даже международное. Для этого он в 32-м томе ввел в редколлегию журнала В.А. Стеклова – лидера Ленинградской школы, по уже установившейся традиции противостоявшей москвичам. Более того, начиная с этого тома журнал был объявлен органом не только Московского, но также Ленинградского и Казанского математических обществ – это положение сохранялось до 1936 г., когда издателем выступила АН СССР. Кроме русского официальными языками журнала становятся немецкий, французский, итальянский и английский языки. В результате голода на научную периодику, возникшую после окончания Первой мировой войны в Европе, инициатива Егорова оказалась в высшей степени востребованной. Среди авторов «Математического сборника» 1920 – начала 1930-х гг. мы видим Ж. Адамара, Б. Гамбье, С. Лефшеца, Э. Картана, Р. Мизеса, Э. Нетер, В. Серпинского, Л. Тонелли, М. Фреше, Х. Хопфа.

Главным для советского математического сообщества, которое лишь начинало формироваться, было появление общесоюзного печатного органа, нацеленного на широкое международное сотрудничество. Кроме работ москвичей в журнале печатались работы ленинградцев (А.С. и Я.С. Безиковичей, Н.М. Гюнтера, Л.В. Канторовича, И.А. Лаппо-Данилевского, С.Л. Соболева, Г.М. Фихтенгольца, В.А. Фока), а также математиков из различных городов страны – Казани (Н.Г. Чеботарев), Ростова-на-Дону (Д.Д. Мордухай-Болтовского), Киева (Д.А. Граве, Н.М. Крылов), Одессы (М.Г. Крейн).

Другой важной инициативой президента Московского математического общества Д.Ф. Егорова, направленной на укрепление отечественного математического сообщества, стала организация и проведение в Москве весной 1927 г. Всероссийского съезда математиков [10]. Этот съезд, председателем которого был избран Егоров, собрал 378 участников из 33 городов Советского союза (от Ленинграда до Тифлиса и Баку, от Минска до Перми – в европейской части, от Омска до Ташкента и от Томска до Владивостока – в азиатской). На нем было принято решение о создании Всесоюзной ассоциации математических учреждений, и был избран ее Совет, который взял на себя издание трудов съезда, которое было осуществлено в 1928 г., и подготовку Первого Всесоюзного съезда математиков в Харькове, который прошел в июне 1930 г. в Харькове. Так инициативой Московского математического общества было положено начало регулярной жизни отечественного математического сообщества. Выступив инициатором создания его новой структуры – Всесоюзной ассоциации – Общество, не претендуя в ней при этом на какую-то особую роль, продолжило традицию содействовать развитию математики в России.

Общество сыграло важную роль в процессе активного роста исследований Московской школы теории функций в конце 1920 – начале 1930-х гг. – в период активного «ядерного процесса» распада школы на множество дочерних и чрезвычайного расширения ее тематики. Этот процесс, явившийся, с одной стороны, свидетельством необычайных жизненных сил школы и открывающихся перед ней перспектив, с другой, стал причиной конфликтной ситуации, сложившейся между Лузиным и некоторыми из его учеников. Сложный идеологический климат, в который оказалась погруженной наука в тот непростой период нашей истории, придал этой ситуации, вылившейся в «дело академика Н.Н.Лузина» [11], идеологический характер.

Этому драматическому эпизоду в истории математики в Москве предшествовало еще одно «дело», одним из фигурантов которого стал Д.Ф. Егоров. В 1920–1930-е гг. он – центральная фигура математической жизни Москвы: директор Научно-исследовательского института математики и механики Московского университета, президент Московского математического общества. В то же время это человек глубоко верующий и резко отрицательно настроенный к советской власти, при этом не только не скрывавший своих политических и религиозных убеждений, но активно с ними выступавший [7]. Разумеется, советская власть не могла с этим долго мириться. Егоров стал объектом постоянных нападок пролетарских идеологов, которые в конечном итоге привели к его аресту в 1930 г. по сфабрикованному ОГПУ делу «всесоюзной контрреволюционной монархической организации “Истинно-православная церковь”» и к его смерти в Казани в 1931 г.

После ареста Егорова под ударом оказалось возглавлявшееся им Общество. Стала реальной угроза его закрытия (подробнее см.: [12]). Лишь своевременными действиями его лидеров (в частности, удалением с поста президента партийного идеолога Э. Кольмана – было и такое, определенного рода риторикой, реформой «Математического сборника»), удалось вывести Общество из под удара. Президентом Общества в 1932 г. стал П.С. Александров, сохранявший эту позицию до 1964 г.

«Дело Егорова» обозначило начало нового этапа в жизни математического сообщества – открытая антисоветская позиция его членов была отныне нетерпима.

«Дело Лузина» можно рассматривать как дальнейшее развитие идеологического наступления на советском «математическом фронте» [11]. Ученым указали на необходимость поставить всю свою научную деятельность под полный идеологический контроль советского государства. И математики правильно угадали смысл акции: нельзя воевать с государственной идеологией, ей нужно подчиниться, но подчиниться так, чтобы идеология, по возможности, не мешала свободному развитию математической мысли, а если и мешала, то в наименьшей возможной степени, чтобы «идеологи» рекрутировались, по возможности, из круга лиц совместимых с лидерами математического сообщества. То есть поставить заслон лицам типа Кольмана, но благожелательно отнестись к фигурам типа С.А. Яновской. Более того, взять марксистско-ленинскую интерпретацию предмета и методов математики в собственные руки. Отсюда и появление в 1956 г. трехтомного коллективного труда «Математика, ее содержание, методы и значение», подготовленного под редакцией А.Д. Александрова, А.Н. Колмогорова и М.А. Лаврентьева.

К середине 1930-х гг. Общество оказалось одной из самых авторитетных организаций в отечественном математическом сообществе. Вместе с Математическим институтом им. В.А. Стеклова АН СССР, который в 1934 г. переехал в Москву, и механико-математическим факультетом Московского университета, оно вошло в состав того ядра, вокруг которого начала формироваться одна из ведущих математических школ второй половины XX в. – Советская математическая школа.

От двух названных институтов Общество отличает одна особенность – оно является организацией не государственной, но общественной. Прежде всего, оно играло роль своего рода профессионального клуба – здесь докладывались и обсуждались новейшие результаты отечественных и зарубежных математиков. Но здесь же дискутировались и внутренние проблемы жизни отечественного сообщества: мы уже упоминали о дебатах по поводу результатов Имшенецкого или Ковалевской – математиков отнюдь не московских – проходивших на заседаниях Общества, отметим также занятия Обществом проблемами школьного математического образования. А в некоторые переломные моменты этой жизни именно общественный характер Общества позволял ему выходить на ее передний край, задавая само направление движения отечественной математики.

В 1936 г. Институт им. В.А. Стеклова вместе с Обществом начали издание «Успехов математических наук», выходивших поначалу нерегулярно – в 1933–1946 гг. появилось 10 его выпусков, а в 1946 г. преобразованного в журнал, ставший основным советским математическим изданием, выходящим 6 раз в год, публикующим обзорные статьи, научные сообщения, сделанные на заседаниях Общества, а также информационные материалы о математической жизни в стране (в частности, о заседаниях Московского и Ленинградского обществ) и за рубежом.

Именно Общество взяло на себя основную роль в создании фундаментальных трудов «Математика в СССР за 15 лет», «Математика в СССР за 30 лет», двухтомника «Математика в СССР за 40 лет», а также вышедшего в двух книгах второго тома «Математики в СССР. 1958–1967». Общество организовывало съезды, конференции, семинары и присуждало специальные премии. Среди лауреатов премии Общества мы видим цвет математической мысли страны.

Велико значение Общества и в развитии преподавания математики, прежде всего в советской средней школе. Эта тема находилась в центре внимания Общества с момента его основания. В первых томах «Математического сборника» существовал даже специальный раздел, предназначенный для учителей гимназий. В феврале 1934 г. была создана секция элементарной математики, вскоре переименованная в научно-педагогическую, а затем в секцию средней школы. Во время войны секция не функционировала, возобновив свою работу лишь в 1948 г. (под руководством А.И. Маркушевича). Основная задача секции – содействовать повышению уровня преподавания математики в школе, обмениваться преподавательским опытом, устанавливать постоянные связи между преподавателями средней и высшей школы. Особенно следует отметить инициативу Общества середины 1930-х гг., связанную с организацией школьных математических олимпиад, первая из которых была проведена осенью 1935 г. Так было положено начало мощному впоследствии олимпиадному движению в стране. Многие из известных математиков XX в. начали свою карьеру, став победителями таких олимпиад.

На протяжении своей истории Общество неоднократно обсуждало проблемы, связанные с программами и учебниками по математике для средней школы. Одно из последних, бурное и чрезвычайно многолюдное заседание Общества, состоявшееся 27 ноября 2001 г., было посвящено предполагаемой реформе школы и перспективам математического образования, планируемым Министерством образования РФ и вызвавшим негативную реакцию в математическом сообществе.

Роль общественной организации сделала деятельность Московского математического общества особенно важной в идеологизированном советском обществе. На заседаниях общества трибуна предоставлялась и математикам, находившимся в сложных отношениях с советскими и партийными властями. Более того, Общество «позволило» себе в начале 1970-х гг. избрать в качестве своего президента И.Р. Шафаревича, который вел в те годы активную правозащитную деятельность.

Обратим внимание также на то немаловажное обстоятельство, что президентами Общества всегда были крупные, по большей части, даже крупнейшие математики своего времени, что, конечно, поднимало его престиж и значение в отечественном математическом сообществе. Вот их список, начиная с 1923 г.: Д.Ф. Егоров (1923–1931), П.С. Александров (1932–1964), А.Н. Колмогоров (1964–1966, 1973–1985), И.М. Гельфанд (1966–1970), И.Р. Шафаревич (1970–1973), С.П. Новиков (1985–1996), В.И. Арнольд (1996–2010). С 2010 г. Общество возглавляет В.А. Васильев.

Основанное как кружок математиков, поддерживающих друг друга в научных занятиях, оно трансформировалось в неформальную ассоциацию, в значительной степени координирующую и организующую деятельность национального математического сообщества. В советском математическом сообществе Московское математическое общество взяло на себя роль ведущей в стране (не надо забывать, что речь идет о столичном математическом обществе, которому в сверхцентрализованном советском обществе отводилась особая роль) общественной, до известной степени независимой от партийных и государственных органов, организации. Маневрируя между не всегда действовавшими в унисон административными организациями – Отделением математики АН СССР и Математическим институтом им. В. А. Стеклова, с одной стороны, Министерством высшего и среднего специального образования СССР, руководством Московского университета и его механико-математического факультета, с другой стороны – Московское математическое общество успешно преодолевало встречавшиеся на его пути рифы, сохраняя высокую научную репутацию и авторитет в отечественном математическом сообществе.

Свою высокую миссию Общество продолжало исполнять и в тяжелые годы перестройки, и в последующий непростой период нашей истории. Традиции, заложенные его основателями, укрепленные и развитые выдающимися представителями последующих поколений, создали прочный фундамент для продолжения его успешной научной и организационной деятельности. Основанием этих традиций стали высокие академические стандарты, о сути которых так сказал на столетнем юбилее Общества тогдашний его президент Павел Сергеевич Александров [13, с. 9]: «...Московское математическое общество всегда культивировало... многогранное развитие математики, не стараясь втиснуть его ни в какие заранее данные рамки и системы оценок. В течение десятилетий Московское математическое общество было тем местом, на котором произрастали и жили математические открытия, искания, волнения, все творческие эмоции московских математиков нескольких поколений. Московское математическое общество не было только местом, где регистрировались отдельные математические результаты, где читались популярные лекции по математике. Московское математическое общество было школой математической эстетики, математического вкуса, очень взыскательного, и школой математической этики, научной этики, тоже очень взыскательной...». В тяжелые периоды переживаемые отечественной математикой Общество не колеблясь брало на себя роль общества национального. Сегодня российская математика переживает именно такой период. И мы хотим выразить надежду на успешность дальнейшей деятельности Общества, которое в своем развитии будет продолжать исполнение возложенной на себя высокой миссии – «содействовать развитию математических наук в России».

Литература

1. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года. М., 1968.

2. Токарева Т.А. Филоматический пролог Московского математического общества // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2002. Вып. 7(42). С. 39–61.

3. Материалы для истории Московского математического общества // Математический сборник. 1889. Т. XIV. Вып. 3. С. 472–474]

4. Устав Московского математического общества // Математический сборник. 1867. Т. II. Вып. 1. С. III–VI.

5. Демидов С.С. «Математический Сборник» в 1866–1935 гг. // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 1996. Вып. 1(36). № 2. С. 127–145.

6. Демидов С.С. Н.В. Бугаев и возникновение Московской школы теории функций действительного переменного // Историко-математические исследования. М., 1985. Вып. 29. С.113–124.

7. Демидов С.С. Профессор Московского университета Дмитрий Федорович Егоров и имеславие в России в первой трети XX столетия // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 1999. Вып. 4 (39). С. 122–156.

8. Половинкин С.М. О студенческом математическом кружке при Московском математическом обществе в 1902–1903 // Историко-математические исследования. М., 1986. Вып. 30. С. 148–158.

9. Флоренский П.А. Черновик выступления на открытии студенческого математического кружка при Московском математическом обществе // Историко-математические исследования. М., 1990. Вып. 32–33. С. 467–473.

10. Токарева Т.А. Первые съезды отечественных математиков: предыстория и формирование Советской математической школы // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2001. Вып. 6(41). С. 213–231.

11. Дело академика Николая Николаевича Лузина. СПб: РХГИ, 1999.

12. Токарева Т.А. Белое пятно, или черные страницы в истории Московского математического общества // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2007. Вып. 12(47). С. 104?124.

13. Александров П.С. Вступительный доклад на торжественном заседании Московского математического общества 20 октября 1964 г. // Успехи математических наук. 1965. Т. XX. Вып. 3(123). С. 4–9.

РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ МАГНИТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Д.В. Лукьяненко[1], А.Г. Ягола[2]

МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Москва, Россия

e-mail: [1]`lukyanenko@physics.msu.ru`, [2]`yagola@physics.msu.ru`

Аннотация: В статье рассматриваются регуляризирующие алгоритмы обработки магнитных изображений. С помощью метода регуляризации А.Н.Тихонова и параллельных вычислений отыскивается распределение параметров намагниченности по изучаемому трехмерному объекту на основе измерений магнитного поля расположенными вне объекта магнитными сенсорами.

Ключевые слова: обратные задачи, некорректные задачи, интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, метод регуляризации Тихонова, параллельные вычисления, восстановление параметров намагниченности.

REGULARIZING ALGORITHMS FOR PROCESSING OF MAGNETIC IMAGES

Abstract: In this article we are considering some regularization algorithms for processing of magnetic images. Using the method of Tikhonov's regularization and parallel computing a distribution of the magnetization parameters of the studied three-dimensional object is searched on the basis of measurements of the magnetic field which are performed outside of the object by the magnetic sensors.

Keywords: inverse problem, ill-posed problem, Fredholm integral equation of the 1st kind, Tikhonov regularization, parallel computing, restoring of magnetization parameters.

Тестовые расчеты выполнялись с использованием ресурсов Суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова.

Введение

После создания теории и численных методов решения некорректно поставленных задач появилась возможность повышения разрешающей способности экспериментальных устройств с помощью применения регуляризирующих алгоритмов при обработке экспериментальной информации. В частности, такой подход был реализован при обработке изображений. Математическая модель описывается двумерным интегральным уравнением 1-го рода (Фредгольма или типа свертки), для решения которого применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова при различных априорных предположениях. К настоящему времени опубликованы сотни работ, продемонстрировавших эффективность такого подхода. Упомянем только несколько работ, выполненных на физическом факультете МГУ имени Ломоносова. 1) Обработка радиоастрономических изображений (повышение разрешающей способности радиотелескопа) [1]. 2) Обработка астрономических наблюдений (повышение разрешающей способности оптического телескопа), в частности, обработка изображения знаменитой гравитационной линзы «Крест Эйнштейна» [2]. 3) Обработка изображений в электронной микроскопии (были рассмотрены различные постановки обратных задач электронной микроскопии) [3-6]. 4) Обработка изображений в цифровой фотографии (устранение смазывания и дефокусировки) [7]. 5) Обработка томографических изображений (устранение кольцевых артефактов) [8].

В последние годы разрабатывались методы обработки магнитных изображений, к описанию которых мы и приступаем на примере решения обратной задачи восстановления параметров намагниченности корабля по измеренным значениям магнитного поля вне его корпуса [9, 10].

Сначала надо отметить, что при решении многих современных прикладных задач часто возникает необходимость восстанавливать характеристики исследуемых объектов в пространстве, при этом эти характеристики могут являться векторными функциями. Это приводит к необходимости решать двумерные или трехмерные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода для векторной функции, что зачастую невозможно эффективно сделать с использованием обычных персональных компьютеров. В таких случаях обычно используются различные упрощения и допущения, которые понижают численную размерность решаемой задачи, но дают ограниченную информацию об исследуемом объекте либо приводят к существенным ошибкам в значениях восстанавливаемых характеристик. Предлагается решать такие многомерные задачи с использованием многопроцессорных систем [9, 11] в самой общей постановке, сводящейся к двумерному или трехмерному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода для векторной функции. Материал, представленный в этой работе, основан на результатах, полученных авторами в работах [9, 10].

В работе продемонстрированы эффективные методы решения таких задач, которые можно реализовать как на многопроцессорных кластерных системах, так и на современных персональных компьютерах с многоядерными процессорами. При разработке этих методов активно использовались идеи использования многопроцессорных систем для решения двумерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода, заложенные в работах [12] и [13]. Все результаты данной работы могут быть легко упрощены на случаи задач меньшей размерности либо задач, при решении которых необходимо восстанавливать скалярную функцию.

Постановка задачи и метод решения

Двумерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции

Рассмотрим двумерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции

$$\mathbf{A}\boldsymbol{M} = \int\limits_{L_x}^{R_x}\int\limits_{L_y}^{R_y} \mathbf{K}(s,t,x,y)\boldsymbol{M}(x,y)dxdy = \boldsymbol{B}(s,t), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{B}(s,t)$ и $\boldsymbol{M}(x,y)$ – векторные функции, а ядро $\mathbf{K}(s,t,x,y)$ является матричной функцией:

$$\boldsymbol{B}(s,t) = \begin{pmatrix} B^1(s,t) \\ B^2(s,t) \\ B^3(s,t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{M}(x,y) = \begin{pmatrix} M^1(x,y) \\ M^2(x,y) \\ M^3(x,y) \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Обозначим

$$P = \{(x,y) : \ L_x \leqslant x \leqslant R_x, \ L_y \leqslant y \leqslant R_y\},$$
$$Q = \{(s,t) : \ L_s \leqslant s \leqslant R_s, \ L_t \leqslant t \leqslant R_t\},$$

где P – область определения векторной функции $\boldsymbol{M}(x,y)$, а Q – область определения векторной функции $\boldsymbol{B}(s,t)$. Будем предполагать, что $\boldsymbol{M} \in W_2^2(P)$, $\boldsymbol{B} \in L_2(Q)$, а оператор $\mathbf{A}$ с ядром $\mathbf{K}$ непрерывен и взаимнооднозначен. Нормы правой части уравнения (1) и решения вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{B}\|_{L_2} &= \sqrt{\|B^1\|_{L_2}^2 + \|B^2\|_{L_2}^2 + \|B^3\|_{L_2}^2}, \\ \|\boldsymbol{M}\|_{W_2^2} &= \sqrt{\|M^1\|_{W_2^2}^2 + \|M^2\|_{W_2^2}^2 + \|M^3\|_{W_2^2}^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть вместо точно известных $\bar{\boldsymbol{B}}$ и оператора $\bar{\mathbf{A}}$ ($\bar{\mathbf{A}}\bar{\boldsymbol{M}} = \bar{\boldsymbol{B}}$) известны их приближенные значения $\boldsymbol{B}_\delta$ и $\mathbf{A}_h$, такие, что $\|\boldsymbol{B}_\delta - \bar{\boldsymbol{B}}\|_{L_2} \leqslant \delta$, $\|\mathbf{A}_h - \bar{\mathbf{A}}\|_{W_2^2 \to L_2} \leqslant h$. При выписанных условиях задача является некорректной, для ее решения необходимо построить регуляризирующий алгоритм. Воспользуемся алгоритмом, основанным на минимизации функционала Тихонова

$$F^\alpha[\boldsymbol{M}] = \|\mathbf{A}_h\boldsymbol{M} - \boldsymbol{B}_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha\|\boldsymbol{M}\|_{W_2^2}^2, \tag{4}$$

который в двумерном случае примет вид:

$$F^\alpha[\boldsymbol{M}] = \int_{L_s}^{R_s}\int_{L_t}^{R_t} dsdt \left\{ \int_{L_x}^{R_x}\int_{L_y}^{R_y} \mathbf{K}_h(s,t,x,y)\boldsymbol{M}(x,y)dxdy - \boldsymbol{B}_\delta(s,t) \right\}^2 + \alpha\Omega[\boldsymbol{M}], \tag{5}$$

где $\Omega[\boldsymbol{M}] \equiv \|\boldsymbol{M}\|_{W_2^2}^2$ – сглаживающий функционал:

$$\Omega[\boldsymbol{M}] = \int_{L_x}^{R_x}\int_{L_y}^{R_y} \left\{ (\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}) + \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial y^2} \right) \right\} dxdy.$$

Для любого $\alpha > 0$ существует единственная экстремаль функционала Тихонова $\boldsymbol{M}_\eta^\alpha$, $\eta = \{\delta, h\}$, реализующая минимум $F^\alpha[\boldsymbol{M}]$. Для выбора параметра регуляризации можно использовать алгоритм обобщенного принципа невязки [14]. При выборе параметра $\alpha = \alpha(\eta)$ по обобщенному принципу невязки

$$\rho(\alpha) = \|\mathbf{A}_h\boldsymbol{M}_\eta^\alpha - \boldsymbol{B}_\delta\|_{L_2}^2 - \left(\delta + h\|\boldsymbol{M}_\eta^\alpha\|_{W_2^2}\right)^2 = 0$$

$\boldsymbol{M}_\eta^\alpha$ стремится при $\eta \to 0$ к точному решению задачи $\bar{\boldsymbol{M}}$ в норме W_2^2, а, следовательно, и равномерно на P.

В качестве метода минимизации функционала Тихонова применяется метод сопряженных градиентов.

При решении задачи минимизации методом сопряженных градиентов необходимо вычислять значение функционала Тихонова $F^\alpha[\boldsymbol{M}]$ и его градиента $\operatorname{grad} F^\alpha[\boldsymbol{M}]$. Для численного решения задачи переходим к конечномерным пространствам. Введем сетки по x, y, s, t с шагами h_x, h_y, h_s, h_t и числом узлов N_x, N_y, N_s,

N_t соответственно:

$$
\begin{aligned}
&x_{i_1} = L_x + (i_1 - 1)h_x, && i_1 = \overline{1, N_x}, && h_x = \frac{R_x - L_x}{N_x - 1},\\
&y_{i_2} = L_y + (i_2 - 1)h_y, && i_2 = \overline{1, N_y}, && h_y = \frac{R_y - L_y}{N_y - 1},\\
&s_{j_1} = L_s + (j_1 - 1)h_s, && j_1 = \overline{1, N_s}, && h_s = \frac{R_s - L_s}{N_s - 1},\\
&t_{j_2} = L_t + (j_2 - 1)h_t, && j_2 = \overline{1, N_t}, && h_t = \frac{R_t - L_t}{N_t - 1}.
\end{aligned}
$$

Примем, что $M^m_{i_1 i_2} = M^m(x_{i_1}, y_{i_2})$, $B^n_{j_1 j_2} = B^n_\delta(s_{j_1}, t_{j_2})$, $K^{nm}_{j_1 j_2 i_1 i_2} = K^{nm}_h(s_{j_1}, t_{j_2}, x_{i_1}, y_{i_2})$, $n = \overline{1,3}$, $m = \overline{1,3}$. Все интегралы в формуле (5) аппроксимируются по формуле прямоугольников. Таким образом, получаем следующую конечно-разностную аппроксимацию функционала Тихонова (5):

$$F^\alpha[\boldsymbol{M}] = \Phi[\boldsymbol{M}] + \alpha\Omega[\boldsymbol{M}], \tag{6}$$

где

$$\Phi[\boldsymbol{M}] = \sum_{j_1=1}^{N_s}\sum_{j_2=1}^{N_t}\sum_{n=1}^{3} h_s h_t \times \left[\sum_{i_1=1}^{N_x}\sum_{i_2=1}^{N_y}\sum_{m=1}^{3} h_x h_y K^{nm}_{j_1 j_2 i_1 i_2} M^m_{i_1 i_2} - B^n_{j_1 j_2}\right]^2, \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
\Omega[\boldsymbol{M}] = h_x h_y \sum_{i_1=1}^{N_x}\sum_{i_2=1}^{N_y}\sum_{m=1}^{3}\left(M^m_{i_1 i_2}\right)^2 + \ldots\\
+ \frac{h_y}{h_x}\sum_{i_1=2}^{N_x-1}\sum_{i_2=1}^{N_y}\sum_{m=1}^{3}\left(M^m_{i_1+1 i_2} - 2M^m_{i_1 i_2} + M^m_{i_1-1 i_2}\right)^2 + \ldots\\
+ \frac{h_x}{h_y}\sum_{i_1=1}^{N_x}\sum_{i_2=2}^{N_y-1}\sum_{m=1}^{3}\left(M^m_{i_1 i_2+1} - 2M^m_{i_1 i_2} + M^m_{i_1 i_2-1}\right)^2.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Таким образом, исходная задача сводится к задаче минимизации в N-мерном пространстве, где $N \equiv 3\times N_x\times N_y$, с последующим выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки.

Итерационный процесс минимизации функционала строится следующим образом: задается некоторое начальное приближение – вектор $\boldsymbol{M}^{(0)}$. Для заданной точки $\boldsymbol{M}^{(i)}$ минимизирующей последовательности вычисляется градиент $\boldsymbol{g}^{(i)} = \operatorname{grad} F^\alpha[\boldsymbol{M}^{(i)}]$, который легко получить из формул (7), (8):

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{grad} F^\alpha[\boldsymbol{M}])^m_{i_1 i_2} = \frac{\partial F^\alpha[\boldsymbol{M}]}{\partial M^m_{i_1 i_2}} = \ldots\\
= 2h_x h_y \sum_{j_1=1}^{N_s}\sum_{j_2=1}^{N_t}\sum_{n=1}^{3} h_s h_t K^{nm}_{j_1 j_2 i_1 i_2} \times \left[\sum_{l_1=1}^{N_x}\sum_{l_2=1}^{N_y}\sum_{p=1}^{3} h_x h_y K^{np}_{j_1 j_2 l_1 l_2} M^p_{l_1 l_2} - B^n_{j_1 j_2}\right] +\\
+ \alpha\frac{\partial\Omega[\boldsymbol{M}]}{\partial M^m_{i_1 i_2}},
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$\frac{\partial\Omega[\boldsymbol{M}]}{\partial M^m_{i_1 i_2}} = 2h_x h_y M^m_{i_1 i_2} + 2\frac{h_y}{h_x}\Omega'_1 + 2\frac{h_x}{h_y}\Omega'_2,$$

$$\Omega'_1 = \begin{cases} -2M^m_{i_1+1 i_2} + M^m_{i_1 i_2} + M^m_{i_1+2 i_2}, & i_1 = 1 \\ -4M^m_{i_1+1 i_2} + 5M^m_{i_1 i_2} - 2M^m_{i_1-1 i_2} + M^m_{i_1+2 i_2}, & i_1 = 2 \\ -4M^m_{i_1+1 i_2} + 6M^m_{i_1 i_2} - 4M^m_{i_1-1 i_2} + M^m_{i_1-2 i_2} + M^m_{i_1+2 i_2}, & i_1 = \overline{3, N_x - 2} \\ -2M^m_{i_1+1 i_2} + 5M^m_{i_1 i_2} - 4M^m_{i_1-1 i_2} + M^m_{i_1-2 i_2}, & i_1 = N_x - 1 \\ -2M^m_{i_1-1 i_2} + M^m_{i_1 i_2} + M^m_{i_1-2 i_2}, & i_1 = N_x \end{cases},$$

$$\Omega'_2 = \begin{cases} -2M^m_{i_1 i_2+1} + M^m_{i_1 i_2} + M^m_{i_1 i_2+2}, & i_2 = 1 \\ -4M^m_{i_1 i_2+1} + 5M^m_{i_1 i_2} - 2M^m_{i_1 i_2-1} + M^m_{i_1 i_2+2}, & i_2 = 2 \\ -4M^m_{i_1 i_2+1} + 6M^m_{i_1 i_2} - 4M^m_{i_1 i_2-1} + M^m_{i_1 i_2-2} + M^m_{i_1 i_2+2}, & i_2 = \overline{3, N_y - 2} \\ -2M^m_{i_1 i_2+1} + 5M^m_{i_1 i_2} - 4M^m_{i_1 i_2-1} + M^m_{i_1 i_2-2}, & i_2 = N_y - 1 \\ -2M^m_{i_1 i_2-1} + M^m_{i_1 i_2} + M^m_{i_1 i_2-2}, & i_2 = N_y \end{cases}.$$

Далее по направлению градиента $\boldsymbol{g}^{(i-1)}$ и направлению спуска $\boldsymbol{h}^{(i-1)}$ на предыдущем шаге вычисляется новое направление спуска по формуле

$$\boldsymbol{h}^{(i)} = -\boldsymbol{g}^{(i)} + \gamma_i \boldsymbol{h}^{(i-1)}, \quad \gamma_i = \frac{(\boldsymbol{g}^{(i)} - \boldsymbol{g}^{(i-1)}, \boldsymbol{g}^{(i)})}{(\boldsymbol{g}^{(i-1)}, \boldsymbol{g}^{(i-1)})}$$

(вариант Полака-Рибьера метода сопряженных градиентов). После этого строится однопараметрическое множество, состоящее из элементов

$$\boldsymbol{M}_\lambda = \boldsymbol{M}^{(i)} + \lambda \boldsymbol{h}^{(i)}$$

Затем решается задача одномерной минимизации функционала $F^\alpha[\boldsymbol{M}_\lambda]$. Точка минимума функционала $F^\alpha[\boldsymbol{M}_\lambda]$ на рассматриваемом множестве принимается за следующий элемент $\boldsymbol{M}^{(i+1)}$ минимизирующей последовательности. За N шагов методом сопряженных градиентов находится минимум функционала Тихонова (5) для фиксированного параметра регуляризации α. Параметр регуляризации α выбирается по обобщенному принципу невязки (соответствующие численные методы выбора параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки подробно описаны в работе [14]).

Трехмерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции

Рассмотрим тепрь обобщение на трехмерный случай. Трехмерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции будет иметь вид:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{M} = \int\limits_{L_x}^{R_x}\int\limits_{L_y}^{R_y}\int\limits_{L_z}^{R_z} \mathbf{K}(s,t,r,x,y,z)\boldsymbol{M}(x,y,z)dxdydz = \boldsymbol{B}(s,t,r), \tag{10}$$

где $\boldsymbol{B}(s,t,r)$, $\boldsymbol{M}(x,y,z)$ и $\mathbf{K}(s,t,r,x,y,z)$ имеют струкуту, аналогичную (2). Областью определения векторной функции $\boldsymbol{M}(x,y,z)$ является $P = \{(x,y,z) : L_x \leqslant x \leqslant R_x,\ L_y \leqslant y \leqslant R_y,\ L_z \leqslant z \leqslant R_z\}$, а областью определения векторной функции $\boldsymbol{B}(s,t,r)$ – область $Q = \{(s,t,r) : L_s \leqslant s \leqslant R_s,\ L_t \leqslant t \leqslant R_t,\ L_r \leqslant r \leqslant R_r\}$. Также будем предполагать, что $\boldsymbol{M} \in W_2^2(P)$, $\boldsymbol{B} \in L_2(Q)$, а оператор $\mathbf{A}$ с ядром $\mathbf{K}$ непрерывен и взаимнооднозначен. Нормы правой части уравнения (10) и решения вводятся аналогичным (3) образом. Функционал Тихонова (4) в случае трехмерного уравнения примет вид:

$$F^\alpha[\boldsymbol{M}] = \int\limits_{L_s}^{R_s}\int\limits_{L_t}^{R_t}\int\limits_{L_r}^{R_r} dsdtdr \Bigg\{ \int\limits_{L_x}^{R_x}\int\limits_{L_y}^{R_y}\int\limits_{L_z}^{R_z} \mathbf{K}_h(s,t,r,x,y,z)\boldsymbol{M}(x,y,z)dxdydz- \\ - \boldsymbol{B}_\delta(s,t,r) \Bigg\}^2 + \alpha\Omega[\boldsymbol{M}], \quad (11)$$

где $\Omega[\boldsymbol{M}] \equiv \|\boldsymbol{M}\|^2_{W_2^2}$ – сглаживающий функционал:

$$\Omega[\boldsymbol{M}] = \int\limits_{L_x}^{R_x}\int\limits_{L_y}^{R_y}\int\limits_{L_z}^{R_z} \Bigg\{ (\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}) + \left(\frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial y^2}\right) + \\ + \left(\frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial z^2}, \frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial z^2}\right) \Bigg\} dxdydz.$$

Введем дополнительные сетки z, r с шагами h_z, h_r и числом узлов N_z, N_r

$$z_{i_3} = L_z + (i_3 - 1)h_z, \qquad i_3 = \overline{1, N_z}, \qquad h_z = \frac{R_z - L_z}{N_z - 1},$$
$$r_{j_3} = L_r + (j_3 - 1)h_r, \qquad j_3 = \overline{1, N_r}, \qquad h_r = \frac{R_r - L_r}{N_r - 1},$$

и примем, что $M^m_{i_1 i_2 i_3} = M^m(x_{i_1}, y_{i_2}, z_{i_3})$, $B^n_{j_1 j_2 j_3} = B^n_\delta(s_{j_1}, t_{j_2}, r_{j_3})$, $K^{nm}_{j_1 j_2 j_3 i_1 i_2 i_3} = K^{nm}_h(s_{j_1}, t_{j_2}, r_{j_3}, x_{i_1}, y_{i_2}, z_{i_3})$, $n = \overline{1,3}$, $m = \overline{1,3}$. В результате получаем следующую конечно-разностную аппроксимацию функционала Тихонова (6):

$$\Phi[\boldsymbol{M}] = \sum_{j_1=1}^{N_s}\sum_{j_2=1}^{N_t}\sum_{j_3=1}^{N_r}\sum_{n=1}^{3} h_s h_t h_r \times \\ \times \left[\sum_{i_1=1}^{N_x}\sum_{i_2=1}^{N_y}\sum_{i_3=1}^{N_z}\sum_{m=1}^{3} h_x h_y h_z K^{nm}_{j_1 j_2 j_3 i_1 i_2 i_3} M^m_{i_1 i_2 i_3} - B^n_{j_1 j_2 j_3} \right]^2, \quad (12)$$

$$\Omega[\boldsymbol{M}] = h_x h_y h_z \sum_{i_1=1}^{N_x}\sum_{i_2=1}^{N_y}\sum_{i_3=1}^{N_z}\sum_{m=1}^{3} \left(M^m_{i_1 i_2 i_3}\right)^2 + \ldots \\ + \frac{h_y h_z}{h_x^3} \sum_{i_1=2}^{N_x-1}\sum_{i_2=1}^{N_y}\sum_{i_3=1}^{N_z}\sum_{m=1}^{3} \left(M^m_{i_1+1 i_2 i_3} - 2M^m_{i_1 i_2 i_3} + M^m_{i_1-1 i_2 i_3}\right)^2 + \ldots \\ + \frac{h_x h_z}{h_y^3} \sum_{i_1=1}^{N_x}\sum_{i_2=2}^{N_y-1}\sum_{i_3=1}^{N_z}\sum_{m=1}^{3} \left(M^m_{i_1 i_2+1 i_3} - 2M^m_{i_1 i_2 i_3} + M^m_{i_1 i_2-1 i_3}\right)^2 + \ldots \\ + \frac{h_x h_y}{h_z^3} \sum_{i_1=1}^{N_x}\sum_{i_2=1}^{N_y}\sum_{i_3=2}^{N_z-1}\sum_{m=1}^{3} \left(M^m_{i_1 i_2 i_3+1} - 2M^m_{i_1 i_2 i_3} + M^m_{i_1 i_2 i_3-1}\right)^2. \quad (13)$$

Таким образом, трехмерная задача сводится к задаче минимизации в N-мерном пространстве, где $N \equiv 3 \times N_x \times N_y \times N_z$, с последующим выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки.

Итерационный процесс минимизации функционала строится по схеме, описанной в предыдущем пункте. Градиент $\boldsymbol{g}^{(i)} = \operatorname{grad} F^\alpha[\boldsymbol{M}^{(i)}]$, который легко получить из формул (12), (13), в трехмерном случае будет иметь вид:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{grad} F^\alpha[\boldsymbol{M}])^m_{i_1 i_2 i_3} = \frac{\partial F^\alpha[\boldsymbol{M}]}{\partial M^m_{i_1 i_2 i_3}} = \ldots \\
= 2h_x h_y h_z \sum_{j_1=1}^{N_s} \sum_{j_2=1}^{N_t} \sum_{j_3=1}^{N_r} \sum_{n=1}^{3} h_s h_t h_r K^{nm}_{j_1 j_2 j_3 i_1 i_2 i_3} \times \\
\times \left[\sum_{l_1=1}^{N_x} \sum_{l_2=1}^{N_y} \sum_{l_3=1}^{N_z} \sum_{p=1}^{3} h_x h_y h_z K^{np}_{j_1 j_2 j_3 l_1 l_2 l_3} M^p_{l_1 l_2 l_3} - B^n_{j_1 j_2 j_3} \right] + \\
+ \alpha \frac{\partial \Omega[\boldsymbol{M}]}{\partial M^m_{i_1 i_2 i_3}},
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

$$
\frac{\partial \Omega[\boldsymbol{M}]}{\partial M^m_{i_1 i_2 i_3}} = 2h_x h_y h_z M^m_{i_1 i_2 i_3} + 2\frac{h_y h_z}{h_x^3}\Omega_1' + 2\frac{h_x h_z}{h_y^3}\Omega_2' + 2\frac{h_x h_y}{h_z^3}\Omega_3',
$$

$$
\Omega_1' = \begin{cases}
-2M^m_{i_1+1 i_2 i_3} + M^m_{i_1 i_2 i_3} + M^m_{i_1+2 i_2 i_3}, & i_1 = 1 \\
-4M^m_{i_1+1 i_2 i_3} + 5M^m_{i_1 i_2 i_3} - 2M^m_{i_1-1 i_2 i_3} + M^m_{i_1+2 i_2 i_3}, & i_1 = 2 \\
-4M^m_{i_1+1 i_2 i_3} + 6M^m_{i_1 i_2 i_3} - 4M^m_{i_1-1 i_2 i_3} + M^m_{i_1-2 i_2 i_3} + M^m_{i_1+2 i_2 i_3}, & i_1 = \overline{3, N_{x-2}} \\
-2M^m_{i_1+1 i_2 i_3} + 5M^m_{i_1 i_2 i_3} - 4M^m_{i_1-1 i_2 i_3} + M^m_{i_1-2 i_2 i_3}, & i_1 = N_{x-1} \\
-2M^m_{i_1-1 i_2 i_3} + M^m_{i_1 i_2 i_3} + M^m_{i_1-2 i_2 i_3}, & i_1 = N_x
\end{cases}.
$$

Выражения для Ω_2' и Ω_3' имеют вид, аналогичный Ω_1', с учетом соответствующих замен выражений в коэффициентах i_2 и i_3 на выражения для i_1.

Распараллеливание задачи минимизации

При решении задачи минимизации методом сопряженных градиентов основные вычисления приходятся на вычисление функционала Тихонова $F^\alpha[\boldsymbol{M}]$ и его градиента $\operatorname{grad} F^\alpha[\boldsymbol{M}]$. Из формул (6), (7), (8) и (9) для функционала и его градиента в двумерном случае (и из формул (6), (12), (13) и (14) для функционала и его градиента в трехмерном случае) видно, что они состоят из несвязанных между собой групп слагаемых (по j_1, j_2 (j_3) и i_1, i_2 (i_3) соответственно). Это дает возможность применения многопроцессорной системы. Задачу можно распараллелить, т.е. переписать программу таким образом, чтобы независимые части программы выполнялись на разных процессорах. Исходная задача решалась с использованием **N** параллельных процессов **0, 1, ..., N-1**, выполняющихся на отдельных процессорах и при необходимости взаимодействующих друг с другом.

Рассмотрим подробнее задачу вычисления значения функционала $F^\alpha[\boldsymbol{M}]$ в некоторой точке $\boldsymbol{M}$. Сначала нулевой процесс передает всем остальным процессам вектор $\boldsymbol{M}$. После этого каждый ненулевой процесс вычисляет свой квадрат выражения для (12) для заданных переменных j_1, j_2 (j_3). Все многомерные массивы можно записать как одномерные, поэтому переменные j_1, j_2 (j_3) можно заменить переменной k, которая изменяется от 1 до $\tilde{N} = 3 \times N_s \times N_t$ $(\times N_r)$. Каждый процесс вычисляет суммы для своих значений k. После этого это значение $(s(k))$ передается нулевому процессу, где происходит суммирование со значениями, переданными от других процессов. Основной особенностью вычисления функционала является тот факт, что при повторных вычислениях могут получаться различные значения функционала. Это связано с тем, что переменные s могут поступать в разном порядке от разных процессов, в связи с чем округление суммирования каждый раз будет давать различный результат.

Алгоритм распараллеливания задачи вычисления градиента функционала $\operatorname{grad} F^{\alpha}[\boldsymbol{M}]$ аналогичен схеме вычисления функционала $F^{\alpha}[\boldsymbol{M}]$. Но есть и отличие: каждый ненулевой процесс вычисляет k-ый элемент вектора градиента $\operatorname{grad} F^{\alpha}[\boldsymbol{M}]$ и передает нулевому процессу вычисленный элемент **s** вместе с номером **k** этого элемента в массиве. Таким образом, при формировании массива **grad** не важно, в какой последовательности нулевой процесс получает элементы **s**, т.к. числа **k** точно определяют их позиции в массиве **grad**. Так же важным отличием вычисления градиента от вычисления функционала является то, что вычисления градиента сглаживающего функционала $\Omega[\boldsymbol{M}]$ распараллелены.

Очень важным вопросом является эффективность алгоритмов распараллеливания. Ограничения на эффективность этих алгоритмов накладывает закон Амдала. Согласно закону Амдала небольшая часть алгоритма, которая не может быть распараллелена, ограничивает ускорение вычислений, которое может быть достигнуто за счет распараллеливания. Любая практическая задача содержит распараллеливаемые вычисления и нераспараллеливаемые (последовательные). Закон Амдала устанавливает следующие ограничения на ускорение работы алгоритма, которые дает распараллеливание:

$$S = \frac{1}{(1-P) + \frac{P}{N-1}}$$

где S – ускорение работы программы (относительно времени работы последовательной версии программы), N – число используемых при вычислениях процессов, P – часть вычислений, которые можно распараллелить. Таким образом, если, например, часть нераспараллеливаемых действий равна 10% от общего количества вычислений, то невозможно получить ускорения работы программы более чем в 10 раз вне зависимости от числа процессов N.

При решении нашей задачи распараллеливание осуществлялось только при вычислении функционала Тихонова $F^{\alpha}[\boldsymbol{M}]$ и его градиента $\operatorname{grad} F^{\alpha}[\boldsymbol{M}]$. Ясно, что все остальные вычисления производились последовательно. Но так как время работы данного последовательного кода пренебрежимо мало при больших размерностях сетки, время затрачиваемое на все эти вычисления можно считать равным нулю. Остается открытым вопрос о том, как влияет на эффективность распараллеливания последовательные вычисления сглаживающего функционала $\Omega[\boldsymbol{M}]$ при вычислении функционала Тихонова.

Из формулы (6) для конечно-разностной аппроксимации функционала Тихонова видно, что невязка (7), (12) состоит из $3 \times N_s \times N_t$ $(\times N_r)$ независимо вычисляемых групп слагаемых, а сглаживающий функционал (8), (13) состоит из $3 \times (\leqslant 4)$ эквивалентных (в смысле затрачиваемого на вычисления время) групп слагаемых. Соответственно, для вычисления функционала Тихонова часть распараллеливаемых действий составляет $P \geqslant \frac{3N_sN_t\,(N_r)}{3N_sN_t\,(N_r)+12} = \frac{N_sN_t\,(N_r)}{N_sN_t\,(N_r)+4}$, откуда видно, что даже при достаточно небольшом количестве входных данных, например для $N_s = N_t = (N_r) = 10$ (напомним, что эти сетки соответствуют области определения известной векторной функции $\boldsymbol{B}$), распараллеливаемая часть вычислений составляет более 96%. Современные прикладные задачи требуют обработки гораздо большего числа входных данных, в связи с чем доля распараллеливаемых вычислений стремится к 100%, что доказывает очень высокую эффективность рассматриваемых алгоритмов распараллеливания.

Также надо заметить, что рассмотренный параллельный алгоритм имеет следующую особенность: каждый процесс вычисляет достаточно объемные (в смысле затрачиваемого на вычисления времени) группы слагаемых, в связи с чем время обмена сообщениями между процессами пренебрежимо мало по сравнению с временем работы каждого процесса, и его можно не учитывать при оценке эффективности алгоритма. По этой самой причине вычисления сглаживающего функционала $\Omega[\boldsymbol{M}]$ не распараллеливаются: как видно из формулы (8), (13) при распараллеливании каждый процесс вынужден был бы производить объем действий, время вычисления которых было бы сопоставимо (и даже было бы меньше с увеличением числа процессов) с временем передачи сообщений между процессами, что привело бы к значительному замедлению работы программы.

При решении модельных задач и задач обработки экспериментальных данных использовался Суперкомпьютер СКИФ МГУ "Чебышев" Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ (подробную информацию о кластере можно найти в [15]). При написании программ на многопроцессорных системах использовалась библиотека MPI (Message Passing Interface) [16]. В качестве языка программирования был выбран Fortran 90.

Пример решения прикладной задачи восстановления параметров намагниченности некоторого объекта по измеренным значениям магнитного поля вне этого объекта

Рассмотрим важную прикладную задачу восстановления пространственного распределения магнитных диполей $\boldsymbol{M}_j$ по измеренным значениям магнитного поля $\boldsymbol{B}_i$ вне исследуемого объекта [17-19]. Такой тип задач возникает, например, в случае, когда необходимо определить области намагниченности корабля по значениям магнитного поля, измеренным триаксиальными сенсорами, расположенными на дне залива (рисунки 1 и 2).

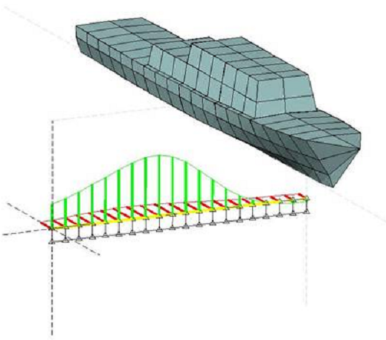


Рис. 1. Корабль проходит над массивом триаксиальных сенсоров, которые измеряют значения магнитного поля, индуцируемого магнитными диполями, распределенными по объему корабля.

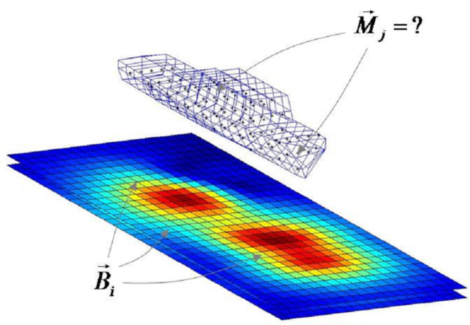


Рис. 2. Эквивалентная постановка задачи: статичный корабль над системой плоскостей, на которых измерены значения магнитного поля.

Уравнение, описывающее магнитное поле $\boldsymbol{B}_i$, индуцируемое магнитными диполями $\boldsymbol{M}_j$, имеет вид:

$$\boldsymbol{B}_i(x_s, y_s, z_s) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\boldsymbol{M}_j, \boldsymbol{r}_{ij})\boldsymbol{r}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^5} - \frac{\boldsymbol{M}_j}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^3} \right], \tag{1}$$

где x_s, y_s, z_s – координаты точек (соответствуют расположению триаксиальных сенсоров), в которых определена векторная функция $\boldsymbol{B}$, r_{ij} – расстояние между точкой (x_s, y_s, z_s) и точкой (x, y, z), в которой расположен магнитный диполь с номером j, μ_0 – величина магнитной проницаемости в вакууме (в системе СИ она равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м), N – число магнитных диполей.

Двумерная постановка задачи восстановления параметров намагниченности

Если мы хотим упростить вычисления, мы можем свести задачу к двумерному случаю [10]. В данной постановке задачи мы используем допущение, что основной намагниченной частью корабля является корпус, но не делаем никаких дополнительных допущений о форме корпуса корабля, считая что геометрические характеристики корпуса исследуемого корабля нам известны. В этом случае корпус разбивается на четырехугольные элементы поверхности, которые являются проекцией двумерной прямоугольной сетки Oxy на корпус корабля (на рисунке 3 приведены примеры разбиения поверхности корабля на 584 и 1780 элементов, что соответствует 1752 и 5340 восстанавливаемым параметрам намагниченности).

В этом случае задача (1) сводится к решению двумерного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода в общем виде [10]:

$$\boldsymbol{B}(x_s, y_s) = \int\limits_S \mathbf{K}(x_s, y_s, x, y, z(x, y)) \hat{\boldsymbol{M}}(x, y, z(x, y)) ds, \tag{2}$$

где неизвестная функция $\hat{\boldsymbol{M}}$ связана с $\boldsymbol{M}$ соотношением $\hat{\boldsymbol{M}}(x, y, z(x, y)) = \frac{\boldsymbol{M}(x,y,z(x,y))}{\cos\gamma(x,y,z(x,y))}$ (γ – угол между нормалью соответствующего элемента разбиения и осью Oz). Здесь координаты x, y, z связаны уравнением поверхности $z = z(x, y)$, описывающем геометрическую структуру корпуса корабля. Ядро $\mathbf{K}$ интегрального уравнения (2) соответствует уравнению (1) и может быт записано как

$$\mathbf{K}(x_s, y_s, x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \begin{bmatrix} 3(x-x_s)^2 - r^2 & 3(x-x_s)(y-y_s) & 3(x-x_s)z \\ 3(y-y_s)(x-x_s) & 3(y-y_s)^2 - r^2 & 3(y-y_s)z \\ 3z(x-x_s) & 3z(y-y_s) & 3z^2 - r^2 \end{bmatrix}$$

где $r = \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + z^2}$. Если мы предположим, что $S \subset P = \{(x, y) : L_x \leqslant x \leqslant R_x,\ L_y \leqslant y \leqslant R_y\}$ и сенсорная плоскость ограничена прямоугольником $Q = \{(x_s, y_s) \equiv (s, t) :\ L_s \leqslant s \leqslant R_s,\ L_t \leqslant t \leqslant R_t\}$, мы получаем двумерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции

$$\boldsymbol{B}(s, t) = \int\limits_{L_x}^{R_x} \int\limits_{L_y}^{R_y} \mathbf{K}(s, t, x, y) \boldsymbol{M}(x, y) dx dy,$$

которое в точности соответствует уравнению (1).

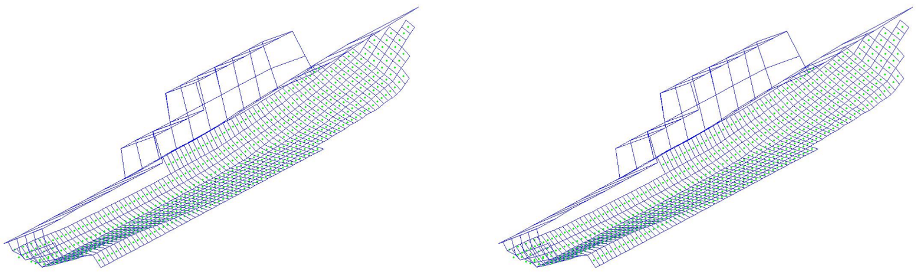


Рис. 3. Примеры разбиения корпуса на 584 и 1780 элементов.

На рисунке 4 для наглядности представлены упрощенные результаты вычислений. На рисунке 4(a) и 4(b) представлено разбиение корабля на 86 элементов разбиения, рисунки 4(c) и 4(d) представляют вариант разбиения корабля на 584 элемента разбиения. В этом случае, с учетом того, что в процессе решения задачи восстанавливается векторная функция, 584 элемента поверхности корабля приводят к необходимости восстановить 1752 параметра намагниченности. Соответствующие вычисления заняли 539 секунд (~ 10 минут), что соответствует примерно 9-10 часам работы обычного компьютера (3Ghz).

Трехмерная постановка задачи восстановления параметров намагниченности

В самой общей постановке необходимо найти непрерывное распределение вектора намагниченности по объему корабля при отсутствии какой-либо информации о структуре корабля (размерах, предполагаемом распределении намагниченности и т.д.) и его положении в пространстве относительно сенсоров. В этой постановке задачи мы считаем, что никакими сведениями о корабле (или другом исследуемом объекте) мы не обладаем, а, значит, не можем делать никаких существенных предположений и упрощений. Эта постановка приводит к необходимости восстанавливать значения векторной функции в пространстве по измеренным значениям магнитного поля вне корабля, а, значит, и координаты точек, в которых измеряется магнитное поле, должны образовывать систему плоскостей (как минимум две). На практике это реализуется достаточно просто: на рисунке 1 приведен пример расположения массива измерительных сенсоров, которому соответствует эквивалентная постановка задачи, в которой измерения сделаны на системе параллельных сенсорных плоскостей (на рисунке 2 приведен пример двух таких плоскостей).

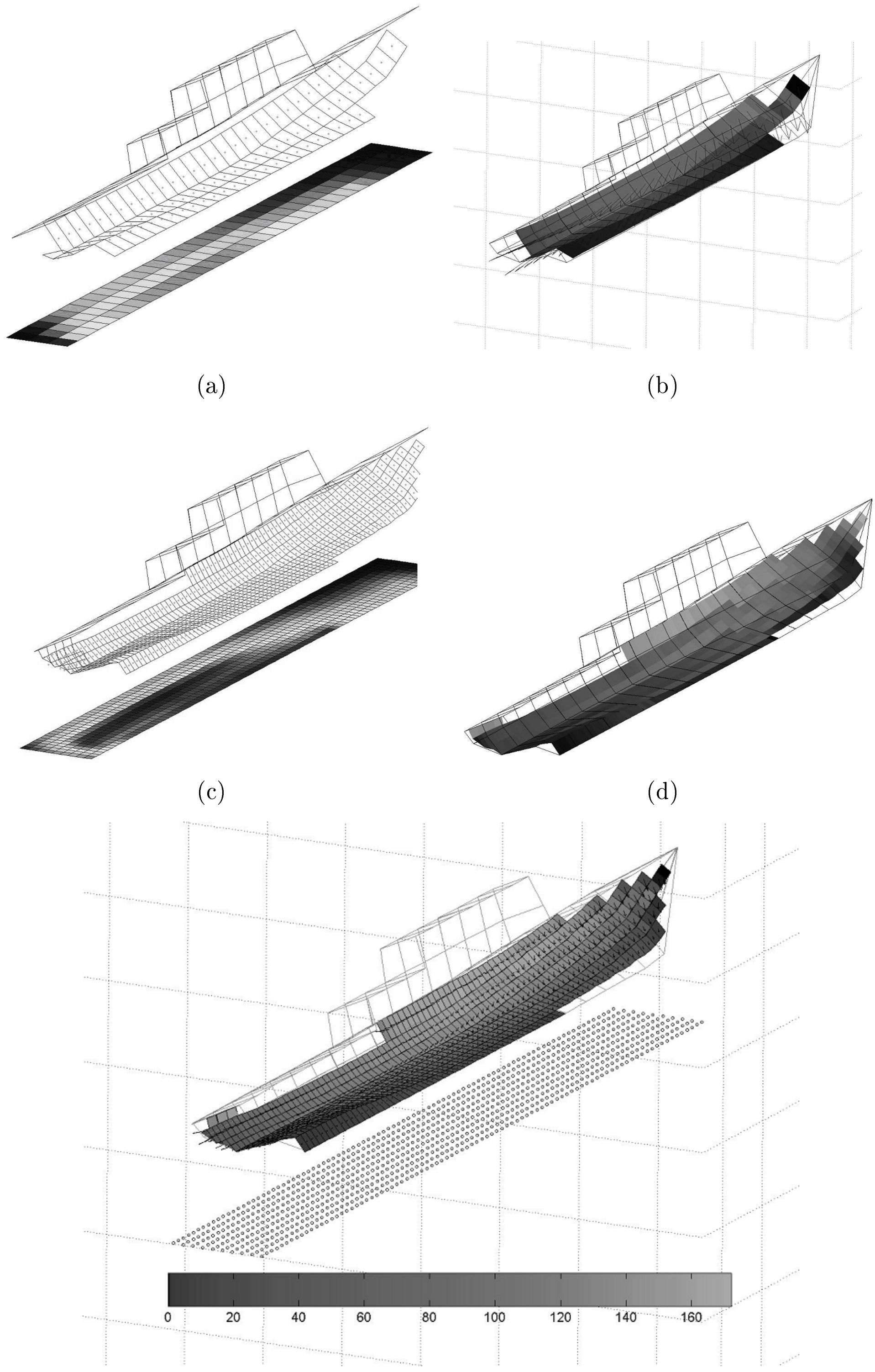
В этом случае уравнение (1) может быть описано эквивалентным ему интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода для векторной функции [9]:

$$\boldsymbol{B}(x_s, y_s, z_s) = \int\limits_V \mathbf{K}(x_s, y_s, z_s, x, y, z)\boldsymbol{M}(x, y, z)dv \tag{3}$$

Тогда функция $\boldsymbol{B}$ является векторной функцией, определенной на системе измерительных сенсорных плоскостей и неизвестная функция $\boldsymbol{M}$ также векторная функция, определенная по объему корабля V. Здесь x, y, z – координаты точек, расположенных внутри объема корабля V. Ядро $\mathbf{K}$ интегрального уравнения (3) соответствует уравнению (1) и может быт записано как

$$\mathbf{K}(x_s, y_s, z_s, x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5}\begin{bmatrix} 3(x-x_s)^2-r^2 & 3(x-x_s)(y-y_s) & 3(x-x_s)(z-z_s) \\ 3(y-y_s)(x-x_s) & 3(y-y_s)^2-r^2 & 3(y-y_s)(z-z_s) \\ 3(z-z_s)(x-x_s) & 3(z-z_s)(y-y_s) & 3(z-z_s)^2-r^2 \end{bmatrix}$$

где $r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$.



(a) (b)

(c) (d)

(e)

Рис. 4. На рисунках представлены упрощенные примеры решения поставленной задачи: a,c) корабль и сенсорная плоскость, расположенная под кораблем, b,d,e) значения восстановленных значений вектора $\boldsymbol{M}$.

Если мы предположим, что $V \subset P = \{(x, y, z) : \; L_x \leqslant x \leqslant R_x, \; L_y \leqslant y \leqslant$

$R_y,\ L_z \leqslant z \leqslant R_z\}$ и система сенсорных плоскостей ограничена прямоугольным параллелепипедом $Q = \{(x_s, y_s, z_s) \equiv (s, t, r) :\ L_s \leqslant s \leqslant R_s,\ L_t \leqslant t \leqslant R_t,\ L_r \leqslant r \leqslant R_r\}$, мы получаем трехмерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции

$$\boldsymbol{B}(s,t,r) = \int\limits_{L_x}^{R_x}\int\limits_{L_y}^{R_y}\int\limits_{L_z}^{R_z} \mathbf{K}(s,t,r,x,y,z)\boldsymbol{M}(x,y,z)dxdydz,$$

которое в точности соответствует уравнению (10).

Типичные размерности, соответствующие реальным приложениям: $N_x = 100$, $N_y = 15$, $N_z = 15$ (рисунки 5 и 6). Входные данные симулировали данные реального эксперимента, когда измерения производились 6 триаксиальными сенсорами (расположены друг над другом в два ряда по три сенсора), и каждым из них было сделано 4000 измерений, что соответствует $N_s = 4000$, $N_t = 3$, $N_r = 2$. Данные размерности сеток соответствуют задаче восстановления 67500 неизвестных по 72000 входных данных.

В результате применения описанных в данной работе методов было восстановлено распределение областей намагниченности по объему корабля. На рисунке 7 представлено несколько срезов модуля восстановленной векторной функции $\boldsymbol{M}$. Входные данные были заданы с ошибкой 1,5%.

Как видно, данные методы позволили достаточно точно восстановить корпус корабля (как часть корабля, которая наиболее сильно подвержена намагничиванию) и даже некоторую внутреннюю структуру (отчетливо можно различить двигательную установку).

Время вычислений примерно составило 29 часов при использовании 200 процессоров (Intel Xeon E5472 3.0 GHz). Столь длительное время вычислений связано с применением регуляризирующих алгоритмов, которые требуют повторных нахождений минимума минимизируемого функционала для каждого значения параметра регуляризации α.

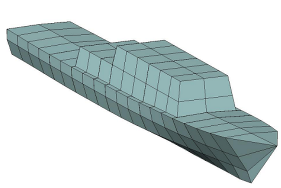


Рис. 5. Модель корабля.

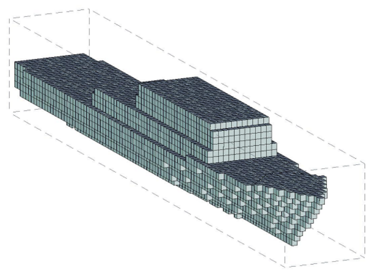


Рис. 6. Аппроксимация корпуса корабля прямоугольными параллелепипедами ($100 \times 15 \times 15$ элементов разбиения).

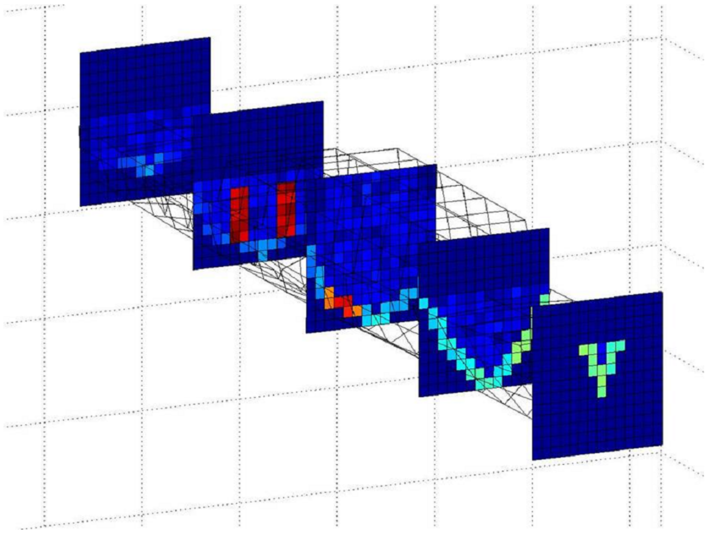


Рис. 7. Результаты восстановления распределения намагниченности по объему корабля (представлено 5 срезов модуля восстановленной векторной функции $\boldsymbol{M}$).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 14-01-31201, 14-01-00182-а и 14-01-91151-ГФЕН-а).

Литература

1. Тихонов А.Н., Виткевич В.В., Артюх В.С., Гласко В.Б., Гончарский А.В., Ягола А.Г. О восстановлении распределении радиояркости по источнику // Астрономический журнал, 46, N 3, 1969, с. 472-480.

2. Koptelova E., Shimanovskaya E., Artamonov B., Sazhin M., Yagola A., Bruevich V., Burkhonov O. Image reconstruction techique and optical monitoring of the QSO 2237+0305 from Maidanak Observatory in 2002-2003 // Monthly Notices of Royal Astronomical Society, 2005, v. 356, pp. 323-330.

3. Лихарев С.К., Рау Э.И., Трифоненков В.П., Ягола А.Г. Микротомография полупроводниковых структур в режиме наведенного тока // Доклады АН СССР, 307, N 4, 1989, с. 840-844.

4. Русов В.Д., Бабикова Ю.Ф., Ягола А.Г. Восстановление изображений в электронно-микроскопической авторадиографии поверхности // М.: Энергоатомиздат, 1991, с. 1-216.

5. Рау Э.И., Сеннов Р.А., Дорофеев К.Ю., Ягола А.Г., Лиу Ю., Пханг Дж., Чан Д. Основные принципы катодолюминисцентной микротомографии с использованием конфокальной зеркальной оптики // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, 2002, № 10, с. 85-92.

6. Кошев Н.А., Лукьянов Ф.А., Рау Э.И., Сеннов Р.А., Ягола А.Г. Повышение пространственного разрешения в режиме отраженных электронов в сканирующей электронной микроскопии // Известия РАН, серия физическая, 2011, т.75, №9, с. 1248-1251.

7. Ягола А.Г., Кошев Н.А. Восстановление смазанных и дефокусированных цветных изображений // Вычислительные методы и программирование, т. 9, 2008, с. 207-212.

8. Titarenko S., Withers Philip J., Yagola A. An analytic formula for ring artefact suppression in X-ray tomography // Applied Mathematics Letters, v. 23, № 12, 2010, pp. 1489-1495.

9. Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г. Применение многопроцессорных систем для решения трехмерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода для векторных функций // Вычислительные методы и программирование, 2010, т. 11, с. 336–343.

10. Lukyanenko D.V., Yagola A.G., Evdokimova N.A. Application of inversion methods in solving ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel // J. Inverse and Ill-Posed Problems. — 2010. — N. 9. — P. 1013–1029.

11. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления // С.-П.: БХВ-Петербург, 2002.

12. Ягола А.Г., Васильев М.П. Применение многопроцессорных систем для решения двумерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // Вычислительные методы и программирование. 2003. Т.4, стр. 323-326.

13. Ягола А.Г., Титаренко В.Н., Васильев М.П., Шимановская Е.В. Особенности решения задач картирования распределения химических элементов по поверхностям звезд как некорректных задач с использованием многопроцессорных систем // Вычислительные методы и программирование. 2002. Т.3, стр. 1-13.

14. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач // М.: Наука, 1990.

15. Вычислительный кластер НИВЦ МГУ (http://parallel.ru/cluster).

16. MPI: A Message-Passing Interface Standard // The Message Passing Interface Forum, Version 1.1, June 12, 1995, http://www.mpi-forum.org.

17. Ohlund G. Design of submarine for stealth and survivability // Hamburg: UDT, 1997.

18. Totterdell A.C. Magnetic signature control from conceptual design to ship operation // London: UDT, 1996.

19. Pei Y.H., Yeo H.G. Sequential inversion of ship magnetization from measurements // 3-rd Marine Electromagnetics, Stockholm, Sweden, July, 2001.

БУДУЩАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТЬ В СВЕТЕ СТАНОВЛЕНИЯ НОВОЙ ОБЩЕЧЕЛОВЕЧЕСКОЙ ЦИВИЛИЗАЦИИ

М.А. Мкртчян

Министерство образования и науки РА, Ереван, Армения

e-mail: acf2004@yandex.ru

Аннотация: В статье обсуждаются вопросы определения сущности будушей общечеловеческой цивилизации и, в связи с этим, рассмотриваются концептуальные основы будущей общеобразовательной действительности.

Ключевые слова: общечеловеческая цивилизация, цивилизационный подход, формациооный подход, общеобразовательная действительность.

FUTURE EDUCATIONAL REALITY IN THE LIGHT OF BECOMING NEW HUMAN CIVILIZATION

Abstract: In the article questions of determination of the essence of the future human civilization are discussed and, thereby, conceptual bases of the future comprehensive reality are considered.

Keywords: human civilization, civilization approach, formational approach, comprehensive reality.

Предварительные замечания

Человечество все больше и больше занимается собою, осмысливая, что оно из себя представляет, какова его история, что предстоит в будущем. Наряду с другими формами мышления этими вопросами занимается и философское мышление. Практически все современные философские направления, так или иначе, затрагивают вопрос о подходах и принципах управления ходом исторического развития. Существует ряд концептуальных представлений о будущем образе жизни, которые являются не только ориентирами для политических и государственных деятелей, но и предметами философского осмысления. Однако, несмотря на наличие философских представлений описательного характера о будущей цивилизации, философские работы, посвященные осмыслению сущности этой будущей цивилизации, крайне недостаточны. Это, по-видимому, неслучайно, ибо проблема будущей цивилизации является скорее проблемой методологической, нежели подлинно философской.

О подходах к описанию будущей цивилизации

Современное философское мышление выделяет два основных подхода, лежащих в основе футурологических представлений – цивилизационный и формационный[1].

По поводу формационного подхода, безусловно, необходимо выделить диалектико-материалистическую методологию Карла Маркса. С учетом того, что более чем полтора века основные философско-методологические, теоретико-концептуальные и политико-экономические положения учения Маркса не только исследуются, обсуждаются и проблематизируются, но и разворачивается своеобразная деятельность по реализации этих положений, нет необходимости снова возвращаться к этим вопросам. Однако заметим, самое главное в подходе Карла Маркса – будущая формация задана сущностно, что отражено и в ее названии.

В цивилизационном подходе наиболее общепринятым являются представления о постиндустриальном[2] (Белл Даниел) и информационном[3] (Ю. Хаяши) обществах. Заметим, что эти представления даются на концептуально-описательном уровне, поэтому при таком подходе еще предстоит переосмысление сущности будущей цивилизации. В связи с этим уместно, вспомнить работу Давида Непобедимого[4] «Опре-

[1] Новейший философский словарь: 3 – е изд., исправл. – Мн.: Книжный дом. 2003. – 1280 с. – (Мир энциклопедий).

[2] Термин «постиндустриализм» был введён в научный оборот в начале XX века учёным А. Кумарасвами, который специализировался на доиндустриальном развитии азиатских стран. В современном значении этот термин впервые был применён в конце 1950-х годов, а широкое признание концепция постиндустриального общества получила в результате работ профессора Гарвардского университета Дэниела Белла, в частности, после выхода в 1973 году его книги «Грядущее постиндустриальное общество».

[3] Своим названием термин «информационное общество» обязан профессору Токийского технологического института Ю. Хаяши.

[4] Лосев А. Философско-исторический подвиг Давида Непобедимого // В книге: Философия Давида Непобедимого. Сб.ст. / Отв. ред. Г.А. Брутян. – М., 1984. – С. 26-36.

деления философии», где философ достаточно убедительно показывает недостатки определений описательного характера.

Любопытно, что Карл Поппер, обнаружив ограниченность диалектико-материалистической методологии Карла Маркса, выдвинул более эффективную методологию понимания природы сущности социальной действительности, выяснив сущности закрытого и открытого обществ, однако оставил на выбор для построения будущего чисто аксиологическую альтернативу.

СМД методология как основа социальной инженерии

СМД - методология (СистемоМыслеДеятельностная) есть результат многолетних исследований так называемого «Московского методологического кружка», который был основан в конце 40-х годов XX столетия А. Зиновьевым, М. Мамардашвили, Б. Грушиным и Г. Щедровицким. С конца 50-х годов бессменным лидером и основным вдохновителем клуба становится Г. П. Щедровицкий[5].

Фактически, СМД - методология выдвигает на первый план положение о целевой предопределенности социальных явлений. Как подчеркивает сам Г. П. Щедровицкий: «Коль скоро ее творят люди, она являет собой сложнейшую «кентавр» - систему. Именно это, на мой взгляд, имел в виду К. Маркс, говоря о естественно-историческом процессе. В нем важно различить и противопоставить два момента: то, что является следствием целенаправленной деятельности людей, и то, что происходит «само собой», как бы независимо от их целей и замыслов. Поэтому, говорю я, культурно-историческая жизнь каждого из нас предполагает интенсивную работу по осознанию своего положения, предельную искренность в оценке своей ситуации и технически грамотную работу по программированию общественного развития», а чуть позже продолжает: «Итак, мой основной тезис: чтобы обсуждать будущее, надо еще в мыслительной работе к нему выйти. И одновременно не столько прогнозировать, сколько заняться разработкой программ и оргпроектов, рождаемых из осмысления прошлого. Именно последние я буду выдавать за то, что необходимо истории, и лишь в таком смысле буду осуществлять прогноз. Чтобы покончить с предыдущей частью, вспомню один из любимых мною афоризмов Льва Толстого: будущего нет, поскольку мы его делаем! Иными словами, будущее будет таким, каким мы сможем его промыслить, и уж затем реализовать, осуществить, сотворить – каждый на своем месте. А это есть работа, скорее, программирующего и проектирующего мышления и действия»[6]. Итак, с позиции СМД - методологии будущая цивилизация видится как результат целенаправленной мыследеятельности субъектов строительства будущего[7]. По этому поводу уместно вспомнить и цитату Жана Поля Сартра из его работы «Проблемы метода»[8]: «Наша историческая задача в этом многозначном мире – приблизить момент, когда история обретет один-единственный смысл и будет стремиться к тому, чтобы раствориться в конкретных людях, которые сообща созидают ее».

---

[5]Хромчемко М. С. Диалектические станковисты (главы из книги о Г. П. Щедровицкого) // М.: изд-во Шк. Культ. Полит., 2004 г. – 160 с.

[6]Щедровицкий Г. Будущее есть работа мышления и действия // Вопросы методологии. № 3-4. 1994. С. 3-4.

[7]Рац М. В., Ойзерман М. Т. Размышления об инновациях. Вопросы методологии, № 1. 1991. С. 8-19.

[8]Жан Поль Сартр. Проблемы метода. – М.: издательская группа «Прогресс», 1994.

О природе социальной действительности

Социальная действительность имеет событийную сущность. Это позволяет утверждать, что развитие социальной действительности задается единством и противоположностью свободной сущности человека и событийной природы социальной действительности. Способ разрешения соответствующего противоречия предопределяет характер общественного порядка и обусловливает содержание таких понятий как справедливость и правомерность.

Заметим, что событийная сущность социальной действительности проявляется через совокупность четырех основных событийных взаимодействий, которые инициируют соответствующие событийные взаимоотношения между событийными субъектами: отношение подчиненности, отношение противоборства (взаимовражды), отношение независимого существования (или свободной конкуренции) и отношение сотрудничества. Однако образ жизни и характер общественного бытия обусловлены тем, какой из этих типов взаимодействий является системообразующим и определяющим. В частности, определяющим в нынешней общечеловеческой цивилизации и системообразующим типом общественного образа жизни является свободная конкуренция[9].

Следовательно, становление будущей цивилизации обусловлено подходами преодоления ограничений идеологии того, что механизмом общественного развития является событийное взаимодействие на основе свободной конкуренции, а также подходами преодоления подчиненности моральных норм ценностям событийных отношений независимого существования.

По сути, будущая цивилизация – это общественное бытие, построенное на основе сотруднических событийных отношений. Сотрудничество как ценность уже принято человечеством, но его нужно еще освоить как основу общественного порядка[10].

Будущая образовательная действительность

На продолжительном отрезке общественно-исторического развития можно заметить следующее важное обстоятельство в вопросе организации образования: происходит переход от одной образовательной действительности к другой, существенно отличной от первой по всем аспектам.

- В аспекте управления: переход от централизованной командно-административной системы к самоуправлению.

- В аспекте целей: переход от задачи подготовки многочисленных индивидов с минимальным образовательным уровнем к обеспечению всеобщего высшего образовательного уровня.

- В аспекте содержания обучения: переход от знаний к способностям, способам и средствам мыследеятельности.

- В аспекте учебных занятий: переход от групповых занятий к коллективным.

- В аспекте учебной группы: переход от однородного и одноуровневого состава диффузной группы к саморазвивающемуся и самообразовательному коллективу разнородного и разноуровневого состава.

[9]См. например, Фергюсон Ниал. Цивилизация. Чем Запад отличается от остального мира / Ниал Фергюсон; пер. с англ. К. Бондаревского под ред. И. Кригера. – Москва: АСТ: CORPUS, 2014. – 544 с. + [24 с. Ил.]

[10]Любопытно, что исходное положение идеологии очень сильной оппозиционной партии в парламенте Новой Зеландии является идея построения общества на основе сотрудничества.

- В аспекте событийных взаимодействий и отношений: переход от независимого сосуществования и свободной конкуренции к всеобщему сотрудничеству.

- В аспекте учебных программ: переход от программ образовательных учреждений к идивидуальным образовательным программам.

- В аспекте институциональных форм: переход от множества независимых образовательных учреждений к системе сетевой организации образовательных услуг.

- В аспекте правовых норм: переход от добровольности учения к обязательному образованию в течение всей жизни.

- В аспекте воспитания: переход от общепризнанных норм поведения к свободе личности с высокими духовными ценностями.

- В аспекте идеологии: от девиза «незаменимых людей не бывает» к девизу «каждый человек есть незаменимое благо».

По сути, происходит переход от одного общественно исторического способа организации обучения к другому способу[11].

Прожектные идеи и утопии на третье тысячелетие

Общество существует и развивается в условиях вечной проблемы понимания собственного предназначения.

Именно эта проблема является определяющей в происхождении и существовании многочисленных вариантов образов жизни, и, следовательно, главной причиной неразрешимых споров о целях и содержании образования. Человечество преодолевает рубеж, разделяющий исторический период развития общества на основе единства и борьбы противоположностей от предстоящего периода развития общества на основе гармонии (взаимосоответствие составных компонентов). То есть происходит переход, от этапа, когда общественное развитие обусловливалось естественно-стихийными процессами, к этапу, когда в развитии общества главными станут искусственно-технические, целенаправленно-организованные процессы.

Это обстоятельство является главным фактором перевода сферы образования из статуса вспомогательной сферы, обслуживающей другие (основные) сферы деятельности, в статус ведущей общественное развитие сферы мыследеятельности.

Сферная организация мыследеятельности исключит наличие нынешних образцов общеобразовательных школ. Образовательные учреждения, конечно, будут, но невозможно будет их различать по типу средних, высших, профессиональных или их объединять в конкретную отрасль или ведомство.

Процессы становления сферной организации образования и становления этой сферы как основной в общей целостности мыследеятельности, вначале будут задаваться своими естественно-стихийными компонентами, постепенно превращаясь в предмет целенаправленной организации и управления.

Ближайшие десятилетия решат проблему ограниченности отраслевой и ведомственной форм автономности образования через создание межотраслевых общественно-значимых проектов и программ, а также производственно-педагогических, образовательно-исследовательских, образовательно-разработческих учреждений межотраслевой, межведомственной принадлежности. Это будет сопровождаться изменением управленческой системы образования не только по способам и содержанию, но и по структурно-функциональному оформлению.

[11] Подробнее см., например, Мкртчян М. А. Становление коллективного способа обучения // Красноярск, 2010 г. – 228 с.

Вместо вышестоящих управленческих органов появятся региональные и межрегиональные информационно-аналитические, проектно-разработческие, экспертные службы и центры организации коммуникаций.

Обязательность образования постепенно будет предъявляться ко всему периоду жизни человека, образовательные цели и программы будут максимально индивидуализироваться, а образовательные процессы все больше и больше будут проявлять свою коллективную природу.

Основным педагогическим принципом будущего будет – каждый человек есть незаменимый субъект общественного развития.

Вместо заключения

Двадцатый век дал человечеству осознание необходимости специально организованного всеобщего образования. Что из себя должно представлять содержание этого всеобщего образования и каковы его стандарты - это другой вопрос. Но было понято и признано, что не образованием людей надо заниматься, а образованием социума, образованием всего общества. Необходимость этого была понята и признана в плане дальнейшего существования человечества, в плане социальной экологии. Обратим внимание - не в плане гуманизма, а в плане социальной экологии, в плане проблем дальнейшего существования человечества.

И именно в двадцатом веке человечество столкнулась со своей главной проблемой: всеобщее образование необходимое условие дальнейшего существования, а что это такое и как его заполучить как реальный образ жизни - человечество еще не знало и не умело.

А гуманистические идеи у человечества были с древних веков и всегда.

Не будем путать мнение идеологов и философов со стремлением великих политиков и общественно-государственных деятелей реально что -нибудь делать.

Строители общественного бытия отличались от философов именно тем, что они несли в себе живую диалектику Свободы и Событийности. Они умели свободную сущность человека помирить с событийной сущностью общества.

Двадцатый век знаменит и ценен тем, что ,наконец, за всеобщее образование, за образование всего общества взялись общественно-государственные деятели. И в этом смысле действительно двадцатый век в сфере образования (и не только) осуществил социальный эксперимент. А вот благодаря этому двадцать первый век осознанно и умело строит будущее - без экспериментов, без теоретического невежества и без методологического анархизма.

Теперь главный вопрос – в каком веке мы живем?

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ

И.Б. Петров

Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия

e-mail: `petrov@mipt.ru`

Аннотация: Для численного моделирования процессов воздействия природных факторов на объекты нефтегазовой индустрии в условиях Арктики для решения задач георазведки углеводородов, представляются вычислительные методы, механико-математические модели, параллельные алгоритмы, постановки арктических задач, результаты их решения.

Ключевые слова: вычислительные методы, механика сплошных сред, параллельные алгоритмы, арктические условия, ледостойкие платформы, георазведка.

NUMERICAL SIMULATION OF SPACE WAVE PROCESSES IN HETEROGENEOUS MEDIA

Abstract: For numerical simulation of nature influences on industrial oil-gas objects and for geological exploring numerical models, mechanical-mathematic models, parallels algorithms, arctic problem installations and some calculation results are suggested.

Keywords: numerical methods, mechanic of solid medium, parallels algorithm, arctic conditions, geological exploring.

Многие природные воздействия на индустриальные объекты в Арктических зонах могут быть с высокой степенью достоверности численно промоделированы с помощью моделей механики сплошных сред, современных численных методов решения соответствующих систем уравнений в частных производных и корректно поставленных задач, а также с использованием высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных алгоритмов.

Поскольку натурные эксперименты при изучении арктических процессов являются дорогостоящими, а порой труднодоступными, компьютерное моделирование представляется единственным реальным подходом.

Внимание к освоению Арктического шельфа Российской Федерации объясняется серьезной необходимостью разведки и разработки месторождений нефти и газа, а также возможностью международного использования Северного морского пути. Так, на Арктическом шельфе России находятся восемь месторождений, открытых в 1983-1992гг. с оценками запасов, приблизительно в 2.7 трлн. м^3. Пять из восьми, наиболее крупных объектов, относится к объектам федерального значения: Ледовое. Лудловское, Мурманское в Баренцевом море, Поморское, Северо-Гуляевское в Печерском. Ленинградское, Русановское в Карском. Для добычи нефти в Печерском море установлена ледостойкая платформа Приразломная, для добычи газа разрабатывается проект Штокмановского месторождения в Баренцовом море. Для указанных месторождений требуется и уточнение выполненных ранее оценок запасов углеводородов. Существенным фактором, осложняющим добычу углеводородов в Северных морях, являются ледовые образования. Так, в Карском море почти круглогодично имеются дрейфующие льды, в Печерском и Баренцевом — айсберги и торосы, глубины этих северных морей в индустриальных зонах достигают 300 м [1].

Для транспортировки углеводородов делаются трубопроводы в северных районах России, в том числе, и в донных зонах.

Очевидно, что для длительной эксплуатации промышленных газогидротехнических сооружений в сложной ледовой обстановке, необходимо уметь рассчитывать разные типы воздействий ледовых образований на объекты (платформа, трубопроводы, корабли ледового класса, причалы и др.).

Создание трассы Северного морского пути для транспортировки грузов из Европы в Америку, а также на дальний Восток, сокращает расстояние на 30-60%, а время транспортировки — приблизительно на 10 дней, если сравнивать с традиционными морскими путями (через Панамский и Суэцкий каналы). На сегодняшний день основной грузовой поток на этой трассе связан с доставкой никеля из порта Дудинка и составляет примерно 1,2 млн. тонн в год.

Основные проблемы освоения Северного морского пути с протяженностью (2200-2900) морских миль) от Новой Земли до Берингова пролива) связаны со сложными ледовыми условиями и использованием мощных ледоколов, которые могут двигаться в условиях ледового покрова толщиной до 2 м (сейчас на трассе работают 7 ледоколов и дизель-электрические ледоколы) и судов ледового класса.

Торосы, айсберги, ледяной покров зачастую представляет собой серьезные препятствия для этих кораблей. Крупные ледовые образования представляют также опасность для стационарных ледостойких платформ и поддонных трубопроводов [2,3].

Движение ледовых масс происходит под действием сил ветра и течений, ледяной покров характеризуется наличием айсбергов, торосов, дрейфующих льдов, трещин во льдах, разводьях [4-6]. Присутствие торосов существенно влияет на шероховатость поверхности льда и приводит к увеличению сил трения ветра и течений. Среднее расстояние между парусами торосов в различных районах Арктики составляет примерно 200-300 м, высота паруса тороса может достигать нескольких метров глубина — несколько десятков метров [7]. Задачам торошения льдов посвящены работы [8-11]. Характерные размеры айсбергов в несколько раз могут превышать характерные размеры торосов. Большую часть года, например, Печерское и Карское море покрыты дрейфующими льдами, скорость движения которых может превышать - 5 м/с, толщина ровного льда достигает 2 м, осадка торосов — 20 м. Таким образом, структура и параметры ледяного покрова Северных морей являются значимыми параметрами, определяющими экстремальные нагрузки на шельфовые стационарные и плавающие объекты нефтегазовой промышленности [12,13].

В связи с этим становится понятным важность решения проблемы моделирования динамических процессов, происходящих в водных и воздушных бассейнах Арктики с обработкой данных наблюдений и прогнозирование на этой основе динамики ледовой обстановки и дальнейшей оценки устойчивости стационарных платформ, поддонных трубопроводов, степени безопасности ледоколов и судов ледового класса [14-16].

Свою специфику в условиях Арктики имеет разведка углеводородов. В частности, одним из акустических слоев, через которые распространяются сейсмические сигналы, является море [17,18], другим — ледяной покров. Айсберги, торосы, дрейфующие льды, ледяной покров также вносят вклад в измеряемые или вычисляемые акустические отклики при сейсморазведке. При проведении геологоразведочных работ на суше необходимо учитывать влияние вечно мерзлоты. Кроме сейсморазведки, эффективный технологией представляется электроразведка углеводородов; обзор работ по этой тематике приведен в [19,20].

Таким образом, можно выделить некоторые важнейшие классы задач Арктической тематики, которые могут быть решены с помощью численного моделирования на высокопроизводительных вычислительных системах:

- моделирование взаимодействия различных ледяных образований (айсберги, торосы, дрейфующие льдины) со стационарными ледостойкими платформами;

- моделирование взаимодействия ледоколов и судов ледового класса с ледовыми образованиями;

- моделирование воздействия ледовых образований на поддонные трубопроводы;

- нейтрализация опасных, для стационарных и подвижных шельфовых индустриальных объектов, ледовых образований;

- расчет на прочность наземных трубопроводов;

- транспортировка углеводородов по трубопроводам;

- задачи миграции крупных ледовых образований;

- моделирование процессов заторашивания стационарных ледостойких платформ;

- расчет стационарных платформ на устойчивость;

- расчет динамических процессов в водных и воздушных бассейнах Арктики с обработкой данных и их использования для прогнозирования динамики ледовой обстановки;

- моделирование процессов образования крупных айсбергов, торосов, больших ледяных платформ;

- расчет торошения в задачах динамики морского ледяного покрова;

- прямые и обратные задачи сейсморазведки в условиях Арктики;

- прямые и обратные задачи электроразведки в условиях Арктики.

Определяющей системой уравнений для моделирования рассматриваемых процессов является система уравнений механики сплошных сред, в частности, твердого тела, акустики, гидрогазодинамики, см. например [21-27].

Для численного решения соответствующих задач необходимо разрабатывать или применять адекватные современные вычислительные методы и алгоритмы для высокопроизводительных ЭВМ [18,23-31].

Приведем примеры численного решения некоторых актуальных задач нефтегазовой индустрии в Арктических условиях.

На рис. 1. представлены результаты численного моделирования воздействия льдин на нефтедобывающую платформу.

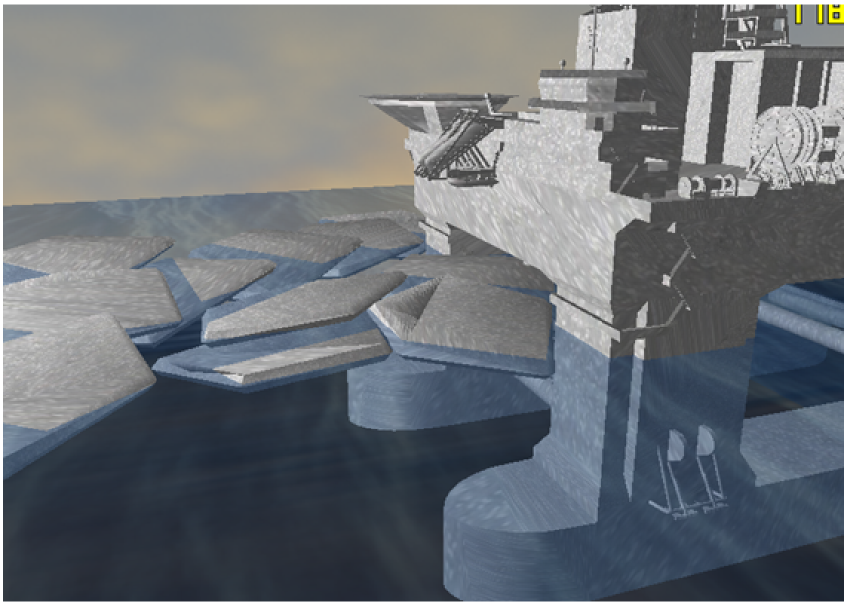


Рис. 1. Воздействие льдин на нефтедобывающую платформу.

На рис. 2. представлена волновая картина, возникающая при воздействии на айсберг, белым цветом показана образующаяся система трещин. Цветом показан модуль скорости, красный цвет соответствует максимальному значению, а синий – нулевым. Расчет проводился сеточно-характеристическим методом, разрушения рассчитывались на основании критерия Мизеса. Здесь и далее решалась система уравнений, описывающая состояние линейно-упругого тела.

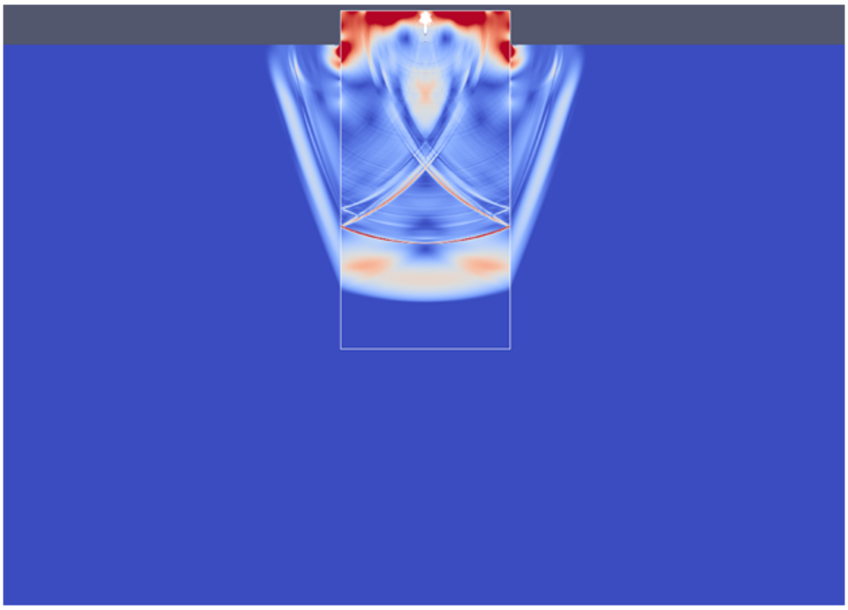


Рис. 2. Воздействие на айсберг. Волновая картина.

На рис. 3 представлены расчетная сетка и волновая картина, возникающая при соударении айсберга со стойкой нефтедобывающей платформы. Расчет проводился с помощью разрывного метода Галеркина, цветом показан модуль скорости, шкала приведена на рисунке.

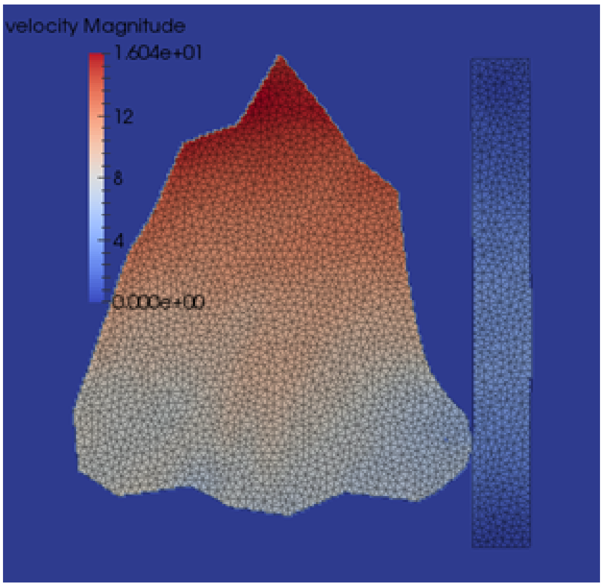
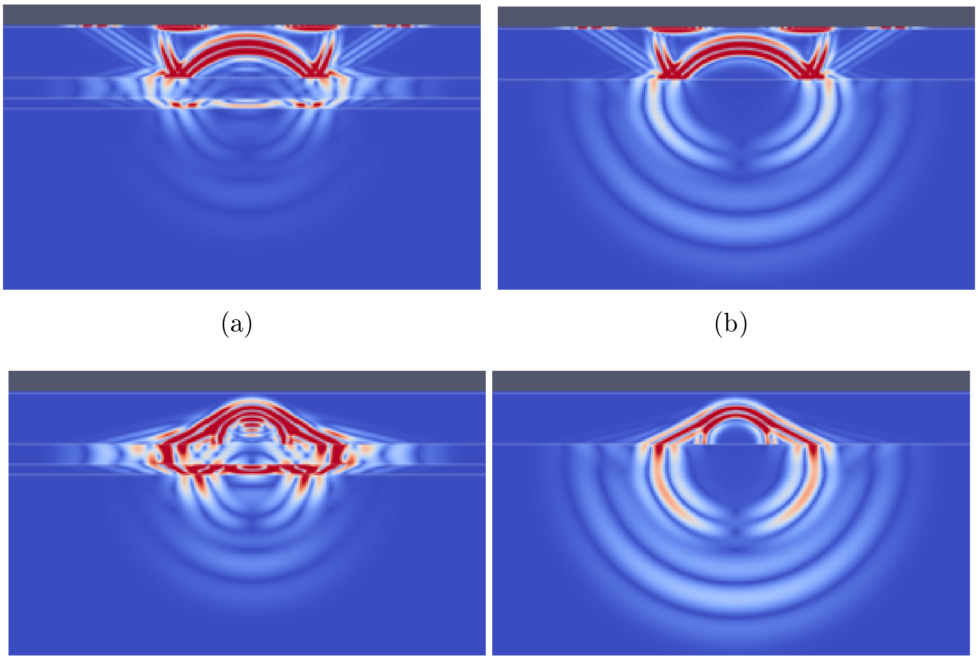


Рис. 3. Столкновение айсберга со стойкой нефтедобывающей платформы.

На рис. 4. представлены волновые картины, возникающие при численном решении задач сейсмической разведки в условиях Арктического шельфа. Цветом показан модуль скорости. Красный цвет соответствует максимальному значению, а синий

– нулевому. На рис. 4a рассматривается источник, расположенный во льду, на рис. 4c – расположенный на дне, а на рис. 4b и 4d соответственно те же случаи без нефтесодержащего резервуара.



(a) (b)

(c) (d)

Рис. 4. Волновые картины. Сравнение расположения источников во льду и на дне. Случай со льдом.

На рис. 5 представлены сейсмограммы, соответствующие всем исследуемым случаям, зафиксированные на приемниках, расположенных на льду и измеряющим вертикальную компоненту скорости.

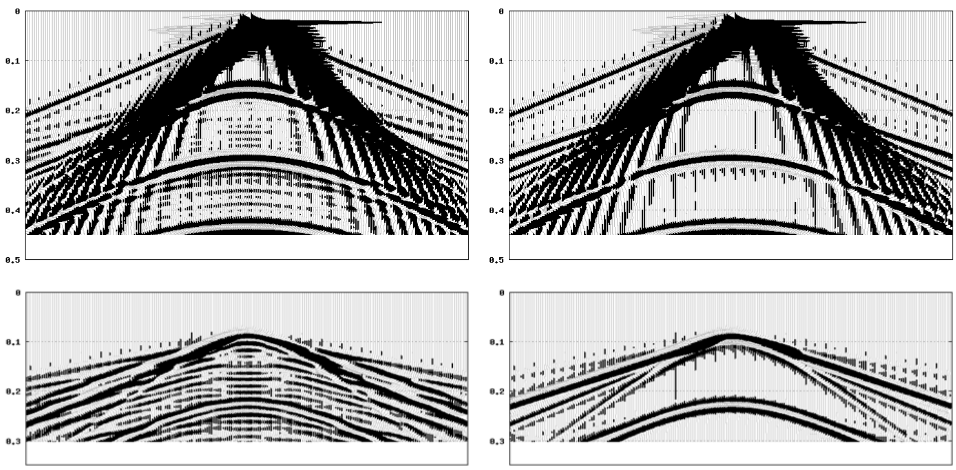


Рис. 5. Сейсмограммы (вертикальная компонента скорости). Сравнение расположения источников во льду и на дне. Случай со льдом.

На рис. 6 представлены сейсмические и акустические волны от серии точечных источников в системе «вода-грунт», отражающиеся от нефтесодержащего резервуара. Градацией серого показан модуль скорости.

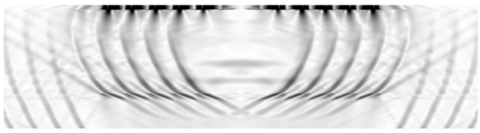


Рис. 6. Волновая картина в системе «вода-грунт».

Выражаю благодарность моим ученикам, совместно с которыми проводилось численное решение указанных задач: Н.И. Хохлову, А.В. Фаворской, А.В. Санникову, В.А. Миряхе и Д.И. Петрову.

Литература

1. Новиков Ю.Н., Гажула С.В. Особенности оценки месторождений углеводородного сырья арктического шельфа России и их переоценки в соответствии с новой классификацией запасов. Нефтегазовая геология Теория и практика 2008(3), с. 1-19.

2. Lee S.G., Lun S.H., Kong G.Y. Modeling and simulation system for marine accident cause investigation. Collision and Graunding of Ships and Offsore Structure-Amdahl, Ehlers and Leira (Eds). Taylor and France Group, London, ISBN 978-1-138-00059-9, pp. 39-47.

3. Bekker A.T., Sabobash O.A., Seliverstov V.I., Koff G.I., Pipko E.N. Estimation of Lomit Loads on Engeneering Offshore Structures Proceeding of the Nineteenth International Offshore and Polar Engeneering Conference. Osaka, Japan, June 21-26, 2009, pp. 574-579.

4. Jerome Weiss. Drift, Deformation and Fracture of Sea Ise. A perspective Across Scales. Springer 2013, 83 p.

5. Vladimir Pavlov, Olga Pavlova, Reinert Korsnes. Sea ice fluxes and drift trajectories from potential pollution sources, computed with a statistical sea ice model of the Arctic Ocean. 2004. Journal of marine Systems. 48. P. 133-157.

6. Konneth Eik. Iseberg drift modeling and validation of applied metocean hindcust data. Cold Region Science and Technologhy. 57 (2009), pp. 67-90.

7. Бородачев В.Е. Льды Карского моря. Спб. Гидрометиздат, 1998г, 182с.

Garbrecht T., Luphes C., Augstein E., Wamser C. Influence of a sea ice ridge on low-level airflow. J. Geophysics. Res. 1999y., vol. 104, p. 2449-24507.

8. Shinohara Y. A redistribution function applicable to a dynamic sea ice model. J. Geophysics. Res. 1999y., vol. 95, p. 13423-13431

9. Марченко А.В. Модели торошения морских льдов. Успехи механики 2002г, №3, с. 67-129.

10. Shinohara Y. A redistribution foundation ice model. J. Geophysics. Res. 1990y., vol. 95, p. 13423-14431.

11. Gray J. MTM, Killworth P.D. Sea ice ridging schemes. J. Physics. Oceanogr. 1996y., vol. 26, p. 2420-2428.

12. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Трещиностойкость и разрушения ледяного покрова ледоколами. Труды ААНИИ. 1986г., т. 391, с. 137-156.

13. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Вопросы механики разрушения льда и ледяного покрова при анализе ледяных нагрузок. В сб. Вести газовой науки. Современные подходы и перспективные технологии в проектах освоения нефтегазовых месторождений российского шельфа. М.: Газпром, ВННИГАЗ, 2013г., №3 (4), с. 104-112.

14. Julev S.K., Belyaev K. Probility distribution characteristics for surface ari-sea turbulent heat Aluxes over the global ocean. 2012. Journal of Climate: 25 (1), pp. 184-206.

15. Belyaev K.P., Tuchkova N.P., Cubash U. Response of a coupled ocean ice atmosphere model to data assimilation in the tropical zone of the tropical zone of the Pacific ocean. 2010. Oceanology. 50(3).

16. Яковлев Н.Г. Совместная модель общей циркуляции океана и эволюции морского льда в Северном Ледовитом океане. Известия РАН, Физика атмосферы и океана, т. 39, №3, с. 394-409.

17. Левченко Д.Г., Закиров А.В., Левченко В.Д. Динамическое моделирование распространения низкочастотных сейсмоакустических полей в океанической среде. Доклады Академии Наук. 2010г., т. 435. №4, с. 544-547.

18. Петров И.Б., Миряха В.А., Санников А.В. Численное моделирование динамических процессов в твердых деформируемых телах разрывным методом Галёркина. Математическое моделирование, 2015г., Т.27. с. 17-23.

19. Жданов М.С. Теория обратных задач и регуляризация геофизики. М.: Научный мир, 2007г., 710с.

20. Yavich N., Scholl C. Advances in Multigrid Solution of 3D Forward MCSEM Problems // Extended abstract, 5th EAGE St.Petersburg International Conference and Exhibition on Geosciences, 2012.

21. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976г., т.1, 536с., т.2, 576с.

22. Бреховский Л.М., Гончаров В.В. Введение механику сплошных сред. М.: Наука, 1982г., 334с.

23. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М. 1984г., 520с.

24. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2012г., 656с.

25. Петров И.Б., Холодов А.С. О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984г., т. 24. №8, с. 1172-1188.

26. Петров И.Б., Фаворская А.В., Санников А.В., Муратов М.В. Сеточно-характеристический метод на неструктурированных тетраэдральных сетках. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2014г., т. 54, №5, с. 85-96.

27. Петров И. Б., Фаворская А. В., Шевцов А. В., Васюков А. В., Потапов А. П., Ермаков А. С. Сеточно-характеристический комбинированный метод для численного решения динамических пространственных упругопластических задач. // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2014. - Т. 54. - № 7. - С. 1203 - 1217.

28. Klaus-Jurgen Bathe. Finite Element Procedures. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey. 07458, 1037p.

29. Корнилина М.А., Самарская Е.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г., Якобовский М.В. Моделирование разработки нефтяных месторождений на параллельных вычислительных системах // Матем. моделирование, т. 7, № 2, 1995 г., стр. 35–48.

30. Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Матем. моделирование, Т 1, № 5, 1989 г., стр. 95–120.

31. Петров И. Б., Фаворская А. В., Васюков А. В., Ермаков А. С., Беклемышева К. А., Казаков А. О., Новиков А. В. О численном моделировании волновых процессов в анизотропных средах. // Журнал "Доклады Академии Наук". - 2014. - Т. 495. - № 3. - С. 285 - 287.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЙРОНА

Н.Х. Розов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: `fpo.mgu@mail.ru`

Релаксационный колебанием некоторого объекта называют периодический по времени процесс, при котором сменяют друг друга два принципиально разных по своему характеру движения: плавное, медленное, непрерывное изменение состояния объекта чередуется со скачкообразным, быстрым, практически разрывным изменением его состояния. Такие процессы достаточно часто наблюдаются в реальных ситуациях: в механике, технике, радиофизике, химии, биологии и других областях науки и техники. Заметим, однако, что формальное, строгое в математическом понимании определение релаксационного колебания отсутствует.

Этот феномен впервые описал известный голландский инженер и математик Б. ван дер Поль [1], изучавший достаточно простой радиотехнический объект с одной степенью свободы. Его динамика моделировалась дифференциальным уравнением с параметром $\lambda > 0$:

$$\ddot{z} - \lambda(1 - z^2)\dot{z} + z = 0, \qquad \dot{} = d/dt.$$

Приведенному уравнению, которое сейчас называют уравнением ван дер Поля, посвящена обширная литература и оно считается одной из классических математических моделей. При $\lambda = 0$ оно описывает гармонические колебания; по мере роста параметра λ единственное устойчивое периодическое колебание, описываемое этим уравнением, все более и более «отдаляется» по своему характеру от гармонического, а при «очень больших» значениях параметра периодическое колебание приобретает явно выраженный «релаксационный тип»: состоит из участков «медленного» движения изображающей точки и участков, которые изображающая точка проходит «почти мгновенно».

Позже оказалось, что более удобной и естественной эквивалентной моделью релаксационных колебаний является сингулярно возмущённая система 2-го порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при одной производной:

$$\varepsilon\dot{x} = f(x, y), \qquad \dot{y} = g(x, y). \tag{1}$$

При определённых предположениях относительно правых частей этой системы «быстрая» компонента $x = x(t, \varepsilon)$ её решения представляет собой «почти разрывную» ограниченную функцию времени, причем «время перехода» с одного «плавного» участка этой функции на другой неограниченно убывает при $\varepsilon \to 0$, а движение по этим «плавным» участкам занимает конечное время (рис. 1). Что же касается «медленной» компоненты решения $y = y(t, \varepsilon)$, то она изменяется «плавно» и изображается непрерывной ограниченной функцией времени (рис. 2). Такому релаксационному колебанию в системе (1), которое естественно назвать «классическим», отвечает предельный цикл Z_ε на фазовой плоскости (x, y), при $\varepsilon \to 0$ неограниченно приближающийся к замкнутой кривой Z_0 специального вида (рис. 3) [2].

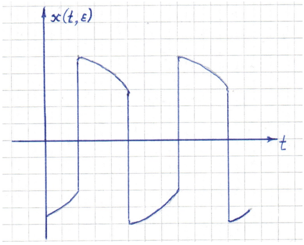


Рис. 1

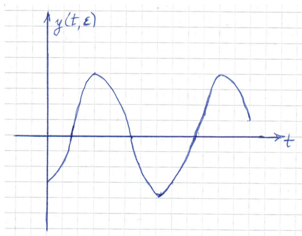


Рис. 2

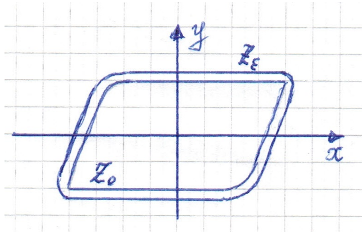


Рис. 3

Оказывается, однако, что в сингулярно возмущенных системах вида (1) возможно и качественно иное, «неклассическое» релаксационное колебание, также моделирующее реальные процессы. Для такого колебания характерно следующее: его «медленная» компонента $y = y(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ приближается к разрывной ограниченной функции времени, а его «быстрая» компонента $x = x(t, \varepsilon)$ является δ-образной [3]. Именно наличие колебания этого типа оказалось существенным в предлагаемой математической модели функционирования отдельного нейрона.

Давно известна простейшая модель функционирования отдельного нейрона ФитцХью — Нагумо [4]:

$$\varepsilon \dot{x} = y + x - x^3/3 + c, \qquad \dot{y} = a - x - by, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $a, b = \text{const} > 0$, $c = \text{const}$. В этой системе, являющейся частным случаем системы (1), реализуется (при подходящих значениях параметров a, b, c) классическое релаксационное колебание, причём быстрая компонента решения $x = x(t, \varepsilon)$ должна была бы отражать поведение во времени мембранного потенциала нейрона. Но описанное выше изменение быстрой компоненты решения системы (2) (см. рис. 1) не соответствует наблюдаемому в действительности поведению мембранного потенциала реального нейрона, для которого характерно периодическое чередование кратковременных, «почти мгновенных», значительных по высоте «всплесков» и участков «плавного» изменения. Поэтому возникает задача модификации модели (2), чтобы добиться нужного поведения компоненты $x = x(t, \varepsilon)$.

Не будем здесь описывать соображения, руководствуясь которыми строится новая модель функционирования отдельного нейрона; эти соображения носят, как часто бывает, феноменологический характер. Рассмотрим саму эту модель (которая остаётся в классе сингулярно возмущённых систем вида (1)):

$$\varepsilon \dot{x} = y - F(x), \qquad \dot{y} = a - x - y, \tag{3}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $a = \text{const} > 0$, а эскиз графика функции $F(x)$ представлен на рис. 4.

Принципиальные для дальнейшего свойства функции $F(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ таковы:

1. Существует такое значение $x = x_* > 0$, что

$$F(0) = 0, \qquad F'(x) > 0 \ \text{при} \ x \in (-\infty, x_*), \qquad F'(x) < 0 \ \text{при} \ x \in (x_*, +\infty),$$
$$F'(x_*) = 0, \qquad F''(x_*) < 0, \qquad a - x_* - F(x_*) > 0.$$

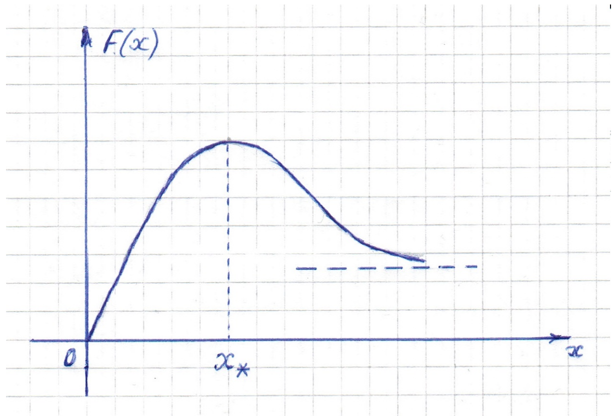


Рис. 4

2. Справедливо асимптотическое представление при $x \to +\infty$:

$$F(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{x^k}, \qquad \alpha_0 > 0,$$

сохраняющее силу при дифференцировании по x любое число раз.

Указанными свойствами обладает, например, функция

$$F(x) = c_1 x \exp(-x) + c_2(1 - \exp(-x)), \qquad c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0.$$

Неклассическим релаксационным циклом на фазовой плоскости (x, y) сингулярно возмущённой системы (3) назовём замкнутую кривую $W_\varepsilon = (x = x^*(t,\varepsilon), y = y^*(t,\varepsilon))$, где x^* и y^* – $T^*(\varepsilon)$-периодические функции времени t, такую, что при $\varepsilon \to 0$:

• величина $T^*(\varepsilon)$ стремится к конечному пределу $T^* > 0$;

• медленная компонента $y^*(t,\varepsilon)$ сходится поточечно к некоторой разрывной ограниченной функции времени;

• быстрая компонента $x^*(t,\varepsilon)$ представляет собой δ-образную функцию времени, причём её «всплески» неограниченно растут.

Обозначим через $x = \varphi(y), y \in (-\infty, F(x_*)$, (единственную) функцию, обратную функции $y = F(x), x \in (-\infty, x_*)$, и введём (положительную) константу

$$T^* = \int\limits_{\varphi(2\alpha_0 - F(x_*))}^{x_*} \frac{F'(x)dx}{a - x - F(x)}.$$

Определим функцию $y^*(t)$ как решение задачи Коши

$$\dot{y} = a - \varphi(y) - y, \qquad y|_{t=0} = 2\alpha_0 - F(x_*),$$

и пусть $x^*(t) = \varphi(F(y^*(t))$. Две последние функции продолжим с отрезка $0 \le t \le T^*$ на всю ось t по закону T^*-периодичности; эти продолжения оказываются разрывными в каждой точке $t = kT^*$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ у системы (3) существует единственный экспоненциально орбитально устойчивый неклассический релаксационный цикл*

$$W_\varepsilon = \{(x, y) : \; x = x^*(t,\varepsilon), \; y = y^*(t,\varepsilon), \; 0 \le t \le T^*(\varepsilon)\}$$

периода $T^*(\varepsilon)$, причем:

$$x^*(0,\varepsilon) \equiv x_* + 1;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T^*(\varepsilon) = T^*;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{t_*(\varepsilon)} x^*(t,\varepsilon)dt = 2F(x_*) - 2\alpha_0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \max_t(\sqrt{\varepsilon}\, x^*(t,\varepsilon)) = F(x_*) - \alpha_0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \max_{\delta_1\le t\le T^*(\varepsilon)-\delta_2} \Big(|x^*(t,\varepsilon) - x^*(t)| + |y^*(t,\varepsilon) - y^*(t)|\Big) = 0.$$

Здесь $t_*(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$ – первый положительный корень уравнения $x^*(t,\varepsilon) = x_* + 1$, а константы $\delta_1, \delta_2 \in (0, T^*/2)$ фиксированы произвольным образом [5].

Наглядное представление о свойствах неклассического релаксационного колебания дают рис. 5 и 6, где приведены эскизы графиков зависимости от времени его компонент, а сам неклассический релаксационный цикл на фазовой плоскости изображён на рис. 7.

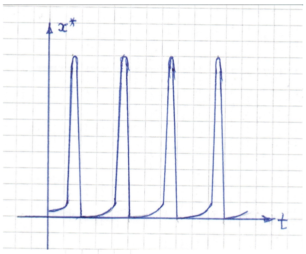


Рис. 5

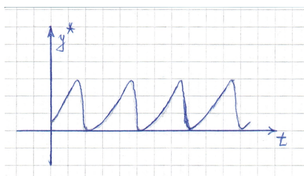


Рис. 6

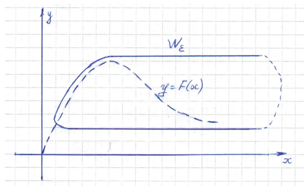


Рис. 7

Литература

1. Van der Pol B. On relaxation oscillations // Philos. Mag. 1926. (7) V. 2. № 11. P. 978-992.

2. Мищенко Е.Ф.,Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М: Наука, 1975.

3. Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.

4. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane //Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445-466.

5. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Об одной модификации нейронной модели ФитцХью – Нагумо // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 3. С. 430-449.

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА: СКОВАННЫЕ ОДНОЙ ЦЕПЬЮ

А.Г. Сергеев

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

e-mail: sergeev@mi.ras.ru

Аннотация: Анализируются связи между математикой и физикой на протяжении последнего столетия. Особое внимание уделено квантовой механике и теории струн. Среди упомянутых имен: Поль Дирак и Николай Николаевич Боголюбов.

Ключевые слова: Квантовая механика, теория струн.

MATHEMATICS AND PHYSICS: FORGED TOGETHER WITH ONE CHAIN

Abstract: We analyze interrelations between physics and mathematics during the last century. The main attention is payed to quantum mechanics and string theory. Among the mentioned names are Paul Dirac and Nikolai Nikolaevich Bogolubov.

Ключевые слова: Quantum mechanics, string theory

1. Введение

Несмотря на то, что математика и физика существуют с незапамятных времен, вопрос об исследовании их взаимосвязей возник относительно недавно.

Действительно, в период создания современной науки, относящийся к XVII-XVIII векам, обе эти дисциплины входили в единую науку натурфилософию и про виднейших ее представителей, таких как Ньютон, Гюйгенс, Паскаль, Галилей, вообще трудно сказать, кем они были в большей степени — математиками, физиками или философами. Только в XIX-XX веках обе науки настолько размежевались, что стала актуальной постановка вопроса об их взаимосвязях. Начнем с очевидных фактов. Математика и физика происходят из одного корня и уже по самому своему происхождению тесно связаны друг с другом. Физика, как известно, написана на языке математики. (Здесь уместно вспомнить высказывание Канта о том, что «в каждой науке ровно столько науки, сколько в ней математики».) По этой причине передовые физики всегда прекрасно разбирались в математике и внимательно следили за появлением новых математических идей и направлений. Известный теорминимум Ландау, включавший в себя экзамены по всему курсу теоретической физики, начинался с двух экзаменов по математике, которые Ландау принимал сам, зачастую поручая остальные экзамены своим ученикам.

С другой стороны, математика не может развиваться без постоянного притока задач, приходящих из физики. В.И.Арнольд даже заявлял в одной из своих статей, что «математика — часть физики». Хотя мы и не разделяем столь радикальной точки зрения, тем не менее, очевидно, что математика без физики жить не может. Хорошо известно, что многие разделы математики возникли и развивались под прямым воздействием физики. Достаточно вспомнить дифференциальные уравнения в частных производных, которые вплоть до последнего времени именовались «уравнениями математической физики». Помимо них можно вспомнить также функциональный анализ, дифференциальную геометрию, теорию вероятностей. Нынешняя теоретическая физика уже использует весь арсенал современной математики — от теории чисел и алгебры до топологии и математической логики.

2. Революция на рубеже эпох

Чем же объяснить тот факт, что на рубеже XIX-XX веков вопрос о взаимосвязи физики и математики вдруг приобрел столь важное значение. Конечно, это было обусловлено тем, что именно в это время в физике произошли выдающиеся события, связанные, с одной стороны, с проникновением в микромир, приведшие к созданию квантовой механики и, с другой стороны, с попытками осознать макроструктуру Вселенной, которые завершились созданием общей теории относительности. Поль Дирак назвал в своих воспоминаниях это время «необычайной эпохой».

Говоря о квантовой механике, следует признать, что эта наука выглядела столь непривычно, что поначалу даже такие великие ученые, как Альберт Эйнштейн, отказывались признавать ее справедливость, а споры вокруг оснований квантовой механики продолжаются по сей день.

Бывший в то время молодым ученым, Дирак так описывает свое впечатление о выступлении Гейзенберга на семинаре в Геттингене. Вернер Гейзенберг — один из основателей квантовой механики — рассказывал о своем, ныне знаменитом уравнении

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar.$$

Здесь, $\hbar$ — постоянная Планка, к которой мы еще вернемся ниже, а $\hat{x}$ и $\hat{p}$ – операторы, являющиеся квантовыми аналогами обычных координаты и импульса. Само же уравнение Гейзенберга выражает тот факт, что квантовые координаты и импульс не коммутируют друг с другом. Дирак вспоминает, что Гейзенберг был настолько потрясен этим фактом, что поначалу был даже готов отказаться от построенной им теории на том основании, что она не «физична».

Однако у Дирака никаких сомнений в правильности выводов Гейзенберга не было, ему нужно было только найти убедительное обоснование «физичности» новой теории. Он вспоминает, что вернувшись в Кембридж, непрерывно размышлял об этой проблеме и во время одной из воскресных прогулок вдруг вспомнил о том, что на лекциях по механике слышал о каких-то скобках Пуассона. Дирак решил, что эти скобки дают ему то, что ему нужно — а именно, вполне «физичный» пример некоммутирующих переменных. К сожалению, Дирак не мог вспомнить их определение и, с трудом дождавшись понедельника, побежал в библиотеку за книжкой Уиттекера по аналитической динамике. Из нее он узнал, что действительно механические величины могут не коммутировать относительно скобки Пуассона.

Впоследствии из этих размышлений родилось общепринятое дираковское определение квантования. Это определение не только позволило «перебросить мостик» от квантовой к обычной классической механике, но и дало конкретный механизмперехода от квантовой механики к классической с помощью перехода к так называемому квазиклассическому пределу.

Новая физическая теория требовала и нового математического языка, который был уже независимо разработан в начале XX-го века. Для математиков существование некоммутирующих переменных не было ни в коем случае удивительным. Некоммутирующие величины были им хорошо им известны еще с XIX-го века, когда сформировалась теория матриц. Более того, в начале XX-го века в трудах Геттингенской школы, представленной Давидом Гильбертом и его учениками, такими как Эрхард Шмидт, было построено обобщение этой теории на случай бесконечномерных пространств. Указанные пространства получили название «гильбертовых» и их теория легла в основу новой квантовой механики.

Создание общей теории относительности также было достигнуто благодаря тесному взаимодействию математики и физики. Взаимодействие в этой области началось с основополагающих работ Бернхарда Римана, а сама теория, созданная благодаря усилиям Альберта Эйнштейна и его коллег, формулировалась на языке дифференциальной геометрии.

3. Поль Дирак и Николай Николаевич Боголюбов

Легче всего осознать взаимосвязи между математикой и физикой на примере замечательных ученых, работавших в это время и уже самой своей деятельностью продемонстрировавших единство математики и физики.

Об одном из них я уже упоминал выше, это — Поль Дирак. Ему принадлежит известное высказывание, записанное мелом на доске в одной из аудиторий физфака МГУ в 1955 году. Оно гласит: «Физические законы должны обладать математической красотой». Это высказывание оставалось девизом Дирака на протяжении всей его научной деятельности. В споре между математической красотой физического закона и экспериментальными данными Дирак всегда оставался на стороне первого.

Однажды известный физик, ставивший эксперимент по проверке одного из теоретических предсказаний Дирака, пришел к Дираку и заявил, что многочисленные опыты убеждают его в том, что это предсказание неверно. Экспериментатор предложил Дираку проверить свои расчеты и убедиться самостоятельно в верности его вывода. Дирак отказался на том основании, что он верит своей математике гораздо больше, чем результатам чужих экспериментов. Через некоторое время выяснилось, что Дирак был прав — в экспериментальной установке упомянутого физика обнаружилась систематическая ошибка, которая и привела его к неверному выводу.

Еще один пример, ярко характеризующий принципиальность Дирака. Как-то его пригласили принять участие в конференции, посвященной годовщине дираковского предсказания существования магнитного монополя. Мне довелось видеть факсимиле письма Дирака, направленного организаторам конференции. В нем Дирак говорил о том, что когда он предложил свою гипотетическую частицу, то был совершенно уверен в ее существовании. Однако по прошествии многих лет монополь так и не был обнаружен, в результате у него появились сомнения в том, что эта частица действительно существует. По этой причине он не может принять участие в посвященной ей конференции.

Другим примером ученого, сочетавшего в себе таланты выдающегося математика и физика, был Николай Николаевич Боголюбов. Его вклад в теоретическую физику огромен. Он один из создателей современной теории сверхпроводимости и сверхтекучести. Ему принадлежат основополагающие труды по квантовой теории поля, где его учебник (написанный совместно с Д.В.Ширковым) давно уже считается классическим. С другой стороны он внес большой вклад в работы по атомному проекту, стал основателем и первым директором Объединенного института ядерных исследований в Дубне.

Как математик, Боголюбов открыл совершенно новую теорему «об острие клина» в многомерном комплексном анализе, доказал основополагающие результаты в теории почти периодических функций, вместе с Н.М.Крыловым стал создателем нового направления в механике, известного теперь под именем «нелинейной механики». Уже простое перечисление этих результатов из совершенно различных областей математики и физики показывает широту Н.Н., его необычайную многогранность и эрудированность.

Остановлюсь только на одном математическом результате Боголюбова — теореме «об острие клина» (по-английски: «edge-of-the-wedge»). Известный результат из теории функций одного комплексного переменного утверждает, что если задана функция в круге, которая непрерывна в его замыкании и аналитична отдельно в верхнем и нижнем полукруге, то она на самом деле аналитична во всем круге. Можно сказать и по-другому: если заданы аналитические функции в верхнем и нижнем полукругах, которые продолжаются непрерывно на общий вещественный диаметр, где их значения совпадают, то эти функции можно продолжить до единой функции, аналитической во всем круге.

Теорема Боголюбова обобщает этот результат на случай многомерного комплексного пространства. А именно, допустим, что у нас имеются две области в таком пространстве, имеющие в качестве общего участка границы шар в вещественном пространстве. Например, в качестве таких областей можно взять сумму вещественного шара с верхним и нижнем конусом в дополнительном, «чисто мнимом» пространстве. Допустим теперь, что у нас есть две функции, аналитические в указанных областях и непрерывно продолжающиеся на общий вещественный шар, где их значения совпадают. Тогда указанные функции продолжаются до единой функции, аналитической в комплексной окрестности исходного вещественного шара.

Отличие этой теоремы от ее одномерного аналога в том, что в одномерном случае функция уже была задана во всем круге и нужно было только проверить ее аналитичность. Напротив, в многомерном случае она задана на вещественном шаре и малой части объемлющего комплексного пространства, а утверждается, что, тем не менее, ее можно продолжить и в те точки комплексной окрестности шара, где она первоначально не была определена.

Теорема Боголюбова была столь необычна для своего времени, что некоторые математики поначалу даже сомневались в ее верности, пока в книге Боголюбова, Медведева, Поливанова не появилось подробное доказательство.

4. Подробнее о квантовой механике

Остановимся более подробно на принципах, лежащих в основе квантовой механики.

Начнем с обычной, классической механики. Рассмотрим материальную точку, эволюция которой во времени представляет собой траекторию γ, называемую *мировой линией.* Каким образом можно выделить среди всех траекторий, соединяющих начальную и конечную точку γ, ту, которая отвечает реальной мировой линии? Интуиция подсказывает нам, что такая траектория должна быть кратчайшей. И это почти верно. Исходя из физических свойств среды, в которой движется рассматриваемая материальная точка, можно ввести понятие «расстояния», позволяющее измерять длину траектории. Такую «длину» в физике принято называть *действием. Принцип наименьшего действия* утверждает, что мировая линия должна быть линией наименьшего действия. Если среда однородна, то частица будет двигаться по прямой. На границе двух сред мировая линия может иметь излом (как в законе о преломлении света). Если же свойства среды меняются от точки к точке, то мировая линия будет представлять собой сложную кривую, вычисление которой может оказаться непростой математической задачей.

При переходе к квантовой механике ситуация коренным образом меняется, при этом детерминированность классической механики уступает место вероятностному подходу квантовой теории. А именно, в квантовом случае мы можем найти только вероятность перехода частицы из начального в конечное состояние. Указанная вероятность определяется суммой вкладов от ВСЕХ траекторий, соединяющих начальную точку с конечной. Более формально, эта вероятность определяется интегралом вида

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S(\gamma)}d\gamma,$$

где $S(\gamma)$ — действие траектории γ, т.е. «длина» в выбранной метрике, а интеграл берется по множеству всех траекторий, соединяющих начальную точку с конечной. Отдельной и трудной математической задачей является придание строгого смысла выписанному выше интегралу. Эту задачу удалось решить совместными усилиями физиков, таких как Ричард Фейнман, и математиков, таких как Норберт Винер.

Возникает естественный вопрос — каким образом рассматриваемый нами интеграл связан с принципом наименьшего действия, сформулированным выше? Или, другими словами, как квантовый микромир соотносится с нашим механическим макромиром?

Для объяснения указанной связи воспользуемся постоянной Планка $\hbar$, входящей в показатель экспоненты. Эта постоянная, отвечающая энергии одного кванта, является весьма ощутимой величиной с точки зрения квантового микромира, но она же исчезающе мала, если оценивать ее с позиции нашего макромира. Поэтому, чтобы вернуться из квантовой механики в классическую, в нашем интеграле необходимо перейти к пределу при $\hbar \to 0$, забывая о том, что $\hbar$ является постоянной. Указанный предел называется в физике *квазиклассическим приближением.* В математике имеется хорошо разработанный метод вычисления пределов интегралов рассматриваемого типа, называемый *методом перевала.* Согласно этому методы в пределе при $\hbar \to 0$ вклад в предельный интеграл будут вносить только траектории минимального действия.

Это рассуждение не только объясняет связь между классической и квантовой механикой, но и демонстрирует один из важнейших физических принципов, называемый *принципом соответствия.* Указанный принцип говорит нам о том, что, предлагая новую физическую теорию, мы должны, во-первых, указать границы ее применимости и, во-вторых, описать механизм перехода от этой новой теории к старой. Таким образом физика не отрицает старые теории, но включает их в новые.

5. Теория струн

Обратимся теперь к одной из наиболее общих квантовых теорий, известных к настоящему времени, а именно, теории струн.

В процессе развития теории элементарных частиц была высказана гипотеза о том, что некоторые из этих частиц, называемые адронами (такие как протоны и нейтроны) являются на самом деле не столь элементарными, но, в свою очередь, состоят из более элементарных частиц, получивших название *кварков.*

Эта гипотеза выглядела вполне убедительно, однако столкнулась с серьезной проблемой — никто не мог обнаружить кварки в реальном эксперименте. Данное явление даже получило специальное название *«конфайнмента»* или «заключения» кварков. Для его объяснения была выдвинута другая гипотеза, утверждавшая, что кварки, составляющие элементарную частицу, связаны в ней упругой струной. Эта струна позволяет им свободно двигаться внутри частицы (это так называемая *асимптотическая свобода* кварков), но не дает покинуть ее пределы из-за высокой упругости связывающей их струны.

Позднее для объяснению конфайнмента кварков был предложен иной подход, но сама идея наличия линейной структуры в элементарных частицах оказалась настолько привлекательной, что была использована вновь в теории струн, к изложению которой мы переходим.

Согласно этой гипотетической теории, частицу нужно представлять себе не как точечный, а как линейно протяженный объект — *струну*, которая может быть замкнутой (вроде искривленной окружности) или открытой (типа отрезка кривой).

Эволюция подобной струны во времени описывается *мировой поверхностью*, связывающей ее начальное и конечное положения. Также как в классической механике, мировая поверхность выделяется среди всех поверхностей, связывающих начальное и конечное положение струны, тем, что она имеет наименьшую «площадь». Площадь понимается здесь, как и ранее, в «физическом смысле», т.е. отождествляется с действием.

Переходя к квантовому случаю, мы должны, как и в квантовой механике, учитывать вклады не только от минимальных, но и всех других поверхностей, связывающих начальное и конечное состояние струны. Другими словами, мы имеем дело с интегралом

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S(\Sigma)}d\Sigma$$

по множеству всех поверхностей Σ указанного выше типа, где $S(\Sigma)$ обозначает действие поверхности Σ. В пределе при $\hbar \to 0$ единственный вклад в интеграл будут давать минимальные поверхности.

Однако, в отличие от случая квантовой механики, придать точный смысл этому интегралу можно только в предположении, что струны «живут» не в нашем 4-мерном пространстве-времени, а в 26-мерном пространстве. До сих пор мы не учитывали тот факт, физические частицы делятся на два класса, бозонов и фермионов. Если распространить теперь нашу теорию на этот случай, то мы придем к более общей теории *суперструн*, содержащей частицы обоих типов. Тогда аналог рассмотренного выше интеграла будет иметь смысл только в предположении, что суперструны «живут» в 10-мерном пространстве.

Теория суперструн претендует на единое описание всех типов физических взаимодействий, встречающихся в природе, а именно гравитационных, электрических, слабых и сильных. Тем самым, она претендует на «звание» единой теории поля — главной мечты физиков XX-го века. Однако на пути реализации этой мечты возникает серьезное препятствие. Именно, она должна объяснить, каким образом описанная 10-мерная теория суперструн связана с нашим реальным 4-мерным миром? Теория суперструн предлагает следующий ответ на этот вопрос: 10-мерное пространство этой теории должно иметь структуру прямого произведения

$$M_4 \times K_6,$$

где M_4 — наше 4-мерное пространство-время, а K_6 — «очень малое» 6-мерное пространство. Настолько малое, что мы не ощущаем присутствия этих дополнительных измерений в нашем макромире. Они начинают проявлять себя только при очень высоких энергиях, достижимых в первые моменты жизни нашей Вселенной сразу после «Большого взрыва».

Согласно теории суперструн, сразу после «Большого взрыва» наше пространство имело 10 измерений и один единственный тип взаимодействий — супервзаимодействие. Разница между четырьмя типами физических взаимодействий начинает проявляться по мере остывания Вселенной и, одновременно, дополнительное 6-мерное пространство «рождает» известные нам элементарные частицы.

Описанный процесс называется *«спонтанной компактификацией»* (намек на компактность дополнительного пространства K_6). Главная проблема, связанная с этим процессом, состоит в том, чтобы в результате получить все известные нам частицы и не слишком много новых. Это требование накладывает целый ряд чисто математических ограничений на структуру K_6 и в настоящий момент неясно, существуют ли вообще пространства, удовлетворяющие всем этим ограничениям.

6. Заключение

Мы обрисовали очень кратко основные идеи теории струн и возникающие в в ней трудности. Описанная теория выглядит весьма привлекательной и достаточно «сумасшедшей», однако трудно рассматривать ее как корректную математическую теорию, поскольку многие ее выводы получены на «физическом уровне строгости» с использованием некорректных математических рассуждений.

Тес не менее, несмотря на эти трудности, теория струн уже обогатила математику многими нетривиальными результатами. На основе ее идей теорфизики высказали несколько математических гипотез, которые были затем полностью или частично подтверждены математиками. Среди таких предсказаний можно упомянуть «зеркальную симметрию», предсказывающую существование «зеркальных» двойников у некоторых многообразий. Можно также вспомнить о предсказываемой теорией струн связи между теориями Янга–Миллса и Зайберга–Виттена — двумя теориями, которые на первый взгляд весьма далеки друг от друга и т.д..

Суммируя сказанное, можно констатировать, что мы являемся свидетелями уникальной ситуациin в истории взаимоотношений физики и математики. В то время как теория струн удачно описывает поведение элементарных частиц и даже позволяет формулировать верные математические гипотезы, она остается совершенно не обоснованной с математической точки зрения. Главная причина создавшегося положения заключается, по нашему мнению, в том, что до сих пор отсутствует адекватный математический язык, пригодный для описания подобного рода физических явлений. Создание такого языка является одной из главных задач, поставленных теоретической физикой перед математиками XXI-го века.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ СКОРЕЙШЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЦЕНЫ ЗА НАБЛЮДЕНИЯ

А.Н. Ширяев[1]

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

e-mail: albertsh@mi.ras.ru

Аннотация: Наблюдаемый процесс $X = (X_t)_{t\geq 0}$ с моментом разладки θ описывается уравнением $dX_t = r\,h_t I\{\theta \leq t\}\,dt + \sigma\sqrt{h_t}\;dW_t$, где $h = (h_t)_{t\geq 0}$ есть управляющий процесс, характеризующий качество наблюдения. В работе находится оптимальный момент остановки τ^* и оптимальное управление h^*.

[1]Настоящий доклад основан на совместной работе автора и Р. Даланга (R. Dalang; Switzerland).

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, допустимое стохастическое управление, канонический момент остановки, сильное решение, слабое решение, стратегия, система управления, цена наблюдения, гладкое склеивание.

SOLVING OF AN OPTIMIZATION PROBLEM OF A QUICKEST DETECTION WITH AN OBSERVATION COST

Abstract: Observed process $X = (X_t)_{t\ge0}$ with disorder time θ is described by equation $dX_t = r\, h_t I\{\theta \le t\}\, dt + \sigma\sqrt{h_t}\, dW_t$, where $h = (h_t)_{t\ge0}$ is a control process which characterizes the quality of observation. We describe the optimal stopping time τ^* and optimal control h^*.

Keywords: stochastic differential equations, admissible stochastic control, canonical stopping time, strong solution, weal solution, strategy, control system, observation cost, smooth fit.

In the classical quickest detection problem, one must detect as quickly as possible when a Brownian motion without drift "changes" into a Brownian motion with positive drift. The change occurs as an unknown "disorder" time with exponential distribution. An observer observes a stochastic problem $X = (X_t)_{t\ge0}$ with

$$dX_t = rI\{\theta \le t\}\, dt + \sigma\, dW_t, \tag{1}$$

where $W = (W_t)_{t\ge0}$ is a Wiener process and $\theta = \theta(\omega)$ is a "disorder time".

We assume that the *control* $h = (h_t)_{t\ge1}$ is a $[0, 1]$-valued process where $h_t = 1$ means that observation occurs, and $h_t = 0$ means absence of observation. Therefore, the observation process is described by the stochastic differential

$$dX_t = rh_tI\{\theta \le t\}\, dt + \sqrt{h_t}\, dW_t, \qquad X_0 = 0. \tag{2}$$

We assume that all objects are defined on a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}, \mathsf{P})$, $W_t = W_t(\omega)$, $\theta = \theta(\omega)$, $h_t = h_t(\omega)$.

It is reasonable to assume that the control function h_t depends on ω via observation process: $h_t(\omega) = h_t(X(\omega))$. In this case the SDE (2) will take the form

$$dX_t = r\, h_tI\{\theta \le t\}\, dt + \sigma\sqrt{h_t}\, dW_t, \tag{3}$$

and, inevitably, we have to explain how to formulate this SDE and give a precise definition of the control $h = (h_t(X))_{t\ge0}$. These questions are considered below. We give *two* precise but distinct formulation of a solution to equation (3) according to whether we interpret X as a strong or weak solution of (3).

In the strong formulation, no optimal strategy exists in general, but such an optimal strategy does exist in the weak formulation. It turns out, however, that the value function is the *same* in both formulations.

STATING THE PROBLEM.

Definition 1. A *stochastic control* is a progressively measurable process $h = (h_t(\omega))_{t\ge0}$ defined on $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}, \mathsf{P})$ with values in $[0, 1]$.

Definition 2. A *canonical control* $h = (h_t(x))_{t\ge0}$ is a map $(t, x) \mapsto h_t(x)$ from $\mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ to $[0, 1]$ that is progressively measurable for the canonical filtration on $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

A *canonical stopping time* $\tau = \tau(x)$ is a random variable $\tau\colon\ C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ that is a stopping time relative to the canonical filtration on $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Definition 3. A stochastic control $h = (h_t(\omega))_{t\ge 0}$ is called an admissible control if

(i) it has the form $h_t(\omega) = h_t(X(\omega))$ for a canonical control $h_t(x)$;

(ii) the stochastic differential equation

$$dX_t = rh_t(X)I\{\theta \le t\}\,dt + \sigma\sqrt{h_t(X)}\,dW_t, \quad X_0 = 0, \tag{4}$$

admits a strong solution in the sense of the following definition.

Definition 4. Assume that the following objects are given a priori:

(a) a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, \mathsf{P})$;

(b) a random variable $\theta = \theta(\omega)$ which is $\mathcal{F}_0$-measurable and satisfies the SDE (4), $\mathsf{P}(\theta = 0) = \pi_0$, $\mathsf{P}(\theta > t \,|\, \theta > 0) = e^{-\lambda t}$;

(c) a Brownian motion $W(\omega) = (W_t(\omega))_{t\ge 0}$ such that W_t is $\mathcal{F}_t$-measurable, for all $t \ge 0$.

A *strong solution* of the SDE (4) is a continuous stochastic process $X = (X_t(\omega))_{t\ge 0}$ such that it satisfies (4) and X_t is $\mathcal{F}_t$-measurable for all $t \ge 0$.

One may consider also the case where (4) has a weak solution.

Definition 5. We assume that a canonical control $h = (h_t(x))_{t\ge 0}$ and the law of θ are given a priori. A *weak solution* of the SDE (4) is a system of the following objects:

(a) a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, \mathsf{P})$ (which is *not* given a priori);

(b) a Brownian motion $W = (W_t)_{t\ge 0}$ such that W_t is $\mathcal{F}_t$-measurable, for all $t \ge 0$;

(c) an $\mathcal{F}_0$-measurable random variable θ with the law

$$\mathsf{P}(\theta = 0) = \pi_0, \quad \mathsf{P}(\theta > t \,|\, \theta > 0) = e^{-\lambda t};$$

(d) an $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$-adapted process $X = (X_t)_{t\ge 0}$ which satisfies the SDE (4), that is,

$$X_t = \int_0^t rh_s(X)\,I\{\theta \le s\}\,ds + \int_0^t \sigma\sqrt{h_s(X)}\,dW_s \quad \text{for all } t \ge 0.$$

Definition 6. For the case of strong solutions, a *strategy* is a pair (h, τ), where $h = (h_t(X(\omega)))_{t\ge 0}$, $\tau = \tau(X(\omega))$ for some canonical control $(h_t(x))_{t\ge 0}$ and canonical stopping time $\tau(x)$.

For the case of weak solutions, (h, τ, X) is called a *control system.*

COST.

Definition 7. The cost associated with a strategy (h, τ) or a control system (h, τ, X) is

$$\begin{aligned} C(h,\tau) &= C(h,\tau,X) \\ &= I\{\tau(X) < \theta\} + a(\tau(X) - \theta) I\{\tau(X) \geq \theta\} + b \int_0^{\tau(X)} h_t(X)\, dt, \end{aligned}$$

where $a > 0$, so as to penalize late detection of the alarm time θ, and $b \geq 0$.

Our *first objective* is to find

- the value

$$V = \inf_{(h,\tau)} \mathsf{E}\, C(h,\tau), \quad \text{(infimum is taken over } \textit{all strategies}\text{);}$$

- an optimal strategy (h^*, τ^*) that achieves this infimum, or at least, a strategy that is within ε of this infimum ($\varepsilon > 0$).

Our *second objective* is to find

– the value

$$V^{\mathrm{w}} = \inf_{(h,\tau,X)} \mathsf{E}\, C(h,\tau,X) \quad \text{(infimum is taken over } \textit{all control systems}\text{);}$$

– an optimal control system (h^*, τ^*, X^*).

Clearly, $V^{\mathrm{w}} \leq V$.

DEPENDENCE ON π_0.

In fact, V and V^{w} are functions of the number $\pi_0 = \mathsf{P}\{\theta = 0\}$, which we denote by $\tilde{g}(\pi_0)$ and $\tilde{g}^{\mathrm{w}}(\pi_0)$:

$$\tilde{g}(\pi_0) = \inf_{(h,\tau)} \mathsf{E}\, C(h,\tau), \qquad \tilde{g}^{\mathrm{w}}(\pi_0) = \inf_{(h,\tau,X)} \mathsf{E}\, C(h,\tau,X). \tag{5}$$

Clearly, $\tilde{g}^{\mathrm{w}} \leq \tilde{g}$.

Lemma 1. *The functions $\tilde{g}$ and $\tilde{g}^{\mathrm{w}}$ are concave.*

Proof. By the law of total probability,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\, C(h,\tau) = \pi_0\, \mathsf{E}\biggl(a\tau(X) + b \int_0^{\tau(X)} h_t(X)\, dt \,\Bigm|\, \theta = 0\biggr) \\ + (1-\pi_0)\, \mathsf{E}\biggl(I\{\tau(X) < \theta\} + a(\tau(X) - \theta) I\{\tau(X) > \theta\} \\ + b \int_0^{\tau(X)} h_t(X)\, dt \,\Bigm|\, \theta > 0\biggr). \end{aligned}$$

Here both expectations do not depend on π_0: the first one since $\tau(X)$, $h_t(X)$ are determined by the observation process only; the second one since $\mathrm{Law}(\theta \,|\, \theta > 0)$ does not depend on π_0.

Therefore, $\pi_0 \mapsto \mathsf{E}\, C(h,\tau)$ is an affine function of π_0, and $\tilde g$, being the infimum of affine functions, is concave. The same argument applies to $\tilde g^{\mathrm{w}}$.

Lemma 2. *We have*

$$\mathsf{E}\, C(h,\tau) = \mathsf{E}\left(1-\pi^h_\tau + a\int_0^\tau \pi^h_s\, ds + b\int_0^\tau h_s\, ds\right)$$

where $\pi^h_t = \mathsf{P}(\theta \le t \,|\, X_s,\ s\le t)$.

Set $\varphi^h_t = \pi^h_t/(1-\pi^h_t)$. Then $d\varphi^h_t = \lambda(1+\varphi^h_t)\, dt + (r/\sigma^2)\, \varphi^h_t\, X_t$.

Lemma 3. *The process* $X=(X_t)_{t\ge 0}$ *has the stochastic differential*

$$dX_t = rh_t(X)\pi_t\, dt + \sigma\sqrt{h_t}\, d\bar W_t$$

where $(\bar W_t)$ *is a standard Brownian motion.*

This is an *innovation* representation.

Lemma 4. *Set* $\rho = r/\sigma$. *Then*

$$d\pi^h_t = \lambda(1-\pi^h_t)\, dt + \rho\pi^h_t(1-\pi^h_t)\sqrt{h_t}\, d\bar W_t.$$

Verification Lemma. *Suppose that* g^* *is a bounded continuous function defined on* $[0,1]$ *such that* $0\le g^*(x)\le 1-x$, $x\in[0,1]$.

(1) *Suppose that for any* $\pi\in[0,1]$, *the following property holds:*

(a) *for any strategy* $((h_t),\tau)$ *(resp. for any control system* (h,τ,X)*), the process* (Y_t) *is an* $\mathcal{F}^X$*-submartingale under* P_π*, where*

$$Y_t = g^*(\pi^h_t) + a\int_0^t \pi^h_s\, ds + b\int_0^t h_s\, ds.$$

Then $g^*\le \tilde g$ *(resp.* $g^*\le\tilde g^{\mathrm{w}}$*).*

(2) *Suppose that for any* $\pi\in[0,1]$, *in addition to (a), the following three properties hold:*

(b) *for the strategy* $((h^*_t),\tau^*)$ *(resp. the control system* $((h^*_t),\tau^*,X^*)$*), the process* $(Y^*_{t\wedge\tau^*})$ *is an* $\mathcal{F}^X$*-martingale under* P_π*, where*

$$Y^*_t = g^*(\pi^{h^*}_t) + a\int_0^t \pi^{h^*}_s\, ds + b\int_0^t h^*_s\, ds;$$

(c) $\mathsf{E}_\pi\, \tau^* < +\infty$;

(d) $g^*(\pi^{h^*}_{\tau^*}) = 1-\pi^{h^*}_{\tau^*}$.

Then $g^*=\tilde g$ *and* $((h^*_t),\tau^*)$ *is an optimal strategy (resp.* $g^*=\tilde g^{\mathrm{w}}$ *and* $((h^*_t),\tau^*,X^*)$ *is an optimal control system).*

A CANDIDATE FOR THE VALUE FUNCTION.

For (Y_t) by Itô's formula ($g = g^*$) and Lemma 4, we have

$$\begin{aligned} dY_t &= g'(\pi_t^h)\,d\pi_t^h + \frac{1}{2}g''(\pi_t^h)\,d\langle\pi^h\rangle_t + a\pi_t^h\,dt + bh_t\,dt \\ &= \left[\lambda g'(\pi_t^h)(1-\pi_t^h) + \frac{1}{2}g''(\pi_t^h)(\rho\pi_t^h(1-\pi_t^h))^2 h_t + a\pi_t^h + bh_t\right] dt \\ &\quad + g'(\pi_t^h)\frac{r}{\sigma}\pi_t^h(1-\pi_t^h)\sqrt{h_t}\,d\bar{W}_t. \end{aligned}$$

Therefore, (Y_t) is a submartingale if the term in brackets $[\,\cdot\,]$ is nonnegative, for any h_t; in particular, for $h_t = 0$ and $h_t = 1$, that is, for all $x \in [0,1]$,

$$\lambda g'(x)(1-x) + ax \geq 0$$

and

$$\lambda g'(x)(1-x) + \frac{1}{2}g''(x)(\rho x(1-x))^2 + ax + b \geq 0.$$

INTUITION AND SMOOTH FIT.

We postulate that there are two constants $0 \leq A \leq B \leq 1$ such that:
– on $[0, A]$ it is optimal NOT to observe;
– on (A, B) it is optimal to observe without declaring an alarm;
– on $[B, 1]$ it is optimal to stop and declare the alarm, i.e.,

$$h_t^* = I\{\pi_t^{h^*} > A\} \quad \text{and} \quad \tau^* = \inf\{t \geq 0\colon \pi_t^{h^*} \geq B\}.$$

In order to satisfy condition (b) of the Verification Lemma, we need

$$\lambda g'(x)(1-x) + ax = 0, \quad x \in (0, A], \tag{6}$$

$$\lambda g'(x)(1-x) + ax + \frac{1}{2}g''(x)\rho^2x^2(1-x)^2 + b = 0, \quad x \in (A, B). \tag{7}$$

In order to satisfy condition (d) of the Verification Lemma, we need $g(x) = 1 - x$, $x \in [B, 1]$. Denote by g_1 and g_2 solutions of (6) and (7) with "pasting" condition

$$g_1(A) = g_2(A) \tag{8}$$

and with condition $g_2(B) = 1 - B$.

We have 5 unknown constants: 3 from equation and A, B. We use smooth-fit condition

$$g_2'(B) = -1 \tag{9}$$

and

$$g_1'(A) = g_2'(A). \tag{10}$$

We need one more equation; we take

$$g_1''(A) = g_2''(A), \tag{11}$$

since we want to apply Itô's formula.

SOLVING THE EQUATIONS.

Set $f_1(x) = g_1'(x)$, $f_2(x) = g_2'(x)$.

The value of A. For $0 < x < A$, differentiate (6) to get

$$-\lambda f_1(x) + \lambda f_1'(x)(1-x) + a = 0, \quad \text{i.e.,} \quad f_1'(x) = \frac{\lambda f_1(x) - a}{\lambda(1-x)}.$$

From (7), we get

$$f_2'(x) = \frac{-ax - b - \lambda f_2(x)(1-x)}{\rho^2 x^2 (1-x)^2/2}.$$

If we plug $x = A$ into these equations, we get

$$-\lambda(aA+b) - \lambda^2 f_2(A)(1-A) = -\frac{a}{2}\rho^2 A^2(1-A) + \frac{\lambda\rho^2}{2} A^2(1-A) f_1(A).$$

Since $f_2(A) = f_1(A)$, we solve for $f_1(A)$:

$$f_1(A) = \frac{a\rho^2 A^2(1-A)/2 - \lambda(aA+b)}{(1-A)(\lambda^2 + \lambda\rho^2 A^2/2)}.$$

From here and (7) we get an equation for A: $A = \sqrt{2\lambda b/(a\rho^2)}$.

The observation region (A, B) is non-empty, if $A < 1$. Since we want g_1 to be concave, we also must have

$$f_1(A) = g_1'(A) > -1. \tag{12}$$

From $\lambda g_1'(x)(1-x) + ax = 0$, we have

$$g_1'(x) = -\frac{a}{\lambda}\frac{x}{1-x}. \tag{13}$$

From (12) and (13) we have

$$-\frac{a}{\lambda}\frac{A}{1-A} > -1, \quad \text{or, equivalently,} \quad A < \frac{\lambda}{a+\lambda}.$$

With $A = \sqrt{2\lambda b/(a\rho^2)}$, we conclude that the observation region (A, B) is not empty if

$$b < \frac{\lambda a \rho^2}{2(a+\lambda)^2}. \tag{14}$$

Determining $f_2(x)$ from

$$\lambda f(x)(1-x) + \frac{1}{2} f'(x)\rho^2 x^2 (1-x)^2 + b = 0. \tag{15}$$

A solution of the homogeneous equation

$$\lambda f(x)(1-x) + \frac{1}{2} f'(x)\rho^2 x^2 (1-x)^2 = 0$$

is $f(x) = ((1-x)/x)^{\alpha}\, e^{\alpha/x}$, where $\alpha = 2\lambda/\rho^2$. Therefore, the solution of the inhomogeneous equation (15) is

$$f_2(x) = K_1 f(x) + f(x)\int_A^x \frac{-2}{\rho^2}\frac{ay+b}{y^2(1-y)^2}\frac{1}{f(y)}\,dy, \tag{16}$$

where

$$K_1 = -\frac{a}{\lambda}\frac{A}{1-A}\frac{1}{f(A)}?$$

that follows from $\lambda g_1'(x)(1-x) + ax = 0$ and $g_1'(A) = g_2'(A)$.

Having $f_2(x)$ we find $B \in (A, 1]$ such that $f_2(B) = -1$.

Next step is finding $g_2(x)$ ($g_2'(x) = f_2(x)$):

$$g_2(x) = \int_B^x f_2(y)\,dy + 1 - B. \tag{17}$$

Similarly we find $g_1(x)$ ($g_1'(x) = f_1(x)$). We check also that for $x \in [0, 1]$

$$\lambda g_1'(x)(1-x) + ax \geq 0,$$
$$\lambda g_2'(x)(1-x) + \frac{1}{2}g_2''(x)(\rho x(1-x))^2 + ax + b \geq 0.$$

In the case $b \geq \lambda a\rho^2/(2(a+\lambda)^2)$ we postulate that the observation region (A, B) is empty (i.e., $B = A$). In this case

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{if } 0 \leq x \leq B, \\ 1 - x & \text{if } B \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{18}$$

where $B = \lambda/(a+\lambda)$.

In the case $b \geq \lambda a\rho^2/(2(a+\lambda)^2)$ (where the observation region is empty) the candidate optimal control is $h_t^* \equiv 0$, and the candidate optimal stopping time is

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0\colon \pi_t^* \geq B\}, \tag{19}$$

where (π_t^*) is defined by

$$d\pi_t^* = \lambda(1 - \pi_t^*)\,dt, \qquad \pi_0^* = \pi_0. \tag{20}$$

On the other hand, in the case where $b < \lambda a\rho^2/(2(a+\lambda)^2)$, the optimal strategy should take the following form:

$$h_t^* = I\{\pi_t^* > A\} \quad \text{and} \quad \tau^* = \inf\{t \geq 0\colon \pi_t^* \geq B\}, \tag{21}$$

where the law of (π_t^*) should be determined by the diffusion equation

$$d\pi_t^* = \lambda(1 - \pi_t^*)\,dt + \rho\pi_t^*(1 - \pi_t^*)I\{\pi_t^* > A\}\,d\bar{W}_t. \tag{22}$$

Theorem. (a) *Case where* $0 < b < \lambda a\rho^2/(2(a+\lambda)^2)$. *Let* $A = \sqrt{2\lambda b/(a\rho^2)}$. *Then control system associated*

$$h(t, p) = I\{p > A\} \quad \textit{and} \quad \tau^* = \inf\{t \geq 0\colon \pi_t^* \geq B\}$$

is optimal.

(b) *Case where* $b \geq \lambda a\rho^2/(2(a+\lambda)^2)$. *Let* $B = \lambda/(a+\lambda)$. *Then the function* g *defined by*

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \textit{if } 0 \leq x \leq B, \\ 1 - x & \textit{if } B \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{23}$$

is equal to the value function $\tilde{g}^{\mathrm{w}}(\pi_0) = \inf_{(h,\tau,X)} \mathsf{E}\,C(h, \tau, X)$.

AN ALMOST OPTIMAL STRATEGY.

Here we describe ε-optimal strong solution $(h^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$ of our problem. It turns out that this solution converges to the solution obtained above in frame of the "weak" approach. Define the function

$$h^{(\varepsilon)}(x) = \frac{x-A}{\varepsilon} I_{(A,A+\varepsilon)}(x) + 1_{[A+\varepsilon,\infty)}(x).$$

Define also $g_\varepsilon(\pi_0) = \mathsf{E}_\pi\, C(h^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$, where $\tau^\varepsilon = \inf\{t \geq 0\colon \pi_t^\varepsilon \geq B\}$ and

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{if } 0 \leq x \leq A; \\ g_2(x), & \text{if } A < x < A+\varepsilon; \\ g_3(x), & \text{if } A+\varepsilon \leq x < B; \\ 1-x, & \text{if } B \leq x \leq 1. \end{cases}$$

The function $g_\varepsilon(x)$ converges to $g(x)$ for all $x \in [0,1]$. (Here $g(x)$ is the price of the strong solution.)

Секция 1. Бесконечномерный анализ и стохастика

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Я.И. Белопольская

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: `yana@yb1569.spb.edu`

Аннотация: В статье построены вероятностные представления классических и обобщенных решений систем сильно связанных квазилинейных параболических уравнений. В частности, построены вероятностные представления обобщенного решения задачи Коши для системы с кросс-диффузией.

Ключевые слова: стохастические потоки, стохастические уравнения, системы квазилинейных параболических уравнений, классические и обобщенные решения задачи Коши.

PROBABILISTIC METHODS TO SOLVE THE CAUCHY PROBLEM FOR SYSTEMS OF QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

Abstract: We construct probabilistic representations for classical and generalized solutions of the Cauchy problem for systems of quasilinear parabolic equations. In particular we construct a probabilistic representation for a generalized solution of the Cauchy problem for a system with cross-diffusion.

Keywords: stochastic flows, stochastic equations, systems of quasilinear parabolic equations, classical and generalized solutions of the Cauchy problem.

Системы нелинейных параболических уравнений возникают в качестве математических моделей различных физических и биологических задач. Примерами таких задач являются различные законы сохранения [1], [2], законы эволюции взаимодействующих популяций [3], [4] и другие. В этой работе мы рассмотрим два типа систем квазиилинейных параболических уравнений, классификация которых определяется характером вхождения старших членов.

Пусть d, d_1 – пара натуральных чисел, R^d, R_1^d - пара евклидовых пространств, $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^d x_k y_k$ – скалярное произведение в R^d, и для заданной матрицы $A \in R^d \otimes R^d$ обозначим A^* транспонированную матрицу. Пусть заданы функции $a(x, u, \nabla u) \in R^d, A(x, u, \nabla u) \in R^d \times R^d, c(x, u, \nabla u) \in R^{d_1} \times R^{d_1}, B(x, u, \nabla u) \in R^{d_1} \times R^{d_1} \times R^d$, $g(x, u, \nabla u) \in R^{d_1}$ определенные на $R^d \times R^{d_1} \times R^{d_1} \otimes R^d$.

К первому типу (тип I) мы отнесем системы квазилинейных параболических уравнений следующего вида

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + [\mathcal{B}u]_l + g_l(x, u, \nabla u) = 0 \quad u_l(T, x) = u_{0l}(x) \in R^{d_1}, x \in R^d, s \in [0, T], \tag{1}$$

где оператор $\mathcal{B}$ имеет вид

$$[\mathcal{B}u]_l = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}A^*\nabla^2 u_l A + \langle a, \nabla u_l\rangle + B^k_{lm}\nabla_k u_m + c_{lm}u_m \tag{2}$$

Здесь и ниже будет использовано соглашение о суммированию по повторяющимся индексам, если не оговорено противное.

Отличительным свойством систем типа I является диагональное вхождение членов второго порядка. Системы этого типа изучались многими аторами, и соответствующие результаты можно найти в классической монографии [5] и более поздних работах. Важным характеристическим свойством системы вида (1) является тот факт, что она эквивалентна скалярному уравнению относительно функции $\Phi(s,x,h) = \langle h, u(s,x)\rangle$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{1}{2}TrQ^*(x,h)\nabla^2\Phi Q(x,h) + \langle b(x,h), \nabla\Phi\rangle + G(s,h,x,\Phi,Q^*\nabla\Phi) = 0. \tag{3}$$

Заметим, что в силу линейности функции $\Phi(s,x,h)$ по h выполняется равенство $\frac{\partial^2\Phi}{\partial^h_q \partial h_p} \equiv 0$, откуда следует, что

$$TrQ^*\nabla^2\Phi(s,x,h)Q = A^*_{ki}\frac{\partial^2\Phi(s,x,h)}{\partial x_i \partial x_j}A_{jk} + 2C^{lm}_k h_l \frac{\partial^2\Phi(s,x,h)}{\partial x_j \partial h_m}A_{jk}.$$

Кроме того,

$$\langle b, \nabla\Phi(s,x,h)\rangle = a_j\frac{\partial\Phi(s,x,h)}{\partial x_j} + c_{lm}h_m\frac{\partial\Phi(s,x,h)}{\partial h_l},$$

и

$$G(s,x,h) = \langle h, g(s,x,u,A^*\nabla u)\rangle.$$

Это свойство системы (1) позволяет построить вероятностные представления для ее обобщенных и вязкостных решений. Соответствующие результаты можно найти в работах [6]- [13].

Ко второму типу (тип II) мы относем системы с недиагональным вхождением членов второго порядка, которые иногда называют системами с кросс-диффузией. Общий вид систем типа II можно задать следующим образом:

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} - div\, J_l + g_l(x,u,\nabla u) = 0, \quad u_l(0,x) = u_0(x), \quad l = 1,\ldots,d_1, \tag{4}$$

где $J_l = A_{lm}(x,u)\nabla u_m, \quad l,m = 1,\ldots,d_1$. Изучение систем этого типа было начато в работах Аммана [14], и продолжено в работах многих авторов (см. например, [1]–[4]).

Наша цель - построить вероятностные представления различных класов решений задачи Коши для систем первого и второго типа, а именно классических, и/или обобщенных решений рассматриваемых задач. При этом решения полученных стохастических задач могут быть использованы для построения эффективных алгоритмов численного решения исходной задачи Коши.

Вероятностные представления классических решений задачи Коши для систем типа I

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – заданное вероятностное пространство и $w(t) \in R^d$ – определенный на нем стандартный винеровский процесс . Предположим, что все коэффициенты в (1) принадлежат классу C^2 (дважды дифференцируемы по всем аргументам), а также имеют сублинейный рост по x и полилинейный рост по u .

Рассмотрим вначале случай системы семилинейных параболических уравнений, т.е. предположим, что все коэффициенты a, A, c, C и функция g в (1) зависят лишь от x и u. Для того, чтобы получить вероятностное представление классического решения $u = (u_1, \ldots, u_{d_1})$ задачи (1) в этом случае, предположим, что такое решение существует и единственно. При этом априорном предположении в описанных выше условиях на коэффициенты существует единственное решение следующей системы стохастических уравнений

$$d\xi = a_u(\xi(\tau))d\tau + A_u(\xi(\tau))dw(\tau), \quad \xi(s) = x \in R^d, \tag{5}$$

$$d\eta(t) = c_u(\xi(\tau))\eta(\tau)d\tau + C_u(\xi(\tau))(\eta(\tau), dw(\tau)), \quad \eta(s) = h \in R^{d_1}, \tag{6}$$

Здесь и ниже приняты обозначения вида $a_u(\xi(\tau)) = a(\xi(\tau), u(\tau, \xi(\tau)))$. Теперь, используя формулу Ито для вычисления стохастического дифференциала случайного процесса $\gamma(t) = \langle \eta(t), u(t, \xi(t))\rangle$, можно проверить, что классическое решение u задачи (1) допускает представление вида

$$\langle h, u(s,x)\rangle = E_{s,x,h}\left[\langle \eta(T), u_0(\xi(T)\rangle + \int_s^T \langle \eta(\theta), g(\xi(\theta), u(\theta, \xi(\theta)))\rangle d\theta\right], \tag{7}$$

если справедливо соотношение $B_u(x) = C_u(x)A_u(x)$.

Поскольку система (5) - (7) замкнута, ее можно изучать независимо от задачи (1). При этом, если существует единственное решение системы (5)- (7) и функция $u(s,x)$, заданная соотношением (7), ограничена и дважды дифференцируема, то нетрудно проверить, используя формулу Ито, что (7) задает единственное классическое решение задачи (1).

Сформулируем условия, при которых существует единственное решение системы (5) - (7), (возможно локальное по времени).

Будем говорить, что выполнено условие **C 1**, если все коэффициенты в (1) липшицевы по x, u, имеют полилинейный рост по u и, кроме того, функции a, A сублинейны по x, а c, C ограничены по x.

Будем говорить, что выполнено условие **C 2**, если **C 1** выполнено как для функций a, A, c, C, g, так и для их производных до второго порядка.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* **C 1**. *Тогда существует интервал $[T_1, T]$, длина которого зависит от коэффициентов в (1) и функции u_0, и при всех $s \in [T_1, T]$ существует единственное решение системы (5)- (7) . Если выполнено условие* **C 2** *и начальная функция u_0 принадлежит классу C^2, то функция $u(s,x)$, заданная соотношением (7), также принадлежит классу C^2 по x, для всех $s \in [T_2, T] \subset [T_1, T]$.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* **C 2**. *Тогда существует интервал $[T_2, T] \subset [T_1, T]$, такой, что при всех $s \in [T_2, T]$ функция $u(s,x)$, заданная соотношением (7), определяет единственное классическое решение задачи (1).*

Доказательство этих утверждений можно найти в монографии [6] . Для того, чтобы распространить описанный выше подход на квазилинейный случай, нужно рассмотреть дифференциальное продолжение системы (1) порядка 2, что позволит рассмотреть продолженную систему параболических уравнений относительно функций $u, \nabla u, \nabla^2 u$ как семилинейную систему относительно функции $V = (u, \nabla u, \nabla^2 u)$ и применить к решению задачи Коши для этой системы описанный выше подход. Соответствующие результаты можно найти в работах [8], [9].

В заключение заметим, что для заданной функции $\Phi_0(\gamma) = \langle h, u_0(x)\rangle$ решение задачи (3) допускает вероятностное представление вида $\Phi(s,\gamma) = E\Phi_0(\gamma(T))$, где случайный процесс $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t)) \in R^d \times R^{d_1}$ удовлетворяет системе (5), (6). При этом систему (5), (6) можно интерпретировать как стохастическое уравнение относительно случайного процесса $\gamma(t)$, удовлетворяющего условию $\gamma(s) = \gamma = (x,h)$.

Используя систему (5) - (7) и приведенную выше интерпретацию этой системы, можно построить вероятностные представления как для обобщенного решения задачи (1) (см. [9], [10]), так и для ее вязкостного решения (см. работы [11]- [13]).

Вероятностное представление обощенного решения системы типа II

В этом параграфе мы рассмотрим частный случай системы (4), положив для простоты $d_1 = 2$. Наша цель – построить вероятностное представление обобщенного решения следующей задачи Коши для полностью недиагональной системы параболических уравнений

$$\frac{\partial u^q}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta[u^q(a_{q1}u^1 + a_{q2}u^2)] + c_u^q u^q, \quad u^q(0,x) = u_{0q}(x), \tag{8}$$

где $c_u^1 = (1 - u^1 - u^2), c_u^2 = \gamma(1 - u^1 - \kappa u^2)$, a_{qm}, $q, m = 1, 2, \gamma$ и κ - положительные константы. Здесь и ниже суммирование по q не предполагается.

Пусть $W^k(R^d)$- соболевское пространство скалярных функций, заданных на R^d и интегрируемых с квадратом вместе с производными до порядка k, а

$$\mathcal{W}_T^k = C([0,T]; W^k(R^d)) \cap L^\infty([0,T], L^\infty(R^d)).$$

Будем говорить, что пара (u^1, u^2) является обобщенным решением задачи (8), если $u^1, u^2 \in \mathcal{W}_T^1$, и при $q = 1, 2$ для любых $h^q \in \mathcal{W}_T^1$ справедливы интегральные соотношения

$$\langle\langle h^q(t), u^q(t)\rangle\rangle - \langle\langle h^q(0), u^q(0)\rangle\rangle \tag{9}$$
$$= \int_0^t \langle\langle [\frac{\partial h^q(s)}{\partial s} + \frac{1}{2}[M_u^q]^2 \Delta h^q(s)], u^q(s)\rangle\rangle ds + \int_0^t \langle\langle c_u^q h^q(s), u^q(s)\rangle\rangle ds,$$

где $[M_u^q]^2 = a_{q1}u^1 + a_{q2}u^2$.

Построим систему СДУ, ассоциированную с (8), предположив, что существуют положительные регулярные обобщенные решения $u^1, u^2 \in \mathcal{W}_T^1$ задачи (8). Введем обозначения $\mathcal{L}_0 u^q = \frac{1}{2}\Delta[u^q(a_{q1}u^1 + a_{q2}u^2)]$, $\mathcal{L}^q = \mathcal{L}_0 + c_u^q, \quad q = 1, 2$.

Рассмотрим задачу Коши для системы параболических уравнений

$$h_\theta^q + \frac{1}{2}[M_u^q]^2 \Delta h^q + c_u^q h^q = 0, \quad h^q(T,x) = h_0(y), \quad q = 1, 2, \tag{10}$$

двойственную (в смысле интегральных тождеств (9)) к системе (8). Решение задачи Коши (8), будем искать в классе функций $\mathcal{W}_T^1$.

Предположим, что существует регулярное обобщенное решение $(u^1, u^2) \in \mathcal{W}_T^1 \cap C^{1,2}([0,T] \times R^d)$ системы (8) и рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (СДУ)

$$d\xi^q(\theta) = M_u^q(\theta, \xi^q(\theta)))dw(\theta), \quad \xi^q(t) = y, \quad q = 1, 2. \tag{11}$$

Поскольку коэффициенты M_u^q в (11) при этом являются ограниченными липшицевыми функциями, то существование и единственность решения (11) вытекают из общей теории СДУ. Другими словами справедливы следующие утверждения [6].

Теорема 3. *Пусть* $u^q(t,x)) \geq \varpi$ *и* ∇u^q *– ограниченные липшицевы (по* x*) функции, тогда СДУ (11) имеет единственное сильное решение* $\xi^q(t)$ *для всех* $0 \leq t \leq T$ *и процессы* $\xi^q(t)$ *обладают марковским свойством.*

Связь процессов $\xi^q(t)$ с задачей Коши (10) может быть описана следующим образом.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и, кроме того, функции* $u^1(t,x), u^2(t,x)$ *принадлежат классу* $C^{1,2}([0,T] \times R^d)$*. Тогда пара функций* $h^1(t,x)$, $h^2(t,x)$ *вида*

$$h^q(t,y) = E[e^{\int_t^T c_u^q(\xi_{t,y}^q(\tau))d\tau} h(\xi_{t,y}^q(T))], \quad q = 1,2, \tag{12}$$

является единственным классическим решением системы (10) .

Для того, чтобы перейти от рассмотрения системы (10) к построению решения исходной системы (8), нам понадобится ряд результатов из теории стохастических потоков Куниты [15], [16] и теории двойственности марковских процессов.

Двойственность марковских процессов и стохастические потоки

Для того, чтобы установить связь между процессами $\xi^q(t) \in R^d, q = 1,2,$ соответствующими обращенными во времени процессами $\hat{\xi}^q(\theta) = \xi^q(t-\theta) \in R^d$ и задачей (8), нам понадобится ряд априорных результатов. Предположим , что существует единственное регулярное дважды дифференцируемое решение задачи (8) и рассмотрим систему стохастических уравнений

$$d\xi^q(\theta) = -M_u^q(\theta, \xi^q(\theta)))dw(\theta), \quad \xi^q(t) = y, \quad q = 1,2. \tag{13}$$

Для заданных процессов $\xi^q(t) \in R^d$ и $\hat{\xi}^q(\theta) = \xi^q(t-\theta) \in R^d$ обозначим $\phi_{\theta,t}^q : R^d \to R^d$, $\psi_{t,\theta}^q : R^d \to R^d$ порожденные ими стохастические потоки, т.е. пусть $\xi_{\theta,x}^q(t) = \phi_{\theta,t}^q(x), \quad \hat{\xi}_{t,y}^q(\theta) = \psi_{t,\theta}^q(y)$. Как и выше, предположим, что u^q – дифференцируемые по x ограниченные квадратично интегрируемые функции, удовлетворяющие в слабом смысле задаче (8). Тогда процессы $\xi^q(t)$, удовлетворяющие (13), дифференцируемы (в среднем квадратичном) по начальным данным.

Пусть $\mathbf{J}^q(t) = \nabla\xi^q(t)$ – матрица Якоби стохастического отображения $\phi_{\theta,t}^q : R^d \to R^d$. Тогда $\mathbf{J}^q(t)$ удовлетворяет СДУ

$$d\mathbf{J}^q(\theta) = -\nabla M_u^q(\theta, \xi^q(\theta))\mathbf{J}^q(\theta)\o \times dw(\theta), \quad \mathbf{J}^q(s) = I, \tag{14}$$

где I – единичная матрица и $[h \otimes y]_{jk} = h_j y_k$ для $h, y \in R^d$. Нетрудно проверить, что процессы $\hat{\xi}^q(t)$ при этом также дифференцируемы по начальным данным и $\hat{\mathbf{J}}^q(\theta) = \nabla\hat{\xi}^q(t)$удовлетворяет СДУ

$$d\hat{\mathbf{J}}^q(\theta) = \hat{\mathbf{J}}^q(\theta)\beta(\theta)d\theta + \hat{\mathbf{J}}^q(\theta)\nabla M_u^q(\theta, \xi^q(\theta)) \otimes dw(\theta), \quad \hat{\mathbf{J}}^q(s) = I, \tag{15}$$

где $\beta(\theta) = \nabla M_u^q(\theta, \xi^q(\theta)) \otimes \nabla M_u^q(\theta, \xi^q(\theta))$. Заметим, что $\hat{\mathbf{J}}_{\theta,t}^q(\omega) > 0$.

Можно показать [6], [15], что стохастические уравнения, которым удовлетворяют случайные процессы $\hat{\xi}^q(t)$, имеют вид

$$d\hat{\xi}^q(\theta) = b^q(u^1(\theta, \hat{\xi}^q(\theta)), u^2(\theta, \hat{\xi}^q(\theta)))d\theta + M(u^1(\theta, \hat{\xi}^q(\theta)), u^2(\theta, \hat{\xi}^q(\theta)))d\tilde{w}(\theta), \qquad (16)$$

где $b^q(u^1, u^2) = -M_u^q \nabla M_u^q$ и $\tilde{w}(\theta) = w(t-\theta) - w(t)$.

В силу теоремы 3 решения $\xi^q(\theta)$ уравнений (13) обладают марковским свойством, $0 \le t \le \theta \le T$, $q = 1, 2$. Обозначим

$$P_q(t, y, \theta, dx) = P\{\xi^q(\theta) \in dx | \xi^q(t) = y\}$$

переходные вероятности марковских процессов $\xi^q(\theta)$, и пусть $p_q(t, y, \theta, x)$ – соответствующие плотности относительно меры Лебега (если они существуют).

Марковские процессы $\xi^q(t)$, порождают эволюционные семейства вида

$$U_q(t, \theta)h(y) = E[h(\xi^q_{t,y}(\theta))] = \int_{R^d} h(y)p_q(t, y, \theta, x)dx, \qquad (17)$$

действующие в пространстве $L^2(R^d)$ квадратично интегрируемых функций.

Рассмотрим двойственные семейства $U_q^+(\theta, t)$, действующие в в пространстве $L^2(R^d)$ и определяемые соотношениями

$$\langle U_q(s, t)h, g\rangle = \langle h, U_q^+(t, s)g\rangle.$$

Из соотношений $\int_{R^d} Eh(\xi^q_{t,y}(\theta))g(y)dy = \int_{R^d}\left[\int_{R^d} h(x)p_q(t, y, \theta, x)dx\right] g(y)dy$ $= \int_{R^d} h(x)\left[\int_{R^d} g(y)p_q(t, y, \theta, x)dy\right] dx$ следует, что $\int_{R^d} U_q(t, \theta)h(x)g(x)dx = \langle U_q(t, \theta)h, g\rangle$ $= \langle h, U_q^+(\theta, t)g\rangle = \int_{R^d} h(x)U_q^+(\theta, t)g(x)dx$, т.е. если $\hat{p}_q(\theta, x, t, y)$ - плотность переходной вероятности некоторого марковского процесса, то $U_q^+(\theta, t)g(x) = \int_{R^d} g(y)\hat{p}_q(\theta, x, t, y)dy$.

Для того, чтобы вывести уравнения для случайного процесса, участвующего в вероятностном представлении семейства $U_q^+(t, s)$ (аналогичном представлению (17)), определим композицию функции g из некоторого соболевского класса W^k, $k \in Z$ и k-дифференцируемого стохастического потока $\psi_{s,x}(t)$. С этой целью для функции h из пространства Шварца $\mathcal{D}$ и обобщенной функции g из двойственного пространства $\mathcal{D}'$ зададим композицию g с потоком $\psi_{t,s}$ с помощью соотношения $\langle g \circ \psi_{t,s}.h\rangle = \langle g, h \circ \phi_{s,t} J_{s,t}\rangle$, где $J_{s,t} = \det \mathbf{J}_{s,t}$ – якобиан отображения $\phi_{s,t}$. Правая часть последнего равенства, как нетрудно проверить, задает непрерывный линейный функционал на $\mathcal{D}$, если $\phi_{s,t}(x)$ – бесконечно дифференцируемое отображение. Если же $\phi_{s,t}$ – k-раз дифференцируемое отображение, то это равенство определяет непрерывный линейный функционал на W^k. При этом, если обобщенная функция $g \in W^k$ имеет вид $g = g(x)dx$, то $g \circ \psi_{t,s}$ – это композиция плотности g и отображения $\psi_{t,s}$

$$\langle g \circ \psi_{t,s}, h\rangle = \int_{R^d} g \circ \psi_{t,s}(x)h(x)dx = \int_{R^d} g(y)h(\phi_{s,t}(y))J_{s,t}(\phi_{s,t}(y))dy, \quad \forall h \in \mathcal{D}, \quad (18)$$

что вытекает из формулы замены переменных под знаком интеграла.

Из соотношения $\langle U_q^+(t, s)g, h\rangle = \int_{R^d} Eg(\hat{\xi}^q_{s,x}(t))h(x)dx$, формулы замены переменных $x = \hat{\xi}^q_{t,y}(s)$ и стохастической теоремой Фубини, вытекают равенства

$$\langle U_q^+(t, s)g, h\rangle = \int_{R^d} Eg(\hat{\xi}^q_{t,x}(s))h(x)dx = E\left[\int_{R^d} g(y)h(\xi^q_{s,y}(t))J(\xi^q_{s,y}(t))dy\right] \qquad (19)$$

Сопоставляя последние соотношения, можно заметить, что справедливо представление

$$U_q^+(t,s)g(y) = E[g(\hat{\xi}^q_{s,y}(t))]. \tag{20}$$

Отметим, что эволюционные свойства семейств $U_q(t,\theta)$, т.е. соотношения $U_q(t,\theta) = U_q(t,\tau)U_q(\tau,\theta)$, $t \le \tau \le \theta$, влекут за собой эволюционные свойства семейств $U_q^+(\theta,t)$, т.е. соотношения $U_q^+(\theta,t) = U_q^+(\theta,\tau)U_q^+(\tau,t)$.

Рассмотрим генераторы эволюционных семейств $U_q(s,t)$ и $U_q^+(t,s)$. Пусть $h \in \mathcal{D}(R^d)$ и функции u^1, u^2 принадлежат классу $\mathcal{W}^1_T \cap C^{1,2}([0,T]\times R^d)$. Тогда с помощью классической формулы Ито, нетрудно проверить, что функция $h^q(t,y) = Eh(\xi^q_{t,y}(t))$ является единственным классическим решением задачи Коши

$$h^q_t + \frac{1}{2}[M^q_u]^2(y)\Delta h = 0, \quad h^q(T,y) = h(y). \tag{21}$$

Поскольку коэффициенты M^q_u диффузионных процессов $\xi^q(\theta)$, удовлетворяющих (13), явно не зависят от времени, то эволюционные семейства $U^q(\tau,T) = U^q(T-\tau)$ представляют собой полугруппы $U^q(t), t = T-\tau$

Сужения генераторов марковских процессов $\xi^q(t)$ или, эквивалентно, генераторов полугрупп $U_q(t)$ на пространство функций $C^2(R^d)$ имеют вид $\mathcal{M}^q h = \frac{1}{2}[M^q_u]^2(y)\Delta h$. Пусть $\mathcal{A}^q h(y) = \frac{1}{2}[M^q_u]^2(y)\Delta h(y) + \frac{1}{2}M^q_u(y)\nabla M^q_u(y)\nabla h(y)$ и $n^q_u(y) = -\frac{1}{2}M^q_u(y)\nabla M^q_u(y)$, тогда $\mathcal{M}^q h = \mathcal{A}^q h + n^q_u \nabla h(y)$.

Как нетрудно проверить, генераторы двойственных полугрупп $U_q^+(t)$ и $U_q(t)$ представляют собой двойственные операторы, т.е. если функции h и g принадлежат классу $C^{1,2}([0,t]\times R^d)$, то справедливы соотношения $\langle g, \mathcal{M}^q h\rangle = \langle \mathcal{L}^q g, h\rangle$. С другой стороны, если $h \in \mathcal{D}$ – произвольная тестовая функция, то это соотношение можно использовать для определения действия генератора $\mathcal{L}^q$ двойственного эволюционного семейства.

Ряд вычислений, которые нам придется проводить ниже, будет существенно упрощен, если рассмотреть СДУ (13) в форме Стратоновича. Напомним, что стохастические дифференциалы в форме Ито $M^q_u(\xi^q(t))dw(t)$ и в форме Стратоновича $M^q_u(\xi^q(t)) \circ dw(t)$ связаны соотношением

$$M^q_u(\xi^q(t)) \circ dw(t) = n^q_u(\xi^q(t))dt + M^q_u(\xi^q(t))dw(t).$$

Перепишем уравнение (13) в виде

$$d\xi^q(\theta) = n^q_u(\xi^q(\theta))d\theta - M^q_u(\xi^q(\theta)) \circ dw(\theta), \quad \xi^q(s) = y. \tag{22}$$

Из теоремы 4.2.2 [18] вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $\phi^q_{s,t}(y) = \xi^q(t)$ удовлетворяет СДУ (22), коэффициент диффузии которого принадлежат классу C^k при ($k \ge 1$). Тогда обратный поток $[\phi^q_{s,t}]^{-1} = \psi^q_{t,s}$ удовлетворяет СДУ*

$$d\psi^q_{t,x}(\theta) = \hat{J}^q_{t,\theta}(\psi_{t,x}(\theta))n^q_u(x))d\theta + \hat{J}^q_{t,\theta}(\psi_{t,x}(\theta))M^q_u(x) \circ dw(\theta). \tag{23}$$

При этом отображение $\psi^q_{t,\theta} : x \to \psi^q_{t,\theta}(x)$ является C^k-диффеоморфизмом.

Сужение производящего оператора $\mathcal{M}^q$ эволюционного семейства $U^q(t)$ на соболевское пространство W^2 можно вычислить с использованием классической формулы Ито. Производящий оператор $[\mathcal{M}^q]^+$ исходной полугруппы $[U^q]^+(t)$ – это двойственный оператор по отношению к $\mathcal{M}$ в смысле спаривания соболевских пространств W^k и W^{-k} или скалярного произведения в $L^2(R)$. При этом для вычисления генератора полугруппы $[U^q]^+(t)$, используя ее вероятностное представление, удобно воспользоваться обобщеной формулой Ито (см. [15]).

Лемма 1. *Пусть $g(t)$ – непрерывная функция со значениями в W^k, $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$, стохастический поток $\phi^q_{s,t}$ удовлетворяет (22) и $\psi^q_{t,s} \circ \phi_{s,t}(y) = y$. Тогда справедливы соотношения*

$$g(t) \circ \psi^q_{t,s} = g(t) + \int_s^t \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \circ \psi^q_{\theta,s} d\theta - \int_s^t \nabla g(\theta) \circ \psi^q_{\theta,s} \cdot d\psi^q_{\theta,s} \tag{24}$$

$$+ \int_s^t \mathcal{A}^q_u [g(t) \circ \psi^q_{\theta,s}] d\theta.$$

При этом для обобщенной функции g действие операторов $\mathcal{A}^q_u$ понимается в смысле теории обобщенных функций.

Рассмотрим систему стохастических соотношений

$$d\hat{\xi}^q_{0,x}(\theta) = \hat{J}^q_{\theta,0}(\hat{\xi}^q_{0,x}(\theta)) n^q_u(x)) d\theta + \hat{J}^q_{\theta,0}(\hat{\xi}^q_{0,x}(\theta)) M^q_u(x) \circ dw(\theta), \tag{25}$$

$$d\hat{J}^q(\theta) = \hat{J}^q(\theta) \nabla M^q_u(\hat{\xi}^q_{0,x}(\theta)) \circ dw(\theta) + \frac{1}{2} \hat{J}^q(\theta) [\nabla n^q_u(\hat{\xi}^q_{0,x}(\theta))]^2 d\theta, \quad \hat{J}^q(0) = I. \tag{26}$$

Введем в рассмотрение операторы $\mathcal{L}^q_u, q = 1,2$, сопряженные к операторам

$$\mathcal{M}^q_u = \frac{1}{2}(a_{q1}u^1 + a_{q2}u^2)\Delta,$$

Используя формулу интегрирования по частям, нетрудно проверить, что операторы $\mathcal{L}^q_u$ действуют по правилу

$$\int_{R^d} \mathcal{M}^q_u h(x) g^q(x) dx = \frac{1}{2} \int_{R^d} [a_{q1}u^1 + a_{q2}u^2] \Delta h(x) g^q(x) dx \tag{27}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{R^d} h(x) \Delta [g^q(x)(a_{q1}u^1 + a_{q2}u^2)] dx = \int_{R^d} h(x) \mathcal{L}^q_u g^q(x) dx.$$

Отсюда вытекает, что при $u^q \equiv g^q$ операторы $\mathcal{L}^q$ имеют нужный вид.

Как уже отмечалось выше, при сделанных априорных предположениях мы находимся в рамках теории Куниты и можем сформулировать следующее предложение (вытекающее из теоремы 2.1 работы [13]).

Теорема 6. *Пусть $u^q_0 \in W^k$ и $\kappa^q(t) = \exp\left(\int_0^t c_{u^1,u^2} \circ \phi_{0,\theta} d\theta\right) u^q_0$. Тогда функции $g^q(t) = E[\kappa^q(t) \circ \psi^q_{t,0}], q = 1,2$ представляют собой единственное обобщенное решение задачи Коши*

$$\frac{\partial g^q}{\partial t} = \mathcal{L}^q_u g^q + c^q_u g^q, \quad g^q(0) = u_{0q}. \tag{28}$$

При этом если $u_{0q} \in \mathcal{W}^k$ то и решение g^q принадлежит тому же пространству и существует положительная константа C_q k T, зависящая от $\mathcal{L}_q$, для которой справедлива оценка

$$\|g^q(t)\|^2_k \le C_q \|u_0\|^2_k.$$

Доказательство. Если $u_{0q} \in H^k$ то $\kappa^q(t)$ – непрерывный семимартингал. Поскольку $\kappa^q(t)$ удовлетворяет ОДУ

$$\frac{d\kappa^q(t)}{dt} = c^q_{u^1,u^2}\kappa^q(t), \kappa^q(0) = 1,$$

то из обобщенной формулы Ито следует, что

$$\kappa^q(t)\circ\psi^q_{t,0} = u^q_0 + \int_0^t c^q_u(g^q(\theta)\circ\psi^q_{\theta,0})d\theta + \int_0^t \nabla\kappa^q(t)\circ\psi^q_{t,\theta}d\psi^q(\theta) + \int_0^t \mathcal{A}^q_u(\kappa^q(\theta)\circ\psi^q_{\theta,0})d\theta. \quad (29)$$

или

$$\kappa^q(t)\circ\psi^q_{t,0} = u^q_0 + \int_0^t \nabla(\kappa^q(t)\circ\psi^q_{t,\theta})M^q_u(x)dw(\theta) + \int_0^t \mathcal{L}^q_u(\kappa^q(\theta)\circ\psi^q_{\theta,0})d\theta. \quad (30)$$

где

$$\mathcal{L}^q = \frac{1}{2}\mathcal{A}^q_u(x)\Delta + n^q_u(x)\cdot\nabla + c^q_u(x).$$

Вычислим математическое ожидание обеих частей соотношения (30). Поскольку

$$E\langle\int_0^t \nabla(\kappa^q(t)\circ\psi^q_{t,\theta})M^q_u(x)dw(\theta), h\rangle = 0,$$

и

$$E\left[\langle\int_0^t \mathcal{L}^q_u(\kappa^q(\theta)\circ\psi^q_{\theta,0})d\theta, h\rangle\right] = E\left[\langle\int_0^t \kappa^q(\theta)\circ\psi^q_{\theta,0}, \mathcal{M}^q_u h\rangle d\theta\right]$$

$$= \int_0^t \langle E[\kappa^q(\theta)\circ\psi^q_{\theta,0}], \mathcal{M}^q_u h\rangle d\theta = \int_0^t \langle\mathcal{L}^q_u E[\kappa^q(\theta)\circ\psi^q_{\theta,0}], h\rangle d\theta, \quad (31)$$

то получим равенство

$$E[\kappa^q(t)\circ\psi^q_{t,0}] = u^q_0 + \int_0^t \mathcal{L}^q_u E[\kappa^q(\theta)\circ\psi^q_{\theta,0}]d\theta. \quad (32)$$

Вычисляя производную по переменной t от обеих частей соотношения (32), получим, что функции $g^q(t) = E[\kappa^q(t)\circ\psi^q_{t,0}]$ удовлетворяют задаче Коши (28), поскольку $\lim_{t\to 0}\langle g^q(t), h\rangle = \langle u^q_0, h\rangle$. и, следовательно, $\lim_{t\to 0} g^q(t) = u_{0q}$. Предположим, что существует два обобщенных решения (g^1, g^2) $(\tilde{g}^1, \tilde{g}^2)$ задачи (28). Тогда их разность $G^q(t) = g^q(t) - \tilde{g}^q(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial G^q}{\partial t} = \mathcal{L}^q(t)G^q(t), \quad G^q(0) = 0.$$

Покажем, что при этом $G^q(t) = 0$. Пусть $T > 0$ и $h \in C^2_0 \cap H^2$. Тогда, как было показано выше, существует решение $h^q(s)$ параболического уравнения $h^q_s + \mathcal{M}^q_u h^q = 0$, удовлетворяющее условию $h^q(T) = h(x)$ и при этом $h^q(s,x)$ принадлежит C^2. Отсюда вытекает, что для любой функции $h \in C^2_0 \cap H^2$ справедливы соотношения

$$\langle G^q(t), h\rangle = \int_0^t \langle\frac{d}{d\theta}G^q(\theta), h(\theta)\rangle d\theta + \int_0^t \langle G^q(\theta), \frac{\partial h(\theta)}{\partial\theta}\rangle d\theta$$

$$= \int_0^t \langle\mathcal{L}G^q(\theta), h(\theta)\rangle d\theta - \int_0^t \langle G^q(\theta), \mathcal{M}h(\theta)\rangle d\theta = 0,$$

следовательно $G^q(t) = 0$.

Из полученных утверждений нетрудно вывести следующий результат.

Теорема 7. *Предположим, что существует регулярное класса C^2 обобщенное решение u^1, u^2 задачи Коши (8). Тогда оно допускает вероятностное представление вида*

$$u^q(t,x) = E\left[\left(exp\left(\int_0^t c^q_{u^1,u^2} d\theta\right) u^q_0\right) \circ \psi^q_{t,0}\right], \tag{33}$$

где случайные процессы $\hat{\xi}^q(t) = \psi^q_{t,0}(x)$ удовлетворяют стохастическим уравнениям (23).

Доказательство вытекает из теоремы 7 и единственности решения системы (8), поскольку $\mathcal{L}^q u^q = \nabla \cdot [u^q \nabla(a_{q1}u^1 + a_{q2}u^2)]$, что нетрудно проверить, положив $g^q(t,x) = u^q(t,x)$ в соотношении (28), и при этом система (28) совпадает с системой (8).

Литература

1. Kawashima S., Shizuta Y. On the normal form of the symmetric hyperbolic-parabolic systems associated with the conservation laws. Tohoku Math. J. 1988. V.40. N 3. P. 449–464, .

2. Serre D. Viscous system of conservation laws: Singular limits. Nonlinear Conservation Laws and Appl. A. Bressan, G.-Q. Chen, M. Lewicka, D. Wang eds. IMA volume in Maths & Appl. 153. Springer-Verlag, 2010. P. 433—446.

3. Bendahmanea M., Lepoutreb T., Marroccob A., Perthame B. Conservative cross diffusions and pattern formation through relaxation. J. Math. Pures et Appliq. 2009. V. 92, N. 6. P. 651–667.

4. Jüngel A. Diffusive and nondiffusive population models. Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. 2010. P. 397–425.

5. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.:Наука. 1967.

6. Belopolskaya Ya.I., Dalecky Yu.L. Stochastic equations and differential geometry. Kluwer. 1990.

7. Belopolskaya Ya., Probabilistic approaches to nonlinear parabolic equations in jet-bundles. Global and Stochastic Analysis, 2011. V.1. N1, 3–40

8. Белопольская Я. И. Вероятностный подход к решению нелинейных уравнений, возникающих в финансовой математике. Зап. научн. сем. ПОМИ. 2009. Т. 368. С. 20–52.

9. Белопольская Я. И., Войчинский В. А. Вероятностный подход к построению вязкостных решений задачи Коши для систем полностью нелинейных параболических уравнений "Зап. науч. сем. ПОМИ" 2011. Т. 396. С. 31–66.

10. Belopolskaya Ya., Woyczynski W. Generalized solutions of the Cauchy problem for systems of nonlinear parabolic equations and diffusion processes. Stochastics and Dynamics. 2012. V. 12. N 1. P. 1–31.

11. Rozkozh A. Stochastic Representation of Weak Solutions of Viscous Conservation Laws: A BSDE Approach. J. Theor. Prob. 2013. V. 26, N 4. P. 1061–1083.

12. Белопольская Я. И. Прямые - обратные стохастические уравнения, связанные с системами квазилинейных параболических уравнений и теоремы сравнения. Зап. научн сем. ПОМИ. 2013. Т.412 . С. 15-46.

13. Belopolskaya Ya., Probabilistic counterparts of nonlinear parabolic PDE systems. Modern Stochastics and Applications - Springer Optimization and Its Applications. 2014. V. 90. P.71–94.

14. Amman H. Dynamic theory of quasilinear parabolic systems. III. Global existence. Math. Z. 1989. V.202 N. 2. P. 219–250.

15. Kunita H. Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

16. Kunita H. Generalized solutions of stochastic partial differential equations. J. Theor. Pobab. 1994. V.7. N. 2. P. 279–308.

17. Belopolskaya Ya. Probabilistic counterparts for strongly coupled parabolic systems Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Topics in Statistical Simulation. 2014. V. 114. P. 33–42.

18. Belopolskaya Ya., Markov processes associated with fully nondiagonal systems of parabolic equations. Markov processes and related fields 2014. V.20. N 3. P. 452 – 478.

УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ: ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Ю.Е. Гликлих

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

e-mail: yeg@math.vsu.ru

Аннотация: Статья представляет собой введение в теорию уравнений и включений с производными в среднем и обзор последних результатов о существовании оптимальных решений включений с производными в среднем.

Ключевые слова: Производные в среднем случайных процессов, уравнения и включения с производными в среднем, оптимальное управление

EQUATIONS AND INCLUSIONS WITH MEAN DERIVATIVES: OPTIMAL SOLUTIONS

Аннотация: This is a short introduction into the Theory of equations and inclusions with mean derivatives and a survey of some recent results on the existence of optimal solutions for inclusions with mean derivatives.

Ключевые слова: Mean derivatives of stochastic processes, equations and inclusions with mean derivatives, optimal control

Введение

Понятие производной в среднем было введено Э. Нельсоном (см. [1 – 3]) для нужд предложенной им стохастической механики (вариант квантовой механики). Затем выяснилось, что уравнения и включения с этими производными возникают и во многих других разделах математической физики и иных наук.

Эта статья представляет собой краткое введение в теорию уравнений и включений с производными в среднем, а также обзор результатов из [4,5], относящихся к существованию оптимальных решений включений с производными в среднем. Все предварительные сведения можно найти в [6].

Мы используем следующие обозначения. Пространство $n \times n$ матриц обозначается $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, пространство линейных операторов из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$ – через $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Через $\mathrm{S}(n)$ мы обозначаем линейное пространство симметрических $n \times n$ матриц – подпространство в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Символ $\mathrm{S}_+(n)$ обозначает множество положительно определенных симметрических $n \times n$ матриц, которое является открытым выпуклым множеством в $\mathrm{S}(n)$. Его замыкание, т.е., множество неотрицательно определенных симметрических $n \times n$ матриц, обозначается $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$. Для оценок, связанных с множествами, мы называем нормой множества B в $\mathbb{R}^n$ или в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ выражение $\|B\| = \sup\limits_{y \in B} \|y\|$. Математическое ожидание мы обозначаем символом E.

Производные в среднем

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ в $\mathbb{R}^n$ (где мы фиксируем σ-алгебру борелевских множеств), $t \in [0, T]$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ принадлежит пространству $L_1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ при всех t. Такой процесс определяет три семейства σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$:

(i) "прошлое" $\mathcal{P}^\xi_t$, порожденное прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ для $0 \leq s \leq t$;

(ii) "будущее" $\mathcal{F}^\xi_t$, порожденное прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ для $t \leq s \leq T$;

(iii) "настоящее" $\mathcal{N}^\xi_t$ порожденное прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при отображении $\xi(t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Все перечисленные семейства предполагаются полными, т.е. содержащими все множества вероятности ноль.

Для удобства мы обозначаем через E^ξ_t условное математическое содержание $E(\cdot|\mathcal{N}^\xi_t)$ относительно "настоящего"$\mathcal{N}^\xi_t$ для $\xi(t)$.

Следуя Э. Нельсону, введем следующие понятия производных в среднем:

Определение 1. *(i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1 случайный элемент вида*

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E^\xi_t\Big(\frac{\xi(t + \triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\Big), \tag{1}$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а символ $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к нулю 0 и $\triangle t > 0$.

(ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайный элемент

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E^\xi_t\Big(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t}\Big) \tag{2}$$

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а символ $\Delta t \to +0$ означает, что $\Delta t \to 0$ и $\Delta t > 0$.

Замечание 1. *Если $\xi(t)$ – марковский процесс, то очевидным образом E^ξ_t можно заменить на $E(\cdot|\mathcal{P}^\xi_t)$ в (1) и $E(\cdot|\mathcal{F}^\xi_t)$ в (2). В первых работах Нельсона предлагались два варианта определения производных в среднем: как в Определении 1 и с условными математическими ожиданиями относительно "прошлого" и "будущего как выше, которые совпадают для марковских процессов. Мы не предполагаем, что $\xi(t)$ – марковский процесс и даем определения с условными математическими* *ожиданиями относительно "настоящего принимая во внимание физический принцип локальности: производная должна определяться состоянием системы в "настоящий" момент времени, а не в прошлом и в будущем. Тем не менее, производные относительно прошлого и будущего также возникают во многих задачах для немарковских процессов. Мы называем из $\mathcal{P}$-производной в среднем и $\mathcal{F}$-производной в среднем и обозначаем символами $D^{\mathcal{P}}$ и $D_*^{\mathcal{F}}$, соответственно.*

Следующая производная в среднем строится как небольшая модификация одной идеи Нельсона. Введем дифференциальный оператор D_2, который действует на L_1 случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [0,T]$ по правилу

$$D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{(\xi(t+\triangle t) - \xi(t)) \otimes (\xi(t+\triangle t) - \xi(t))}{\triangle t}\right). \tag{3}$$

Этот оператор можно также эквивалентно описать формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))^*}{\triangle t}\right), \tag{4}$$

где $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))$ рассматривается как вектор-столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), а $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*$ – это вектор строка (транспонированный или сопряженный вектор), а предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Подчеркнем, что матричное произведение столбца слева и строки справа – это квадратная матрица ранга 1. При переходе к пределу $D_2\xi(t)$ превращается в симметрическую неотрицательно определенную матричную функцию на $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.

Уравнения и включения. Оптимальные решения

Пусть заданы измеримые по Борелю отображения $a(t,x)$ и $\alpha(t,x)$ из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и в $\bar{S}_+(n)$, соответственно.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{5}$$

Мы называем (5) уравнением первого порядка с производными в среднем справа.

Часто при описании реальных процессов в технике или естественных науках однозначную правую часть уравнения заменяют на многозначную и получают так называемое дифференциальное включение. Например, если правая часть не непрерывна (и даже не измерима, например, это может быть сила сопротивления сложной среды, наличие сухого трения и т.д.), имеется подход, предложенный А.Ф. Филипповым, переводящий уравнение во включение. Другая ситуация, в которой часто возникают дифференциальные включения, это управляемые системы с обратной связью. В этом случае многозначную правую часть получают, подставляя в правую часть уравнения все возможные значения управляющего параметра.

К настоящему времени теория стохастических дифференциальных включений также хорошо развита. Такие включения возникают при тех же условиях, что и обыкновенные дифференциальные включения. В этой теории на настоящий момент используется интегральная форма записи включений.

Мы развиваем альтернативную теорию, в которой стохастические дифференциальные включения задаются в терминах производных в среднем. Этот подход идеологически наиболее близок к обыкновенным дифференциальным включениям.

Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ – многозначные отображения из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и в $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$, соответственно. Система вида

$$\begin{cases} D\xi(t)\in\mathbf{a}(t,\xi(t)),\\ D_2\xi(t)\in\boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)) \end{cases} \tag{6}$$

называется дифференциальным включением первого порядка с производными в среднем.

Определение 2. *Говорят, что (6) имеет решение на $[0,T]$ с начальным условием $\xi(0)=x_0$, если существует вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и процесс $\xi(t)$, заданный на $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и принимающий значения в $\mathbb{R}^n$, такой, что P-п.н. и при почти всех $t\in[0,T]$ выполняется (6).*

Мы ищем решения (6) с непрерывными выборочными траекториями и в основном эти решения описываются как координатные процессы на пространстве непрерывных кривых с σ-алгеброй цилиндрических множеств и специально подобранной мерой.

Определение 3. *Совершенное решение уравнения* (6) *– это случайный процесс с непрерывными выборочными траекториями такой, что он является решением в смысле приведенного выше определения и соответствующая ему мера на пространстве непрерывных кривых является слабым пределом последовательности мер, соответствующих решениям последовательности уравнений Ито диффузионного типа с непрерывными коэффициентами.*

Теорема 1. *Зафиксируем произвольное начальное значение $\xi_0\in\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{a}(t,x)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми образами из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и пусть оно удовлетворяет оценке*

$$\|\mathbf{a}(t,x)\|^2 < K(1+\|x\|^2) \tag{7}$$

для некоторого $K>0$.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми образами из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$ такое, что для всех $\alpha(t,x)\in\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ выполнена оценка

$$|tr\,\alpha(t,x)| < K(1+\|x\|^2) \tag{8}$$

при некотором $K>0$, где $tr\,\alpha(t,x)$ – это след матрицы $\alpha(t,x)$.

Тогда множество совершенных решений включения (6) с указанным начальным условием не пусто.

Пусть f – непрерывная ограниченная вещественнозначная функция на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Для решений (6) рассмотрим функционал качества вида

$$J(\xi(\cdot)) = E\int_0^T f(t,\xi(t))dt \tag{9}$$

Мы ищем оптимальные совершенные решения, т.е. такие, на которых значение этого функционала качества минимально.

Теорема 2. *Среди совершенных решений включения* (6)*, построенных в Теореме 1, существует решение $\xi(t)$, на котором значение J минимально.*

В приложениях часто необходимо построить процесс, у которого все его координаты положительны. Это можно сделать, используя специальные включения с производными в среднем, которые мы называем включениями типа геометрического броуновского движения. Они имеют вид

$$\begin{cases} D\xi(t) + \frac{1}{2} diag D_2\xi(t) \in \mathbf{a}(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(t)), \end{cases} \tag{10}$$

где $diag D_2\xi(t)$ – вектор, построенный из диагональных элементов матрицы $D_2\xi(t)$. Для включения типа (10) можно доказать существование оптимального совершенного решения, однако при несколько других условиях.

Теорема 3. *Зададим произвольное начальное условие $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{a}(t, x)$ имеет замкнутые выпуклые образы, полунепрерывно сверху и*

$$\|\mathbf{a}(t, x)\|^2 < K(1 + \|x\|^2) \tag{11}$$

для некоторого $K > 0$.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}(t, x)$ принимает значения в пространстве $\bar{\mathrm{S}}_+(n)$, имеет замкнутые выпуклые образы, полунепрерывно сверху и для любого $\alpha(t, x) \in \boldsymbol{\alpha}(t, x)$ выполняется следующее неравенство

$$|tr\, \alpha(t, x)| < K(1 + \|x\|) \tag{12}$$

для некоторого $K > 0$, где $tr\, \alpha(t, x)$ – это след матрицы $\alpha(t, x)$.

Тогда множество совершенных решений включения (10) с указанным начальным условием не пусто.

Теорема 4. *Среди совершенных решений включения* (10), *построенных в Теореме 3, существует решение $\xi(t)$, на котором значение J (см. (9)) минимально.*

Литература

1. Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics.// Phys. Reviews, 1966.- Vol. 150, No. 4.- P. 1079-1085

2. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion.- Princeton: Princeton University Press, 1967.- 142 p.

3. Nelson E. Quantum fluctuations.- Princeton: Princeton University Press, 1985.- 147 p.

4. Gliklikh Yu.E., Zheltikova O.O. On existence of optimal solutions for stochastic differential inclusions with mean derivatives // Applicable Analysis.- 2014.- Vol.93.- No. 1.- P. 35 - 46.

5. Gliklikh Yu.E., Zheltikova O.O. Stochastic Equations and Inclusions with Mean Derivatives and Some Applications. Optimal Solutions for Inclusions of Geometric Brownian Motion Type // Methodology and Computing in Applied Probability.- 2015.- Vol. 17.- No. 1.- P. 91 – 105

6. Gliklikh Yu.E. Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics.- London: Springer-Verlag,2011.- 460 p.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ СТРУКТУРА СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В.И. Заляпин

Южно-Уральский государственный (национальный исследовательвский) университет, Челябинск, Россия

e-mail: `vzal@susu.ac.ru`

Аннотация: В статье рассматривается рандомизованное случайное блуждание в $\mathbb{R}^{n+k}$, приводящее к рассмотрению классических специальных функций математической физики. С использованием вероятностных соображений для последних получены различные соотношения, изучена групповая структура и классические асимптотики.

Ключевые слова: случайное блуждание, специальные функции.

THE PROBABILITY STRUCTURE OF THE SPECIAL FUNCTIONS

Abstract: In the article discusses the randomized random walk in $\mathbb{R}^{n+k}$, which leads to review of classical special functions of mathematical physics. In the paper presents different ratios for this functions, studied a group structure and classical asymptotics.

Keywords: random walks, special functions

Еще в конце XIX – начале XX века было замечено, что многие аналитические проблемы могут быть сформулированы на теоретико-вероятностном языке, что позволяет вероятностными методами легко получать достаточно тонкие аналитические результаты.

Классическими примерами такого подхода могут служить:

– доказательство С.Н.Бернштейна аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, получающееся применением закона больших чисел;

– известное предельное соотношение для многочленов Лежандра

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\cos\frac{\varphi}{n}) = J_0(\varphi),$$

следующее из закона арксинуса;

– тождество Неймана для функций Бесселя

$$I_n(x+y) = \sum_k I_k(x)\cdot I_{n-k}(y),$$

являющееся перефразировкой уравнения Колмогорова-Чепмена и др.

Обнаруженная в начале 60-х годов прошлого столетия Л.А.Люстерником ([1]) связь между теорией бесселевых функций и случайными блужданиями положила начало систематическому изучению ([2]) вероятностных методов в теории специальных функций.

В первую очередь это задачи классической теории специальных функций математической физики и их обобщений, которые и являются темой настоящей работы.

1. Функции пуассоновского блуждания

Пусть $\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ целочисленная сеть. Зададим на сети $\mathbb{Z}^{n+k}$ случайное блуждание, регулируемое однородной переходной функцией

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+k} \quad \mathsf{P}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \mathsf{P}\{\mathbf{0}, \mathbf{y}-\mathbf{x}\} = \begin{cases} p_j, & \mathbf{y}-\mathbf{x} = \mathbf{e_j} \\ 0, & \mathbf{y}-\mathbf{x} \neq \mathbf{e_j} \end{cases}, \quad \sum_1^{n+k} p_j = 1.$$

Если $A = (a_{ij})_{k\times(n+k)}$ – целочисленная матрица, то положим $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}(modA)$ если $\exists \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{\mathbf{k}}: \ \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{m}A$.

Пусть скачки случайного блуждания регулируются пуассоновским процессом с параметром λ:

$$\mathsf{P}\{\mathsf{n_t} = \mathsf{s}\} = exp(-\lambda \cdot t) \cdot \frac{(\lambda \cdot t)^s}{s!}.$$

$\Omega_n^k(A) = \mathbb{R}^{n+k}/A$ – фактор группа аддитивной группы $\mathbb{R}^{n+k}$:

$$\Omega_n^k(A) = \{H_{\mathbf{x}}^A = \{y \in \mathbb{R}^{n+k}: \ \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{m}A\}\}.$$

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ со значениями в Ω_n^k, порожденный рандомизованным случайным блужданием в $\mathbb{R}^{n+k}$.

Если $\mathsf{P}\{\xi(\mathsf{t}) \in \mathsf{H}_{\mathsf{x}}^{\mathsf{A}}\}$ – вероятность за время t попасть из начала координат (класса H_0^A) в класс $H_{\mathbf{x}}^A$, то

$$\mathsf{P}\{\xi(\mathsf{t}) \in \mathsf{H}_{\mathsf{x}}^{\mathsf{A}}\} = exp(-\lambda t)\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(t\mathbf{p}\lambda).$$

Функциями пуассоновского блуждания (ФПБ) назовем функции

$$\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^k} \frac{\mathbf{z}^{\mathbf{x}+\mathbf{m}A}}{\Gamma(\mathbf{x}+\mathbf{m}A+I)}.$$

Здесь

$$\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+k}, \ \mathbf{z}^{\mathbf{x}} = \prod {z_j}^{x_j}, \ \Gamma(\mathbf{x}+I) = \prod (x_j+1)!$$

Примеры

1. $n = 1, \ k = 1, \ A = (1,1), \ \mathcal{G}_{x_1,x_2}(\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z)$ – модифицированные функции Бесселя $I_{x_1-x_2}(z)$
2. $n > 1, \ k = 1, \ A = (1,1,\ldots,1), \ \mathcal{G}_{x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}}(\mathbf{z})$ – обобщенные цилиндрические функции (функции Люстерника Л.А.)
3. $n = 1, \ k = 1, \ A = (1,-2), \ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z)$ – многочлены Эрмита (с точностью до множителя)
4. $n = 2, \ k = 1, \ A = (1,1,-1), \ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ – многочлены Лагерра
5. $n = 2, \ k = 1, \ A = (1,1,-2), \ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ – многочлены Лежандра, многочлены Гегенбауэра, трехмерные сферические функции
6. $n = 3, \ k = 1, \ A = (1,1,-1,-1), \ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ – многочлены Якоби, многочлены Лагранжа, четырехмерные сферические функции, гипергеометрия
7. $n = 3, \ k = 1, \ A = (1,1,-1,-1), \ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ – многочлены Якоби, многочлены Лагранжа, четырехмерные сферические функции, гипергеометрия

2. Группы

Положим

$$\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_n\} \in \mathbb{C}^n,\ \rho^{|S(A)|} = \mathbf{z}^{S(A)},\ \varphi_j = \ln \frac{z_j}{\rho},\ 0 \le Im\varphi_j < 2\pi.$$

Здесь $S(A) - n + k$-вектор, i-ая компонента которого – сумма элементов i-ого столбца матрицы A, $|u| = \sum u_i$.

Неоднородное линейное преобразование

$$g[\mathbf{a}; \overline{\varphi}],\ \mathbf{a} \in \mathbb{C}^\mathbf{n},\ \overline{\varphi} = \{\varphi_\mathbf{1}, \dots, \varphi_\mathbf{n+k}\},$$

в $\mathbb{C}^n$, задаваемое соотношением

$$g[\mathbf{a}; \overline{\varphi}] \cdot \mathbf{z} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{e}^{-\overline{\varphi}} + \mathbf{a}$$

будем называть движением в $\mathbb{C}^n$.

Обозначим $g[\mathbf{0}; \overline{\varphi}] = h(\overline{\varphi})$, $g[\mathbf{a}; 0] = t(\mathbf{a})$. Движения образуют группу, при этом:

$$g[\mathbf{a}; \overline{\varphi}] \cdot g[\mathbf{b}; \overline{\psi}] = g[\mathbf{a} + h(\overline{\varphi})\mathbf{b}; \overline{\varphi} + \overline{\psi}],$$

$$g^{-1}[\mathbf{a}; \overline{\varphi}] = g[-h(-\overline{\varphi}) \cdot \mathbf{a}; -\overline{\varphi}]$$

$$g[\mathbf{a}; \overline{\varphi}] = h(-\overline{\psi}) \cdot t(\mathbf{r}) \cdot h(\overline{\varphi} + \overline{\psi}),\ \overline{\psi} = \arg \mathbf{a},\ \mathbf{r} = \{\rho, \dots, \rho\}$$

Наряду с очевидными, "большими" подгруппами — подгруппой *трансляций* $t(\mathbf{a})$ и подгруппой *вращений* $h(\overline{\varphi})$ — важную роль в анализе свойств ФПБ играют подгруппы, состоящие из элементов

$$g[\mathbf{r_j}; \overline{\varphi}_j],\ j = 1, 2, \dots, k,\ \rho_j^{|\mathbf{a_j}|} = \mathbf{z}^{\mathbf{a_j}},\ (\overline{\varphi}_j)_i = \ln \frac{z_i}{\rho_j},$$

где $\mathbf{a_j}$ – j-ая строка матрицы A.

Группа $G = \{g[\mathbf{a}; \overline{\varphi}]\}$ может быть реализована как группа комплексных матриц

$$M(g) = \begin{pmatrix} E(-\overline{\varphi}) & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad E(-\overline{\varphi}) = diag(e^{-\varphi_i}).$$

Действие группы в этом представлении понимается как умножение матрицы $M(g)$ на вектор $\hat{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{pmatrix}$:

Пусть

$$\Gamma_\rho(\mathbf{z}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n+k} :\ \mathbf{x}^{S(A)} = \mathbf{z}^{S(A)} = \rho^{|S(A)|}\}$$

– орбита элемента $\mathbf{z}$.

Представления группы $G = \{g[\mathbf{a}; \overline{\varphi}]\}$ зададим соотношением

$$(T_g^\rho f)(\mathbf{z}) = e^{\rho \cdot h(-arg\mathbf{z}) \cdot \mathbf{a}} f(h(\overline{\varphi}) \cdot \mathbf{z}),\ f \in L^2_{\Gamma_\rho} \qquad (*)$$

Можно показать, что ядра интегральных операторов представлений (*) с точностью до экспоненциального множителя совпадают с ФПБ.

Это обстоятельство дает возможность изучать описанные выше случайные блуждания с групповой точки зрения.

3. Некоторые результаты

Производящая функция

$$\sum_{\mathbf{s}} \mathbf{u}^{\mathbf{s}} \mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) = exp(\mathbf{zu})$$

Реккурентные соотношения

$$\mathbf{s} \cdot \mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n+k} (z_i \mathcal{G}_{\mathbf{s}-\mathbf{e_i}}(\mathbf{z})) e_i$$

$$\sum_{\mathbf{s}} \mathbf{s} \mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) = e^{|\mathbf{z}|} \cdot \sum_{i=1}^{n+k} (z_i) \mathbf{e_i}, \ |\mathbf{z}| = \sum_i z_i$$

Дифференциальные тождества

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z})}{\partial z_i} = \mathcal{G}_{\mathbf{s}-\mathbf{e_i}}(\mathbf{z})$$

$$D^{\overline{S_1(A)}} \mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) = D^{\overline{S_2(A)}} \mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z})$$

Формула сложения

$$\mathcal{G}_{\mathbf{s}}(\mathbf{z_1} + \mathbf{z_2}) = \sum_l \mathcal{G}_{\mathbf{s}-\mathbf{l}}(\mathbf{z_1}) \mathcal{G}_{\mathbf{l}}(\mathbf{z_2})$$

Для конкретных примеров получаем:
Многочлены Эрмита:

$$A = (1; -2), \ \mathcal{G}_{\mathbf{k}}(-1, x) = \frac{1}{(k_2 - 2k_1)!} H_{k_2 - 2k_1}(x)$$

Реккурентное дифференцирование

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x); \ H_n''(x) + 2n H_n(x) = 2x H_n'(x)$$

Формулы сложения

$$(\sqrt{2})^n H_n(z_1 + z_2) = \sum_m C_n^m H_{n-m}(z_1 \sqrt{2}) H_m(z_2 \sqrt{2})$$

$$H_n(z_1 + z_2) = \sum_m C_n^m z_2^m H_{n-m}(z_1) = \sum_m C_n^m z_1^m H_{n-m}(z_2).$$

Многочлены Лагерра:

$$A = (1; -1, 1), \quad \mathcal{G}_{\mathbf{k}}(\rho \cdot e^{\overline{\varphi}}) = e^{\mathbf{k}\overline{\varphi}} \frac{\rho^{k_1+k_2}}{(k_1 + k_2)!} L_{k_2+k_3}^{k_1-k_3}(-\rho)$$

Реккурентные соотношения

$$L_n^m(z) = L_{n-1}^m(z) + L_n^{m-1}(z), \qquad L_n^m(z) = \sum_{j=0}^{r} C_r^j L_{n-r+j}^{m-j}(z)$$

Дифференцирование

$$\frac{d}{dz}L_n^m(z) = -L_{n+1}^{m-1}(z)$$

Формула сложения

$$\frac{(x+y)^{n+m}}{(n+m)!}L_n^m(x+y) = \sum_{i,j}\frac{x^{n+m-i-j}\cdot y^{i+j}}{(n+m-i-j)!(i+j)!}L_{n-j}^{m-i}(x)L_n^m(y)$$

Кратные аргументы

$$\lambda^{n+m}L_n^m(\lambda z) = \sum_{i,j}(\lambda-1)^{i+j}C_{n+m}^{i+j}L_{n-j}^{m-i}(z)L_n^m((\lambda-1)z)$$

Формула удвоения

$$L_n^m(2z) = 2^{-(n+m)}\sum_{i,j}C_{n+m}^{i+j}L_{n-j}^{m-i}(z)L_n^m(z).$$

4. ФПБ. Асимптотические разложения

Источником асимптотик для ФПБ служат предельные теоремы теории вероятностей. Различные варианты ЦПТ приводят к различным асимптотическим формулам.

Например, классические асимптотики для бесселевых функций получаются из следующих простых соображений:

если $p_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ – пуассоновское распределение, то известно, что при $\lambda \gg 1$, $\lambda - k = o(\sqrt{\lambda})$ оно аппроксимируется нормальным. Сответственно, вероятности $\mathsf{P}\{\xi(\mathsf{t}) \in \mathsf{H}_\mathsf{x}^\mathsf{A}\}$ аппроксимируются нормальными.

Теорема 1 (О предельном распределении случайной суммы)**.** *Если случайные векторы $\xi_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$ независимы и одинаково распределены с рядом $P\{\xi = e_s\} = p_s$, $s = 1, 2, \ldots, n+k$, $\sum p_i = 1$, $A(e_s) = 0$, N_τ – не зависящая от ξ_k пуассоновская с.в. с параметром $\lambda \cdot \tau$.*

Тогда нормированная и центрированная случайная (с N_τ слагаемыми) сумма величин ξ_k имеет нормальное распределение с характеристической функцией

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_{n+k}) = exp\left(-\frac{1}{2}\sum_1^{n+k}p_i t_i^2\right).$$

Для функций Люстерника (в т.ч. для модифицированных функций Бесселя) на этом пути может быть получен аналог асимптотики Виленкина – Цукермана [3].

Литература

1. Л.А. Люстерник. Об одной задаче теории массового обслуживания ... // ДАН СССР, - 1967. - т.177, N 5 - С.1005-1007

2. В.И. Заляпин. Обобщения цилиндрических функций // ДАН СССР, - 1972. - т.207, N 5 - С.1029-1031

3. С.А. Григорьев. Асимптотические разложения функций Люстерника // ВЕСТНИК ЮУрГУ, - 2002. - N 3(12), вып. 2 - С.11-18

О «НЕЛОКАЛЬНЫХ» МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ В МОДЕЛЯХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

А.И. Кириллов

Российский фонд фундаментальных исследований, Москва, Россия

e-mail: AcademiaXXI@mail.ru

Аннотация: Сложной называется система, состоящая из большого (свыше нескольких сот) элементов, взаимодействующих между собой посредством изменения общей для элементов системы среды обитания. Предполагается, что каждый элемент системы следует выборочной траектории некоторого единственного для всей системы случайного процесса.

Эволюция элементов сложной системы определяется переходными вероятностями, зависящими от функционалов от основного процесса, например, от его выборочных средних или от распределения вероятности. Показано, как такой процесс можно преобразовать в марковский. Стандартным образом формулируются условия, при которых основной процесс будет диффузионным. Выведено соответствующее прямое уравнение Колмогорова. Условия существования и единственности его решения устанавливаются стандартным образом.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00196).

Ключевые слова: сложная система, марковский процесс, прямое уравнение Колмогорова.

ON "NONLOCAL" MARKOV PROCESSES FOR MODELLING COMPLEX SYSTEMS

Abstract: A system is called complex if it consists of large number (over several hundreds) of elements that interact by modifying their common environment. It is supposed that every element follows a sample path of some stochastic process that is common for all elements.

The interaction of elements is described by transition probabilities that depend on functionals on the process, e.g., on its means or on the probability distribution. It is shown how such process can be transformed in Markov. The conditions for the basic process be a diffusion are formulated, the forward Kolmogorov equation is derived, conditions of existence and uniqueness of its solution are established in a standard way.

The work is supported by the Russian scientific foundation (Project № 14-11-00196).

Keywords: complex system, Markov process, forward Kolmogorov equation.

Введение

При мезоскопическом описании сложных систем в модели типа "жизнь и судьба" [1-5] предполагается, что каждый элемет системы следует своей выборочной траектории некоторого единственного для всей системы случайного процесса. Одного случайного процесса в пространстве нескольких измерений оказывается достаточно для мезоскопического описания системы из огромного числа элементов. Если имеется несколько сложных систем, взаимодействующих между собой, то эти системы описываются совокупностью взаимосвязанных случайных процессов.

Поскольку взаимодействие элементов сложной системы происходит через их воздействие на среду, переходные вероятности основного процесса зависят от некоторых функционалов от этого процесса. Здесь исследуется процесс, переходные вероятносты которого зависят от распределения вероятности. Такая модель удобна для описания систем, элементы которых стремятся, например, скопиться в некоторой области или рассредоточиться.

Помимо уравнений движения элементов сложных систем есть и другие, коэффициенты которых зависят от распределений вероятностей. Например, уравнение Власова–МакКина имеет вид

$$dx_t = b(t, x_t, \mu_t)dt + \sigma(t, x_t, \mu_t)dw_t, \tag{1}$$

Оно — частный случай исследуемых нами уравнений, поскольку обычно предполагается, что $b(t, x_t, \mu_t)$ и $\sigma(t, x_t, \mu_t)$ зависят от μ_t линейно, т.е.

$$b(t, x_t, \mu_t) = \int b(t, x_t, y)\mu_t(dy) \qquad \sigma(\mathrm{t}, \mathrm{x_t}, \mu_\mathrm{t}) = \int \sigma(\mathrm{t}, \mathrm{x_t}, \mathrm{y})\mu_\mathrm{t}(\mathrm{dy})$$

Формально процесс с переходными вероятностями, зависящими от функционалов не является марковским. Однако, можно изменить пространство сотояний системы так, что в нем основной процесс будет марковским. После этого стандартным образом формулируются условия, при которых основной процесс будет диффузионным и выводятся соответствующме уравнения Колмогорова и Ито. Их специфика — вырожденность коэффициента диффузии, обусловленная тем, что вероятностное распределение μ_t эволюционирует детерминировано.

1. Описание модели

Состояние системы определяется парой $\{x,\ p\}$, где $x \in X = \mathbb{R}^d$ и p — вероятностное распределение значений $x \in \mathbb{R}^d$, т.е. вероятностная мера на $\mathcal{B}(X)$. Все такие меры трактуются как элементы вещественного линейного пространства Q зарядов (вещественнозначных мер) на $\mathcal{B}(X)$. Топология в Q определяется нормой $\|q\|_Q = Var(q)$.

Состояния системы изменяются в зависимости от времени $t \in [0,\ \infty)$. Если в момент времени t_1 система находилась в состоянии $\{x, p\}$, то в момент времени $t_2 \geq t_1$ про состояние системы известно только, что оно — случайный элемент $\{y, q\}$ с законом распределения $\mathfrak{P}(t_1, \{x, p\}, t_2, \cdot)$, таким что распределение определяется данной вероятностной мерой $P(t_1, \{x, p\}, t_2, \cdot)$ на $\mathcal{B}(X)$, а q достоверно является вероятностной мерой, такой что $\forall A \in \mathcal{B}(X)$

$$q(A) = \hat{P}_{t_1}^{t_2} p(A) \equiv \int_X P(t_1, \{x, p\}, t_2, A)\, p(dx). \tag{2}$$

Иными словами, $\forall A \in \mathcal{B}(X)$ и $\forall V \in \mathcal{B}(Q)$ справедливо равенство

$$\mathfrak{P}(t_1, \{x, p\}, t_2, A \times V) = P(t_1, \{x, p\}, t_2, A)\delta_q(V). \tag{3}$$

Здесь δ_q — мера Дирака на $\mathcal{B}(Q)$, сосредоточенная в точке $q \in Q$, т.е. на мере, выражающейся через меру p по формуле (2).

Уравнение Колмогорова–Чепмена имеет вид

$$\mathfrak{P}(s,\{x,p\},u,A\times V)=\int\mathfrak{P}(t,\{y,q\},u,A\times V)\,\mathfrak{P}(s,\{x,p\},t,d\{y,q\}). \tag{4}$$

Оно справедливо $\forall\ s,t,u: 0\le s<t<u$, $\forall A\in\mathcal{B}(X)$ и $\forall V\in\mathcal{B}(Q)$.

Отсюда и из (3) следует, что

$$P(s,\{x,p\},u,A)=\int P(t,\{y,\hat{P}^t_s(p)\},u,A)\,P(s,\{x,p\},t,d). \tag{5}$$

2. Условия диффузионности

Исследуемый процесс предполагается диффузионным в пространстве $X\times Q$. Поэтому

$$\lim_{t\downarrow s}\frac{1}{t-s}\int\limits_{\substack{\|(x-y\|_X>r,\\ \|p-q\|_Q>r}}\mathfrak{P}(s,\{x,p\},t,d\{y,\ q\})=0, \tag{6}$$

$$\lim_{t\downarrow s}\frac{1}{t-s}\int\limits_{\substack{\|(x-y\|_X<r,\\ \|p-q\|_Q<r}}\langle\Psi,\{y-x,q-p\}\rangle\,\mathfrak{P}(s,\{x,p\},t,d\{y,\ q\})= \tag{7}$$

$$=\langle\Psi,b(s,\{x,p\})\rangle,$$

$$\lim_{t\downarrow s}\frac{1}{t-s}\int\limits_{\substack{\|(x-y\|_X<r,\\ \|p-q\|_Q<r}}\langle\Psi,\{y-x,q-p\}\rangle^2\,\mathfrak{P}(s,\{x,p\},t,d\{y,q\})= \tag{8}$$

$$=\langle\Psi,a(s,\{x,p\})\Psi\rangle.$$

Из (7) и (3) тождественными преобразованиями получаеи, что

$$\langle\Psi,b(s,\{x,p\})\rangle=\langle\Psi_Q,b_Q(s,p)\rangle_Q+\langle\Psi_X,b_X(s,\{x,p\})\rangle_X, \tag{9}$$

где

$$\langle\Psi_Q,b_Q(s,p)\rangle_Q=\lim_{t\downarrow s}\frac{\langle\Psi_Q,\hat{P}^t_s p-p\rangle_Q}{t-s} \tag{10}$$

и

$$\langle\Psi_X,b_X(s,\{x,p\})\rangle_X=\lim_{t\downarrow s}\frac{1}{t-s}\int\limits_{\|y-x\|_X<r}\langle\Psi_X,y-x\rangle_X\,P(s,\{x,p\},t,dy). \tag{11}$$

В (10) $b_Q(s,p)$ — элемент из Q^{**}, т.е. заряд. В (11) $b_X(s,\{x,p\})$ — элемент из $X^{**}=X$.

Аналогично

$$\begin{aligned}\langle\Psi,a(s,\{x,p\})\Psi\rangle&=\langle\Psi_X,a_X(s,\{x,p\})\Psi_X\rangle_X=\\ &=\lim_{t\downarrow s}\frac{1}{t-s}\int_{\|y-x\|_X<r}\langle\Psi_X,y-x\rangle^2_X\,P(s,\{x,p\},t,dy).\end{aligned} \tag{12}$$

Заметим, что $b_Q(s,p)$ не зависит от $x \in X$ и $a_Q = 0$. Это — следствие (2). Кроме того, $b_Q(s,p)$ выражается через $b_X(s,\{x,p\})$ и $a_X(s,\{x,p\})$ следующим образом.

По формуле (10)

$$\begin{gathered}\langle \Psi_Q, b_Q(s,p)\rangle_Q = \lim_{t\downarrow s} \frac{\langle \Psi_Q, \hat{P}_s^t p - p\rangle_Q}{t-s} = \\ = \int \left[\langle \Psi_Q'(x), b_X(s,\{x,p\})\rangle_X + \tfrac{1}{2} Tr\big(a_X(s,\{x,p\})\Psi_Q''(x)\big)\right] p(dx).\end{gathered} \tag{13}$$

3. Прямое уравнение Колмогорова

При стандартных предположениях о f из (7) и (8) следует, что

$$\lim_{u\downarrow t} \frac{f(s,\{x,p\},u) - f(s,\{x,p\},t)}{u-t} = \int\limits_{X\times Q} \left[\langle b(t,\{y',q'\}), f'(\{y',q'\})\rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} Tr\big(a(t,\{y',q'\}) f''(\{y',q'\})\big)\right] \mathfrak{P}(s,\{x,p\},t,d\{y',q'\})\,.$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{X\times Q} f(\{y,q\})\, \mathfrak{P}(s,\{x,p\},t,d\{y,\ q\}) = \int\limits_{X\times Q} \left[\langle b(t,\{y,q\}), f'(\{y,q\})\rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} Tr\big(a(t,\{y,q\}) f''(\{y,q\})\big)\right] \mathfrak{P}(s,\{x,p\},t,d\{y,q\})$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial}{\partial t} \int\limits_X f(\{y,\hat{P}_s^t p\})\, P(s,\{x,p\},t,dy) = \int\limits_X \left[\langle f'(\{y,\hat{P}_s^t p\}), b(t,\{y,\hat{P}_s^t p\})\rangle + \right. \\ \left. + \tfrac{1}{2} Tr\big(a(t,\{y,\hat{P}_s^t p\}) f''(\{y,\hat{P}_s^t p\})\big)\right] P(s,\{x,p\},t,dy).\end{gathered} \tag{14}$$

В частном случае, когда $f(\{y,q\})$ не завист от y, причем

$$f(\{y,q\}) = \int\limits_X \phi(x) q(dx),$$

используя (13), получаем

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial}{\partial t} \int\limits_X \phi(x) \hat{P}_s^t p(dx) = \int\limits_X \left[\langle \phi'(x), b_X(t,\{x,\hat{P}_s^t p\})\rangle_X + \right. \\ \left. + \tfrac{1}{2} Tr\big(a_X(t,\{x,\hat{P}_s^t p\}) \phi''(x)\big)\right] \hat{P}_s^t p(dx).\end{gathered} \tag{15}$$

В частном случае, когда $f(\{y,q\})$ не завист от q, из (14) следует, что

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial}{\partial t} \int\limits_X f(y)\, P(s,\{x,p\},t,dy) = \int\limits_X \left[\langle f'(y), b_X(t,\{y,\hat{P}_s^t p\})\rangle_X + \right. \\ \left. + \tfrac{1}{2} Tr\big(a_X(t,\{y,\hat{P}_s^t p\}) f''(y)\big)\right] P(s,\{x,p\},t,dy).\end{gathered} \tag{16}$$

Заключение

Уравнение (15) — это уравнение для меры $\hat{P}_s^t p$. Его можно исследовать и решать независимо от уравнения (16). Получится информация о законе распределения и о средних значениях параметров, характеризующих эоементы системы. Это описание, типичное для кинетических теорий. Оно не многим детальнее, чем макроскопическое описание, т.е. описание с помощью средних.

Найденную меру $\hat{P}_s^t p$ можно подставить в уравнение (16) и решать его относительно переходной вероятности $P(s, \{x, p\}, t, dy)$. По ней можно определять выборочные траектории основного процесса. Эти траектории показывают возможные эволюции элементов системы. Так получается ее мезоскопическое описание. Оно, менее детально, чем микроскопическое, поскольку неизвестно, какой именно элемент эволюционирует согласно данной выборочной траектории. Но микроскорические описания сложных систем принципиально невозможны.

Возможно и совместное решение уравнений (15) и (16), например, используя их дискретизацию по времени с некоторым шагом Δt. Этот метод естественно применить не к уравнениям (15) и (16), а к соответствующему уравнению Ито. В отличие от применения такого метода к решению обычных стохастических систем, потребуется на каждом шаге разыгрывать значение x много раз, чтобы оценить распределение $\hat{P}_s^t p$.

Литература

1. Kirillov A.I. On the theory of metastable states. Found. of Phys. 27 (1997) 1701–1708.

2. Кириллов А.И., Мамакин В.Ю. Стохастическая модель фазового перехода и метастабильность. ТМФ. 123 (2000) 96–106.

3. Кириллов А.И. Жизнь и судьба: к мезоскопическому опиcнию сложных систем 4-я Межд. конф. "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования 25–29 марта 2013 г. РУДН

4. Кириллов А.И. Жизнь и судьба: к мезоскопическому опиcнию сложных систем XXI Межд. конф. "Математика. Образование" 27.05–02.06.2013 г., Чебоксары.

5. Kirillov A.I. On a mesoscopic approach to the control of complex systems the Int. Conf. on Mathematical Control Theory and Mechanics. 05.07–09.07.2013 Suzdal

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СЕМИОТИКЕ

С.В. Паршина

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

e-mail: ssvetik15@yandex.ru

Аннотация: В статье представлен подход к изучению и анализу знаковых систем с позиции математической теории случайных процессов. Введено понятие элементарной синтагматической ошибки как случайной величины, которая может характеризовать процесс кодирования и передачи информации. Двумерная случайная величины представлена как функции дискретно-непрерывного аргумента.

Ключевые слова: Элементарная синтагматическая ошибка, вероятность, случайный процесс, случайная величина.

RANDOM PROCESSES IN SEMIOTICS

Abstract: The article present an approach to the study analysis of sign system from the perspective of the mathematical theory of random processes introduced the concept of elementary syntagmatic errors as random variables that can characterize the process of encoding and transmitting information. Two-dimensional random variable is a function of the discrete-continuous argument.

Keywords: Elementary syntagmatic error, probability, random process, random variable.

Прикладной характер математической статистики приводит к необходимости качественного анализа области ее применения. В настоящее время особое значение приобретает информатизация процессов человеческой деятельности, которая осуществляется на основе принципа коммуникации. Важную роль для информатизации играет семиотика - наука о знаковых системах (языках общения, языках программирования и др.). Рассматривая виды (символы, метки, идентификаторы) и значения знаков, семиотика изучает различные структурные и логические взаимосвязи между знаками, как элементами информации, в процессе их передачи и получения. С помощью знаков информация кодируется для передачи и распознается при получении. Переходя от рассмотрения знака к коду, кодом назовем правило, сопоставляющее каждому передаваемому знаку, некоторую комбинацию сигналов. А операцию перевода информации в последовательность различных сигналов назовем кодированием. Передача информации с помощью знаковых систем подвержена всевозможным искажениям и изменениям под действием случайных факторов. Поэтому, кодировка описывает свойства передаваемой информации с определенной степенью полноты и достоверности. Отсюда, возникает необходимость оценивать степень совпадения свойств кода и той информации, которая фиксируется данным кодом. С другой стороны, при получении кодов, их информационная содержательная суть также может быть в определенной степени изменена, что приводит к рассогласованию передаваемой и принятой информации. Полной уверенности в том, что произойдет ошибка при кодировании, передаче и декодировании никогда не существует. Ошибка может произойти, а может и не произойти. Если добавить ось времени, происходит переход в сферу случайных процессов. Отсутствие полной уверенности в появлении ошибок в определенные моменты времени, позволяет рассматривать ошибки в качестве случайных событий $A_i = A(t_i)$ и $B_i = B(t_i)$, где t_i - момент, когда произошла ошибка в процессе кодирования или декодирования и в качестве случайного события $C_i = C(\Delta t_i)$, где Δt_i - определенный интервал, на котором произошла ошибка в процессе передачи сигнала. Последовательность типа вход (кодирование), передача, выход (декодирование) назовем элементарной синтагмой, а упорядоченную тройку событий A_i, C_i, B_i назовем элементарной синтагматической ошибкой. Для характеристики этой ошибки введем случайную величину $\mathcal{X}$, которую назовем случайной синтагматической ошибкой и определим так:

$\mathcal{X} : \{x_i \in [0; k_i+3], i = \overline{1,n}$, где n - число синтагм за время t, k_i - число ошибок в $\Delta t_i\}$.

Рассмотрим задачу вычисления вероятности синтагматической ошибки. Если ошибка была допущена в момент кодирования, то она автоматически становится ошибкой в момент декодирования. Плюс в момент декодирования добавляются собственно ошибки декодирования. Таким образом, суммарная ошибка выступает в качестве показателя того, насколько количество информации на входе и количество информации на выходе отличаются друг от друга. Кроме ошибок, допущенных в моменты кодирования и декодирования, возникает неопределенность на временных интервалах между появлением сигнала и реакцией на него. Если принять равной нулю вероятность того, что в период Δt_i произойдет ошибка, то ошибки кодирования и декодирования в сумме дают двумерную случайную величину $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mu_1, \mu_2)$. Тогда ее можно определить так:

$\mathcal{X} : \{x_i = (\mu_1^i, \mu_2^i) : \mu_1^i \in [0; n], \mu_2^i \in [0; 2n], i = \overline{1, n}$, где n - число синтагм за время t$\}$.

Если же вероятность ошибки в период Δt_i не может быть исключена, то синтагматическая ошибка принимает характер трехмерной случайной величины $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mu_1, \vartheta, \mu_2)$ и может быть определена следующим образом:

$\mathcal{X} : \{x_i = (\mu_1^i, \vartheta^i, \mu_2^i) : \mu_1^i \in [0; n], \vartheta^i \in N, \mu_2^i \in [0; 2n], i = \overline{1, n}$, где n - число синтагм за время t$\}$.

С помощью простых преобразований двумерную и трехмерную случайные величины можно перевести в одномерную и двумерную случайные величины соответственно, в зависимости от того возможно ли пренебречь вероятностью ошибки при передаче, то есть вероятностью $P(C_i)$ или нет. Далее будем рассматривать преобразованные случайные величины: одномерную случайную величину $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mu)$ и двумерную случайную величину $Y = Y(\mu, \vartheta)$. Значения одномерной величины $\mathcal{X}(\mu)$ представим в виде суммы значений μ_1 и μ_2, а также учтем, что ошибка, допущенная на входе, дублируется на выходе. Получим: $\mu = 2\mu_1 + \mu_2$. Отметим, что значения μ_1 и μ_2 соответствуют одной и той же элементарной синтагме. Если можно отбросить вероятность $P(C_i)$, то случайная величина $\mathcal{X}$ - число ошибок в элементарной синтагме, принимает всего четыре значения: $\mathcal{X} : \{0; 1; 2; 3\}$. При этом, вероятности этих значений одинаковы и равны $\frac{1}{4}$. Множество значений двумерной случайной величины Y - числа ошибок в элементарной синтагме, можно представить в виде пар чисел $(\mu, \vartheta(\Delta t))$, где $\mu \in \{0; 1; 2; 3\}$, а $\vartheta(\Delta t)$ зависит от свойств канала передачи. Соответственно вероятности этих значений имеют выражение

$P = P(Y) = P(\mu, \vartheta(\delta t)) = \frac{1}{4} \cdot P(C)$

Литература

1. Яглом И.М., Яглом Я.М. Вероятность и информация. М.: «Наука», 1973, 513 с.

ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ НА ПОЛЕ $\mathbb{F}_P((T))$

Ю.А. Фарков

Российская академия народного хозяйства и государственой службы при Президенте Российской Федерации, Москва, Россия

e-mail: farkov@list.ru

Аннотация: В настоящей заметке изложен алгоритм построения фреймов Парсеваля на поле формальных рядов Лорана и определены ассоциированные с этими фреймами масштабирующие функции с компактными носителями.

Ключевые слова: вейвлеты, фреймы, ряды Лорана, группа Кантора, группы Виленкина.

PARSEVAL FRAMES ON THE FIELD $\mathbb{F}_P((T))$

Abstract: In this paper, we present an algorithm for constructing Parseval frames on the field of formal Laurent series. Compactly supported scaling functions associated with these frames are also defined.

Keywords: wavelets, frames, Laurent series, Cantor group, Vilenkin groups.

Теория фреймов анализирует полноту, устойчивость и избыточность линейных дискретных представлений функций и применяется в цифровой обработке сигналов и изображений, в кодировании и сжатии информации, в квантовой механике и в других областях (см., например, [1, глава 5]). Недавние результаты о применениях фреймов для обработки изображений приведены в обзорной статье [2], где изложены также основные методы построения фреймов Парсеваля. Напомним, что последовательность $\{g_m\}$ называется *фреймом Парсеваля* для гильбертова пространства $\mathcal{H}$, если для всех $f \in \mathcal{H}$ выполнено равенство $\|f\|^2 = \sum\limits_m |\langle f\,, g_m\rangle|^2$.

Для данного простого числа p через $\mathbb{F}_p((\,t))$ обозначают поле формальных рядов Лорана вида

$$\sum_{n\geq n_0} a_n t^n, \quad n_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_n \in \mathbb{F}_p,$$

с обычными операциями сложения и умножения. Это поле может быть получено как пополнение поля $\mathbb{F}_p(\,t)$ рациональных функций с коэффициентами из конечного поля $\mathbb{F}_p$ относительно абсолютного значения $|\,a| = p^{-\mathrm{ord}_0(a)}$ (см., например, [3, с. 433]). Открытая компактная подгруппа U совпадает с замыканием кольца полиномов $\mathbb{F}_p[\,t] \subset \mathbb{F}_p((\,t))$. Меру Хаара μ на аддитивной группе G поля $\mathbb{F}_p((\,t))$ нормируем условием $\mu(U) = 1$ и стандартным образом определим по этой мере пространство $L^2(G)$. Преобразование Фурье функции f обозначается через $\widehat{f}$. Произвольный характер $\chi : G \to \mathbb{C}$ может быть задан по формуле

$$\chi\left(\sum_{n\geq n_0} a_n t^n\right) = \exp(2\pi i a_{-1} p^{-1}).$$

Группа G самодвойственна: $\widehat{G} = G$, причем соотношение двойственности записывается в виде $(x, \omega) = \chi(x\omega)$. Ортогональные и биортогональные всплески (вейвлеты) с компактными носителями на группе G конструируются с помощью обобщенных функций Уолша как на p-адической группе Виленкина (см. [4, 5]).

Формальные суммы вида

$$\sum_{n=n_0}^{-1} a_n t^n, \quad n_0 \leq -1, \quad a_n \in \mathbb{F}_p,$$

образуют дискретную подгруппу H в G. Отображение $\lambda : G \to [0, \infty)$ определим по формуле

$$\lambda\left(\sum_{n\geq n_0} a_n t^n\right) = \sum_{n\geq n_0} a_n p^{-n-1}.$$

Образом подгруппы H при отображении λ является множество целых неотрицательных чисел: $\lambda(H) = \mathbb{Z}_+$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ через $h_{[\alpha]}$ обозначим элемент из H такой, что $\lambda(h_{[\alpha]}) = \alpha$. В частности, элемент $h_{[0]}$ совпадает с нулевым элементом θ. Обобщенные функции Уолша для группы G определяются по формуле $W_\alpha(x) = (x, h_{[\alpha]})$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+,\ x \in G$. Автоморфизм A группы G определим равенством $A(x) = t^{-1}x$ для $x \in G$, а элементы $\delta_l \in G$ определим из условия $\lambda(\delta_l) = l/p$, $l \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Для данного семейства $\Psi = \{\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}\} \subset L^2(G)$ система всплесков $X(\Psi)$ определяется по формуле

$$X(\Psi) = \{\psi^{(\nu)}_{j,k} \ :\ 1 \le \nu \le r,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}_+\},$$

где

$$\psi^{(\nu)}_{j,k}(x) = p^{j/2}\psi^{(\nu)}(A^j x - h_{[k]}), \quad x \in G.$$

Система $X(\Psi)$ называется фреймом Парсеваля для $L^2(G)$, если равенство

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{\nu=1}^{r} |\langle f\,, \psi^{(\nu)}_{j,k}\rangle|^2 = \|f\|^2$$

верно для всех $f \in L^2(G)$. Из общих свойств фреймов в гильбертовых пространствах (см., например, [1, глава 5], [6, § 1.8]) следует, что $X(\Psi)$ является фреймом Парсеваля тогда и только тогда, когда для любой функции $f \in L^2(G)$ выполнено равенство $f = \sum_{g\in X(\Psi)} \langle f\,, g\rangle g$.

Для фиксированных натуральных чисел n и $r \ge p$ рассмотрим следующий *алгоритм*:

1. Принять $N = p^n$, $N_1 = p^{n-1}$ и выбрать вектор $(b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ в $\mathbb{C}^N$ такой, что

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+N_1}|^2 + \cdots + |b_{l+(p-1)N_1}|^2 \le 1, \quad 0 \le l \le N_1 - 1. \tag{1}$$

2. Вычислить коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$ по формуле

$$c_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} b_s W_\alpha(A^{-n}h_{[s]}), \quad 0 \le \alpha \le N-1,$$

и определить полином Уолша

$$m_0(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} c_\alpha \overline{W_\alpha(\omega)}. \tag{2}$$

3. Определить функцию $\varphi \in L^2(G)$, преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(A^{-j}\omega), \quad \omega \in G.$$

4. Найти полиномы Уолша

$$m_\nu(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} a^{(\nu)}_\alpha \overline{W_\alpha(\omega)}, \quad 1 \le \nu \le r,$$

такие, что строки матрицы

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) & \ldots & m_r(\omega) \\ m_0(\omega+\delta_1) & m_1(\omega+\delta_1) & \ldots & m_r(\omega+\delta_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_0(\omega+\delta_{p-1}) & m_1(\omega+\delta_{p-1}) & \ldots & m_r(\omega+\delta_{p-1}) \end{pmatrix}$$

образуют ортономированную систему при каждом $\omega \in G$.

5. Определить $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}$ по формуле

$$\psi^{(\nu)}(x) = p \sum_{\alpha=0}^{N-1} a_\alpha^{(\nu)} \varphi(Ax - h_{[\alpha]}), \quad 1 \le \nu \le r. \tag{3}$$

Отметим, что если в условии (1) все неравенства заменить равенствами, т.е. на шаге 1 предположить, что

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+N_1}|^2 + \dots + |b_{l+(p-1)N_1}|^2 = 1, \quad 0 \le l \le N_1 - 1, \tag{4}$$

то алгоритм можно применять и для $r = p - 1$. Обоснование шага 3 этого алгоритма содержится в следующей теореме:

Теорема 1. *Пусть полином m_0 определен по формуле (2).*

(a) *Условие* (1) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$m_0(\omega) = 1, \quad \sum_{l=0}^{p-1} |m_0(\omega \oplus \delta_l)|^2 \le 1, \quad \omega \in G.$$

(b) *При условии* (1) *функция g, заданная по формуле*

$$g(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(A^{-j}\omega), \quad \omega \in G,$$

принадлежит классу $L^2(G)$.

Таким образом, для реализации шага 3 достаточно с помощью теоремы順 Планшереля определить функцию $\varphi \in L^2(G)$ такую, что $\widehat{\varphi} = g$. Тогда

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(A^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(A^{-1}\omega), \quad \omega \in G,$$

и, следовательно, функция φ удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = p \sum_{\alpha=0}^{N-1} a_\alpha \varphi(Ax - h_{[\alpha]}), \quad x \in G. \tag{5}$$

Известно, что при условии $\widehat{\varphi}(\theta) \ne 0$ любое L^2-решение уравнения (5) имеет компактный носитель. Более того, некоторые решения этого уравнения представимы на своих носителях лакунарными рядами Уолша или конечными линейными комбинациями функций Уолша (см. [4], [7]). Функции $\varphi \in L^2(G)$, удовлетворящие уравнениям вида (5), образуют класс *масштабирующих функций* с компактными носителями на G.

Каждый из полиномов m_ν, $0 \le \nu \le r$, является ступенчатой H-периодической функцией, принимающей всего N значений $b_s^{(\nu)} = m_\nu(A^{-n}h_{[s]})$, $0 \le s \le N-1$. По этим значениям полиномы m_ν однозначно восстанавливаются с помощью дискретного преобразования Виленкина-Крестенсона (см. формулы (5) и (6) в [7]). Для $\nu = 0$ согласно (1) имеем

$$b_0^{(0)} = 1, \quad |b_l^{(0)}|^2 + |b_{l+p^{n-1}}^{(0)}|^2 + \dots + |b_{l+(p-1)p^{n-1}}^{(0)}|^2 \le 1, \quad 0 \le l \le p^{n-1} - 1.$$

В соответствии с шагом 4 приведенного выше алгоритма, требуется найти числа

$$b_l^{(1)},\, b_{l+p^{n-1}}^{(1)},\, \dots,\, b_{l+(p-1)p^{n-1}}^{(1)}, \quad \dots, \quad b_l^{(r)},\, b_{l+p^{n-1}}^{(r)},\, \dots,\, b_{l+(p-1)p^{n-1}}^{(r)},$$

такие, что матрицы

$$\mathcal{M}_l = \begin{pmatrix} b_l^{(0)} & b_{l+p^{n-1}}^{(0)} & \dots & b_{l+(p-1)p^{n-1}}^{(0)} \\ b_l^{(1)} & b_{l+p^{n-1}}^{(1)} & \dots & b_{l+(p-1)p^{n-1}}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_l^{(r)} & b_{l+p^{N-1}}^{(r)} & \dots & b_{l+(p-1)p^{N-1}}^{(r)} \end{pmatrix}, \quad 0 \le l \le p^{n-1}-1,$$

удовлетворяют условию $\mathcal{M}_l\mathcal{M}_l^* = I$ (здесь I – единичная матрица и $\mathcal{M}_l^*$ – матрица, сопряженная матрице $\mathcal{M}_l$). Как в ортогональном случае, эта задача решается с помощью преобразования Хаусхольдера [6, с.123] или методом, изложенным в [5]. Отметим также, что формулы (3) в образах Фурье записываются в виде

$$\widehat{\psi}^{(\nu)}(\omega) = m_\nu(A^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(A^{-1}\omega), \quad 1 \le \nu \le r.$$

Теорема 2. *Если семейство $\Psi = \{\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}\}$ определено по указанному выше алгоритму, то система всплесков $X(\Psi)$ является фреймом Парсеваля для $L^2(G)$.*

Напомним, что *кратномасштабным анализом* (*КМА*) в $L^2(G)$ называют последовательность замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(G)$, $j \in \mathbb{Z}$, таких, что выполнены следующие свойства:

(i) $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

(ii) $\bigcup V_j$ плотно в $L^2(G)$ и $\bigcap V_j = \{\theta\}$;

(iii) $f \in V_j$ тогда и только тогда, когда $f(A^{-j}\,\cdot) \in V_0$;

(iv) существует функция $\varphi \in L^2(G)$ такая, что система $\{\varphi(\cdot - h) \,:\, h \in H\}$ является ортонормированным базисом для V_0.

Будем говорить, что *функция φ порождает КМА*, если, во-первых, семейство $\{\varphi(\cdot - h) \,:\, h \in H\}$ является ортонормированной системой в $L^2(G)$ и, во-вторых, подпространства

$$V_j = \mathrm{clos}_{L^2(G)}\mathrm{span}\,\{\, \varphi(A^j \cdot - h) \,:\, h \in H\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

образуют КМА в $L^2(G)$. Если функция $\varphi \in L^2(G)$ удовлетворяет уравнению (5), то для заданных по формуле (6) подпространств V_j условие (i) выполнено. Кроме того, если функция φ определена в соответсвии с приведенным выше алгоритмом, то условия (4) необходимы (но недостаточны) для того, чтобы система $\{\varphi(\cdot - h) \,:\, h \in H\}$ была ортонормирована в $L^2(G)$. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы L^2-решение φ уравнения (5) порождало КМА указаны в [7]. При выполнении этих условий существует (см. [5]) алгоритм построения семейства $\Psi = \{\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}\}$, для которого система всплесков $X(\Psi)$ является ортонормированным базисом в $L^2(G)$.

Теоремы 1 и 2 дополняют соответствующие результаты из [5], [7] и [8]. Для случая $p = 2$ при условии (4) изложенный алгоритм обоснован в [9, Теорема 3.4]. Отметим, что на поле $\mathbb{F}_p((\,t))$ могут быть распространены и другие результаты из [9] о построении фреймов на группе Кантора.

Литература

1. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.

2. Dong B., Shen Z. MRA-based wavelet frames and application // Mathematics in Image Processing / Hogkai Zhao, editor. – (IAS/Park City mathematics series), 2013. V. 19. P. 7–158.

3. Benedetto J.J., Benedetto R.L. A wavelet theory for local fields and related groups // J. Geometric Analysis. 2004. V. 14. P. 423–456.

4. Фарков Ю.А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Известия РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. N 3. С.193–220.

5. Farkov Yu.A., Rodionov E.A. Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. 2011. V. 3, N 3. P. 181–195.

6. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 616 с.

7. Фарков Ю.А. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82. N 6. С. 934–952.

8. Farkov Yu.A., Lebedeva E.A., Skopina M.A. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // http://arxiv.org/abs/1412.2699

9. Farkov Yu.A. Examples of frames on the Cantor dyadic group // J. Math. Sciences. 2012. V. 187, N 1. P. 22–34.

Секция 3. Нелокальные задачи

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОТЕНЦИАЛАМИ РИССА

С.Н. Асхабов

Чеченский государственный университет, Грозный, Россия

e-mail: `askhabov@yandex.ru`

Аннотация: В статье для различных классов нелинейных интегральных уравнений, содержащих потенциал Рисса $(I^\alpha u)(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$, методом монотонных операторов доказаны теоремы о существовании, единственности и оценках решений в вещественных пространствах Лебега $L_p(a,b)$ при любых $p \in (1,\infty)$.

Ключевые слова: Нелинейное уравнение типа свертки, монотонный оператор.

NONLINEAR EQUATIONS WITH RIESZ POTENTIALS

Abstract: In this paper using methods of monotone operators, we prove existence, uniqueness and also estimates norm-solution theorems for some classes of nonlinear equations including the Riesz potential $(I^\alpha u)(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$, in real Lebesgue spaces $L_p(a,b)$ for all $p \in (1,\infty)$.

Keywords: Nonlinear equation convolution type, monotone operator.

Пусть X - вещественное банахово пространство и X^* сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. Рассмотрим оператор типа потенциала (риссов потенциал) $(I^\alpha u)(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$, в вещественных пространствах Лебега $L_p(a,b)$, $1 < p < \infty$, с нормой $\|u\|_p = \left(\displaystyle\int_a^b |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Из теоремы Харди-Литтлвуда с предельным показателем в частности вытекает (см., например, [1]), что оператор I^α действует из пространства $L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$ и ограничен. Обозначим его норму в этом случае через $n(\alpha)$. Известно также, что этот оператор действует из $L_p(a,b)$ в $L_p(a,b)$ и ограничен при любом $p \geq 1$. В этой связи представляет интерес следующая лемма, существенно используемая в дальнейшем.

Лемма 1. *Если $0 < \alpha < 1$ и $p \geq 2/(1+\alpha)$, то оператор I^α действует непрерывно из пространства $L_p(a,b)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a,b)$, $p' = p/(p-1)$, и строго положителен, причем:*

$$\|I^\alpha u\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_p\,, \quad \forall u(x) \in L_p(a,b). \tag{1}$$

Доказательство. При $p = 2/(1+\alpha)$ и $p' = 2/(1-\alpha)$ лемма 1 доказана в [1]. Поэтому считаем далее, что $p > 2/(1+\alpha)$. Тогда справедливы вложения:

$$L_p(a,b) \subset L_{2/(1+\alpha)}(a,b) \quad \text{и} \quad L_{2/(1-\alpha)}(a,b) \subset L_{p'}(a,b)\,. \tag{2}$$

Поскольку $2/(1-\alpha) > 2/(1+\alpha)$, то вложение $L_{2/(1-\alpha)}(a,b) \subset L_{2/(1+\alpha)}(a,b)$ очевидно. Докажем первое вложение из (2). Применяя неравенство Гельдера с показателями $p(1+\alpha)/2$ и $p(1+\alpha)/[p(1+\alpha)-2]$, для любого $u(x) \in L_p(a,b)$, имеем

$$\|u\|_{2/(1+\alpha)} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|u\|_p\,, \tag{3}$$

т.е. справедливо первое вложение из (2).

Аналогично, применяя неравенство Гельдера с показателями $2/[(1-\alpha)p']$ и $2/[2-(1-\alpha)p']$ для любого $u(x) \in L_{2/(1-\alpha)}(a,b)$, получаем

$$\|u\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|u\|_{2/(1-\alpha)} \tag{4}$$

(здесь учли, что $[2-(1-\alpha)p']/(2p') = [p(1+\alpha)-2]/(2p)$), т.е. справедливо и второе вложение из (2).

Из теоремы Харди-Литтлвуда с предельным показателем вытекает, что

$$\|I^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)} \leq n(\alpha) \cdot \|u\|_{2/(1+\alpha)}\,, \quad \forall u(x) \in L_{2/(1+\alpha)}(a,b)\,. \tag{5}$$

Используя неравенства (3)–(5) и учитывая первое вложение из (2), имеем

$$\|I^\alpha u\|_{p'} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \|I^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)} \leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/(2p)} \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_{2/(1+\alpha)} \leq$$

$$\leq (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_p\,, \quad \forall u(x) \in L_p(a,b)\,,$$

т.е. справедливо неравенство (1).

Наконец, используя теорему 3.2 [1], $\forall u(x) \in L_p(a,b)$ получаем

$$\langle I^\alpha u, u\rangle = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}} \right) \cdot u(x)\,dx \geq 0\,,$$

причем $\langle I^\alpha u, u\rangle > 0$, если $u(x) \neq 0$, т.е. оператор I^α строго положителен в пространстве $L_p(a,b)$ при $p \geq 2/(1+\alpha)$.

Следующая лемма является двойственной лемме 1 и понадобится при исследовании уравнения типа Гаммерштейна с ядром типа потенциала (см. теорему 2).

Лемма 2. *Если $0 < \alpha < 1$ и $1 < p \leq 2/(1-\alpha)$, то оператор I^α действует непрерывно из $L_{p'}(a,b)$, $p' = p/(p-1)$, в $L_p(a,b)$ и строго положителен, причем:*

$$\|I^\alpha u\|_{p'} \leq (b-a)^{[2-p(1-\alpha)]/p} \cdot n(\alpha) \cdot \|u\|_{p'}\,, \quad \forall u(x) \in L_{p'}(a,b). \tag{6}$$

Пусть вещественная функция $F(x,u)$ определена при $x \in [a,b]$, $u \in (-\infty,\infty)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном u и непрерывна по u почти при всех x. Обозначим через F оператор Немыцкого, порожденный функцией $F(x,u)$, а через $L_p^+(a,b)$ - множество всех неотрицательных функций из $L_p(a,b)$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $p \geq 2/(1+\alpha)$. *Если выполнены условия:*

1) $|F(x,u)| \leq c(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, *где* $c(x) \in L^+_{p'}(a,b)$, $d_1 > 0$;

2) $F(x,u)$ *не убывает по* u *почти при каждом фиксированном* x;

3) $F(x,u) \cdot u \geq d_2 \cdot |u|^p - D(x)$, *где* $D(x) \in L^+_1(a,b)$, $d_2 > 0$,

то при любых $\lambda > 0$ *и* $f(x) \in L_{p'}(a,b)$ *уравнение*

$$\lambda \cdot F[x,u(x)] + \int\limits_a^b \frac{u(s)\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{7}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если условие 3) выполнено при* $D(x) = 0$, *то* $\|u^*\|_p \leq \left(\lambda^{-1} \cdot d_2^{-1} \cdot \|f\|_{p'}\right)^{1/(p-1)}$.

Доказательство. Запишем данное уравнение (7) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = \lambda \cdot Fu + I^\alpha u$. В силу леммы 1 и условий 1)–3) получаем, что оператор A действует непрерывно из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$ и является монотонным и коэрцитивным. При этом оператор A является строго монотонным, если функция $F(x,u)$ строго возрастает по u. Поэтому утверждения о существовании и единственности решения вытекают из теоремы Браудера-Минти (см., например, [1]). Наконец, используя условие 3) при $D(x) = 0$, положительность оператора I^α и равенство $Au^* = f$, имеем

$$\lambda \cdot d_2 \cdot \|u^*\|_p^p \leq \lambda \cdot \langle Fu^*, u^* \rangle \leq \lambda \cdot \langle Fu^*, u^* \rangle + \langle I^\alpha u^*, u^* \rangle =$$

$$= \langle Au^*, u^* \rangle = \langle f, u^* \rangle \leq \|f\|_{p'} \|u\|_p,$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка.

Следствие 1. *Пусть* $p \geq 2$ *любое четное число и* $f(x) \in L_{p'}(a,b)$. *Тогда уравнение*

$$u^{p-1}(x) + \int\limits_a^b \frac{u(s)\,ds}{\sqrt{|x-s|}} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$, *причем* $\|u^*\|_p \leq \|f\|_{p'}^{1/(p-1)}$.

В связи со следствием 1 заметим, что поскольку $p \geq 2$ и $2/(1+\alpha) \in (1,2)$, то требование $p \geq 2/(1+\alpha)$ теоремы 1 заведомо выполнено, причем нечетностепенная функция $F(x,u) = u^{p-1}$ удовлетворяет условиям 1)–3) при $d_1 = d_2 = 1$ и $c(x) = D(x) = 0$.

Замечание 1. *Теорема 1 усиливает некоторые результаты, приведенные в [1], а именно обобщает теорему 6.2 и дополняет теорему 6.1, которая не охватывает случай* $2/(1+\alpha) \leq p < 2$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $1 < p \leq 2/(1-\alpha)$. *Если выполнены условия 1) и 2) теоремы 1, то при любых* $\lambda \geq 0$ *и* $f(x) \in L_p(a,b)$ *уравнение*

$$u(x) + \lambda \cdot \int\limits_a^b \frac{F[s,u(s)]\,ds}{|x-s|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{8}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если выполнены условия 1), 3) теоремы 1 при* $c(x) = D(x) = 0$, *то* $\|u^*\|_p \leq d_1 \cdot d_2^{-1} \cdot \|f\|_p$.

Доказательство. При $\lambda = 0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. Запишем уравнение (8) в операторном виде: $u + \lambda \cdot I^\alpha F u = f$. Из условий 1) и 2) вытекает, что оператор F действует непрерывно из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$ и является монотонным, а из леммы 2, вытекает, что оператор I^α действует непрерывно из $L_{p'}(a,b)$ обратно в $L_p(a,b)$ и положителен. Но тогда, по теореме 3 из [16], данное уравнение имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$.

Осталось доказать оценку нормы решения. Используя условия 1), 3) при $c(x) = D(x) = 0$, положительность оператора I^α и равенство $u^* + \lambda \cdot I^\alpha F u^* = f$, имеем

$$d_2 \|u^*\|_p^p \le \langle u^*, Fu^* \rangle + \lambda \langle I^\alpha F u^*, F u^* \rangle = \langle f, F u^* \rangle \le \|f\|_p \|F u^*\|_{p'} \le d_1 \|f\|_p \|u^*\|_p^{p-1},$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка.

Следствие 2. *Если $f(x) \in L_4(a,b)$, то уравнение*

$$u(x) + \int_a^b \frac{u^3(s)\, ds}{\sqrt{|x-s|}} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_4(a,b)$, причем $\|u^*\|_4 \le \|f\|_4$.

Замечание 2. *Доказательство теоремы 2 в части существования и единственности решения основано на теореме 3 из [2] и использует лемму 2. Следует отметить, что в этой теореме 3, относящейся к уравнениям Гаммерштейна, нелинейность $F(x,u)$ должна не убывать по u (в [2] предполагается, что она не возрастает по u), иначе не будет единственности решения. В самом деле, уравнение*

$$u(x) - w(x) \int_a^b w(s) \cdot u^{1/3}(s)\, ds = 0$$

с убывающей нелинейностью $F(x,u) = -u^{1/3}$, где заданная функция $w(x) \in L_{4/3}(a,b)$, имеет в $L_{4/3}(a,b)$ два различных решения

$$u_1(x) = 0 \quad \text{и} \quad u_2(x) = w(x) \cdot \left(\int_a^b w^{4/3}(s)\, ds \right)^{3/2}.$$

Из результатов работы [3] также вытекает, что нелинейность должна быть неубывающей.

Теорема 3. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $p \ge 2/(1+\alpha)$. Если выполнены условия:*

4) $|F(x,u)| \le g(x) + d_3 \cdot |u|^{1/(p-1)}$, где $g(x) \in L_p^+(a,b)$, $d_3 > 0$;

5) $F(x,u)$ строго возрастает по u почти при каждом фиксированном x;

6) $F(x,u) \cdot u \ge d_4 \cdot |u|^{p/(p-1)} - D(x)$, где $D(x) \in L_1^+(a,b)$, $d_4 > 0$,

то при любых $\lambda \ge 0$ и $f(x) \in L_p(a,b)$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot F\left[x, \int_a^b \frac{u(s)\, ds}{|x-s|^{1-\alpha}} \right] = f(x) \tag{9}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$. *Кроме того, если условия 4) и 6) выполнены при* $g(x) = D(x) = 0$, *то*

$$\|u^* - f\|_p \le \lambda \cdot \left(d_3^p \cdot d_4^{-1} \cdot n(\alpha) \cdot (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \|f\|_p\right)^{1/(p-1)}.$$

Доказательство. При $\lambda = 0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. В силу леммы 1, оператор I^α действует из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$, непрерывен и положителен. Из условий 4)–6) вытекает, что оператор F действует из $L_{p'}(a,b)$ в $L_p(a,b)$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, по лемме 2.1 из [1], оператор F имеет обратный F^{-1}, который действует из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$, хеминепрерывен, строго монотонен и $\lim\limits_{\|v\|_p \to \infty} \langle F^{-1}v, v\rangle \cdot \|v\|_p^{-1} = \infty$. Запишем уравнение (9) в операторном виде: $u + \lambda \cdot F I^\alpha u = f$. Полагая в нем $f - u = \lambda \cdot v$ и применяя затем к обеим частям получившегося уравнения обратный оператор F^{-1}, приходим к уравнению

$$\Phi v = I^\alpha f, \quad \text{где} \quad \Phi v = F^{-1} v + \lambda \cdot I^\alpha v. \tag{10}$$

В силу указанных свойств операторов F^{-1} и I^α, оператор Φ действует из $L_p(a,b)$ в $L_{p'}(a,b)$, хеминепрерывен, строго монотонен и

$$\frac{\langle \Phi v, v\rangle}{\|v\|_p} \ge \frac{\langle F^{-1}v, v\rangle}{\|v\|_p} \to \infty \quad \text{при} \quad \|v\|_p \to \infty.$$

Значит, по теореме Браудера-Минти, уравнение (10) имеет единственное решение $v^*(x) \in L_p(a,b)$. Но тогда уравнение (9) имеет решение $u^* = f - \lambda \cdot v^* \in L_p(a,b)$ и это решение u^* единственно в силу условия 5).

Осталось доказать оценку нормы решения. Пусть $\psi = F^{-1}v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Так как $F^{-1}v^* + \lambda \cdot I^\alpha v^* = I^\alpha f$, то с учетом леммы 1 и равенств $g(x) = D(x) = 0$, имеем

$$d_4 \|\psi\|_{p'}^{p'} \le \langle F\psi, \psi\rangle = \langle v^*, F^{-1}v^*\rangle \le \langle v^*, F^{-1}v^* + \lambda I^\alpha v^*\rangle = \langle v^*, I^\alpha f\rangle \le \|F\psi\|_p \|I^\alpha f\|_{p'} \le$$

$$\le (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} n(\alpha) \|F\psi\|_p \|f\|_p \le (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} n(\alpha) d_3 \|\psi\|_{p'}^{p'-1} \|f\|_p.$$

Следовательно,

$$\|\psi\|_{p'} \le d_3 d_4^{-1} (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \cdot n(\alpha) \|f\|_p. \tag{11}$$

Так как $\|v^*\|_p = \|F\psi\|_p \le d_3 \|\psi\|_{p'}^{p'-1}$ и $v^* = \lambda^{-1}(f - u^*)$, то $\|f - u^*\|_p \le \lambda d_3 \|\psi\|_{p'}^{1/(p-1)}$, откуда с учетом неравенства (11) получаем доказываемую оценку нормы решения.

Следствие 3. *Пусть* $p \ge 2$ *любое четное число и* $f(x) \in L_p(a,b)$. *Тогда уравнение*

$$u(x) + \left(\int_a^b \frac{u(s)\, ds}{\sqrt{|x-s|}} \right)^{1/(p-1)} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(a,b)$, *причем справедлива оценка* $\|u^* - f\|_p \le \left((b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \cdot n(1/2) \cdot \|f\|_p\right)^{1/(p-1)}$.

Замечание 3. *Исследованию нелинейных уравнений с потенциалами Рисса в весовых (вещественных и комплексных) пространствах Лебега* $L_p(\varrho)$ *на всей действительной оси и их приближенному решению в* $L_2(a,b)$ *посвящены работы [4]–[6].*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00422)

Литература

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. М.: Физматлит, 2009. – 304 с.

2. Brezis H., Browder F.E. Some new results about Hammerstein equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80, N 3. P. 567–572.

3. Brezis H., Browder F.E. Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type // Advances in Math. 1975. V. 18. P. 115–147.

4. Асхабов С.Н. Интегральные уравнения с ядрами типа потенциала и монотонной нелинейностью // Труды физического общества Республики Адыгея. 2000, N5. С. 72–76.

5. Асхабов С.Н. Решение нелинейных интегральных уравнений с операторами типа потенциала методом последовательных приближений // Труды физического общества Республики Адыгея. 2002, N7. С. 43–48.

6. Асхабов С.Н. Нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала в комплексных пространствах Лебега // Труды физического общества Республики Адыгея. 2004, N9. С. 25–30.

Секция 4. Некорректные задачи

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

А. Асанов[1], З.А. Каденова[2]

[1]*Кыргызско-Турецкий университет «Манас», Бишкек, Кыргызстан,*
[2]*Министерство Образования и Науки Кыргызской Республики, Бишкек, Кыргызстан*

Аннотация: Данная работа посвящена исследованию единственности и устойчивости решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными. Здесь оператор порожденный ядрами не является компактным оператором.

Ключевые слова: линейный, интегральные уравнения, первого рода, двух переменных, решение, единственность и устойчивость.

UNIQUENESS AND STABILITY OF SOLUTIONS FOR CERTAIN LINEAR EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH THO VARIABLES

Abstract: In this work dedicated to the research of the problem of uniqueness and stability for linear integral equationss of the first kind with two variables. Here the operator generated by the kernels is not the compact operator.

Keywords: linear, inteqral equations, first kind, two variables, solution, uniqueness and stability.

1. Introduction

The integral equations of the first kind were studied in [1-8]. More specifically, fundanental results for Fredholm integral equations of the first kind were obtained in [6], where regularizing operators in the sense of *M.M.Lavrent·ev* were constructed for solutions of linear Fredholm inteqral equations of the first kind. For linear Volterra integral equations of the first kind and third kinds with smooth kernels, the existence of a multiparameter family of solution was proved in [7]. The regularization and uniqueness of solutions to systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind were investigated in [4,5]. In this work we shall study the problems of uniqueness and stability of solution of the integral equation

$$Ku = f(t,x),\ (t,x) \in G = \left\{(t,x) \in R^2 : t_0 \le t \le T,\ a \le x \le b\right\}, \tag{1}$$

where

$$Ku \equiv \int_a^x P(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^t Q(t,x,s)u(s,x)ds+$$
$$+\int_{t_0}^T \int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds, \tag{2}$$

$P(t,x,y)$ and $Q(t,x,s)$ are given continuous functions, respectively on the domains

$$G_1 = \{(t,x,s) : t_0 \le t \le T,\ a \le y \le x \le b\},$$

$$G_2 = \{(t,x,s) : t_0 \le s \le t \le T,\ a \le x \le b\},$$

$C(t,x,s,y), f(x)$ are given functions $u(t,x)$ is a desired function.

2. Uniqueness and Stability of solutions of integral equations

Assume that the following conditions are satisfied: $(i).P(t,b,a) \ge 0$ for all $t \in [t_0,T], P(t,b,a) \in C[t_0,T], P_y'(t,y,a) \le 0$ for all $(t,y) \in G, P_y'(t,y,a) \in C(G), P_z'(s,b,z) \ge 0$ for all $(s,z) \in G$,
$P_z'(s,b,z) \in C(G), P_{zy}''(s,y,z) \le 0$ for all $(s,y,z) \in G_1, P_{zy}''(s,y,z) \in C(G_1)$.

$(ii).Q(T,y,t_0) \ge 0$ for all $y \in [a,b], Q(T,y,t_0) \in C[a,b], Q_s'(s,y,t_0) \le 0$ for all $(s,y) \in G, Q_s'(s,y,t_0) \in C(G), Q_\tau'(T,y,\tau) \ge 0$ for all $(y,\tau) \in G$,
$Q_\tau'(T,y,\tau) \in C(G), Q_{\tau s}''(s,y,\tau) \le 0$ for all $(s,y,\tau) \in G_2, Q_{\tau,s}''(s,y,\tau) \in C(G_2)$.

(iii). At least one of the following conditions holds:
$(a)P_y'(s,y,a) < 0$ for almost all $(s,y) \in G$;
$(b)P_z'(s,b,z) > 0$ for almost all $(s,z) \in G$;
$(c)Q_s'(s,y,t_0) < 0$ for almost all $(s,y) \in G$;
$(d)Q_\tau'(T,y,\tau) > 0$ for almost all $(y,\tau) \in G$;
$(e)P_{zy}''(s,y,z) < 0$ for almost all $(s,y,z) \in G_1$;
$(f)Q_{\tau s}''(s,y,\tau) < 0$ for almost all $(s,y,\tau) \in G_2$.
$(iv).C(t,x,s,y) \in L_2(G^2)$ and

$$\frac{1}{2}\left[C(t,x,s,y) + C(s,y,t,x)\right] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(t,x)\varphi_i(s,y),$$

$$m \le \infty,\ \lambda_i \ge 0,\ i = 1,2,...,m, \tag{3}$$

where $\{\varphi_i(t,x)\}$ is an orthonormal sequence of eigenfunctions from $L_2(G)$ and $\{\lambda_i\}$ is the sequence of corresponding nonzero eigenvalues of the Fredholm integral operator C generated by the kernel $\frac{1}{2}\left[C(t,x,s,y) + C(s,y,t,x)\right]$ with the elements $\{\lambda_i\}$ arranged in decreasing order of their absolute values. If $C(t,x,s,y) = 0$ for all $(t,x,s,y) \in G^2$, we assume that $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$.

Theorem 1. Let conditions (i)-(iv) be satisfied. Then the solution of the equation (1) is unique in $L_2(G)$.

Proof. Taking the multiplication of both sides of the equation (1) with $u(t,x)$, integrating the results on G, we obtain

$$\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)dzdyds + \int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_{t_0}^{s} Q(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\tau dyds +$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)dzd\tau dsdy =$$

$$= \int_a^b\int_{t_0}^{T} f(s,y)u(s,y)dsdy. \tag{4}$$

Integrating by parts and using the Dirichlet formula we obtain.

$$\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)dzdyds = -$$

$$= -\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)dzu(s,y)dyds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b P(s,y,a)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2\right]dyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_z^b P_z^{'}(s,y,z)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2\right]dydzds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[P(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2\right]\Bigg|_{y=a}^{y=b}ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b P_y^{'}(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\left[P_z^{'}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2\right]\Bigg|_{y=z}^{y=b}dyds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_z^b P_{zy}^{''}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dydzds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 ds - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b P_y^{'}(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b P_z^{'}(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_a^y P_{zy}^{''}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzdyds. \tag{5}$$

Similarly integrating by parts and using the Dirichlet formula analogically we have

$$\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s} Q(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\tau dsdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b Q(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{T} u(\xi,y)d\xi\right)^2 dy - \frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{T} Q_s^{'}(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{s} u(\xi,y)d\xi\right)^2 dsdy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{T} Q_\tau^{'}(T,y,\tau)\left(\int_\tau^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s} Q_{\tau s}^{''}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dsdy. \tag{6}$$

Using the Dirichlet formula we have

$$\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_{t_0}^{T} C(t,x,s,y)u(s,y)u(t,x)dsdydtdx =$$

$$= \int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_{t_0}^{t} C(t,x,s,y)u(s,y)u(t,x)dsdydtdx +$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^b\int_t^T C(t,x,s,y)u(s,y)u(t,x)dsdydtdx=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^b\int_{t_0}^t\left[C(t,x,s,y)+C(s,y,t,x)\right]u(s,y)u(t,x)dsdydtdx. \tag{7}$$

Taking into account (5), (6), (7)and (3) from (4) we obtain

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^T P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P_y^{'}(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P_z^{'}(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P_{zy}^{''}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzdyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b Q(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 dy-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T Q_s^{'}(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T Q_\tau^{'}(T,y,\tau)\left(\int_\tau^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s Q_{\tau s}^{''}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dsdy+$$

$$+\sum_{i=1}^m\lambda_i\left(\int_a^b\int_{t_0}^T\varphi_i(s,y)u(s,y)dsdy\right)^2=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)dsdy. \tag{8}$$

Let $f(t,x)=0$ for all $(t,x)\in G$. Then by virtue of conditions (i)-(iv), from (8) we have $u(t,x)=0$ for almost all $(t,x)\in G$. The theorem 1 is proved.

Example. We consider the equation (1) for

$$P(t,x,y)=\alpha_0(t)\beta_0(x)[\gamma_0(y)+\gamma_1(y)],(t,x,y)\in G_1,$$

$$Q(t,x,s)=\alpha_1(t)\beta_1(x)[\alpha_2(s)+\gamma_2(s)],(t,x,s)\in G_2,$$

$$C(t,x,s,y)=\sum_{i=1}^m[c_i(t,x)c_i(s,y)+d_i(t,x)-d_i(s,y)],(t,x,s,y)\in G^2,$$

where

$$\alpha_0(t),\alpha_1(t),\alpha_1^{'}(t),\alpha_2(t),\alpha_2^{'}(t),\gamma_2(t),\gamma_2^{'}(t)\in C[t_0,T],\beta_0(x),\beta_0^{'}(x),\gamma_0(x),$$

$$\gamma_0^{'}(x),\gamma_1(x),\gamma_1^{'}(x),\beta_1(x)\in C[a,b],c_i(t,x),d_i(t,x)\in C(G)(i=1,2,...,m),\alpha_1^{'}(t)\le 0$$

and $\gamma_2^{'}(t)+\alpha_2^{'}(t)\ge 0$ for all $t\in[t_0,T],\beta_0^{'}(x)<0$ for almost all $x\in[a,b]$, $\gamma_0^{'}(x)+\gamma_1^{'}(x)\ge 0$ for all $x\in[a,b],\gamma_0(a)+\gamma_1(a)>0,\alpha_0(t)>0$ for almost all $t\in[t_0,T],\beta_1(x)>0$ for almost all $x\in[a,b],\gamma_2(t_0)+\alpha_2(t_0)\ge 0$.

In this case the conditions (i)-(iv) be satisfied.

The following condition is assumed to hold in what follows.

(v).The Fredholm operator C generated by the kernel $\frac{1}{2}\left[C(t,x,s,y)+C(s,y,t,x)\right]$ defined by (3) is positive, i.e. all the eigenvalues λ_i of $\frac{1}{2}\left[C(t,x,s,y)+C(s,y,t,x)\right]$ are positive $(i=1,2,...,m,\ m=\infty)$.

The family of well-posedness depending on the parameter α is defined as

$$M_\alpha = \left\{ u(t,x) \in L_2(G) : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-\alpha} \left| u^{(\nu)} \right|^2 \leq c_0 \right\},$$

where $c_0 > 0, \alpha \in (0, \infty)$, and

$$u^{(\nu)} = \int_{t_0}^{T} \int_{a}^{b} u(t,x) \varphi_\nu(t,x) dx dt, \;\; \nu = 1, 2, ..., \infty.$$

Theorem 2. Let conditions (i)-(ii)and (v) be satisfied.
Then the solution $u(t,x)$ of the equation (1) is unuque in $L_2(G)$. Moreover, on the set $K(M_\alpha)$ (where $K(M_\alpha)$ is the image of M_α under the action of the operator K defined by formula (2)), the inverse K^{-1} of operator K is uniformly continuous with the Holder exponent $\frac{\alpha}{\alpha+2}$; i.e

$$\|u(t,x)\|_{L_2} \leq c_0^{\frac{1}{2+\alpha}} \, \|f(t,x)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \,, \;\; 0 < \alpha < \infty, \tag{9}$$

where $u(t,x) \in M_\alpha, f(t,x) \in K(M_\alpha), \|u(t,x)\|_{L_2} = \left(\int_a^b \int_{t_0}^T |u(t,x)|^2 dt dx \right)^{1/2}$.

Proof. a) In this case, the orthonormal sequence of eigenfunctions $\{\varphi_i(t,x)\}$ is complete in $L_2(G)$. Therefore (8) implies the uniqueness of the solution to equation (1) in $L_2(G)$.

Let $f(t,x) \in K(M_\alpha)$. Then the equation (1) has *a* solution $u(t,x) \in M_\alpha$ and it follows from (8) that

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left| u^\nu \right|^2 \leq \|f(t,x)\|_{L_2} \cdot \|u(t,x)\|_{L_2}.$$

On the other hand,

$$\|u(t,x)\|_{L_2}^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|u^{(\nu)}|^{\frac{2}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \cdot \lambda_\nu^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \cdot |u^{(\nu)}|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \leq \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|u^{(\nu)}|^2}{\lambda_\nu^{\alpha}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |u^{(\nu)}|^2 \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Combining the last two inequalities gives estimate (9). The theorem 2 is proved.

References

1. Aparstyn A.S. Nonclassical linear Volterra Equations of the First Kind. - Utrecht: VSP, 2003.

2. Asanov A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. -Utrecht: VSP, 1998.

3. Bukhgeim A. L. Volterra Equations and Inverse Problems. -Utrecht: VSP, 1999.

4. Imanaliev M.I. and Asanov A. On solutions of systems of Volterra nonlinear integral equations of the first kind // Dokl. Akad. Nauk. -1989/- Vol.309, No5, -Pp.1052-1055.

5. Imanaliev M.I. and Asanov A. On solutions of systems of nonlinear two dimensional Volterra integral equations of the first kind // Dokl. Akad. Nauk. -1991.- Vol. 317, No2,-Pp. 330-333.

6. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. ILL-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis.- Amer.Math. Soc.: Providence, R.I., 1986.

7. Magnitskii N.A. Linear Volterra Integral Equations of the first and third kinds // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.- 1979.- Vol.19, No4.- Pp. 970-989.

8. Shishatskii S.P.,Asanov A. and Atamanov E.R. Uniqueness Problems for Degenerating Equations and Nonclassical Problems. -Utrecht: VSP, 2001.

ОДИН КЛАСС ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

З.А. Каденова

Министерство Образования и Науки Кыргызской Республики, Бишкек, Кыргызстан

e-mail: `kadenova71@mail.ru`

Аннотация: На основе метода неотрицательных квадратичных форм для линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными доказаны теоремы единственности решения.

Ключевые слова: Линейные интегральные уравнения, первого рода, с двумя независимыми переменными, единственность.

ONE CLASS OF LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES.

Abstract: We consider linear integral equations of the first kind with two independent variables by the method of non-negative quadratic form. The theorem of uniqueness are proved.

Keywords: Linear, Inteqral Equations, first kind,with two independent variables by the method of non-negative quadratic form. The theorem of uniqueness.

Рассмотрим уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)ds+\int_{t_0}^T\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds=$$

$$=f(t,x),(t,x)\in G,\ G=\left\{(t,x)\in R^2,\ t_0\le t\le T\ ,\ a\le x\le b\right\}, \tag{1}$$

где

$$K(t,x,y)=\begin{cases} A(t,x,y),\ t_0\le t\le T;\\ a\le y\le x\le b;\\ B(t,x,y),\ t_0\le t\le T;\\ a\le x\le y\le b, \end{cases} \tag{2}$$

$A(t,x,y),B(t,x,y),H(t,x,s),C(t,x,s,y)$ - известные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y):t_0\le t\le T,\quad a\le y\le x\le b\};$$

$$G_2=\{(t,x,y):t_0\le t\le T,a\le x\le y\le b\};$$

$$G_3=\{(t,x,s):t_0\le s\le t\le T,a\le x\le b\},G^2=G\times G.$$

$f(t,x)-$ известная, а $u(t,x)-$ неизвестная функция, $(t,x)\in G$.

Различные вопросы интегральных уравнений первого и третьего рода исследовались в [1-10]. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [2,3], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В [1] для линейных интегральных уравнений Вольтерры первого и третьего рода с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений. В [6] изучены вопросы регуляризации и единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В данной работе доказывается единственность решений интегральных уравнений (1)в пространстве $L_2(G)$.

Предполагается, что ядро $C(t,x,s,y)-$ интегрируемо с квадратом в области G^2 и самосопряженное, т.е. $C(t,x,s,y) \in L_2(G^2)$ и разлагается в ряд

$$C(t,x,s,y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(t,x)\varphi_i(s,y),\ m \leq \infty, 0 \leq \lambda_i,\ i = 1,2,...,m \tag{3}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ...-$ собственные значения ядра $C(t,x,s,y)$, расположенные в порядке убывания их модулей $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ...$ и $\varphi_1(t,x), \varphi_1(t,x), ...$ соответствующие ортонормированные собственные функции.

Обозначим

$$P(s,y,z) = A(s,y,z) + B(s,z,y), (s,y,z) \in G_1. \tag{4}$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$1)\ P(s,b,a) \in C[t_0,T], P(s,b,a) \geq 0, \forall s \in [t_0,T],$$
$$P_y^{'}(s,y,a) \in C(G), P_y^{'}(s,y,a) \leq 0, \forall (s,y) \in G,$$
$$P_z^{'}(s,b,z) \in C(G), P_z^{'}(s,b,z) \geq 0, \forall (s,z) \in G,$$
$$P_{zy}^{''}(s,y,z) \in C(G_1), P_{zy}^{''}(s,y,z) \leq 0, (s,y,z) \in G_1,$$
$$2)\ H(T,y,t_0) \in C[a,b], H(T,y,t_0) \geq 0, \forall y \in [a,b],$$
$$H_s^{'}(s,y,t_0) \in C(G), H_s^{'}(s,y,t_0) \leq 0, \forall (s,y) \in G,$$
$$H_\tau^{'}(T,y,\tau) \in C(G), H_\tau^{'}(T,y,\tau) \geq 0, \forall (y,\tau) \in G,$$
$$H_{\tau s}^{''}(s,y,\tau) \in C(G_3), H_{\tau s}^{''}(s,y,\tau) \leq 0, (s,y,\tau) \in G_3.$$

3)Выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий
а) при почти всех $(s,y) \in G$ $P_y^{'}(s,y,a) < 0$;
б) при почти всех $(s,z) \in G$ $P_z^{'}(s,b,z) > 0$;
в) при почти всех $(s,y) \in G$ $H_s^{'}(s,y,t_0) < 0$;
г) при почти всех $(\tau,y) \in G$ $H_\tau^{'}(T,y,\tau) > 0$;
4) Ядро $C(t,x,s,y)-$ представимо в виде (3) и в разложении (3) все элементы последовательности λ_i неотрицательны.

Теорема 1. *Пусть выполняются 1), 2), 3), и 4). Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $L_2(G)$.*

Доказательство. В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^x A(t,x,y)u(t,y)dy + \int_x^b B(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)ds +$$
$$+ \int_{t_0}^T \int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds = f(t,x). \tag{5}$$

Обе части уравнения (5) умножим на функции $u(t,x)$ и интегрируем по области G:

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y A(s,y,z)u(s,z)u(s,y)dzdyds+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\tau dsdy+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)dzd\tau dsdy=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)dsdy. \tag{6}$$

Применяя формулу Дирихле из (6), имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y [A(s,y,z+B(s,z,y)]u(s,z)u(s,y)dzdsdy+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\tau dyds+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)dzd\tau dsdy=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)dsdy.$$

Отсюда, учитывая (5), имеем

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)dzdyds+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\tau dsdy+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)dzd\tau dsdy=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)dsdy. \tag{7}$$

Преобразуем первые два интеграла левой части уравнения (7). Дважды интегрируя по частям и применяя формулу Дирихле, имеем

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)dzdyds=-$$

$$-\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)dz\ u(s,y)dyds=-$$

$$-\int_{t_0}^T\int_a^b\left\{P(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)\Big|_a^y-\right.$$

$$\left.-\int_a^y P'_z(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)dz\right\}u(s,y)dyds=$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b} P(s,y,a)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{a}^{y} u(s,\nu)d\nu\right)^2\right]dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b}\int_{z}^{b} P_z'(s,y,z)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{z}^{y} u(s,\nu)d\nu\right)^2\right]dydzds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[P(s,y,a)\left(\int_{a}^{y} u(s,\nu)d\nu\right)^2\right]\Bigg|_a^b ds - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b} P_y'(s,y,a)\left(\int_{a}^{y} u(s,\nu)d\nu\right)^2 dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b}\left[P_z'(s,y,z)\left(\int_{z}^{y} u(s,\nu)d\nu\right)^2\right]\Bigg|_z^b dzds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b}\int_{z}^{b} P_{zy}''(s,y,z)\left(\int_{z}^{y} u(s,\nu)d\nu\right)^2 dydzds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} P(s,b,a)\left(\int_{a}^{b} u(s,\nu)d\nu\right)^2 ds - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b} P_y'(s,y,a)\left(\int_{a}^{y} u(s,\nu)d\nu\right)^2 dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b} P_z'(s,b,z)\left(\int_{z}^{b} u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b}\int_{a}^{y} P_{zy}''(s,y,z)\left(\int_{z}^{y} u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzdyds, \qquad (8)$$

где $P_t'(t,x,s), P_y'(t,x,s)$ частные производные по t и s соответственно.

Дважды интегрируя по частям и применяя формулы Дирихле для второго интеграла, имеем

$$\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s} H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\tau dsdy =$$

$$= -\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s} H(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi\right)d\tau u(s,y)dsdy =$$

$$= -\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\left[H(s,y,\tau)\left(\int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi\right)\Bigg|_{t_0}^{s} -\right.$$

$$\left.-\int_{t_0}^{s} H_\tau'(s,y,\tau)\left(\int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi\right)d\tau\right]u(s,y)dyds =$$

$$= \int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T} H(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{s} u(\xi,y)d\xi\right)u(s,y)dsdy+$$

$$+\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s} H_\tau'(s,y,\tau)\left(\int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi\right)d\tau u(s,y)dsdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T} H(s,y,t_0)\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_{t_0}^{s} u(\xi,y)d\xi\right)^2\right]dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{\tau}^{T} H_\tau'(s,y,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi\right)^2\right]dsd\tau dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b H(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right)^2\Bigg|_{t_0}^T dy - \frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H_s'(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H_\tau'(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2\Bigg|_\tau^T d\tau dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_\tau^T H_{\tau s}''(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 dsd\tau dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b H(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 dy - \frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H_s'(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H_\tau'(T,y,\tau)\left(\int_\tau^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s H_{\tau s}''(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dsdy. \qquad (9)$$

Выражения (8), (9) подставляя в (7) и учитывая (3), получим

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^T P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 ds - \frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P_y'(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P_z'(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P_{zy}''(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzdyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b H(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 dy - \frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H_s'(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H_\tau'(T,y,\tau)\left(\int_\tau^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s H_{\tau s}''(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dsdy+$$

$$+\sum_{i=1}^m \lambda_i\left(\int_a^b\int_{t_0}^T \varphi(s,y)u(s,y)dsdy\right)^2 = \int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)dsdy. \qquad (10)$$

Пусть $f(t,x)\equiv 0, (t,x)\in G$.
Тогда, учитывая условия 1), 2), 3) и 4) из (10), имеем

$$\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi = 0, (s,y)\in G$$

или

$$\int_a^y u(s,\nu)d\nu = 0, (s,y)\in G.$$

Отсюда $u(t,x)=0$, при всех $(t,x)\in[t_0,T]\times[a,b]$. Теорема доказана.

Пример 1. *Рассмотрим уравнение (1) для* $a = t_0 = 0$, $b = T = 1, A(t,x,y) = 0,5t + 2x^2 + 4y^3 + e^{-x+y^2}$ *при* $(t,x,y) \in G_1$, $B(t,x,y) = 1 + 0,5t + x^3 - 3y^2 + e^{x^2-y}$ *при* $(t,x,y) \in G_2, H(t,x,s) = = 2 + x + 3e^{-t^2+s^3}$ *при* $(t,x,s) \in G_3, C(t,x,s,y) = 3(t+x)(s+y) + + 4t^3x^2s^3y^2$ *при* $(t,x,s,y) \in G^2$. *В этом случае из (4) имеем*

$$P(s,y,z) = 1 + s - y^2 + 5z^3 + 2e^{-y+z^2}, (s,y,z) \in G_1.$$

Тогда нетрудно проверить, что функции $P(s,y,z), H(s,y,\tau)$ *и* $C(t,x,s,y)$ *удовлетворяют все условию 1)-4). Поэтому в силу теоремы решение уравнение (1) единственно в пространстве* $L_2(0,1)$.

Литература

1. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода.//Журнал вычислительной математики и математический физики. 1979.Т.19. N4. с. 970-989.

2. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127. N1. с. 31-33.

3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.

4. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. // ДАН 2007. Т. 415. N1. с. 14-17.

5. Асанов А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра.// Известия АН Киргизской ССР. 1988. N1.с.13-18.

6. Асанов А., Каденова З.А. Регуляризация и устойчивость систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. // Вестник Самарского Государственного Технического Университета. Серия физико-математические науки. Самара: Сам ГТУ. 2005. N38. с. 11-14.

7. Денисов А. М., Коровин С. В. // Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. 1992. N3. с. 22-28.

8. Aparstyn A.S. Nonclassical linear Volterra Equations of the First Kind. Amsterdam: VSP, 2003. 168 p.

9. Asanov A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. Amsterdam: VSP, 1998. 276 p.

10. Bukhgeim A. L. Volterra Equations and Inverse Problems. Amsterdam: VSP, 1999. 204 p. а720071, Бишкек, Проспект Чуй 265а, Институт теоретической и прикладной математики Национальной академии наук кыргызской Республики.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРОВ УПРАВЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНО ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.Н. Козлов

Санкт-Петербургский политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: `saiu@ftk.spbstu.ru`

Аннотация: Рассматривается регуляризация методов синтеза в рамках метода проекционного метода на основе развития классов операторов оптимизации, согласованных с целями и задачами управления.

Ключевые слова: регуляризация, проекционно-операторный метод, операторы конечно-мерной регуляризации, устойчивость локально-оптимальных систем управления

REGULARIZATION OF CONTROL LOCAL OPTIMAL SYSTEMS OPERATORS

Abstract: Considers the regularization of methods of synthesis in the framework of the projection method based on the development of optimization classes of operators agreed with the objectives of management.

Keywords: regularization, projection method, minimization operators, stabilization of local optimal systems

Регуляризация некорректных задач необходима для обеспечения управления на основе допустимых, локально или интервально оптимальных управлений динамическими объектами, которые стабилизируются законами управления, синтезированными на основе операторов конечномерной оптимизации [1–4]. Эти операторы позволяют синтезировать новые типы линейных или нелинейных обратных связей [5–7]. При этом могут использоваться операторы минимизации линейных или квадратичных функционалов. Математические модели систем управления с операторами указанных выше типов представляются линейными или нелинейными разностными операторами в евклидовом конечномерном пространстве [3, 5].

1. Математическая модель процессов с допустимыми и локально оптимальными управлениями.

Уравнения замкнутых систем локально оптимального управления *с операторами допустимых пропорциональных управлений* представляются счетным числом нелинейных разностных уравнений, которые формулируются в виде [3]

$$\begin{gathered}
x_{k+1} = H\Phi_x(x_k) + F_u\Phi_u(\Gamma T z_{k,*}) + F_\mu m_k = \\
= H\Phi_x(x_k) + F_u\Phi_u\left\{\Gamma T\left[P_A c H\Phi_x(x_k) + (2\theta-1)\tilde{P}^0 C\,|\alpha_k/\rho|^{1/2}\right]\right\} + F_\mu m_k, \\
x_{k0} = x^0,\ \Gamma = \gamma E,\ \gamma \in R^1,\ \alpha_k = r^2 - (b_k^i)^T(AA^T)^{-1}(b_k^i), \\
b_k^1 = cHx_k,\ b_k^2 = cH\Phi_x(x_k),\ \rho = C^T\tilde{P}^0 C, \|m_k\| \le M < \infty, \|m_k\| \to 0,\ k \to \infty.
\end{gathered} \tag{1}$$

Эти операторы формируют аналитические решения задач неклассической конечномерной минимизации или максимизации квадратичных функционалов типа нормы евклидова пространства на основе допустимых управлений [2, 3].

2. Регуляризация задач локально оптимального управления.

Непрерывность нелинейной части оператора управления в (1) доказывается с учетом области определения, корректности и совместности ограничений задач оптимизации. *Непрерывность оператора системы* (1) *по координатам* должна иметь место в области его задания и совместности ограничений задач управления. *Условие совместности* ограничений определено *областью корректности* задания нелинейной части оператора, определяемой счетным числом нелинейных неравенств

$$\sigma_k = r^2 - (b_k^i)^T(AA^T)^{-1}(b_k^i) \ge 0,\ \rho = C^T\tilde{P}^0 C, b_k^1 = cHx_k,\ b_k^2 = cH\Phi(x_k). \tag{2}$$

Это условие определяет множество линейного пространства, в котором нелинейный оператор (1) является непрерывным, ограниченным и корректно заданным. Выполнение условий (2) обеспечивает корректность задания нелинейных частей операторов в (1) с помощью кусочно-линейной функции, обеспечивающей принадлежность квадратичной формы допустимому интервалу.

Тогда условия совместности ограничений с учетом регуляризации имеют вид

$$\begin{gathered}\alpha_k = r^2 - \varphi(q)/\rho \geq 0,\ \varphi(q) = (b_k^i)^T (AA^T)^{-1}(b_k^i),\\ \rho = C^T \tilde{P}^0 C,\ C \neq 0,\ b_k^1 = cHx_k,\ b_k^2 = cH\Phi(x_k),\\ \varphi(q) = 0,5\left(|q| - |q-\tilde{r}| + \tilde{r}\right),\ \tilde{r} = r - \varepsilon^2,\ i = 1,2.\end{gathered} \tag{3}$$

Таким образом, проекционный оператор допустимых управлений в уравнении (1) с учетом регуляризации позволяет исследовать сходимость (устойчивость) с учетом кусочно-линейной функции $\varphi(q)$ в (3). Необходимо ограничить $C \in R^n$ отделимостью от нуля: $C \notin D_\varepsilon = \{C \mid \|C\| \leq \varepsilon^2\}$. Это обеспечивает корректное управление, гарантирует положительность функции α_k/ρ квадратного корня в (1), (2).

Условия сходимости (устойчивости) оператора (1) с допустимыми управлениями, полученные на основе принципа сжимающих отображений для регуляризованного оператора неравномерного сжатия, представляются оценкой параметра обратной связи в виде неравенства [2, 3]

$$\begin{aligned}&|\gamma| < (1-\|H\|)\cdot\Big[\,\|F\|\cdot\|T\|\cdot\\ &\cdot\Big(\|P_A\|\cdot\|c\|\cdot\|H\| + 2r\rho^{-1}|2\theta-1|\cdot\left\|\tilde{P}^0\right\|\cdot\|C\|\cdot\|c\|^2\cdot\|H\|^2\cdot\|D\|\Big)\Big]^{-1} =\\ &= (1-\|H\|)\cdot\Big[\|F\|\cdot\|T\|\Big(\alpha + 2\alpha^2 r\rho^{-1}|2\theta-1|\cdot\left\|\tilde{P}^0\right\|\cdot\|C\|\Big)\Big]^{-1},\end{aligned} \tag{4}$$

где $\alpha = \|P_A\|\cdot\|c\|\cdot\|H\|$, $D = P_A^T P_A$, $\|D\| = \|P_A\| = \left\|\left(AA^T\right)^{-1}\right\|$.

В соотношениях (4) использованы спектральные нормы, удовлетворяющие операторным, групповым и кольцевым условиям. Условия (4) для системы с допустимыми параметрами включают условия для локально оптимального управления [3]. На основе указанной методики могут быть сформулированы условия для интервально оптимальной системы с суммарным функционалом.

Таким образом, регуляризация для больших отклонений состояний приводит к динамике системы с ограниченными ресурсами, которые проявляются при различных параметрах ограничений на состояния и ресурсы управлений. Необходимо учитывать сбалансированные параметры ограничений на координаты и ресурсов управления, а также локальность или интервальность оптимизации, что является важным фактором для сохранения асимптотической сходимости (устойчивости) или диссипативности системы при $m_k \to 0$, $k \to \infty$ [3]. Доказательство указанных условий использует принцип сжимающих отображения, теорему Банаха-Штейнгауса о равномерной ограниченности норм операторов Фреше, локально адекватных оператору (1), а также соответствующие оценки квадратичных форм в представлениях операторов конечномерной минимизации.

Рассмотренные операторы конечномерной минимизации и условия сходимости использованы для синтеза систем управления энергетическими объединениями [6, 7].

Литература

1. Козлов В. Н. Операторы минимизации линейных и негладких функционалов на компактных множествах // Научно–технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки, N 1(165), 2013. С. 164–170.

2. Козлов В. Н. Операторы минимизации нормы на компактных множествах евклидова пространства // Научно–технические ведомости СПбГПУ. Физико–матема-тические науки, N 3 (167), 2013.

3. Козлов В. Н. Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость. Изд–во Политехн. ун–та. СПб.: 2012.– 190 с.

4. Козлов В. Н. К аналитическому решению систем линейных алгебраических неравенств // Автоматика и телемеханика, 1989. N 4. с. 101–104.

5. Козлов В. Н. Синтез управлений крупномасштабными объектами на основе операторов оптимизации // Материалы 6–й Всероссийской мультиконференции «Проблемы управления», т. 3, Изд-во Южного федерального ун–та, Ростов–на–Дону. 2013. С. 195–197.

6. Козлов В. Н. Локальная оптимальность и устойчивость системы ограничения перетоков активной мощности по линиям энергообъединений // Изв. РАН. Энергетика, 2014, N 2.

7. Козлов В. Н. Управление частотой и перетоками активной мощности электроэнергетических объединений с учетом энергетической безопасности // Изв. РАН. Энергетика, 2012, N 3.

НОВЫЕ УСТОЙЧИВЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ СПЕКТРОСКОПИИ ДЛЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г.М. Курамшина[1], А.Г. Ягола[2]

[1]*МГУ имени М.В. Ломоносова, химический факультет, кафедра физической химии, Москва, Россия,*
[2]*МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Москва, Россия*

e-mail: [1]`kuramshi@phys.chem.msu.ru`, [2]`yagola@physics.msu.ru`

Аннотация: Рассмотрены подходы в рамках теории регуляризации А.Н. Тихонова к решению задач обработки данных молекулярной спектроскопии для многоатомных молекул и супрамолекулярных систем, входящих в биологические объекты.

Ключевые слова: молекула, силовое поле, квантово-химический расчет, устойчивые численные методы, регуляризованное квантово-химические силовое поле.

NEW STABLE ALGORITHMS OF SOLVING INVERSE PROBLEMS OF SPECTROSCOPY FOR BIOLOGICAL SYSTEMS

Abstract: Paper considers new approaches within Tikhonov's theory of regularization to solving inverse problems of molecular spectroscopy for bulk molecular systems related to the biological objects.

Keywords: molecule, force field, quantum mechanical calculation, stable numerical methods, regularized quantum mechanical force field.

Введение

Создание эффективных методов решения нелинейных некорректных задач в рамках теории регуляризации [1], бурное развитие в последние годы квантово-химических методов расчета, появление суперкомпьютеров и новых алгоритмов, позволяющих проводить расчеты громоздких молекулярных систем, определяют новые границы современной вычислительной химии. Эти возможности позволяют предложить методы предсказания физико-химических свойств супрамолекул, в частности, биологических систем, на основе объединения в рамках современных устойчивых численных методов обработки данных эксперимента и результатов квантовохимических расчетов. В данном обзоре кратко рассмотрены особенности возникающих при этом математических моделей, сложности и новые пути решения этой задачи.

1. Обратная задача восстановления молекулярного силового поля по экспериментальным данным

В квантовой механике молекула рассматривается как система, состоящая из точечных частиц — электронов (масса m, заряд e) и ядер (массы M_i, заряды $Z_i e$, $i = 1, 2, \ldots, N$). Гамильтониан этой системы включает различные виды движения: поступательное, вращательное, а также взаимное движение частиц. В некотором приближении эти движения можно разделить, зафиксировав какую-нибудь конфигурацию ядер $\{R_i^0\}$ и связав с ней систему отсчета, которая вращается и перемещается вместе с этой конфигурацией. Для относительного движения ядер (колебаний) можно ввести координаты $q_1, \ldots, q_n$ так, что $R_i - R_i^0 = \Delta R_i(q_1, \ldots, q_n)$, причем $\Delta R_i(0, \ldots, 0) = 0$. Выбор координат q достаточно произволен; их должно быть достаточно для полного задания относительной конфигурации ядер. В спектроскопии наиболее популярна так называемая система естественных координат, включающая: а) длины связей между валентно связанными атомами; б) валентные углы; в) углы между плоскостями троек атомов (если нужно); г) углы кручения (в тех случаях, когда есть кручение вокруг какой-либо связи). Точнее говоря, координаты соответствуют отклонениям перечисленных величин от их значений в конфигурации $\{R_i^0\}$. Число координат q должно быть не менее $3N-6$ (N — число атомов молекулы) и эти координаты можно выбрать линейными по ΔR_i. В этом случае элементы матрицы кинетической энергии в импульсном представлении G не будут зависеть от координат q.

Борн и Гейзенберг предложили замену переменных в выражении для гамильтониана молекулы, позволяющие применить к задаче на собственные значения теорию возмущений. Эта замена основана на том соображении, что массы ядер (M) и электронов (m) сильно отличаются (даже для самого легкого ядра $M/m \sim 2000$), в результате чего движение электронов в хорошем приближении можно рассматривать как происходящее в поле покоящихся ядер, и в первом приближении получается уравнение для движения электронов в поле ядер, фиксированных в некоторой конфигурации. Потенциальная функция $V(q_1, \ldots, q_n)$, входящая в это уравнение, называется адиабатическим потенциалом, или силовым полем молекулы. В первом порядке теории возмущений необходимо выполнение условия

$$\partial V/\partial q_k(R^0) = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

которое достигается, когда равновесная конфигурация молекулы $\{R^0\}$ соответствует минимуму функции V. Во втором же порядке теории возмущений получается задача на собственные значения для колебательного движения ядер, в которую входят матрица G и матрица F с элементами $F_{kl} = \partial^2 V/\partial q_k \partial q_l$, причем обе матрицы рассчитаны в конфигурации $\{R_0\}$. Матрицу F называют матрицей силовых постоянных, а G — матрицей кинематических коэффициентов. В матричном виде уравнение на собственные значения записывается в виде

$$GFL = L\Lambda, \tag{1}$$

где Λ — диагональная матрица из квадратов собственных частот колебаний молекулы, L — матрица собственных векторов. Интересно отметить, что классическая задача о колебаниях точечных заряженных частиц приводит к такой же задаче на собственные значения, что и квантово-механическое рассмотрение. Это уравнение мы может записать в виде

$$AF = \Lambda, \tag{2}$$

где оператор A — нелинейный оператор, действующий в конечномерных пространствах и сопоставляющий симметричной неотрицательно определенной матрице F упорядоченный (скажем в порядке неубывания) набор собственных чисел Λ матрицы GF, G — фиксированная неотрицательно определенная матрица. $F \in Z = R^{n(n+1)/2}$ (n — число обобщенных координат) — матрица силовых постоянных, образованная вторыми производными потенциальной энергии по обобщенным координатам в точке равновесия, $A \in U = R^l$ — набор всех доступных экспериментальных данных (вектор, составленный из квадратов экспериментальных частот колебаний молекулы и ее изотопомеров, а также из величин также связанных с матрицей F, таких, как кориолисовы постоянные, постоянные центробежного искажения, средние амплитуды колебаний и др.). Общее число экспериментальных данных равно l.

Таким образом, оператор A, определяемый массами ядер и равновесной конфигурацией молекулы, сопоставляет каждой симметричной положительно определенной матрице F набор вычисляемых величин, отвечающих этим экспериментальным данным. Зависимости этих величин, составляющих правую часть уравнения (4), от элементов матрицы F разнородны, нелинейны, не независимы, а также при использовании данных, полученных с погрешностью, могут быть и несовместны. Несовместность может возникнуть и вследствие недостаточности имеющейся информации при построении более сложной модели (учитывающей, например, ангармоничность колебаний). Эта недостаточность приводит в большинстве случаев и к невозможности выделения единственного решения уравнения (1). Наконец, полученное решение может быть неустойчиво относительно малых возмущений входных данных. Таким образом, рассматриваемая задача относится к классу так называемых *некорректно поставленных обратных задач*, т.е. для нее не выполняются все три условия корректности Адамара (разрешимость задачи, единственность решения, устойчивость решения по отношению к ошибкам входных данных). Эти трудности хорошо известны спектроскопистам, поскольку задача определения матрицы силовых постоянных F из уравнения (2) практически всегда оказывается либо недоопределенной, либо несовместной, либо недоопределенной и несовместной одновременно. Несмотря на неблагоприятные математические свойства, данная задача привлекала внимание многих исследователей, так как знание силовых постоянных позволяет достаточно просто оценить колебательный спектр молекулы и рассчитать термодинамический свойства вещества. Особенно это оказывается удобным при необходимости оценок термодинамических свойств неустойчивых и лабильных соединений.

В такой ситуации для получения надежных результатов и преодоления произвола в расчете силовых постоянных важно использовать устойчивые методы решения обратной колебательной задачи, приводящие к получению устойчивых решений с некоторыми заданными свойствами. Для решения обратных задач колебательной спектроскопии был развит подходы, основанный на теории нелинейных некорректно поставленных задач [2-9], предложены различные постановки задач [2-6], которые учитывают специфику широко используемых моделей силовых полей. В подходе, развитом в наших работах, реализованы модели, в которых сформулирован и формализован ряд как явных, так и неявных модельных соображений относительно характера силовых полей, которые широко используются в расчете колебаний молекул. Такие модели могут включать, в частности, свойство переносимости силовых постоянных в рядах родственных соединений, тесно связанное с существованием т.н. характеристических или групповых частот колебаний, относящихся к отдельным функциональным группам в многоатомных молекулах. Нами было предложено [2-4] все возможные модельные предположения учитывать с помощью априорного выбора некоторой матрицы F^0, полученной из расчетов для родственных или модельных молекул, или каким-либо иным путем и заданием множества априорных ограничений D на искомую матрицу F. Множество D т. о. определяет вид искомой матрицы F в рамках выбранной модели (положение нулей и соотношения величин диагональных и недиагональных элементов, равенство ряда постоянных между собой и т.п.). Если априорные сведения о виде решения отсутствуют, то полагаем $D = Z$.

На основе этой формализации был предложен принцип отбора единственного решения из множества решений в рамках теории регуляризации А.Н.Тихонова: в смысле близости решения к некоторому данному элементу (матрице силовых постоянных) $F^0 \in Z$, удовлетворяющему всем априорным предположениям о модельных характеристиках решения. В случае несовместности обратной задачи в рамках гармонической модели (которая может возникнуть при использования частот изотопомеров или другой дополнительной информации), можно ставить задачу поиска матрицы F, для которой расстояние от AF до Λ (в произвольных единицах) является минимальным, т.е. поиска так называемого псевдорешения задачи (если $D \neq Z$, т.н. квазирешения). В случае неединственности поиск псевдо(квази)решения необходимо осуществлять так же, как и в случае неединственности решения — т.е. выбирать из всех возможных псевдо(квази)решений то, которое является ближайшим к заданной матрице F^0 (нормальное псевдо(квази)решение).

Приходим к следующей формулировке обратной задачи, приняв во внимание сформулированный выше принцип отбора решения. Предположим, что имеем уравнение (4) и оператор A, который сопоставляет некоторой симметричной и положительно определенной матрице F набор квадратов колебательных частот молекулы (возможно включая частоты изотопомеров), а также средние амплитуды колебаний, кориолисовы постоянные и т.п. величины, получаемые из эксперимента. Размерность вектора определяется числом известных экспериментальных данных. Так как симметричная матрица F определяется $n(n+1)/2$ элементами, можно рассматривать неизвестные силовые постоянные как вектор из пространства размерности $n(n+1)/2$. Тогда оператор A действует из евклидова пространства $R^{n(n+1)/2}$ в эвклидово пространство R^l . В обоих пространствах введем следующие нормы:

$$\|F\| = \left(\sum_{k=1}^{1} f_k^2\right)^{1/2}; \quad \|\Lambda\| = \left(\sum_{k=1}^{1} \lambda_k^2 \rho_k\right)^{1/2},$$

где $\rho_k > 0$ — веса; f_k и λ_k элементы F и Z.

Оператор A является непрерывным для всех рассматриваемых задач. Уравнение (4) может иметь неединственное решение, либо вообще никакого решения, из-за ангармоничности частот колебаний.

Предположим, что известна некоторая матрица F^0 (вектор размерности $n(n+1)/2$). Ставится задача нахождения нормального псевдо(квази)решения уравнения (1): требуется найти

$$F_n = argmin\|F - F^0\|, \; F \in \{F : F \in D, \; \|AF - \Lambda\| = \mu\},$$

где $\mu = \inf \|AF - \Lambda\|, \; F \in D$.

Элемент $F^0 \in D$ может быть определен из априорных соображений о виде решения и других идей, например, о переносимости силовых постоянных в ряду сходных фрагментов разных молекул), а D является замкнутым множеством априорных ограничений на силовые постоянные. Если ограничений нет, то $D = R^{n(n+1)/2}$.

Точный вид вектора Λ и оператора A неизвестны, имеется вектор Λ_δ, определенный из экспериментальных данных как $\|\Lambda - \Lambda_\delta\|$, ($\delta > 0$ — экспериментальная ошибка: $\|\Lambda - \Lambda_\delta\| \leqslant \delta$) и оператор A_h, приближающий оператор $A; h > 0$ — параметр, характеризующий близость A_h к A. Погрешность оператора A связана с ошибками в экспериментальных данных о геометрических параметрах в равновесной конфигурации. Следовательно, возникает задача решения уравнения (4), когда неизвестны точный вид A и, a известны лишь их приближения A_h и δ и их ошибки $\eta = (h, \delta)$. Необходимо найти вектор F_η, приближающий точное нормальное псевдо(квази)решение F_n. Принимая вышесказанное во внимание, можно сформулировать следующую задачу:

дано уравнение (4): требуется найти по приближенным данным $\{A_h, \delta, h, \}$ приближение $F_\eta \in D$ к решению F_n такое, что

$$F_\eta \to F_n$$

при $\eta \to 0$, т.е. алгоритм поиска F_n должен быть регуляризирующим по Тихонову. Возможны и другие формулировки, некоторые из которых рассмотрены в [3,4]. Обсуждены особенности решения нелинейных некорректных задач в конечномерном случае, к которым относится и обратная колебательная задача, дана общая формулировка тихоновской схемы построения регуляризирующего алгоритма для решения основной задачи, т.е. построения по приближенным данным элемента, сходящегося к множеству нормальных решений при стремлении погрешностей оператора и входных данных к нулю. Теоремы устойчивости рассмотрены в [2,8].

Один из предложенных регуляризирующих алгоритмов [2-4] расчета силового поля молекулы основан на минимизации функционала Тихонова:

$$M^\alpha[F] = \|A_h F - \Lambda_\delta\|^2 + \alpha\|F - F^0\|^2, , \tag{3}$$

где α — параметр регуляризации, выбираемый в процессе минимизации по обобщенному принципу невязки [8]. Второй член в (3) называется стабилизатором функционала. В результате минимизацим $M^\alpha[F]$ на заданном множестве априорных ограничений D находится так называемое нормальное решение (или нормальное псевдорешение, если задача несовместна), которое воспроизводит экспериментальные данные в пределах заданной погрешности δ с учетом возможной несовместности и является ближайшим (в смысле выбранной метрики) к заданной матрице F^0. Множество априорных ограничений D может быть сформулировано в виде различных ограничений на величины силовых постоянных (некоторые силовые постоянные

$f_{ij} = 0$, $n_{ij} \leqslant f_{ij} \leqslant m_{ij}$; $f_{ij} = f_{kl}$, и т.д.). Также возможен и полезен в ряде случаев совместный расчет силового поля для ряда родственных молекул [3]. Для проведения расчетов колебательных спектров многоатомных молекул создаются базы по силовым постоянным [], основанные, как правило, на эмпирическом правиле переносимости силовых постоянных, вытекающем из постулатов классической теории строения молекул.

2. Квантово-химические расчеты в колебательной спектроскопии

При использовании регуляризирующих алгоритмов повысить устойчивость обратной колебательной задачи и точность получаемых приближенных решений можно при следующих условиях:

а) за счет использования всех доступных экспериментальных данных;

б) за счет удачного выбора матрицы F^0;

в) за счет удачного выбора множества априорных ограничений D (выбор модели силового поля).

Новым подход к решению обратной колебательной задачи, предложенный в наших работах и реализованный в виде соответствующих алгоритмов, основан на использовании результатов квантово-химических расчетов, как для выбора матрицы F^0, так и для выбора модели силового поля, был сформулирован в [2,9,10]. Была предложена принципиально новая постановка задачи отыскания параметров молекулярного силового поля по всем имеющимся экспериментальным данным и результатам квантовомеханических расчетов с учетом известных априорных ограничений на силовые постоянные как задача поиска т.н. регуляризированного квантовомеханического силового поля (РКМСП). Сущность этого подхода в том, что по заданным с погрешностями экспериментальным данным ищется устойчивыми методами приближение к т.н. нормальному псевдорешению, т.е. матрица $F_{h,\delta}$, ближайшая по норме к заданной квантовомеханической матрице силовых постоянных и удовлетворяющая множеству априорных ограничений и экспериментальным данным с учетом возможной несовместности задачи.

Особое значение при решении обратной задачи нахождения силовых полей молекул по экспериментальным данным имеет выбор множества априорных ограничений D, которое может включать в себя ограничения

1. типа огранический на величины силовых постоянных (например, *a priori* известных равенств нулю для некоторых силовых постоянных);

2. типа неравенств $a_{ij} \leqslant f_{ij} \leqslant b_{ij}$, a_{ij}, b_{ij} — известны;

3. типа равенство между собой силовых постоянных в рядах соединений (конформеров);

4. типа поиска решения обратной колебательной задачи в виде масштабированной матрицы Пулаи [10]:

$$D = \{F: \ F = BF^0B\}, \ B = diag\{\beta_1, \dots, \beta_n\}.$$

Эти ограничения могут вводиться на основе анализа матриц силовых постоянных многоатомных молекул, полученных с помощью квантовохимических расчетов [11,12].

На основе этих и ряда других регуляризирующих алгоритмов решения задач колебательной спектроскопии и структурной химии создан комплекс программ СПЕКТР [2,7]. В комплексе используются современные высокоэффективные и быстродействующие алгоритмы на основе теории регуляризации, позволяющие одновременно минимизировать до десятков тысяч параметров. Наряду с реализацией общего подхода в соответствии с идеями теории регуляризации, в программном комплексе сохранена возможность сужения множества определяемых параметров путем наложения жестких ограничений, часто применяемых в практике спектральных и структурных расчетов. В расчетах биологических систем особенно важными являются ограничения, которые позволяют сузить размерности возникающих обратных задач для отдельных молекулярных фрагментов и, таким образом, уменьшить число параметров силовых полей для рассматриваемой системы. В данный комплекс программ также включен ряд сервисных программ (для анализа симметрии молекулярной структуры, подготовки входного файла для решения колебательных задач, визуализации молекулярной структуры и др.), также представляющие собой оригинальные разработки авторов комплекса программ.

В комплексе программ реализован ряд важных возможностей:

1) Возможность применения различных систем координат (в том числе декартовых, естественных, зависимых и независимых);

2) Использование строгого анализа симметрии;

3) Широкое применение данных квантово-механических расчетов;

4) Возможность обработки разнообразных комбинаций экспериментальных данных в рамках единой программы;

5) Поддержка разнообразных представлений решения (в том числе и параметрических);

6) Возможность специального моделирования решения — введение попарных равенств силовых элементов в различных молекулах, наложения нулевых ограничений на некоторые элементы, совместный расчёт родственных соединений и т.п.;

7) Автоматизация расчёта с элементами экспертной поддержки.

Как правило, при выборе модели силового поля, которое предполагается общим (переносимым) для ряда соединений близкого строения необходимо вводить ряд ограничений, для того, чтобы число силовых постоянных было не очень большим (в общем случае это верхний или нижний треугольник симметрической матрицы, включающий в себя $n(n+1)/2$ величин). Обычно вводятся предположения о малости постоянных взаимодействия между удаленными фрагментами (например такими, которые не имеют общих атомов), о равенстве силовых постоянных отвечающих фрагментам, имеющим одинаковое первое окружение и т.д. Использование независимых систем обобщенных координат означает, что для тех блоков матрицы силовых постоянных, которые относятся к молекулярному фрагменту групп $= XY_2, -XY_3$, циклов и т.п., формально необходимо в матрице силовых постоянных поддерживать не локальную симметрию данной функциональной группы, а учитывать наличие линейных зависимостей между силовыми постоянными. На практике это достаточно сложно реализуемая задача, поэтому, как правило, в моделях силовых полей при эмпирических расчетах ограничиваются учетом локальной симметрии без учета линейных зависимостей. В целом, для силовых полей, рассчитанных в независимых системах внутренних координат, перенос силовых постоянных в рядах родственных молекул требует унифицированного выбора системы координат во всем ряду рассматриваемых молекул. Для упрощения задачи синтеза силовых полей и переноса силовых постоянных в рядах родственных соединений нами предложено использовать полную (зависимую) систему естественных координат, что облегчает сопоставление результатов решений обратных задач для сложных соединений.

Результаты квантово-химических расчетов существенно зависят от выбора теоретической модели (уровня расчета и набора базисных функций). Однако массовые квантово-химические расчеты позволяют конструировать модели силовых полей различных рядов родственных соединений для выбранного теоретического уровня, которые могут эффективно использоваться для предсказаний неизученных соединений. Теоретические данные позволяют не только обнаружить какие-либо признаки, характерные для матриц силовых постоянных тех или иных соединений или классов соединений, но также и понять природу различий между величинами силовых постоянных и структурных параметров. Квантово-химические силовые поля (матрицы вторых производных потенциальной энергии) рассчитываются обычно в декартовых координатах, а далее преобразуются в любую систему обобщенных координат, включая зависимую систему внутренних координат. Это снимает проблему унифицирования системы обобщенных координат в рядах соединений, поскольку выбор внутренних (естественных) координат q (уравнения выше) достаточно произволен. На основе комплекса СПЕКТР была разработана база данных ИСМОЛ [13-15].

3. Расчет частот колебаний громоздких молекулярных систем (супрамолекул)

Биологические системы можно охарактеризовать как супрамолекулы, определение которых было впервые введено и далее уточнялось Х.М. Леном [16]. Супрамолекулярная химия в соответствии с этим определением является "химией за пределами молекулы изучающей структуру и функции ассоциаций двух и более химических частиц, удерживаемых вместе межмолекулярными силами. Для адекватного описания супрамолекулы необходимы сведения об элементах, образующих данный объект, типы связей между ними и пространственные характеристики такие, как относительное расположение и пространственная ориентация. В качестве супрамолекул принято рассматривать олигомерные структуры, которые возникают при межмолекулярной ассоциации нескольких компонентов и имеют четко обозначенную структуру, и молекулярные ансамбли или полимолекулярные системы, образующиеся при спонтанной ассоциации отдельных фрагментов и далее переходящие в в четко обозначенную структуру [17]. Таким образом, супрамолекулы могут быть охарактеризованы пространственным расположением фрагментов (в качестве которых могут выступать отдельные молекулы), т. е. иметь определенную конформацию, в которой можно выделить различные типы взаимодействий, характеризующиеся силой, направленность и зависящие от расстояний и углов. Образование таких сложных систем может происходить за счет т.н. координационных взаимодействий с ионами металлов, межмолекулярных водородных связей, ван-дерваальсовых взаимодействий и т.д.

Помимо широкого использования понятий супрамолекулярной химии при исследованиях полимерных соединений и биологических объектов, существует направление в супрамолекулярной химии, связанное с созданием молекулярных и супрамолекулярных устройств с некими заданными свойствами, которые образуются из фрагментов, связанных, соответственно, ковалентными и нековалентными силами. В частности, особый интерес представляют т.н. "молекулярные переключатели который могут изменять пространственную структуру при изменении внешних факторов (кислотности среды, электрохимического потенциала, температуры и т.п.). При исследованиях свойств супрамолекулярных объектов, очевидно, необходимо знание о строении и конформационных свойствах различных компонентов супрамолекулы. В частности, при анализе спектральных свойств супрамолекулярных систем, относящихся к биологическим объектам, необходимо полное знание о геометрической структуре и колебательных спектрах отдельных фрагментов молекулы. Расчет термодинамических свойств супрамолекулы может быть осуществлен при знании строения и колебательных спектров входящих в нее отдельных фрагментов (молекул). Основная трудность, возникающая при построении модели системы, связана с определением относительной ориентации отдельных фрагментов относительно друг друга. В целом, этот подход к анализу супрамолекулярных систем оказывается близок к аддитивным схемам, предложенным в рамках классической химии, когда геометрические параметры, связанные с взаимной ориентацией отдельных фрагментов сложных молекулярных систем, определялись, например, с помощью подходов молекулярной механики.

Для расчета колебательных спектров громоздких молекулярных систем, включающих сотни и тысячи атомов (полимеров, наноструктур, биологических систем, кластеров и т.д.) предлагается следующая схема:

1. Для молекул среднего размера (фрагментов рассматриваемых громоздких систем, для которых имеются литературные данные по структурам молекул и колебательным спектрам, проводится предварительный квантово-химический расчет на выбранном в качестве базового теоретическом уровне;

2. Далее на основе совместного использования результатов квантово-химического расчета и доступных экспериментальных данных выполняется расчет регулиризованного квантовохимического силового поля;

3. На основе последовательного выполнения пп. 1-2 данной схемы на том же теоретическом уровне находятся регуляризованные силовые поля всех составных фрагментов рассматриваемой системы;

4. С использованием регуляризирующих алгоритмов определяются параметры потенциала межмолекулярного взаимодействия.

Силовое поле рассматриваемой системы синтезируется из регуляризованных полей фрагментов со сшивкой через параметры межмолекулярного взаимодействия, для нахождения которых нами был ранее предложен регуляризирующий алгоритм. Рассмотренные выше алгоритмы использованы для предсказаний колебательных спектров мелатонина (рис. 1) и его катаболитов.

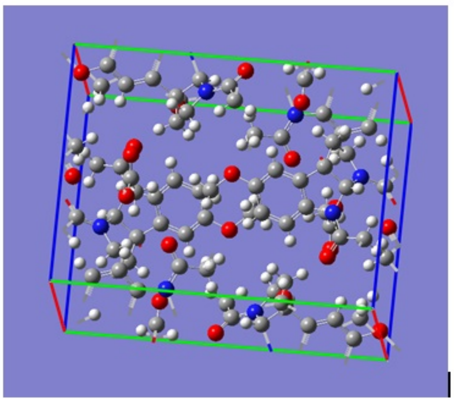


Рис. 1. Структура мелатонина.

Мелатонин — нейрогормон, синтезируемый в организме из аминокислоты триптофана, присутствует во всех живых системах и играет огромную роль в различных биологических и физиологических регуляторных процессах (рис.1). Особую роль играет антиокислительная способность мелатонина, а также то, что продукты, образующиеся при его метаболизме, также являются антиоксидантами, т.е. катаболитами или природно возникаюшими метаболитами. Важнейшими катаболитами являются N-гамма-ацетил-N-формил-5-метоксикинуренамин (АФМК) и N-гамма-ацетил-5-метоксикинуренамин (АМК), представляющие собой вещества с мелатониноподобной активностью по отношению к контролю биологических ритмов. Среди различных физико-химических методов, применяемых для определения мелатонина и продуктов его окисления в клинических исследованиях, методы колебательной спектроскопии занимают особое место, поскольку обладают высокой информативностью, сравнительной простотой применения и позволяют находить характеристические частоты колебаний и другие специфические спектральные характеристики, использующиеся для идентификации и анализа строения соединений, участвующих в биологических процессах. В данной работе рассматривались задачи обработки экспериментальных спектральных данных мелатонина и продуктов его окисления с целью определения положений в молекулах, наиболее чувствительных к изотопозамещению (изотопных меток).

При синтезе матриц силовых постоянных громоздких соединений, включающих в себя сотни и тысячи атомов, введение внутренних координат является отдельной и достаточно сложной задачей. Часть этой задачи, связанная с определением т.н. плоских координат (растяжения связей и изменений валентных углов) достаточно просто может быть автоматизирована, однако выбор т.н. неплоских координат, связанных с изменениями двугранных углов в отдельных фрагментах, а также с относительными деформациями двугранных углов для удаленных фрагментов громоздких молекул, как правило, требует участия исследователя. Перенос силовых постоянных, определенных во внутренних координатах, для сложных соединений сводится к формированию огромных массивов силовых постоянных. Созданные нами новые алгоритмы расчета силовых полей многоатомных молекул в декартовых системах координат [18] позволяют решить проблемы, связанные с неоднозначностью выбора систем обобщенных координат при анализе силовых полей сложных молекулярных систем. Основная идея – избежать введения внутренних координат на этапе коррекции квантовомеханического силового поля и одновременно получить в рамках теории регуляризации силовое поле в декартовых координатах, воспроизводящее экспериментальные частоты. Матрица силовых постоянных в этом приближении определяется аналогично введенной выше матрице Пулаи, представляющей параметрическую форму силового поля

$$F = BF^0B \tag{4}$$

Однако, в отличие от модели Пулаи, которая первоначально вводилась для обобщенных внутренних координат или координат локальной симметрии и в которой матрица B (матрица т.н. масштабирующих множителей) является диагональной, при коррекции матрицы в декартовых координатах матрица B не должна быть диагональной. Главная особенность матриц силовых постоянных в декартовых координатах — то, что они не являются автоматически независимыми от положения молекулы и ее ориентации.

Для того чтобы матрица силовых постоянных в декартовых координатах имела физический смысл необходимо наложить ряд условий. Представим матрицу силовых постоянных в виде композиции из субматриц 3×3, соответствующих каждому атому.

$$F = \begin{pmatrix} F_{(11)} & F_{(12)} & \dots & F_{(1N)} \\ F_{(21)} & F_{(22)} & \dots & F_{(2N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{(N1)} & F_{(N2)} & \dots & F_{(NN)} \end{pmatrix} \tag{5}$$

где N равно числу атомов в молекуле. Требование независимости потенциальной энергии от трансляций и вращения молекулы как целого формулируется в виде следующих ограничений, введенных в [22]:

$$\sum_{i=1}^{N} f_{(ij)} = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} V_i f_{(ij)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \tag{6}$$

в которых субматрицы размерности 3×3 определены в следующем виде:

$$V_i = \begin{pmatrix} 0 & -Z_i^0 & Y_i^0 \\ Z_i^0 & 0 & -X_i^0 \\ -Y_i^0 & X_i^0 & 0 \end{pmatrix},$$

и $X_i^0, Y_i^), Z_i^0$ являются компонентами декартовых координат i-го атома atom в равновесной конфигурации. Наложение условий (6) уменьшает ранг матрицы F до $3N - 6$ (или $3N - 5$ для линейных молекул) и, таким образом, оставляет только колебательные степени свободы. При решении обратной задачи в декартовых координатах F в рамках модели масштабирования можно предположить, что априорно заданная матрица F^0 удовлетворяет требованиям (5). Однако это не означает, что масштабированная матрица F также будет удовлетворять этим требованиям. Для исключения зависимости масштабированной матрицы F от трансляция и вращения молекулы как целого необходимо, чтобы матрица масштабирующих множителей B удовлетворяла ряду условий, как это было показано в [18]:

1) Матрица B аналогично матрице силовых постоянных в декартовых координатах (4) должная состоять из субматриц размерности 3×3, умноженных на масштабирующие факторы β_{ij} $(i, j, = 1, \dots, N)$:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11}E & \beta_{12}E & \dots & \beta_{1N}E \\ \beta_{21}E & \beta_{22}E & \dots & \beta_{2N}E \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{N1}E & \beta_{N2}E & \dots & \beta_{NN}E \end{pmatrix}$$

2) Факторы β_{ij} должны удовлетворять следующим условиям:

$$\beta_{ij} = \beta_{ji};$$

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_{1i} = \sum_{i=1}^{N} \beta_{2i} = \dots = \sum_{i=1}^{N} \beta_{Ni} = S = const. \tag{7}$$

Из этих условий видно, что если все β_{ii} одинаковы, то матрица B — диагональная и, наоборот, если матрица B — диагональна, то все факторы равны между собой. Если требуется учесть дополнительные ограничения, возникающие из условий симметрии молекулы или из-за каких-либо модельных предположений, то они должны быть сформулированы и добавлены к условиям (6). В общем случае матрица B

состоит из $N(N-1)/2+1$ независимых параметров, так как все диагональные члены могут быть представлены в следующем виде

$$\beta_{ii} = S - \sum_{j \neq i} \beta_{ij}.$$

При этих условиях мы можем сформулировать обратную колебательную задачу как задачу (1), при условии, что множество априорных ограничений D будет включать условия (6). Решение обратной задачи (матрица масштабирующих множителей) может быть также найдено с помощью минимизации функционала Тихонова (2). Множество ограничений D при необходимости может также содержать ограничения, аналогичные тем, которые вводятся при решении обратной задачи во внутренних координатах такие, как равенство нулю ряда недиагональных элементов, попарных равенств или ограничений по симметрии.

Эти алгоритмы успешно использованы для решения обратных задач нахождения регуляризованных квантово-химических силовых полей в декартовых координатах для ряда биологически важных соединений — нуклеиновых кислот (глутаминовой кислоты [19], аденина, гуанина, цитозина, и др. [20], а также производных мелатонина с пептидной связью [21] и производных бензимидазола [22]. Рассмотрим пример молекулы глутаминовой кислоты, модель которой представлена ниже (рис. 2). Глутаминовая кислота и ее производные участвуют в живых организмах в процессах метаболизма аминокислот и цикла Кребса. Молекула кислоты состоит из 19 атомов и для расчета колебаний в естественных координатах необходимо введение 57 зависимых координат. Соответствующая матрица силовых постоянных (в силу симметричности матрицы рассматривается верхний треугольник) будет содержать 1653 параметра, часть из которых можно принять равными нулю, тем не менее, число ненулевых элементов остается достаточно большим (~ 350). При использовании декартовых координат общее число параметров (верхний треугольник матрицы масштабирующих факторов) равно 190, а с учетом ряда параметров, фиксированных равными нулю, и попарного равенства для атомов одинакового типа число параметров уменьшается до 48.

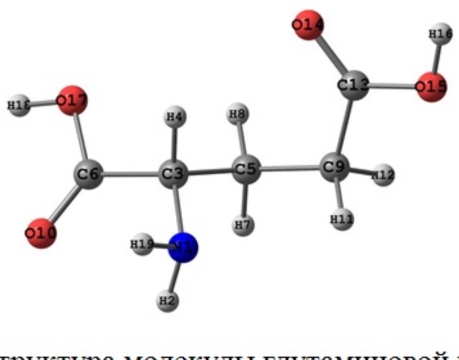


Рис. 2. Структура молекулы глутаминовой кислоты.

Таким образом, при использовании декартовых координат можно добиться существенного уменьшения корректирующих факторов для квантово-химического силового поля. Предложенные в наших работах устойчивые алгоритмы для решения обратной колебательной задачи в рамках теории регуляризации нелинейных некорректных задач позволяют в явной форме учитывать специфику сложных биологических систем путем включения различных ограничений на структуру матрицы силовых постоянных на основе анализа результатов квантово-химических расчетов.

Работа поддержана грантами РФФИ 14-03-00929а, 14-01-00182а.

Литература

1. Tikhonov, A.N., Leonov, A.S. and Yagola, A.G. Nonlinear Ill-posed Problems. Chapman Hall, London. 1998, 388 pp.

2. Yagola A.G., Kochikov I.V., Kuramshina G.M., Pentin Yu.A. Inverse Problems of Vibrational Spectroscopy. VSP. Zeist. The Netherlands, 1999. 297 p.

3. Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Пентин Ю.А., Ягола А.Г. ДАН СССР, 1981. Т. 261, № 5. С. 1104 — 1106.

4. Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Пентин Ю.А., Ягола А.Г. ДАН СССР. 1985. Т. 283, № 4. С. 850 — 854.

5. Доставалова А.С., Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Ягола А.Г. ДАН СССР. - 1990, т. 315, № 6, С. 1368 — 1373.

6. Kochikov I.V., Yagola A.G., Kuramshina G.M., Kovba V.M., Pentin Yu.A. Spectrochim.Acta. 1985. Vol. 41A, No 1-2, P. 185 — 189.

7. Кочиков И.В., Курамшина Г.М. Вестник Моск. ун-та, сер. 2, химия, 1985. Т. 26, № 4. С. 354 — 358.

8. Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Ягола А.Г. Журн. вычисл. матем. и матем. Физики, 1987. Т. 27, № 11. С. 1651 — 1661.

9. Kuramshina G.M., Weinhold F.A., Kochikov I.V., Pentin Yu.A., Yagola A.G. J. Chem. Phys. 1994. Vol. 100, No 2. P. 1414 — 1424.

10. Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Степанова А.В., Ягола А.Г.. Вестник Моск. ун-та, серия 3, Физика, Астрономия, 1997. № 5. С. 21 — 25.

11. Курамшина Г.М., Ягола А.Г. Журнал структурной химии, 1997. Т. 38, № 2. С. 221 — 239.

12. Kuramshina G.M., Weinhold F. Journal of Molecular Structure, 1997. V.410 — 411. P. 457 — 462.

13. Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Самков Л.М., Шарапов Д.А., Шарапова С.А. Вычислительные методы и программирование, 2005. Т.6. С. 83 — 87.

14. Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Самков Л.М., Шарапов Д.А., Шарапова С.А. Вычислительные методы и программирование, 2006. Т.7. С. 111 — 116.

15. Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Самков Л.М., Шарапов Д.А., Шарапова С.А. Вычислительные методы и программирование, 2007. Т.8. С.70 — 73.

16. Лен Ж.-М. Супрамолекулярная химия. Концепции и перспективы. Новосибирск, Наука, 1998. 334 с.

17. Зоркий П.М., Лубнина И.Е. Вестн. Моск. Ун-та, сер. 2, Химия, 1999. Т.40, №5,. С. 300 — 307.

18. Kochikov I.V., Kuramshina G.M., Stepanova A.V.. International Journal of Quantum Chemistry, 2009. Vol.109, No 1. P. 28 — 33.

19. Доценко Г. С., Курамшина Г. М., Пентин Ю. А. Журнал физической химии, 2010. Т. 84, № 7. С. 1304 — 1314.

20. Kuramshina G.M., Sharapova S.A.,. Sharapov D.A. Regularized quantum mechanical molecular force fields of purine and its derivatives. In 19th Conference on Current trends of computational chemistry, Oct. 29 — 30, 2010, Jackson, Miss., Proceedings. P.78 — 79.

21. Давыдова И.Б., Сенявин В.М., Зефирова О.Н., Курамшина Г.М., Пентин Ю.А. Журнал физической химии, 2014. Т. 88, № 4. С. 657 — 666.

22. Вакула , Вакула Н.И., Курамшина Г.М., Пентин Ю.А.. Журнал физической химии, 2013. Т. 87, №9. С.1538 — 1548.

23. Kochikov I.V., Kuramshina G.M., Stepanova A.V.. International Journal of Quantum Chemistry, 2009. Vol.109, No 1. P. 28 — 33.

ЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

А.С. Леонов

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия

e-mail: asleonov@mephi.ru

Аннотация: Рассматривается понятие линейной априорной оценки точности приближенных решений обратных задач. Устанавливается, что линейная оценка может быть получена, только если обратная задача корректна по Тихонову. Дается конструктивный алгоритм нахождения линейных оценок. Приводится пример численного нахождения линейной оценки.

Ключевые слова: обратные задачи, линейные априорные оценки точности, корректность по Тихонову

LINEAR ACCURACY ESTIMATES FOR APPROXIMATE SOLUTIONS TO LINEAR AND NON-LINEAR INVERSE PROBLEMS

Abstract: The concept of linear a priori estimate of the accuracy for approximate solutions to inverse problems is under consideration. It is established that the linear estimate can be obtained only if the inverse problem is well-posed, according to Tikhonov. An algorithm is given for finding linear estimates, as well as an example of numerical calculation of the linear estimate.

Keywords: inverse problems, linear a priori estimate of the accuracy, well-posedness according to Tikhonov

1. Пусть Z и U гильбертовы пространства. Рассмотрим операторное уравнение $F(z) = u$ с непрерывным оператором $F : Z \to U$. Считаем, что для правой части $u \in U$ оно разрешимо. Нас интересует его решение $\bar{z} \in Z$ с минимальной нормой (нормальное решение). Величина u известна с погрешностью δ: дана такая правая часть $u_\delta \in U$, что $\|u - u_\delta\| \le \delta$. Так как задача нахождения по данным (F, u_δ) приближения $z_\delta \in Z$ к $\bar{z}$ часто оказывается некорректно поставленной, то для ее решения применяются регуляризующие алгоритмы (регуляризаторы, РА). Многие РА могут быть записаны в форме $z_\delta = R_\delta(u_\delta)$, где R_δ – некоторый оператор, действующий из U в Z.

В теории обратных и некорректно поставленных задач принята следующая схема получения априорной оценки точности приближения z_δ (см. работы А.Б.Бакушинского, Г.М.Вайнико, В.К.Иванова, В.В.Васина, В.П.Тананы и многие другие; полные ссылки можно найти в [1]). Фиксируется некоторое множество $M \subset Z$, содержащее точное нормальное решение $\bar{z}$, и вводится величина

$$\Delta_M(\delta) = \sup_{z \in M,\, u_\delta \in \Sigma_\delta(F,z)} \|R_\delta(u_\delta) - z\| .$$

Здесь $\Sigma_\delta(F,z) = \{u_\delta \in U : \|u_\delta - u\| \le \delta;\, u = F(z)\}$ – множество всех допустимых приближенных данных уравнения $F(z) = u$. Далее, находится функция $\varphi_M(\delta)$ такая, что $\Delta_M(\delta) \le \varphi_M(\delta)$. Тогда $\|z_\delta - \bar{z}\| \le \varphi_M(\delta)$, и функция $\varphi_M(\delta)$ есть искомая априорная оценка, верная для любого точного решения $\bar{z}$ из множества M.

Априорные оценки хорошо изучены для случая, когда $F = A$ – линейный вполне непрерывный инъективный оператор. Тогда для многих РА на множествах $M = M_r^{(p)} = \{z = |A|^p v : v \in Z, \|v\| \le r\}$, где $|A| = (A^*A)^{1/2}$, а $p > 0$ – заданное число, можно получить оптимальную по порядку точности оценку

$$\|z_\delta - \bar{z}\| \le C(r,p)\delta^{\frac{p}{p+1}},\ C(r,p) = \mathrm{const}. \qquad (1)$$

Сравним это со случаем линейного ограниченного нормально разрешимого оператора A. Он имеет ограниченный псевдообратный оператор $A^+ : U \to Z$, который может быть неустойчивым к возмущениям оператора A. Поэтому задача вычисления нормального решения $\bar{z} = A^+u$ уравнения $Az = u$ с возмущенным оператором $A_h : Z \to U$, $\|A_h - A\| \le h$, является в общем случае некорректно поставленной, а в случае точно заданного ($h = 0$) оператора A – корректной (устойчивой) задачей. Для таких операторов A известны РА с приближенными решениями вида $z_{h\delta} = g_{h\delta}(A_h^*A_h)A_h^*u_\delta$, которые оптимальны по порядку на множестве $M = Z$, если функции $g_{h\delta}(\lambda)$ обладают некоторыми специальными свойствами, причем оценка точности имеет вид

$$\|z_{h\delta} - \bar{z}\| \le C_0(\delta + h),\ C_0 = \mathrm{const}. \qquad (2)$$

(см. цитированные в [1] работы Г.М.Вайникко, В.А.Морозова и др.). Оценка (2) качественно и количественно отличается от оценки (1) тем, что она по порядку сравнима с погрешностями данных h, δ. Будем в дальнейшем называть оценки вида (2) на множестве M *линейными оценками* (по δ и h).

Ниже изучается вопрос о том, для каких обратных задач вида $F(z) = u$ и каких множеств M найдутся приближенные решения z_δ, имеющие линейную оценку точности $\varphi_M(\delta) = C\delta$. Указывается также, как найти такие приближенные решения.

2. Центральный результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть уравнение $F(z) = u$ имеет единственное решение $z \in M$ для каждой правой части $u \in F(M)$. Для выполнения линейной оценки*

$$\sup_{z\in M,\, u_\delta\in\Sigma_\delta(F,z)} \|R_\delta(u_\delta) - z\| \le C\delta,\ C = C(M) > 0, \qquad (3)$$

необходимо, чтобы на множестве M выполнялось неравенство

$$\|z_1 - z_2\| \le 2C\,\|F(z_1) - F(z_2)\|\,,\ \forall z_{1,2} \in M, \qquad (4)$$

которое влечет корректность по Тихонову на множестве M рассматриваемой обратной задачи.

Из теоремы 1 ясно, что для получения при решении обратной задачи $F(z) = u$ линейной оценки мы должны выбрать адекватное множество корректности M и решать на нем обратную задачу с помощью некоторого алгоритма. Такой подход предложен в известной статье А.Н.Тихонова (ДАН СССР, 1943) и затем развивался многими авторами. Однако, вопрос о линейных оценках в этих работах не ставился. Впервые он поставлен в [1].

2. В 2012 – 2013 г. М.Ю.Кокурин получил результат [2], который для нашей постановки задачи формулируется так.

Утверждение 1. *Корректные по Тихонову задачи и только они допускают регуляризатор $R_\delta(u) = R(u)$, не зависящий явно от уровня погрешности данных δ.*

Комбинируя теорему 1 с этим утверждением, получим следующие предложения.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1, из выполнения линейной оценки (3) следует, что для рассматриваемой обратной задачи существует регуляризатор, не зависящий явно от уровня погрешности данных.*

Теорема 3. *Пусть выполнено условие теоремы 1 и неравенство (4). Тогда существует регуляризатор $R_\delta(u) = R(u)$, не зависящий явно от δ и дающий приближенные решения $z_\delta = R(u_\delta)$, для которых верна линейная оценка $\Delta_M(\delta) \le 4C\delta$.*

Теорема 3 в определенном смысле является обратной к теореме 1. Фигурирующий в ней метод регуляризации $R(u)$, не зависящий от δ, – это, например, известный метод квазирешений В.К.Иванова.

Приведем пример нелинейной обратной задачи $F(z) = u$ и соответствующего множества M, на котором по теореме 3 может быть получена линейная оценка точности.

Теорема 4. *Пусть оператор $F(z)$ равномерно непрерывно дифференцируем по Фреше в некоторой окрестности $B_r(\bar{z})$ радиуса $r > 0$ решения $\bar{z}$ уравнения $F(z) = u$, причем это решение единственно в $B_r(\bar{z})$. Пусть, далее, производная $F'(\bar{z})$ есть нормально разрешимый оператор. Тогда найдется некоторая окрестность $M = B_{r_1}(\bar{z})$, $r_1 < r$, где выполнено неравенство (4).*

Для уравнений $F(z) = u$ с нормально разрешимой производной итерационные регуляризующие алгоритмы, имеющие линейную оценку точности, изучались в [3].

4. Если мы знаем уровень погрешности данных δ, то его можно использовать для приближенного решения обратной задачи на множестве M следующим образом. По теореме 1 необходимым условием выполнения линейной оценки (3) является неравенство (4), которое справедливо с $2C = \nu^{-1}$, если выполнено неравенство

$$\nu = \inf \left\{ \frac{\|F(z_1) - F(z_2)\|}{\|z_1 - z_2\|} : \ z_{1,2} \in M, \ z_1 \ne z_2 \right\} > 0. \tag{5}$$

Число $\nu > 0$ можно использовать для нахождения линейной оценки точности приближений к $\bar{z} \in M$, полученных с помощью *метода невязки на множестве корректности* (МНМК). В этом методе в качестве приближенного решения обратной задачи принимается любой элемент $z_\delta \in M$, для которого выполнено неравенство

$$\|F(z_\delta) - u_\delta\| \le d\delta, \ d = \mathrm{const} > 1. \tag{6}$$

Элемент z_δ существует, т.к. множество $\mathcal{Z}_\delta = \{z \in M : \ \|F(z) - u_\delta\| \le d\delta\}$, содержащее $\bar{z}$, не пусто. В несколько иной форме МНМК рассмотрен ранее в [4].

Теорема 5. *Пусть $\nu > 0$. Тогда для приближенного решения $z_\delta \in M$, полученного с помощью МНМК, справедлива линейная оценка точности*

$$\|z_\delta - \bar{z}\| \le (1 + d)\delta/\nu. \tag{7}$$

Замечание 1. Абсолютную точность приближенного решения из оценки (7) удобно преобразовать в относительную, вводя относительную точность данных $\varepsilon = \frac{\delta}{\|\bar{u}\|} = \frac{\delta}{\|F(\bar{z})\|}$. Тогда

$$\|z_\delta - \bar{z}\| \,/\, \|\bar{z}\| \le (1+d)\,\|F(\bar{z})\|\,\varepsilon/(\|\bar{z}\|\,\nu). \tag{8}$$

Если на множестве M выполнена оценка $\|F(z)\| \le F_0\,\|z\|$ с известной величиной F_0, то из (8) получается линейная оценка

$$\|z_\delta - \bar{z}\| \,/\, \|\bar{z}\| \le (1+d)F_0\varepsilon/\nu = (1+d)\kappa(M)\varepsilon. \tag{9}$$

Коэффициент $\kappa(M) = \frac{F_0}{\nu}$ можно считать "числом обусловленности" для решения обратной задачи на множестве M. Число $\kappa(M)$ можно использовать как меру качества выбранного множества корректности M, сравнивая эти числа для различных множеств, которые применяются при решении обратной задачи.

Если число F_0 неизвестно или $F_0 = \infty$, то из (8) можно получить апостериорную оценку, пригодную для практического использования при "малых" ε:

$$\frac{\|\bar{z} - z_\delta\|}{\|\bar{z}\|} \le \frac{1+d}{\nu}\frac{\|u_\delta\|}{\|z_\delta\|\left(1 - \varepsilon - \varepsilon\frac{1+d}{\nu}\frac{\|u_\delta\|}{\|z_\delta\|}\right)}\varepsilon. \tag{10}$$

5. Численная реализация алгоритма МНМК основана на следующем утверждении.

Теорема 6. *Предположим, что уравнение $F(z) = u$ имеет для правой части $\bar{u} \in U$ единственное решение $\bar{z} \in M$. Пусть $\{z_n\} \subset M$ – произвольная минимизирующая последовательность для невязки $\|F(z) - u_\delta\|$ на множестве M. Тогда по крайней мере для достаточно малых $\delta \ne 0$ найдется такой номер $n(\delta)$, что для элемента $z_\delta = z_{n(\delta)}$ выполнено неравенство* (6).

Поэтому элемент $z_\delta = z_{n(\delta)}$ можно принять как приближенное решение в МНМК.

6. В качестве примера рассмотрим двумерную обратную задачу гравиметрии (см. рис.1a): по аномалии вертикальной компоненты силы тяжести Δg на земной поверхности найти положение $[a,b]$ и форму $z(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$, контактной поверхности двух геологических пластов, залегающей на глубине $z = -H < 0$, если известна разность их плотностей $\Delta\rho$. Введем функцию $\tilde{z}(x) = \{-H,\ x \notin [a,b]; -H + z(x),\ x \in (a,b)\}$. Тогда задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$F(z) \equiv \int\limits_c^d \ln\frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + \tilde{z}(\xi)^2}d\xi = u(x), \quad \tilde{z}(\xi) \in L_2[c,d], \tag{11}$$

при ограничениях $\tilde{z}(\xi) \ge -H$, $[a,b] \subset [c,d]$. Здесь $u(x) = \frac{2\pi}{\Delta\rho}\Delta g \in L_2[c,d] = U$.

Решим уравнение (11) с параметрами $a = -1, b = 1, H = 2$ и модельным точным решением $\tilde{z}(x) = \{-2,\ x \notin [-1,1]; -2 + \bar{z}(x),\ x \in (-1,1)\}$ для $x \in [c,d]$, $c = -3$, $d = 3$ с $\bar{z}(x) = (1-x^2)^2$. При этом $\tilde{z}(x) \in Z = W_2^1[c,d]$. Возмущенная правая часть u_δ моделировалась для различных относительных точностей ε, $0 < \varepsilon < 0.1$, так, что $\|u_\delta - u\|_{L_2[c,d]} = \delta = \varepsilon\,\|u\|_{L_2[c,d]}$.

Сначала используем метод регуляризации А.Н.Тихонова с выбором параметра по принципу невязки. Тогда приближенное решение имеет вид $z^{\alpha(\delta)}(x) \in Z$, где

$$z^{\alpha}(x) = \arg\inf\left\{\alpha \|z\|_Z^2 + \|F(z) - u_\delta\|_U^2 : \; z \in Z, \, z \geq -H\right\},$$

а $\alpha(\delta) > 0$ – решение уравнения $\beta(\alpha) \equiv \|F(z^\alpha) - u_\delta\|_U^2 = \delta^2$. В результате находится относительная точность приближенного решения $\Delta_{rel}(\varepsilon) = \left\|\tilde{z} - z^{\alpha(\delta)}\right\|_{L_2[c,d]} / \|\tilde{z}\|_{L_2[c,d]}$. В расчетах использовалась дискретизация задачи на равномерных сетках $\{x_i\}_{i=1}^N = \{\xi_j\}_{j=1}^N$ по $x, \xi \in [-3, 3]$ с $N = 501$.

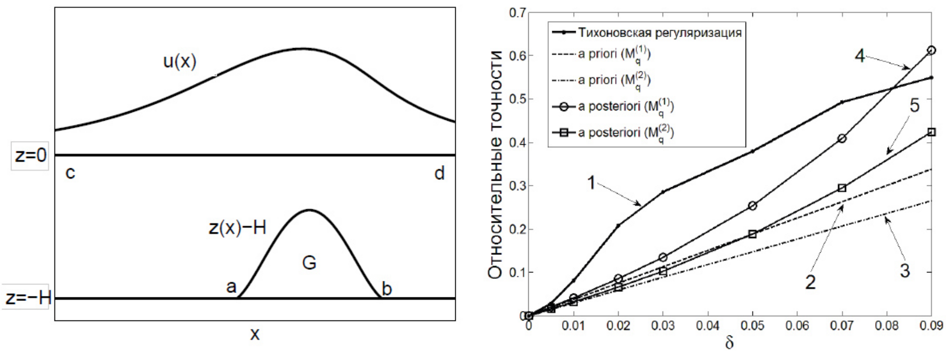


Рис. 1. а) Модель контактной поверхности. б) Относительная точность приближенных решений; 1 – метод регуляризации; 2, 3 – априорные линейные оценки точности (9) для множеств $M_q^{(1)}$, $M_q^{(2)}$ соответственно; 4, 5 – апостериорные оценки точности (10) для множеств $M_q^{(1)}$, $M_q^{(2)}$.

Повторяя K раз процедуру решения для каждого $\varepsilon = [0.05; \, 0.1; \, 0.3; \, 0.5; \, 0.7; \, 0.9]$ и усредняя полученные величины $\Delta_{rel}^{(k)}(\varepsilon)$ $(k = 1, \ldots K)$, получим среднюю эмпирическую оценку относительной точности метода А.Н.Тихонова как функцию ε: $\bar{\Delta}_{rel}(\varepsilon) = \frac{1}{K}\sum\limits_{k=1}^{K} \Delta_{rel}^{(k)}(\varepsilon)$. Зависимость $\bar{\Delta}_{rel}(\varepsilon)$ для $K = 10$ показана на рис.1б как кривая 1. Видна нелинейность этой зависимости.

Теперь используем априорную информацию о включении функции $\bar{z}(x)$ в параметрический класс корректности $M = \{z(x; q) = q_1 \left[x - (q_2 - q_3)\right]^2 \left[x - (q_2 + q_3)\right]^2$, где параметры $q = (q_1, q_2, q_3)$ принадлежат множеству априорных ограничений M_q. Вычисления проводились для $M_q^{(1)} = \{0.5 \leq q_1 \leq 1.2, \; -1.5 \leq q_2 \leq 1.5, \; 0.5 \leq q_3 \leq 1.2\}$ и $M_q^{(2)} = \{0.5 \leq q_1 \leq 1.2, \; -1 \leq q_2 \leq 1, \; 0.5 \leq q_3 \leq 1.2\}$, $M_q^{(2)} \subset M_q^{(1)}$. Решая задачу (5), получим ν_1, ν_2 для множеств $M_q^{(1)}$, $M_q^{(2)}$: $\nu_1 \approx 0.2246$, $\nu_2 \approx 0.2865$. Далее, найдем с помощью формулы (8) линейные априорные оценки относительной точности для МНМК на множествах $M_q^{(1)}$, $M_q^{(2)}$ при $d = 1.01$. Результаты показаны на рис.1б как прямые 2 и 3. Наконец, получим практически важные апостериорные оценки алгоритма МНМК по формуле (10). Они даны на рис.1б как кривые 4 и 5.

Пример решения практической обратной задачи с линейной оценкой точности, приведен в [А.С. Леонов, В.Н. Сорокин. Акуст. журн., 2014, Т.60, N 6, С.656–662].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 14-01-00182-а и 14-01-91151-ГФЕН-а.

Литература

1. Леонов А.С. Может ли априорная оценка точности приближенного решения некорректной задачи быть сравнимой с ошибкой данных? // ЖВМ и МФ. 2014. Т. 54, N 4. С.562–568.

2. Кокурин М.Ю. Об условно-корректных и обобщенно-корректных задачах. // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53, N 6. С.857–866.

3. Кокурин М.Ю. Итеративно регуляризованные методы для нерегулярных нелинейных операторных уравнений с нормально разрешимой производной в решении // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тезисы докладов Всероссийской конференции, посвященной памяти В.К.Иванова. 2014. С.47–48.

4. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М. Наука, 1990. 232 с.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Ю.Л. Меньшиков

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Днепропетровск, Украина

e-mail: `Menshikov2003@list.ru`

Аннотация: В работе исследуется задача синтеза адекватного математического описания физических процессов. Показано, что в общем случае эта задача сводится к решению нескольких интегральных уравнений Вольтера первого рода (некорректная задача). Несколько возможных постановок таких задач было предложено. Для получения устойчивых результатов синтеза использовалась модификация метода регуляризации.

Ключевые слова: синтез адекватного описания, некорректные задачи, регуляризация.

INVERSE PROBLEMS OF SYNTHESIS

Abstract: The problem of synthesis of adequate mathematical description of physical processes is investigated. This problem reduces to the solution of several integral equations of the first kind of Volterra (ill-posed problem). Several possible statements of such problems were proposed. The modification of the regularization method was suggested for obtaining of stable solutions.

Keywords: synthesis of adequate mathematical description, ill-posed problems, regularization method.

Среди множества обратных задач можно выделить некоторый класс задач, которые имеют ряд отличительных особенностей. К таким задачам, например, можно отнести обратные задачи синтеза адекватного математического описания физических процессов, например [1,2,3]. После решения задачи синтеза адекватного математического описания результаты исследований можно использовать для прогноза поведения физического процесса методами математического моделирования [4]: в прогнозировании поведения различных технических устройств [5], прогноза погоды [6] и т.д.

Математическое описание физического процесса состоит из математической модели физического процесса и модели внешнего воздействия. В данной работе исследуются математические модели физических процессов в форме линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Хорошо известно, что обратные задачи синтеза могут быть сведены в нашем случае к решению линейных операторных уравнений первого рода [1,2,3]:

$$A_p z = u_\delta, \tag{1}$$

где A_p вполне непрерывный оператор, $A_p : Z \to U, z \in Z, u_\delta \in U, u_\delta$ - исходные экспериментальные данные (графические), z - неизвестная функция, Z, U - функциональные пространства.

Далее будем считать, что элемент u_δ в уравнении (1) задается с известной ошибкой:

$$\| u_\delta - u_{ex} \|_U \leq \delta,$$

где δ - константа, $\delta > 0, u_{ex}$ - точные исходные данные.

Обозначим через $Q_{\delta,p}$ множество:

$$Q_{\delta,p} = \{z : \|A_p z - u_\delta\|_U \leq \delta\}$$

Множество $Q_{\delta,p}$ является неограниченным при любом δ. Однако выбранная математическая модель физического процесса и любая функция из множества $Q_{\delta,p}$ обеспечивает адекватность результатов математического моделирования с точностью δ. Кроме того, точное решение $z_{ex}(A_p z_{ex} = u_{ex})$ уравнения (1) может не принадлежать множеству возможных решений уравнения (1) $Q_{\delta,p}$, так как оператор A_p неточно описывает реальный физический процесс [1,2,3].

В силу этого обратные задачи синтеза имеют ряд специфических особенностей:

– приближенное решение может значительно отличаться от точного решения z_{ex} ;

– размер погрешности приближенного решения по отношению к точному решению z_{ex} не имеет никакого значения при дальнейшем использовании приближенного решения для целей математического моделирования;

– точное решение z_{ex} обратной задачи в совокупности с выбранной математической моделью физического процесса может давать худшие результаты математического моделирования, так как точное решение z_{ex} может не принадлежать множеству возможных решений $Q_{\delta,p}$;

– можно игнорировать ошибку оператора A_p по отношению к точному оператору, так как именно выбранная (неточная) математическая модель физического процесса будут использоваться при математическом моделировании в дальнейшем;

– нет смысла изучать поведение приближенного решения обратной задачи в зависимости от уменьшения погрешности исходных данных δ. Другими словами, приближенное решение может не иметь свойства регуляризованного решения.

Для определения единственного устойчивого решения обратной задачи (1) из множества возможных решений можно использовать подход, который был предложен Д.Филлипсом и А.Н.Тихоновым [7].

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\Omega[z_{\delta,p}] = \inf_{z \in Q_{\delta,p} \cap Z_1} \Omega[z], \tag{2}$$

где функционал $\Omega[z]$ определен на множестве Z_1 (Z_1 всюду плотно в Z) [7].

Теорема 1. *Пусть Z есть рефлексивное банаховое функциональное пространство, функционал $\Omega[z]$ является выпуклым и полунепрерывным снизу на $Q_{\delta,p}$, множество Лебега для произвольной функции из $Q_{\delta,p}$ ограничено. Тогда решение экстремальной задачи (2) существует и принадлежит $Q_{\delta,p}$.*

Следует отметить, что нет смысла исследовать поведение полученного решения при $\delta \to 0$.

В качестве практической обратной задачи синтеза рассмотрена задача построения адекватного математического описания процесса прокатки на листовом прокатном стане [8]. Одной из важных характеристик этого процесса прокатки является момент технологического сопротивления на рабочие валки прокатного стана со стороны прокатываемого металла (внешнее воздействие).

Кривая изменения момента технологического сопротивления, полученная с помощью современной теории термопластичности, показана на Рис.1. пунктирной линией.

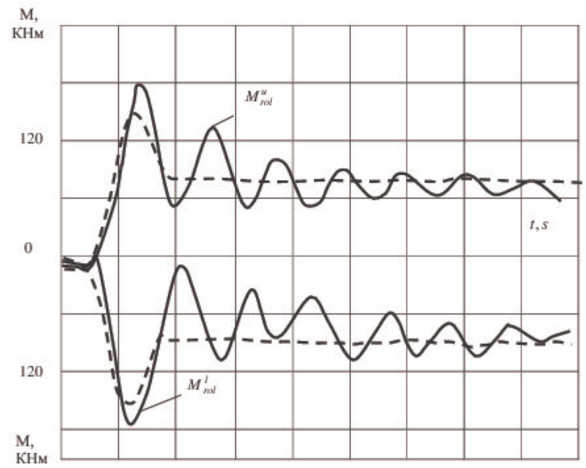


Рис. 1. Графики моделей моментов технологического сопротивления на рабочие валки листового прокатного стана во время прокатки.

В данной работе приводится решение задачи синтеза моделей внешних воздействий (моментов технологического сопротивления) методом идентификации [1,2]: по результатам экспериментальных измерений моментов сил упругости в главной механической линии прокатного стана требуется определить модель внешнего воздействия на рабочие валки.

Математическая модель движения главной линии листового прокатного стана была выбрана в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{12} + a_{12}M_{12} + a_{13}M_{23} + a_{14}M_{24} &= b_1 J_u, \\ \ddot{M}_{23} + a_{23}M_{23} + a_{22}M_{12} + a_{24}M_{24} &= b_2 M^u_{rol}, \\ \ddot{M}_{24} + a_{34}M_{24} + a_{32}M_{13} + a_{33}M_{23} &= b_3 M^l_{rol}. \end{aligned} \tag{3}$$

где функции $J_u(t), M_{23}(t), M_{24}(t)$ были получены экспериментальным путем [8]. Интегральное уравнение типа (1) были получены для решения задачи синтеза моделей внешних воздействий M^u_{rol}, M^l_{rol}.

Далее был использован метод регуляризации для решения обратной задачи идентификации моделей моментов технологического сопротивления [8]. Исходная задача (1) была заменена на эквивалентную экстремальную задачу (2).

Функционал вида

$$\Omega[z_{est}] = \int_0^T \dot{z}^2 dt \quad (4)$$

был выбран в качестве стабилизирующего функционала.

Модели внеших воздействий M^u_{rol}, M^l_{rol}, полученные в результате решения экстремальной задачи (2), показаны на Рис.1.(сплошными линиями).

Таким образом, получены модели внешних воздействий на рабочие валки листового прокатного, которые дают адекватное математическое описание процесса прокатки.

Заключение.

В работе был предложен возможный алгоритм синтеза адекватного математического описания физического процесса. Для математических моделей физических процессов, представляемых в виде системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, задача сводится к решению нескольких линейных интегральных уравнений Вольтера первого рода (некорректные задачи). Несколько возможных постановок таких задач было предложено. Для получения устойчивых результатов синтеза использовалась модификация метода регуляризации. В качестве примера рассмотрена практическая задача идентификации адекватного математического описания процесса прокатки на листовом прокатном стане.

Литература

1. Menshikov Yu.L. Synthesis of Adequate Mathematical Description as Solution of Special Inverse Problems // European Journal of Mathematical Sciences. 2013. v. 2, N 3, pp. 256–271.

2. Menshikov Yu.L. Inverse problems for dynamic systems: classification and solution methods // Journal Advances in Pure Mathematics. 2013. v. 3, N 4, pp. 390–393.

3. Спепашко В.С. Метод критических дисперсий как аналитический аппарат теории индуктивного моделирования // Проблемы управления и информатики.2008. N2, С.8–26.

4. Barbosa E., Goes L., Filho W. Control problem analysis using inverse simulation applied to the Brazilian satellite launcher during first and second stage of flight // 4-th Inverse Problems, Design and Optimization Symposium, Book of Abstracts, Albi, France, 2013, pp.63–64.

5. Thomson D., Bradley R. Inverse simulation as a tool for flight dynamics research - Principles and applications // Elsevier, Progress in Aerospace Sciences. 2006. N 42, pp.174–210.

6. Chedin A., Scott N., Wahicle C., Moulini P. The improved initialization inversion method: A high resolution physical method for temperature retrievals from TIROS-N series // Climate Appl. Meteor. 1985. N 24, pp.128–143.

7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.

8. Меньшиков Ю.Л., Ях Г.И. Идентификация момента технологического сопротивления на листовом прокатном стане // Известия вузов. Черная металлургия, М. 1977. N 9, С.69–73.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ТРЕХСЛОЙНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ

Д.Н. Раевский[1], И.Э. Степанова[2]

Институт Физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия

e-mail: [1]`nofirma2010@mail.ru`, [2]`tet@ifz.ru`

Аннотация: В статье предложена регуляризация трехслойного итерационного метода Чебышева для решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении обратных задач гравиметрии методом S-аппроксимаций.Данный метод апробирован на модельных примерах.

Ключевые слова: гравиметрия, обратная задача, аппроксимация, регуляризация, итерационный метод.

REGULARIZATED THREE-LAYER ITERATIVE CHEBYSHEV METHOD AT THE SOLVING INVERSE PROBLEMS OF GRAVIMETRY

Abstract: The regularization of three-layer iterative Chebyshev method for solving a system of linear equations arising from solving inverse problems of gravimetry by modified S-approximation method is offered in this paper. This method is tested on simulative examples.

Keywords: gravimetry, inverse problem, approximation, regularization, iterative method

Обратные задачи гравиметрии делятся на линейные и нелинейные. Если требуется найти распределение плотности по известному гравитационному полю или другим его компонентам, то имеем дело с линейной обратной задачей. Если же требуется определить носитель масс, то имеет место нелинейная обратная задача.

Гравиразведка является одним из методов детального изучения геологического строения коры и верхней мантии Земли. Высокочувствительные приборы позволяют выявлять очень слабые гравитационные аномалии, что дает возможность применять этот метод для решения задач поиска залежей углеводородов. Однако, в последние годы существенно изменились требования к методам и подходам интерпретации данных по следующим причинам:

1) Возрастание объема данных, подлежащих интерпретации.

2) Увеличение глубинности геологических исследований, так как запасы легко добываемых месторождений, находящиеся в верхней коре, почти исчерпаны.

3) Более сложные геологические условия, в которых проводятся работы, а также более сложное строение исследуемых тел (тела могут быть сложной формы, не являющейся выпуклой областью).

4) Непрерывно развивающиеся возможности вычислительных средств, доступы к кластерам суперкомпьютеров, применение более современной и высокотехнологичной аппаратуры.

5) Появление новых инженерно-эксплуатационных, экономических и экологических проблем.

С увеличением точности измерений возрастает влияние помех и осложнений, затрудняющих геологическое истолкование результатов гравиразведки. Так, при решении сложно структурированных задач, когда геологические объекты имеют разные форму и размеры, возникающие погрешности могут сильно искажать общую картину и не дать необходимой интерпретатору информации.

Метод S-аппроксимаций, основанный на методе линейных интегральных представлений, предложенный В. Н. Страховым [1-4], является одним из наиболее эффективных методов интерпретации данных гравиразведки. В рамках данного метода известная компонента гравитационного поля аппроксимируется суммой простого и двойного слоев, распределенных на некоторой совокупности областей (в локальном случае ими являются горизонтальные плоскости, в региональном – сферы или сфероиды). Метод S-аппроксимаций позволяет получить решение, с помощью которого можно эффективно строить линейные трансформанты поля, а также использовать в качестве нулевого приближения для решения нелинейной обратной задачи по локализации источника. В этом методе основная вычислительная проблема состоит в нахождении устойчивого приближенного решения $\hat{x}$, согласованного с имеющейся априорной информацией, системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$Ax = f_\delta = f + \delta f, \tag{1}$$

в которой f_δ есть N-вектор заданных величин, измеренных на некоторой поверхности, $A - N \times N$-матрица со свойством $A = A^T > 0$, а δf представляет собой N-вектор помехи.

Так как в правой части уравнения (1) присутствует помеха δf, то необходимо находить такое устойчивое приближенное решение $\hat{x}$, которое согласуется с определенной априорной информацией. В случае решения обратной задачи гравиметрии методом S-аппроксимаций, можно выделить следующие основные виды априорной информации:

1. Заданы постоянные $\delta^2_{min}, \delta^2_{max}$, фигурирующие в неравенствах:

$$\delta^2_{min} \le \|\delta f\|^2_E \le \delta^2_{max}, \tag{2}$$

где $\|\delta f\|^2_E = \sum_{i=1}^N (\delta f_i)^2$.

2. Известно, что вектор полезного сигнала f ортогонален вектору помеху δf:

$$\|f\|^2_E + \|\delta f\|^2_E = \|f_\delta\|^2_E. \tag{3}$$

Предполагается, что вектор помехи случаен и однороден. Другими словами, все компоненты δf_i являются некоррелированными и имеют нулевое математическое ожидание.

3. Нам известен некоторый функционал $\Omega(x)$, задающий отношение предпочтений на множестве приближенных решений $\hat{x}$ СЛАУ (1).

Определение 1. *Пусть имеется два произвольных приближенных решения $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ СЛАУ (1), удовлетворяющих условию $\|A\hat{x}_1 - f_\delta\|^2_E = \|A\hat{x}_2 - f_\delta\|^2_E$. Тогда функционал $\Omega(x)$ задает отношение предпочтения на множестве приближенных решений СЛАУ (1), если из неравенства $\Omega(\hat{x}_2) < \Omega(\hat{x}_1)$ следует, что приближенное решение $\hat{x}_2$ предпочтительнее приближенного решения $\hat{x}_1$.*

Авторами разработан и апробирован итерационный метод, основанный на регуляризации трехслойного итерационного метода Чебышева. Как известно, одно из самых замечательных свойств многочленов первого рода состоит в том, что они наименее отклоняются на отрезке [-1,1] [5,6]. Именно поэтому итерационные методы, построенные с использованием полиномов Чебышева, привлекают большое внимание исследователей различных направлений.

Рассмотрим регуляризованный аналог системы (1):

$$(A + \alpha S) = f_\delta, \tag{4}$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, $S = S^T > 0$ – невырожденная $N \times N$-матрица. В этом случае функционал $\Omega(x) = (Sx, x)$ задает отношение предпочтения на множестве приближенных решений СЛАУ (1). Затем система (4) решается с помощью трехслойного итерационного метода Чебышева. Приведем основную конструкцию этого метода [5,6]:

$$\begin{gathered} x^{i+1} = \beta_{i+1}\left(E - \tau\left(A + \alpha S\right)\right)x^i + \left(1 - \beta_{i+1}\right)x^{i-1} + \beta_{i+1}\tau f_\delta, \\ x^1 = \left(E - \tau\left(A + \alpha S\right)\right)x^0 + \tau f_\delta, i = 1, \ldots, \\ \tau = \frac{2}{l_\alpha + L_\alpha}\beta_1 = 2, \beta_{i+1} = \frac{4}{4 - \rho^2\beta_i}, \rho = \frac{L_\alpha - l_\alpha}{L_\alpha + l_\alpha}. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь L_α - максимальное собственное значение матрицы $A+\alpha S$, которое легко находится с помощью степенного метода. l_α здесь играет роль параметра, оценивающего минимальное собственное значение, который зависит от значения параметра регуляризации α и от свойств самой матрицы.

Особое внимание стоит уделить системе регуляризации системы. Если задавать параметры регуляризации α_k произвольным образом, то потребуется перебрать достаточно большое количество значений, прежде чем найти множество устойчивых приближенных решений. Поэтому выбор набора параметров регуляризации α_k должен задаваться таким образом, чтобы каждый последующий параметр опирался на значение предыдущего параметра, а также на свойства матрицы $A+\alpha S$ и на физические свойства исследуемой области (например, учитывать априорную информацию 1.). При таком подходе выбор набора параметров регуляризации α_k будет полностью автоматизирован.

Множество устойчивых приближенных решений $\hat{x}_r = x_{r,\alpha_\delta}, r = 1, 2, ..., R$, где α_δ есть значение, при котором выполняется неравенство:

$$\delta^2_{min} \le \|A\hat{x}_r - f_\delta\|^2_E \le \delta^2_{max}, r = 1, 2, ..., R. \tag{6}$$

Далее из найденного множества приближенных пробных решений отбираются те, которые минимизируют функционал, соответствующий имеющейся априорной информации:

$$\begin{gathered} \left(\|A\hat{x} - f_\delta\|^2_E - \delta^2_{min}\right)^2 + \left(\|A\hat{x} - f_\delta\|^2_E - \delta^2_{max}\right)^2 + \\ +\Omega^2(\hat{x}) + \left(\|A\hat{x} - f_\delta\|^2_E - \|A\hat{x}\|^2_E + \|f_\delta\|^2_E\right) = \min_\alpha . \end{gathered} \tag{7}$$

Допустим, что таким образом найдено множество допустимых решений $\dot{\hat{x}}_r, r = 1, 2, ..., R_{max}, R_{max} < R$. Искомое оптимальное решение СЛАУ (1) находится при помощи усреднения множества допустимых решений:

$$\tilde{x} = \sum_{r=1}^{R_{max}} p_r \dot{\hat{x}},\ p_r > 0,\ \sum_{r=1}^{R_{max}} p_r = 1. \tag{8}$$

В самом простом случае можно положить $p_r = const = 1/R_{max}$.

Данный метод был протестирован на нескольких модельных примерах и был проведен сравнительный анализ с регуляризованным методом Холецкого и методом Лаврентьева, описание которых можно найти в [7]. В модельных примерах аномалиеобразующие тела рассматривались разнообразной формы (параллелепипеды, кольца и т.д.), с разным количеством гравиметрических пунктов нерегулярной сети (то есть с различной размерностью системы) и различных отношениях сигнал/помеха. На основании проведенного анализа полученных решений и построенных линейных трансформант (продолжение поля в верхнее и нижнее полупространства, а также нахождение высших производных поля) сделаны следующие выводы:

I. Регуляризованный трехслойный итерационный метод Чебышева подходит для решения СЛАУ, возникающих при решении обратных задач гравиметрии. Полученные решения адекватно описывают физические свойства области и немногим отличаются от аналогичных решений, полученных при решении регуляризованным методом Холецкого и методом Лаврентьева (15-25%).

II. Время, затрачиваемое на решение СЛАУ (1) предложенным методом, намного меньше, чем при решении другими методами: например, если количество гравиметрических пунктов 5000-6000, то время решения СЛАУ регуляризованным методом Холецкого и методом Лаврентьева порядка 12 минут, а регуляризованным методом Чебышева – 2,5 минуты.

III. В случае, если отношение сигнал/помеха высоко (условно $\delta f / f_\delta > 0.002$), а тело залегает достаточно глубоко (так, что рассматриваемое поле от него близко к полю сферического тела), и представляет собой сложно сформированный геологический объект (например, кольцевидной формы), то в этом случае геометрическая форма объекта, полученная при использовании регуляризованного трехслойного итерационного метода Чебышева, ближе к теоретически заданной, чем при решении другими методами, что играет немаловажную роль при построении линейных трансформант поля и при дальнейшем решении нелинейной обратной задачи.

Литература

1. Страхов В.Н. О построении аналитических аппроксимаций аномальных гравитационных и магнитных полей // Основные проблемы теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, М. ОИФЗ РАН. 1999. С. 65–125.

2. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S- аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // Физика Земли. 2002. N 4. С. 3–19.

3. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S- аппроксимаций при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // Физика Земли. 2002. N 7. С. 3–12.

4. Страхов В.Н., Страхов А.В., Степанова И.Э. Актуальные проблемы геофизики и геоинформатики, М. ОИФЗ РАН, 2004.

5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений, М. Наука, 1978.

6. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева, М. Наука, 1983.

7. Ягола А.Г., Ван Янфей, Степанова И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике, М. БИНОМ, 2014.

Секция 5. Математическая физика

О БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМАХ С НЕ-B_U-ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ СИЛАМИ

С.А. Будочкина

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

e-mail: `sbudotchkina@yandex.ru`

Аннотация: В статье рассматривается вопрос о представимости операторного уравнения со второй производной по времени в форме уравнения Эйлера-Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы, исследуются симметрийные свойства заданного уравнения и соответствующего функционала - действия по Гамильтону, а также устанавливается связь между симметриями уравнения и алгебрами Ли.

Ключевые слова: квази-B_u-потенциальный оператор, действие по Гамильтону, симметрия, первый интеграл, алгебра Ли.

ON INFINITE-DIMENSIONAL LAGRANGIAN SYSTEMS WITH NON-B_U-POTENTIAL FORCES

Abstract: In the paper we investigate the representability of an operator equation with the second time derivative in the form of the Euler-Lagrange equation with a non-B_u-potential force density, study symmetry properties of the given equation and the corresponding Hamiltonian action and establish a connection between symmetries of the equation and Lie algebras.

Keywords: quasi-B_u-potential operator, Hamiltonian action, symmetry, first integral, Lie algebra.

Рассматривается уравнение

$$N(u) \equiv P_{2u,t}u_{tt} + P_{1u,t}u_t + P_{3u,t}u_t^2 + Q(t,u) = 0, \tag{1}$$

$$u \in D(N) \subseteq U \subseteq V, \ \ t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \ \ u_t \equiv D_t u \equiv \frac{d}{dt}u, \ \ u_{tt} \equiv \frac{d^2}{dt^2}u.$$

Здесь $\forall t \in [t_0, t_1]$, $\forall u \in U_1$ операторы $P_{iu,t} : U_1 \to V_1$ $(i = \overline{1,3})$ являются линейными; $Q : [t_0, t_1] \times U_1 \to V_1$ - произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный; $D(N)$ - область определения оператора N,

$$D(N) = \{u \in U : \ u(t) \in W \, \forall t \in [t_0, t_1], \ u|_{t=t_0} = \varphi_1, \ \ u|_{t=t_1} = \varphi_2,$$
$$u_t|_{t=t_0} = \varphi_3, \ \ u_t|_{t=t_1} = \varphi_4, \ \ \varphi_i \in U_1 \, (i = \overline{1,4})\}; \tag{2}$$

$U = C^2([t_0, t_1]; U_1)$, $V = C([t_0, t_1]; V_1)$, U_1, V_1 - действительные линейные нормированные пространства, $U_1 \subseteq V_1$. Множество W определяется внешними связями, наложенными на систему.

Операторное уравнение (1) может быть обыкновенным дифференциальным, дифференциальным уравнением с частными производными, интегро - дифференциальным уравнением, уравнением с отклоняющимися аргументами и др., а также системой таких уравнений.

В дальнейшем для упрощения обозначений будем записывать (1) также в виде

$$N(u) \equiv P_{2u}u_{tt} + P_{1u}u_t + P_{3u}u_t^2 + Q(u) = 0,$$

считая, что операторы P_{iu} $(i = \overline{1,3})$ и Q зависят также и от t.

В работе используются обозначения и терминология [1-6].

Определение 1. *Оператор $N : D(N) \to V$ называется квази-B_u-потенциаль-
ным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы Φ, если существуют линейный оператор $B_u : D(B_u) \subset V \to V$, дифференцируемый по Гато функционал $F : D(F) = D(N) \to \mathbb{R}$ и плотность не-B_u-потенциальной силы $\Lambda(u)$ такие, что*

$$\delta F[u,h] + \Phi\left(\Lambda(u), B_u h\right) = \Phi(N(u), B_u h)$$

$$\forall u \in D(N),\ \forall h \in D(N'_u, B_u).$$

Будем предполагать, что нелокальная билинейная форма

$$\Phi(\cdot,\cdot) \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \cdot,\cdot \rangle\, dt : V \times V \to \mathbb{R} \tag{3}$$

является симметрической и невырожденной, а плотность не-B_u-потенциальной силы имеет вид

$$\Lambda(u) = \Lambda_{2u}u_{tt} + \Lambda_{1u}u_t + \Lambda_{3u}u_t^2 + \Lambda_4(u),$$

причем операторы Λ_{iu} $(i = \overline{1,3})$ и Λ_4 могут зависеть также и от t.

Теорема 1. *Пусть $D_t^* = -D_t$ на $D(N'_u, B_u)$. Оператор N (1) является квази-B_u-потенциальным на множестве $D(N)$ (2) относительно билинейной формы (3) тогда и только тогда, когда $\forall u \in D(N)$, $\forall t \in [t_0,t_1]$, $\forall h \in D(N'_u, B_u)$ выполняются следующие условия на $D(N'_u, B_u)$:*

$$B_u^*\tilde{P}_{2u} - \tilde{P}_{2u}^*B_u = 0,$$

$$u_t\tilde{P}_{3u}^*B_u - \tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u(\cdot);u_t) - \tilde{P}_{2u}^*B'_u(\cdot;u_t) + B_u^*\tilde{P}_{3u}(u_t(\cdot)) = 0,$$

$$-2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^*B_u) + \tilde{P}_{1u}^*B_u + B_u^*\tilde{P}_{1u} = 0,$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tilde{P}_{2u}^*B_u)h + [B'_u(\cdot;h)]^*\tilde{Q}(u) - [B'_u(h;\cdot)]^*\tilde{Q}(u) + \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{1u}^*B_u)h + B_u^*\tilde{Q}'_u h - \tilde{Q}'^*_u B_u h = 0,$$

$$\tilde{P}_{1u}^{*\prime}(B_u h;u_t) + B_u^*\tilde{P}'_{1u}(u_t;h) - [\tilde{P}'_{1u}(u_t;\cdot)]^*B_u h + 2u_t\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{3u}^*B_u)h + \tilde{P}_{1u}^*B'_u(h;u_t) -$$

$$-2\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h;u_t) + [B'_u(\cdot;h)]^*\tilde{P}_{1u}u_t - 2\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{P}_{2u}^*B'_u(h;u_t)) - [B'_u(h;\cdot)]^*\tilde{P}_{1u}u_t = 0,$$

$$B_u^*\tilde{P}'_{2u}(u_{tt};h) - \tilde{P}_{2u}^{*\prime}(B_u h;u_{tt}) - [\tilde{P}'_{2u}(u_{tt};\cdot)]^*B_u h + 2u_{tt}\tilde{P}_{3u}^*B_u h +$$

$$+[B'_u(\cdot;h)]^*\tilde{P}_{2u}u_{tt}-\tilde{P}^*_{2u}B'_u(h;u_{tt})-[B'_u(h;\cdot)]^*\tilde{P}_{2u}u_{tt}=0,$$
$$-\tilde{P}^{*\prime\prime}_{2u}(B_uh;u_t;u_t)+B^*_u\tilde{P}'_{3u}(u_t^2;h)-[\tilde{P}'_{3u}(u_t^2;\cdot)]^*B_uh+2u_t\tilde{P}^{*\prime}_{3u}(B_uh;u_t)+[B'_u(\cdot;h)]^*\tilde{P}_{3u}u_t^2-$$
$$-2\tilde{P}^{*\prime}_{2u}(B'_u(h;u_t);u_t)-\tilde{P}^*_{2u}B''_u(h;u_t;u_t)+2u_t\tilde{P}^*_{3u}B'_u(h;u_t)-[B'_u(h;\cdot)]^*\tilde{P}_{3u}u_t^2=0,$$

где

$$\tilde{P}_{iu}=P_{iu}-\Lambda_{iu}\ (i=\overline{1,3}),\quad \tilde{Q}(u)=Q(u)-\Lambda_4(u).$$

В частности, операторный подход применен к исследованию представимости достаточно общего интегро-дифференциального уравнения с отклоняющимися аргументами в форме уравнения Эйлера-Лагранжа с непотенциальной плотностью силы.

Теорема 2. *Пусть $D_t^*=-D_t$ на $D(N'_u,B_u)$ и оператор N вида (1) является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ (2) относительно билинейной формы (3). Тогда функционал F имеет следующий вид:*

$$F[u]=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\Big\langle\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_tu),B_uu_t\Big\rangle+\Big\langle\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t,B_uu_t\Big\rangle+\Big\langle\tilde{\mathfrak{R}}_1(u),B_uu_t\Big\rangle-$$
$$-\Big\langle\frac{\partial}{\partial t}(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u})u,u_t\Big\rangle+\tilde{\mathfrak{B}}[u]\Big\}\,dt,\tag{4}$$

где

$$\Phi(\tilde{\mathfrak{R}}_1(u),B_uu_t)=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\Big\langle-\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0),B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\Big\rangle\,d\lambda dt,$$
$$\Phi(\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t,B_uu_t)=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\Big\langle-\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)}(u_t-u_{0_t}),B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\Big\rangle\,d\lambda dt,$$
$$\Phi(\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_tu),B_uu_t)=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\Big\langle-\tilde{P}_{3\tilde{u}(\lambda)}\Big(\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}(u-u_0)\Big),B_{\tilde{u}(\lambda)}\frac{\partial\tilde{u}(\lambda)}{\partial t}\Big\rangle\,d\lambda dt,$$
$$\tilde{\mathfrak{B}}[u]=\int_0^1\Big[\Big\langle\tilde{Q}(\tilde{u}(\lambda)),B_{\tilde{u}(\lambda)}(u-u_0)\Big\rangle+\lambda\Big\langle\frac{\partial}{\partial t}(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{1\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0),u-u_0\Big\rangle-$$
$$-\lambda\Big\langle\frac{\partial^2}{\partial t^2}(B^*_{\tilde{u}(\lambda)}\tilde{P}_{2\tilde{u}(\lambda)})(u-u_0),u-u_0\Big\rangle\Big]\,d\lambda,$$

u_0 - *фиксированный элемент из $D(N)$.*

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований вида

$$G:\left\{\begin{array}{l}\overline{t}=t+\varepsilon\varphi(t,u),\\ \overline{u}=u+\varepsilon\psi(t,u),\end{array}\right.\tag{5}$$

где φ,ψ - некоторые операторы.

С помощью преобразования (5) заданной функции $u(t)$ можно поставить в соответствие функцию $\overline{u}(t,\varepsilon)$ по правилу

$$\overline{u}=u+\varepsilon S(u),\tag{6}$$

где $S(u)=\psi(t,u)-u_t\varphi(t,u)$. При этом оператор S называется генератором преобразования (6).

Определение 2. *Преобразование (6) называется симметрией уравнения*

$$N(u)=0, \tag{7}$$

если для любого достаточно малого ε и любого решения u этого уравнения функция $\overline{u}$ вида (6) также является решением этого уравнения.

Отметим, что в этом случае оператор S называется также генератором симметрии уравнения (7).

Теорема 3. *Пусть S_1, S_2 - генераторы симметрий уравнения (1) и оператор N является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (3). Тогда*

$$I_1[t,u]=D_t\left\langle \tilde{P}_{2u}S_2(u),B_uS_1(u)\right\rangle-\left\langle 2\tilde{P}_{3u}(u_tS_2(u))+2\tilde{P}_{2u}D_tS_2(u),B_uS_1(u)\right\rangle-$$

$$-\left\langle \tilde{P}_{1u}S_2(u),B_uS_1(u)\right\rangle+D_t^{-1}\left[\langle\Lambda(u),B_u'(S_2(u);S_1(u))-B_u'(S_1(u);S_2(u))\rangle+\right.$$

$$\left.+\langle\Lambda_u'S_1(u),B_uS_2(u)\rangle-\langle\Lambda_u'S_2(u),B_uS_1(u)\rangle\right]$$

является первым интегралом уравнения (1).

Определение 3. *Преобразование (6) называется симметрией до дивергенции функционала (4) на W, если существует функционал f такой, что*

$$F^{T_1}[u+\varepsilon S(u)]=F^{T_1}[u]+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{T_1}D_tf[u]\,dt+r(u,\varepsilon S(u))\qquad\forall u\in W,\ \forall T_1:t_0\le T_1\le t_1,$$

причем $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\frac{r(u,\varepsilon S(u))}{\varepsilon}=0$.

Отметим, что оператор S называется также генератором симметрии до дивергенции, а симметрии функционала F называются также вариационными симметриями.

Теорема 4. *Если преобразование (6) - симметрия до дивергенции действия (4) на W, то*

$$I_2[t,u]=\left\langle\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(u_tu),B_uS(u)\right\rangle+\left\langle\tilde{\mathfrak{R}}_{3u}(uS(u)),B_uu_t\right\rangle+\left\langle\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}u_t,B_uS(u)\right\rangle-f[u]+$$

$$+\left\langle\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}S(u),B_uu_t\right\rangle+\left\langle\tilde{\mathfrak{R}}_{1}(u),B_uS(u)\right\rangle-D_t^{-1}\langle\Lambda(u),B_uS(u)\rangle-\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(B_u^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2u}\right)u,S(u)\right\rangle$$

является первым интегралом уравнения (1).

Определение 4. *Преобразование (6) называется конформной симметрией уравнения (1), если для любого достаточно малого ε любое решение уравнения (1) является также решением уравнения*

$$P_{2u}^cu_{tt}+P_{1u}^cu_t+P_{3u}^cu_t^2+Q^c(u)=0,$$

где

$$P_{2u}^cu_{tt}\equiv\Lambda_{2\overline{u}}u_{tt}-(B_u^{-1})^*(u\tilde{\mathfrak{R}}_{3\overline{u}}^*B_uu_{tt})-\tilde{\mathfrak{R}}_{3\overline{u}}(uu_{tt})-(B_u^{-1})^*\tilde{\mathfrak{R}}_{2\overline{u}}^*B_uu_{tt}-\tilde{\mathfrak{R}}_{2\overline{u}}u_{tt},$$

$$P_{1u}^c u_t \equiv -(B_u^{-1})^* \left(u\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\mathcal{R}}_{3\overline{u}}^* B_u)u_t \right) - (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t}(B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_{3\overline{u}})(uu_t) - (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\mathcal{R}}_{2\overline{u}}^* B_u)u_t +$$
$$+(B_u^{-1})^*(\tilde{\mathcal{R}}_1^c)'^*_u B_u u_t + (B_u^{-1})^*[B'_u(u_t;\cdot)]^* \tilde{\mathcal{R}}_1(\overline{u}) - (B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_1(\overline{u}); u_t) - (\tilde{\mathcal{R}}_1^c)'_u u_t -$$
$$-(B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_{2\overline{u}}u;\cdot) \right)^* u_t - (B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^*(\tilde{\mathcal{R}}_2^c)'_u(u;\cdot) \right)^* u_t - (B_u^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t} B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_{2\overline{u}} \right)^* u_t +$$
$$+(B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_{2\overline{u}}u; u_t) + (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^*(\tilde{\mathcal{R}}_2^c)'_u(u;u_t) + \Lambda_{1\overline{u}} u_t,$$
$$P_{3u}^c u_t^2 \equiv (B_u^{-1})^*((\tilde{\mathcal{R}}_3^c)'_u(u_t u;\cdot))^* B_u u_t - (B_u^{-1})^*(u(\tilde{\mathcal{R}}_3^c)^{*\prime}_u(B_u u_t; u_t)) + \Lambda_{3\overline{u}} u_t^2 -$$
$$-(B_u^{-1})^*(u\tilde{\mathcal{R}}_{3\overline{u}}^* B'_u(u_t;u_t)) - (B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_{3\overline{u}}(u_t u); u_t) - (\tilde{\mathcal{R}}_3^c)'_u(u_t u; u_t) - \tilde{\mathcal{R}}_{3\overline{u}} u_t^2 +$$
$$+(B_u^{-1})^*[B'_u(u_t;\cdot)]^* \tilde{\mathcal{R}}_{3\overline{u}}(u_t u) + (B_u^{-1})^*[(\tilde{\mathcal{R}}_2^c)'_u(u_t;\cdot)]^* B_u u_t - (B_u^{-1})^*(\tilde{\mathcal{R}}_2^c)^{*\prime}_u(B_u u_t; u_t) -$$
$$-(B_u^{-1})^* \tilde{\mathcal{R}}_{2\overline{u}}^* B'_u(u_t;u_t) - (\tilde{\mathcal{R}}_2^c)'_u(u_t;u_t) - (B_u^{-1})^* B_u^{*\prime}(\tilde{\mathcal{R}}_{2\overline{u}} u_t; u_t) + (B_u^{-1})^*[B'_u(u_t;\cdot)]^* \tilde{\mathcal{R}}_{2\overline{u}} u_t,$$
$$Q^c(u) \equiv \Lambda_4(\overline{u}) + (B_u{-}grad)_{\Phi_1} \tilde{\mathcal{B}}^c[u] - (B_u^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_1(\overline{u}) + (B_u^{-1})^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}(B_u^* \tilde{\mathcal{R}}_{2\overline{u}})u,$$
$$\tilde{\mathcal{B}}^c[u] \equiv \tilde{\mathcal{B}}[\overline{u}] \qquad \tilde{\mathcal{R}}_1^c \equiv \tilde{\mathcal{R}}_1(\overline{u}), \qquad \tilde{\mathcal{R}}_i^c \equiv \tilde{\mathcal{R}}_{i\overline{u}}, \;\; i=2,3.$$

Введем обозначение

$$\mathcal{G}[u] \equiv D_t^{-1} \left\{ \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{\mathcal{R}}'_{3u}(uu_t; S(u)) \right), B_u u_t \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}'_{3u}(uu_t; S(u)), \frac{\partial B_u}{\partial t} u_t \right\rangle + \right.$$
$$+ \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u_t; S(u)) \right), B_u u_t \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u_t; S(u)), \frac{\partial B_u}{\partial t} u_t \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{\mathcal{R}}'_{1u} S(u) \right), B_u u_t \right\rangle +$$
$$+ \left\langle \tilde{\mathcal{R}}'_{1u} S(u), \frac{\partial B_u}{\partial t} u_t \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(B_u{-}grad)_{\Phi_1} \tilde{\mathcal{B}}[u], B_u S(u) \right\rangle +$$
$$\left. + \left\langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1} \tilde{\mathcal{B}}[u], \frac{\partial}{\partial t}\left(B_u S(u)\right) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(B_u^* \tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u; S(u)) \right), u_t \right\rangle \right\}.$$

Теорема 5. *Если преобразование (6) является конформной симметрией уравнения (1), то*

$$I_3[t,u] = \left\langle (B_u{-}grad)_{\Phi_1} \tilde{\mathcal{B}}[u], B_u S(u) \right\rangle - \left\langle \tilde{\mathcal{R}}'_{3u}(uu_t; S(u)) + \tilde{\mathcal{R}}'_{2u}(u_t; S(u)), B_u u_t \right\rangle - \mathcal{G}[u]$$

является первым интегралом этого уравнения.

Теорема 6. *Если оператор N уравнения (1) является квази-B_u-потенциальным на $D(N)$ вида (2) относительно билинейной формы Φ (3), $\exists\,(B_u^*)^{-1}$ и*

$$B_u^* \Lambda'_u S(u) + [B'_u(\cdot; S(u))]^* \Lambda(u) + S'^*_u B_u^* \Lambda(u) = 0$$

на решениях уравнения (1), то симметрия функционала (4) является также симметрией заданного уравнения.

Теорема 7. *Генераторы симметрий уравнения (1) образуют алгебру Ли относительно коммутатора*

$$[S_1, S_2](u) = S'_{1u} S_2(u) - S'_{2u} S_1(u).$$

Литература

1. Савчин В.М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Изд-во УДН, 1991. 237 с.

2. Budotchkina S.A., Savchin V.M. On indirect variational formulations for operator equations // Journal of Function Spaces and Applications. 2007. Vol. 5, № 3. P. 231–242.

3. Budochkina S.A. Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation // Eurasian Mathematical Journal. 2012. Vol. 3, № 1. P. 18–28.

4. Будочкина С.А., Савчин В.М. О бесконечномерных лагранжевых системах с непотенциальными силами // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 5. С. 518–519.

5. Филиппов В.М., Савчин В.М., Будочкина С.А. О существовании вариационных принципов для эволюционных дифференциально-разностных уравнений // Труды МИАН. 2013. Т. 283. С. 25–39.

6. Савчин В.М., Будочкина С.А. О взаимосвязи симметрий функционалов и уравнений // Доклады Академии наук. 2014. Т. 458, № 2. С. 148–149.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

В.В. Карачик

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

e-mail: karachik@susu.ru

Аннотация: В настоящей статье для классической задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре приводится метод представления классического решения. Построена формула представления решения неоднородной задачи Дирихле для полигармонического уравнения, использующая решения l задач Дирихле для уравнения Лапласа.

Ключевые слова: задача Дирихле, полигармоническое уравнение, полигармонические функции, представление решения

DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POLYHARMONIC EQUATION IN THE UNIT BALL

Abstract: In the present paper for the classical Dirichlet boundary value problem for the polyharmonic equation in the unit ball a method for representation of the classical solution is presented. A formula for representation of the solution of the inhomogeneous Dirichlet problem for the polyharmonic equation, using l solutions of the Dirichlet problem for the Laplace equation is constructed.

Keywords: Dirichlet boundary value problem, polyharmonic equation, polyharmonic functions, solution representation

Рассмотрим неоднородную задачу Дирихле для l-гармонического уравнения в единичном шаре

$$\begin{gathered}\Delta^l u(x) = f(x),\ x \in S;\\ u_{|\partial S} = f_0(s), \ldots, \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}_{|\partial S} = f_{l-1}(s),\ s \in \partial S,\end{gathered} \tag{1}$$

где $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, ν – внешняя нормаль к ∂S. Известно, что если $f_k \in C^{l-1-k+\lambda}(\partial S)$, где $\lambda \in (0,1)$ и $k = \overline{0, l-1}$, то решение задачи (1) при $f = 0$ существует единственно и принадлежит классу $C^{l-1+\lambda}(\bar{S}) \cap C^{2l}(S)$.

Обозначим через $u_k(x; f)$ решение однородной задачи Дирихле ($f_0 = \cdots = f_{l-1} = 0$) при $l = k$, которое может быть выражено через функцию Грина [1,2]. В случае полиномиальных данных, т.е. при $f(x) = P(x)$, где $P(x)$ – полином, решение $u_k(x; P)$ имеет вид [4, формула (28)]

$$u_k(x;P) = \frac{(|x|^2-1)^k}{2(2k-2)!!} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s (1-\alpha)^{s+k-1}}{(2s)!!(2s+2k)!!} \Delta^s P(\alpha x)\, \alpha^{n/2-1}\, d\alpha. \qquad (2)$$

Пример 1.

1^0. Нетрудно подсчитать, что при $P(x) = 1$ будет

$$u_k(x;1) = \frac{(|x|^2-1)^k}{(2,2)_k (n,2)_k},$$

где $(a,b)_k = a(a+k)\cdots(a+(k-1)b)$ – обобщенный символ Похгаммера, с соглашением $(a,b)_0 = 1$.

2^0. С помощью пакета "Mathematica" полином $u_4(x; Q_6)$ при $n = 3$, $Q_6(x) = x_1^3 x_2 x_3^2$ легко вычисляется и имеет вид

$$u_4(x;Q_6) = -\frac{x_1 x_2 (x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)^4}{83805321600}\big(-190 + 102x_1^4 - 30x_2^4 - 616x_3^2 + 366x_3^4 + \\ + x_1^2(-112 + 72x_2^2 - 1677x_3^2) + 28x_2^2(5 + 12x_3^2)\big).$$

Итак, при $f \in C^\lambda(\bar{S})$ имеем $u_k(x;f) \in C^{l-1+\lambda}(\bar{S}) \cap C^{2l}(S)$ и

$$\Delta^k u_k(x;f) = f(x),\ x \in S; \quad \frac{\partial^i u_k(x;f)}{\partial \nu^i}_{|\partial S} = 0,\ i = \overline{0, k-1}.$$

Обозначим также

$$V_P(x) = \sum_{k=0}^{l-1} p_k(x)(|x|^2-1)^k,$$

где $p_0(x), \ldots, p_{l-1}(x)$ – некоторый набор функций таких, что $p_k \in C^{2l}(S)$, $\Delta^{l-k} p_k \in C^\lambda(\bar{S})$ и $(1-|x|^2)^{k-l} u_{l-k}(x; \Delta^{l-k} p_k) \in C^\lambda(\bar{S})$.

Решение задачи Дирихле для гармонического и бигармонического уравнений при полиномиальных данных было получено в работах [5,6,7]. Связь задачи Дирихле и задачи Неймана показана в работе [3].

Введем оператор $\Lambda = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Определим разностную производную функции $p(\lambda)$ по формуле

$$p^{(k)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} p(\lambda + i). \qquad (3)$$

Лемма 1. *Функция вида*

$$U(x) = \sum_{k=0}^{l-1} \big(p_k(x) - u_{l-k}(x; \Delta^{l-k} p_k)\big)\,(|x|^2-1)^k, \qquad (4)$$

где функции $p_0(x), \ldots, p_{l-1}(x)$ *определены так, что* $V_P(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$V_{P|\partial S} = f_{0|\partial S}, \quad \frac{\partial V_P}{\partial \nu}_{|\partial S} = f_{1|\partial S}, \ldots, \frac{\partial^{l-1} V_P}{\partial \nu^{l-1}}_{|\partial S} = f_{l-1|\partial S}, \tag{5}$$

является решением задачи Дирихле (1) при $f(x) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $U(x)$ из формулы (4). Поскольку при $k = \overline{0, l-1}$

$$\Delta^{l-k}(p_k(x) - u_{l-k}(x; \Delta^{l-k} p_k)) = \Delta^{l-k} p_k(x) - \Delta^{l-k} u_{l-k}(x; \Delta^{l-k} p_k) =$$
$$= \Delta^{l-k} p_k(x) - \Delta^{l-k} p_k(x) = 0,$$

то функция $p_k(x) - u_{l-k}(x; \Delta^{l-k} p_k)$ будет $(l-k)$-гармонической в S, а значит функция $(p_k(x) - u_{l-k}(x; \Delta^{l-k} p_k))(|x|^2 - 1)^k$ будет l-гармонической, т.е. $\Delta^l U(x) = 0$ в S. Рассмотрим функции $r_k(x) = (1 - |x|^2)^{k-l} u_{l-k}(x; \Delta^{l-k} p_k) \in C^\lambda(\bar{S})$ (по условию). Тогда верно равенство

$$u_{l-k}(x; \Delta^{l-k} p_k)(|x|^2 - 1)^k = (|x|^2 - 1)^l r_k(x),$$

а поэтому будем иметь

$$U(x) = \sum_{k=0}^{l-1} p_k(x)(|x|^2 - 1)^k - (|x|^2 - 1)^l \sum_{k=0}^{l-1} r_k(x).$$

Если обозначить $r(x) = \sum_{k=0}^{l-1} r_k(x)$ и использовать определение $V_P(x)$, то получим

$$U(x) = V_P(x) - (|x|^2 - 1)^l r(x).$$

Нетрудно убедиться, что для $U(x)$ выполняются условия

$$U_{|\partial S} = V_{P|\partial S}, \quad \frac{\partial U}{\partial \nu}_{|\partial S} = \frac{\partial V_P}{\partial \nu}_{|\partial S}, \ldots, \frac{\partial^{l-1} U}{\partial \nu^{l-1}}_{|\partial S} = \frac{\partial^{l-1} V_P}{\partial \nu^{l-1}}_{|\partial S}.$$

Поэтому, если подобрать функции $p_0(x), \ldots, p_{l-1}(x)$ так, чтобы были выполнены условия (5) и подставить эти значения $p_0(x), \ldots, p_{l-1}(x)$ в формулу (4), то функция $U(x)$ будет решением задачи (1) при $f(x) = 0$.

Определим факториальную степень $t^{[k]}$ равенством $t^{[k]} = t(t-1)\cdots(t-k+1)$.

Теорема 1. *Пусть для заданных функций* $q_0(x), \ldots, q_{l-1}(x)$ *таких, что* $q_i(x)_{|\partial S} = f_i$, $i = \overline{0, l-1}$ *найдутся такие функции* $p_0(x), \ldots, p_{l-1}(x)$, *обладающие свойствами указанными в лемме 1, что выполнены равенства*

$$r_s(x) = \sum_{k=s}^{l-1} (-1)^{k-s} \binom{k}{s} p_k(x), \quad a_j(x) = \sum_{s=0}^{l-1} (2s)^{[j]} r_s(x), \quad q_i(x) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \Lambda^{[i-j]} a_j(x),$$

где $s, j, i = \overline{0, l-1}$. *Тогда при таких функциях* $p_0(x), \ldots, p_{l-1}(x)$ *функция* $U(x)$, *находимая из (4) будет решением задачи Дирихле (1) при* $f(x) = 0$.

Обращая линейные преобразования из теоремы 1 получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $q_j(x)$, $j=\overline{0,l-1}$ *система функций, являющаяся некоторым продолжением функций* f_j, $j=\overline{0,l-1}$ *с* ∂S *на* $\bar S$ *из класса* $q_j\in C^{2l-j+\lambda}(\bar S)\cup C^{3l-j-1}(S)$ *и такая, что функции*

$$p_s(x)=\sum_{j=0}^{s}\frac{1}{j!}H_s^{(j)}(-\Lambda)q_j(x),\quad s=\overline{0,l-1},$$

обладают гладкостью $(1-|x|^2)^{k-l}u_{l-k}(x;\Delta^{l-k}p_k)\in C^{\lambda}(\bar S)$ *из теоремы 1. Здесь обозначено*

$$H_s(\lambda)=\frac{1}{(2s)!!}\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2s+2),\quad s\in\mathbb{N},$$

причем $H_0(\lambda)=1$, *а производная* $H_s^{(k)}(\lambda)$ *порядка* k *от полинома* $H_s(\lambda)$ *берется в смысле определения (3). Тогда функция*

$$U(x)=\sum_{k=0}^{l-1}\big(p_k(x)-u_{l-k}(x;\Delta^{l-k}p_k)\big)\big(|x|^2-1\big)^k, \tag{6}$$

является решением задачи Дирихле (1) при $f(x)=0$.

Следствие 1. *Полиномиальное решение полной задачи Дирихле для полигармонического уравнения с полиномиальными данными*

$$\Delta^l u(x)=Q(x),\ x\in S;\quad u_{|\partial S}=Q_0(s),\ldots,\ \frac{\partial^{l-1}u}{\partial\nu^{l-1}}_{|\partial S}=Q_{l-1}(s),\ s\in\partial S,$$

записывается в виде

$$u(x)=\sum_{k=0}^{l-1}\big(P_k(x)-u_{l-k}(x;\Delta^{l-k}P_k)\big)\big(|x|^2-1\big)^k+u_l(x;Q),$$

где $u_k(x;P)$ *определено в (2), а полиномы* $P_k(x)$, $k=\overline{0,l-1}$ *определяются из равенства*

$$P_s(x)=\sum_{j=0}^{s}\frac{1}{j!}H_s^{(j)}(-\Lambda)Q_j(x),\quad s=\overline{0,l-1}.$$

Этот результат сразу следует из теоремы 2 и согласуется с [4] поскольку в качестве продолжения полиномов $f_i=Q_i$ с единичной сферы ∂S в шар S можно выбрать эти же полиномы $Q_i(x)$, $i=\overline{0,l-1}$. Очевидно, что в этом случае условия гладкости выполнены. Условие $(1-|x|^2)^{-k}u_k(x;\Delta^k p_{l-k})\in C^{\lambda}(\bar S)$ тоже выполнено, как следует из [4, теорема 2].

На основе теоремы 2 можно доказать следующий более конкретный результат.

Теорема 3. *Пусть* $q_j(x)$, $j=\overline{0,l-1}$ *система гармонических продолжений функций* $f_j(s)\in C^{l-1-j+\lambda}(\partial S)$, $j=\overline{0,l-1}$ *с* ∂S *на* $\bar S$, *тогда при функциях*

$$p_s(x)=\sum_{j=0}^{s}\frac{1}{j!}H_s^{(j)}(-\Lambda)q_j(x),\quad s=\overline{0,l-1}, \tag{7}$$

где обозначено $H_s(\lambda) = \lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2s+2)/(2s)!!$, $s \in \mathbb{N}$, а производная $H_s^{(k)}(\lambda)$ порядка k от полинома $H_s(\lambda)$ берется в смысле определения (3), функция

$$U(x) = \sum_{k=0}^{l-1} p_k(x)(|x|^2-1)^k, \tag{8}$$

является решением задачи Дирихле (1).

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2 с гармоническими в S функциями $q_j(x)$, $j=\overline{0,l-1}$. В этом случае гладкость $q_j \in C^{2l-j+\lambda}(\bar{S}) \cup C^{3l-j-1}(S)$ излишняя. Формула (6) примет вид (8) и в силу свойств оператора Λ функции $p_k(x)$ из (7) для $k=\overline{0,l-1}$ – гармонические в S. Если $f_j(s) \in C^{l-1-j+\lambda}(\partial S)$, то $q_j(s) \in C^{l-1-j+\lambda}(\bar{S})$. Следовательно $H_s^{(j)}(-\Lambda)q_j(x) \in C^{l-1-s+\lambda}(\bar{S})$, откуда $p_s(x) \in C^{l-1-s+\lambda}(\bar{S})$. Значит, в соответствии с оценками из [8] $|D^\beta p_s(x)| \le C(1-|x|)^{l-1-s+\lambda-|\beta|}$ при $l+\lambda < |\beta|+s+1$ и поэтому, если еще $|\beta| \le l-1$, то $|(|x|^2-1)^s D^\beta p_s(x)| \le C(1-|x|)^\lambda$. Откуда следует, что $U(x) \in C^{l-1+\lambda}(\bar{S})$. Очевидно, что $U(x) \in C^{2l}(S)$ и $\Delta^l U(x) = 0$ в S. Выполнимость условий Дирихле была установлена в теореме 2. Теорема доказана.

Пример 2.

Найдем функции $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ в формуле (8), задающей решение $U(x)$ задачи Дирихле (1) для 3-гармонического уравнения в шаре. В этом случае $l=3$. Выпишем полиномы $H_0(\lambda)$, $H_1(\lambda)$ и $H_2(\lambda)$

$$H_0(\lambda)=1, \quad H_1(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda^{[1]}, \quad H_2(\lambda)=\frac{1}{8}\lambda(\lambda-2)=\frac{1}{8}(\lambda^{[2]}-\lambda^{[1]}).$$

Поскольку $(\lambda^{[k]})^{(m)} = k^{[m]}\lambda^{[k-m]}$, то

$$H_1^{(1)}(\lambda)=\frac{1}{2}, \quad H_2^{(1)}(\lambda)=\frac{1}{8}(2\lambda^{[1]}-1), \quad H_2^{(2)}(\lambda)=\frac{1}{4}.$$

Следовательно

$$p_0(x)=q_0(x), \quad p_1(x)=\frac{1}{2}(-\Lambda)q_0(x)+\frac{1}{2}q_1(x),$$
$$p_2(x)=\frac{1}{8}\Lambda(\Lambda+2)q_0(x)-\frac{1}{8}(2\Lambda+1)q_1(x)+\frac{1}{8}q_2(x).$$

Решение (8) при $l=3$ имеет вид

$$U(x)=q_0(x)+\frac{1-|x|^2}{2}(\Lambda q_0(x)-q_1(x))+$$
$$+\frac{(1-|x|^2)^2}{8}((\Lambda^2+2\Lambda)q_0(x)-(2\Lambda+1)q_1(x)+q_2(x)).$$

Найденное решение согласуется с полученным в [4].

Литература

1. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. N 3. С. 441–445.

2. Карачик В.В. Функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. Вып. 4, Ч. 2. С. 550–558.

3. Карачик В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения, 2014, Т. 50, N 11. С. 1455–1461.

4. Карачик В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. N 7. С. 1149–1170.

5. Карачик В.В. Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. N 9. С. 1674–1694.

6. Карачик В.В., Антропова Н.А Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. N 2. С. 250–254.

7. Карачик В.В., Антропова Н.А. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. XV. N 2. С. 86–98.

8. Алимов Ш.А. Об одной задаче с наклонной производной // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, N 10. С. 1738–1751.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ К ПОИСКУ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л.Н. Ляхов[1], С.А. Рощупкин[2]

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2] *Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец, Россия*

e-mail: [1]`levnlya@mail.ru`, [2]`roshupkinsa@mail.ru`

Аннотация: В статье производится вычисление и построение фундаментального решения для уравнения с постоянными коэффициентами, в котором применяется метод преобразования Фурье.

Ключевые слова: фундаментальное решение, преобразование Фурье, оператор.

FOURIER'S TRANSFORMATION TO SEARCH OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE CLASSICAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Abstract: In article calculation and creation of the fundamental decision is made for the equation with constant coefficients in which the method of transformation of Fourier is applied.

Keywords: fundamental decision, Fourier's transformation, operator.

1. Обобщенные функции $\mathcal{D}'$

При работе с дифференциальными уравнениями есть смысл использовать более широкое множество, чем S. Чаще всего таким множеством оказываются линейные и непрерывные функционалы $\mathcal{D}$ над пространством основных функций $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}_n)$, которые состоят из функций, бесконечно дифференцируемых и имеющих конечный носитель в $\mathbb{R}_n$. Сходимость в этом пространстве определяется следующим образом: $\phi_k \to \phi$ в $\mathcal{D}$, если выполняются два условия

1) $\exists$ компакт K : $supp(\phi_k) \in K$;

2) $D^\alpha \phi_k \rightrightarrows_x D^\alpha \phi$ для любого целочисленного мультииндекса α.

Ясно, что $\mathcal{D} \subset S$. Поэтому все свойства преобразования Фурье для функций из S распространяются на функции $\mathcal{D}$. Пространство же $\mathcal{D}'$ оказывается более широким по сравнению с S', например, быстро растущие локально интегрируемые функции принадлежат $\mathcal{D}'$ и не принадлежат S'. Таким образом $S' \subset \mathcal{D}'$.

2. Представление в образах Фурье линейных дифференциальных операторов

Рассмотрим линейный оператор в частных производных порядка m

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{1}$$

с коэффициентами из пространства C^∞ бесконечно гладких функций $a(x)$. Поскольку дифференцирование не расширяет носителя основной функции $\phi \in \mathcal{D}$, а $a_\alpha(x)\phi(x)$ снова принадлежит $\mathcal{D}$, то этот дифференциальный оператор переводит пространство $\mathcal{D}$ в себя, и нетрудно проверить, что он действует непрерывно.

Для записи оператора (1) в образах Фурье положим, что $u \in S$, тогда $u = F^{-1}F[u]$ и мы имеем

$$L(x, D)u(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha F^{-1} F[u](\xi) =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) F^{-1} \xi^\alpha (Fu)(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} F^{-1}\left[a_\alpha(x)\, \xi^\alpha (Fu)\right] =$$

$$= F^{-1}\left[\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha\, F[u](\xi)\right](x).$$

Положим

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \tag{2}$$

Эта функция называется (*полным*) *символом* оператора (1) (ее также называют — характеристический многочлен). Функция

$$a_0(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \tag{3}$$

называется *главным символом* оператора $L(x, D)$ [1].

Таким образом в образах преобразования Фурье оператор (1) имеет следующее представление:

$$L(x, D)u(x) = F^{-1}_{\xi \to x}[a(x, \xi) F_{y \to \xi} u(y)], \tag{4}$$

или

$$(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi) u(y) dy d\xi. \tag{5}$$

Здесь сначала производится интегрирование по y. Интеграл по y быстро убывает при $\xi \to \infty$.

Интересно отметить, что по такой же формуле определяется так называемый «псевдодифференциальный оператор», но при этом символ $a(x,\xi)$ уже не обязательно является многочленом по ξ, а сам оператор может быть не только дифференциальным, но и интегральным и в рамках этого представления можно выписывать операторы, обращающие дифференциальные.

3. Символ сопряженного оператора

Скалярное произведение функций задается линейной формой

$$(u\,,\,\overline{v})_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_N} u(x)\ \overline{v(x)}\ (x')^\gamma\,dx.$$

Обычно знак скалярного произведения слева этого равенства не пишут. Но в данном случае работа с комплексым сопряжением окажется скрытой, и требует записи той, которая справа, что затрудняет запись, поэтому мы его внесли в определение слева.

Пусть A и A^* — операторы, действующие в пространстве S. Оператор A^* называется формально[1] сопряженным к оператору A, если

$$(Au, \overline{v}) = (u\,,\,\overline{A^* v}) \qquad (u,\ v\ \in S(\mathbb{R}_N))\,.$$

Вид оператора $L^*(x;D)$ сопряженного к $L(x;D)$ находится интегрированием по частям:

$$(L(x;D)u\,,\,\overline{v}) = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u\,,\,\overline{v}\right) = \left(u\,,\,\overline{\sum_{|\alpha|\leqslant m} \alpha(-1)^{|\alpha|}\,D^\alpha(\overline{a_\alpha(x)}v}\right)$$

Следовательно

$$L^*(x;D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|}\,D^\alpha\left(\overline{a_\alpha(x)}\ \cdot\right) \tag{6}$$

Но этот оператор можно было бы найти в образах преобразования Фурье, исходя из (4) и определения преобразования Фурье в классе обобщенных функций. В самом деле,

$$\begin{gathered}
(Au, \overline{v}) = (Au(x)\,,\,\overline{v(x)}) = =(F^{-1}\,[a(x;\xi)\,F[u\,]]\,\,,\,\overline{v(x)}) = \\
= (F[u](\xi)\,,\,F^{-1}[a(x;\xi)\overline{v}](\xi)\,) = \left(F[u](\xi)\,,\,\overline{\overline{F^{-1}[a(x;\xi)\overline{v}]}}(\xi)\right) = \\
= \left(F[u](\xi)\,,\,\frac{1}{2\pi}\overline{F[\overline{a(x;\xi)}v]}(\xi)\right) = \left(u(x)\,,\,\frac{1}{2\pi}F\left[\overline{F[\,\overline{a(x;\xi)}\,v\,]}\right](\xi)\right) = \\
= \left(u(x)\,,\,\overline{F^{-1}\left[F[\overline{a(x;\xi)}\,v\right](\xi)}\right)\,.
\end{gathered}$$

Откуда следует следующее представление оператора (6), сопряженного линейному дифференциальному оператору $L(x,D)$ в образах Фурье:

$$L^*(x;D) = F^{-1}\left[F[\overline{a(x;\xi)}\,v\right]\,.$$

[1]Слово формально здесь подчеркивает то обстоятельство, что операторы A и A^* не рассматриваются, как операторы в L_2 (ограниченные или неограниченные).

4. Фундаментальные решения линейного дифференциального оператора

При исследовании дифференциальных уравнений в частных производных большую роль играют фундаментальные решения этих уравнений. Зная фундаментальные решения, можно построить решение задачи Коши и функцию Грина краевой задачи.

Для построения фундаментальных решений уравнений с постоянными коэффициентами мы будем использовать метод преобразования Фурье.

Дадим общее определение фундаментального решения дифференциального уравнения, заданного во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор вида:

$$L(x,D)_u \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u, \quad a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,. \tag{7}$$

Определение 1. *Фундаментальным решением дифференциального оператора (7) называется обобщенная функция $E(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая в $\mathbb{R}^n$ уравнению:*

$$L(x,D)\,E(x) = \delta(x) \tag{8}$$

в смысле обобщенных функций.

Равенство (8) означает, что $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$(L(x,D)\,E\,,\,\varphi) = (\delta,\varphi) = \varphi(0)\,. \tag{9}$$

При этом действие дифференциального оператора $L(x,D)$ тоже понимается в смысле обобщенных функций:

$$(L(x,D)\,E\,,\,\varphi) = (\,E\,,\,L^*(x,D)\varphi)\,,$$

где оператор

$$L^*(x,D)\varphi = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha(x)\varphi(x))$$

— формально сопряжен к оператору $L(x,D)$ [2]. Мы используем тот факт, что если $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, то отсюда следует, что $L^*(x,D)\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Если же оператор $L = L(D)$ — с постоянными коэффициентами, то сопряженный оператор находится просто

$$L^*(D) = L(-D)\,.$$

Кроме того, очевидно, если $E(x)$ удовлетворяет (8), то обобщенная функция $E(x-x_0)$ удовлетворяет уравнению

$$L_x E(x-x_0) = \delta(x-x_0)\,.$$

Фундаментальное решение $E(x)$ оператора L, вообще говоря, не единственно, поскольку, если E_0 — решение однородного уравнения $L(x,D)E_0 = 0$, то обобщенная функция $E+E_0$ — решение уравнения (8). Следовательно фундаментальное решение оператора $L(x,D)$ определяется с точностью до (слагаемого) произвольного решения уравнения $L\varepsilon_0 = 0$.

Для вычисления фундаментального решения для уравнения с постоянными коэффициентами можно применять метод преобразования Фурье, если фундаментальное решение определить в S', когда (8) выполняется для $\forall\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Обычно фундаментальным решением классических уравнений математической физики оказывается регулярная обобщенная функция (т.е., типа обычной функции).

Литература

1. Ляхов Л.Н., Рощупкин С.А. Полное преобразование Фурье-Бесселя некоторых основных функциональных классов // Журнал «НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ» Белгородского государственного университета № 11 (154) 2013. Выпуск 31. Математика Физика. С. 85 - 92.

2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. С. 512.

Секция 6. Математическое моделирование

СУБТАНГЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА-ХИКСА. АСИМПТОТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Ю.Я. Агранович[1], Н.В. Концевая[2]

[1]*Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия*
[2]*Финансовый университет при правительстве Российской Федерации, Москва, Россия*

Аннотация: В данной работе исследовано асимптотическое поведение подкасательных для модели Самуэльсона-Хикса. Дан количественный анализ влияния коэффициента акселерации на асимптотику распределения экстремальных значений подкасательных.

Ключевые слова: подкасательная, модель Самуэльсона-Хикса, асимптотическое поведение, цикличность.

SUBTANGENTIAL ANALYSIS MODEL SAMUELSON-HICKS. ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF EXTREME VALUES

Abstract: In this paper we study the asymptotic behavior of subtangentials for the model of Samuelson - Hicks. The quantitative analysis of the influence of the coefficient of acceleration on the asymptotic distribution of subtangentials extreme values are obtaind.

Keywords: subtangentials, model Samuelson - Hicks, asymptotic behavior, periodicity.

Введение

В последние десятилетия в среде специалистов в области прикладной эконометрики достаточно широко используется модель Самуэльсона-Хикса [Samuelson—Hicks model] — модель циклических изменений экономики, в которой механизмы конъюнктурных периодических колебаний объясняются взаимодействием принципов акселерации и мультипликации. Математические теории существования экономических циклов дают содержательные приложения теорем существования периодических или почти периодических решений дифференциальных уравнений. Как правило, такие теории устанавливают скрытые причины, определяющие изменение экономической активности, вызывая тем самым неизменный интерес в научном мире и являясь средством если не предсказать будущие кризисные моменты, то по крайней мере объяснить существующие изменения конъюнктуры. Модель Самуэльсона-Хикса, в частности, объясняет, каким образом равенство совокупного предложения совокупному спросу достигается при разной степени использования производственных мощностей, автономных и индуцированных инвестиций.

Методика

Модель делового цикла базируется на неоднородном конечно-разностном уравнении второго порядка, характеризующим динамику национального дохода во времени:

$$y(t+2) - (a+w) \cdot y(t+1) + w \cdot y(t) = 1, \tag{1}$$

где y(t+2), y(t+1), y(t) - национальный доход периодов t, t+1, t+2 соответственно; w - фактор (мощность) акселерации; a - склонность к потреблению; 1 - базовое потребление. Данная модель включает исключительно рынок благ, предполагая процентные ставки и уровень цен постоянными, а объем предложения товаров эластичным. Мультипликатором в данной модели является коэффициент, определяющий соотношение между приростом дохода и вызывающим его увеличением инвестиций, акселератор, в свою очередь, определяет рост инвестиций, индуцированный ростом производства [1, 2].

Нас интересует расширение участков монотонности в случае затухающих колебаний в непрерывных решениях уравнения (1). Далее мы будем предполагать, что дискретное решение уравнения (1) продолжено на вещественную полуось с сохранением констант интегрирования. В этом случае решение (1) можно представить в форме:

$$y(t) = A + \alpha \cdot r^t \cdot \cos\omega t, t\epsilon[0, \infty) \tag{2}$$

где r - модуль корня характеристического уравнения, причём r<1, а ω - аргумент указанного корня, ω определяет частоту колебаний решения в окрестности стационарной точки $y \equiv A = const$, α - постоянная величина, зависящая от выбора начальных данных ($\alpha = y(0) - A$).

Распределение участков монотонности естественно связано с поведением функции T(t) – длины подкасательной в проекции на ось t. В данном случае для T(t) получим выражение:

$$T(t) = -\frac{A + \alpha r^t \cdot \cos\omega t}{\alpha r^t \ln r \cdot \cos\omega t - \omega\alpha r^t \cdot \sin\omega t} = T(t) = \frac{A \cdot r^{-t} + \alpha \cdot \cos\omega t}{\alpha \cdot \ln r \cdot \cos\omega t - \omega \cdot \alpha \cdot \sin\omega t}, \tag{3}$$

Отсюда:

$$T'(t) = -(A \cdot r^{-t} \cdot \ln r + \alpha \cdot \omega \cdot \sin\omega t) \cdot \frac{\alpha \cdot \ln r \cdot \cos\omega t - \alpha \cdot \omega \cdot \sin\omega t}{(\alpha \cdot \ln r \cdot \cos\omega t - \omega \cdot \alpha \cdot \sin\omega t)^2} +$$

$$+\frac{\alpha\omega \cdot \ln r \cdot \sin\omega t - \alpha\omega^2 \cdot \cos\omega t}{(\alpha \ln r \cdot \cos\omega t - \omega\alpha \cdot \sin\omega t)^2} \cdot (A \cdot r^{-t} + \alpha \cdot \cos\omega t). \tag{4}$$

Из соотношения (4) при $t \to \infty$ получим следующее асимптотическое уравнение для определения экстремумов подкасательных для достаточно больших t:

$$\alpha\omega(\ln r + 1) \cdot \sin\omega t + (\alpha\omega^2 - \ln^2 r) \cdot \cos\omega t = 0. \tag{5}$$

Откуда

$$\tan\omega t = \frac{\alpha\omega \cdot (\ln r + 1)}{\ln^2 r - \alpha\omega^2} \tag{6}$$

Таким образом, критические значения t_n асимптотически распределены как арифметическая прогрессия:

$$t_n = \frac{1}{\omega}\left\{\pi n + \arctan\left[\frac{\alpha\omega \cdot (lnr + 1)}{ln^2 r - \alpha\omega^2}\right]\right\}, n\epsilon N \tag{7}$$

Соответственно экстремальные значения (положительные и отрицательные) длин подкасательных распределены асимптотически как геометрическая прогрессия с ведущим членом вида:

$$T_n = \pm C(\alpha, \omega) \cdot r^{-\frac{\pi n}{\omega}}, \tag{8}$$

где $C(\alpha, \omega)$ - некоторая постоянная, зависящая только от входных данных задачи: параметров модели и начальных данных, а через T_n обозначено асимптотическое значение $T(t_n)$ при $n \to \infty$.

Результаты

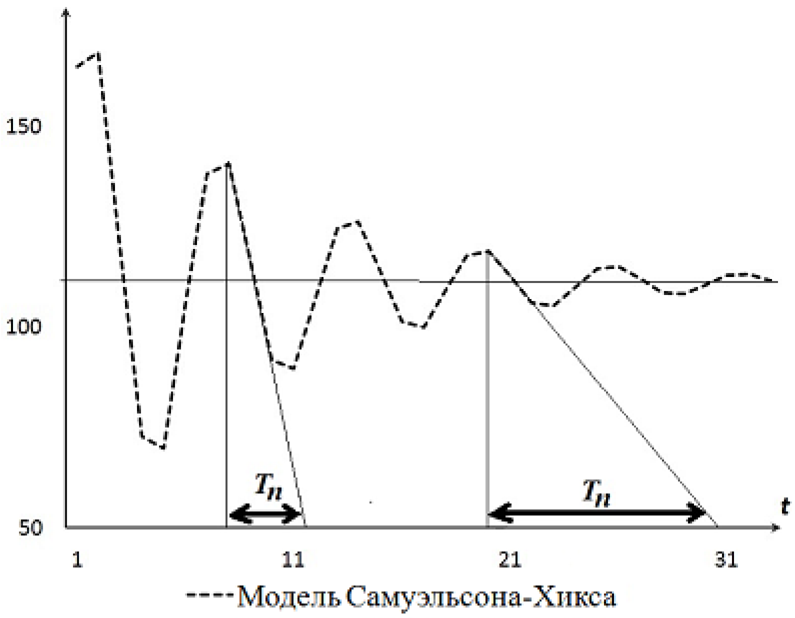


Рис. 1. Положительные подкасательные в модели Самуэльсона-Хикса

При определенных значениях мультипликатора и акселератора, национальный доход достигает нового равновесного уровня, пройдя через затухающие колебания. Скорость достижения нового равновесного состояния определяется следующей величиной, являющейся аналогом пропускной способности, и зависящей от коэффициентов модели:

$$R = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln |T_n|}{n} = \frac{\pi \cdot \ln r}{\omega} \tag{9}$$

или в терминах параметров модели:

$$R = \frac{2\pi \ln w}{\arccos\left(\frac{a+w}{2\sqrt{w}}\right)}. \tag{10}$$

Таким образом, модель Самуэльсона-Хикса дает возможность не только сделать выводы о причинах возникновения конъюнктурных циклических колебаний в экономике, но и оценить скорость достижения равновесного состояния национальной экономики.

Чередование периодов роста с кризисными моментами в экономике любой страны генерирует естественное предположение о существовании внутренних периодических закономерностей в деловой активности страны. При этом необходимо, чтобы качественные теоретические построения в данной предметной области содержали не только объяснения внутренних механизмов развития экономики и определение стимулов роста, но и давали прогнозные оценки времени вхождения экономических систем в равновесные состояния, на достижение последней цели и ориентирована настоящая работа.

Авторы благодарны фонду РФФИ за финансовую поддержку настоящих исследований, работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-00253 а.

Литература

1. Samuelson, P. Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration, Review of Economic Statistics, 1939b, 21, pp.75–78.

2. Westerhoff F.H. Samuelsons multiplier-accelerator model revisited. Appl. Econ. Letter, 2006, 13. pp.89-92.

МОДЕЛИРОВАНИЕ EBSD ЭКСПЕРИМЕНТА И ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕКСТУРЫ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ

А.О. Антонова[1], Т.И. Савёлова[2]

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

e-mail: [1]`aoantonova@mail.ru`, [2]`TISavelova@mephi.ru`

Аннотация: Разрабатывается двумерная математическая модель поликристаллического образца и эксперимента, получаемого методами электронной микроскопии, для различных параметров измерений: шага сканирования и порогового угла разориентации. Результаты эксперимента используются для сравнения характеристик текстуры образца и измерений: распределение зёрен по размерам, средний размер зерна, дисперсия; распределение по углам разориентации, средний угол разориентации, дисперсия; оценки ФРО в трёхмерном виде и в однопараметрическом представлении. Проверка соответствий всех перечисленных распределений осуществляется с помощью критерия χ^2. Основные результаты исследований сформулированы в виде утверждений.

Ключевые слова: ориентация на группе вращений SO(3), метод Монте-Карло, плотность распределения зёрен по размерам, плотность распределения угла разориентаций, функция распределения ориентаций, шаг измерения, пороговый угол разориентации.

SIMULATION OF EBSD EXPERIMENT AND CALCULATION OF THE POLYCRYSTALLINE TEXTURE CHARACTESTICS

Abstract: A two-dimensional mathematical model is proposed for a polycrystalline specimen and an electron microscopy experiment with varying measurement parameters, such as the scanning step and the threshold disorientation angle. Experimental results are used to compare specimen texture characteristics and measurements: the grain size distribution, average grain size, variance; disorientation angle distribution, average disorientation angle, variance; and estimates of the orientation

distribution function in three-dimensional form in a one-parameter representation. All these distributions are tested by applying a chi-square homogeneity test. The most important aspects of the experiment are formulated as propositions.

Keywords: orientation on the rotation group SO(3), Monte Carlo method, grain size distribution density, disorientation angle distribution density, orientation distribution function, measurement step, threshold disorientation angle, chi-square test.

Предварительные сведения

В работе вращение описывается с помощью углов Эйлера $g = (\phi, \theta, \psi), -\pi \leq \phi, \psi < \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$, и соответствующей матрицей вращения из группы SO(3) [1]. Обратное вращение может быть записано в виде $g = (\pi - \psi, \theta, \pi - \phi)$. Далее ориентацией зерна будет называться соответствующей ей элемент $g \in$SO(3).

Поликристаллический образец, состоящий из зёрен различных размеров и ориентаций, рассматривается как статистический объект. Для его математического описания используются следующие характеристики: плотность распределения зёрен по размерам (ПРЗР); плотность распределения углов разориентации (ПРУР) между соседними зёрнами; функция распределения ориентаций (ФРО).

Углы разориентации между двумя соседними зёрнами $g_i, g_{i+1}, i = 1, \leq, N-1$, вычисляются по формуле:

$$\cos(\omega_i) = \frac{(Tr(g_i g_{i+1}^{-1}))}{2}, 0 \leq \omega_i \leq \pi, i = 1, \ldots, N-1. \tag{1}$$

При этом ядерная оценка ФРО имеет вид

$$\begin{gathered} f_N = \frac{1}{\alpha^3} \sum_{i=1}^{N} C_i q(\frac{\phi - \phi_i}{\alpha}) q(\frac{\psi - \psi_i}{\alpha}) q(\frac{\cos\theta - \cos\theta_i}{\alpha}), \\ C_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i}, t \in [-\pi, \pi], \cos\frac{t}{2} = \cos\frac{(\phi + \psi)}{2} \cos\frac{\theta}{2}. \end{gathered} \tag{2}$$

где $C_i > 0, i = 1, \ldots, N$ - веса, определяемые размерами зёрен, $q_i(t), i = 1, 2, 3$ - ядра сглаживания [1].

Проведение модельного эксперимента

Моделирование образца

Образец представляет собой набор зёрен:

$$(x_i, g_i, \omega_i) i = 1, 2, \ldots N-1, (x_N, g_N), \tag{3}$$

где x_i - размер i-го зерна, равный диаметру круга, площадь которого равна площади сечения зерна; $g_i = (\phi_i, \theta_i, \psi_i)$ – ориентация i–го зерна, соответствующая углам Эйлера $-\pi \leq \phi_i, \psi_i < \pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi$; $\omega_i = (g_i, g_{i+1})$ – угол разориентации между соседними зёрнами; N – количество зёрен в образце.

Размеры зёрен, распределённые по гамма-распределению, моделируются методом Неймана по формуле

$$p(x, a, b) = b^a / (\Gamma(a)) x^{(a-1)} e^{(-bx)}, x \geq 0, a > 0, b > 0. \tag{4}$$

Моделирование набора ориентаций зёрен с функцией распределения в виде ЦНР с заданным параметром $\varepsilon > 0$ производится специализированным методом Монте-Карло с количеством сверток $n = 6$.

Результаты моделирования образца представляются в виде:

1) гистограммы распределения зёрен по размерам $x_i, i = 1, \ldots, N$;

2) оценки ФРО даются в виде (2), где $C_i = x_i/(\sum_{i=1}^{N} x_i)$;

3) гистограммы функции распределения углов разориентаций (ПРУР) зёрен $\omega_i, i = 1, \ldots, N-1$.

Образец с границами моделируется как набор зёрен (2), между которыми расположены границы – величины, равномерно распределенные в $(0, \frac{2}{10}\gamma)$, где $\gamma \ > 0$ такое, что площадь границ составляет 10% от площади зёрен. Обычно площадь области с границами измерений составляет от 10 до 50 %.

Моделирование измерений образца

Задаются параметры измерений: h - шаг сканирования; ω_0 - пороговое значение угла разориентации для определения 2-х соседних различных зёрен g_i, g_{i+1} по величине угла разориентации между ними (1).

Измерения производятся в точках $\Delta_k = kh, k = 1, 2, \ldots, N_1$. Для измерения в точке $\Delta_1 = h$ берётся ориентация того зерна, в котором оказалась точка Δ_1,(обозначим полученную ориентацию g_1); для точки $\Delta_2 = 2h$ определяется следующая ориентация g_2 и т.д. В случае образца с границами при попадании на границу данной точке присваивалась ориентировка, соответствующая углам Эйлера, равным среднему арифметическому углов двух ближайших определённых ориентировок.

По полученным ориентациям вычисляются углы разориентации $\hat{\omega}_k = (\hat{g}_k, \hat{g}_{k+1})$, $k = 1, \ldots, N_1 - 1$ по формуле (1). Если $\hat{\omega}_k \leq \omega_0$, то k-й и $(k+1)$-й шаги принадлежат одному зерну, т.е. расстояние $((k-1)h, (k+1)h)$ находится внутри одного зерна. Если n измерений оказались внутри j-го зерна, то размер зерна считается равным $\tilde{x}_j = nh$, углы Эйлера вычисляются как среднее арифметическое соответствующих данных n измерений:$\tilde{\phi}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\phi}_{ij}, \tilde{\theta}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_{ij}, \tilde{\psi}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\psi}_{ij}$.В случае если $\hat{\omega}_k > \omega_0$, то в точке $(k+1)h$ начинается новое зерно.

В результате измерений получен набор зёрен

$$(\tilde{x}_i, \tilde{g}_i, \tilde{\omega}_i)i = 1, 2, \ldots \tilde{N} - 1, (\tilde{x}_{\tilde{N}}, \tilde{g}_{\tilde{N}}). \tag{5}$$

Обработка результатов эксперимента производится путём построения гистограммы размеров зёрен $\tilde{x}_i, i = 1, .., \tilde{N}$ вычисления оценки ФРО, аналогичной (2), построения гистограммы ПРУР $\tilde{\omega}_i, i = 1, .., \tilde{N} - 1$.

Обработка результатов

Предположение об известных ФРО (2), ПРУР и ПРЗР образца позволяет сравнить полученные численные результаты модельного эксперимента с данными образца.

1) Вычисляются оценки характеристик ПРЗР и ПРУР – математического ожидания $M\xi, M\omega$ и дисперсии $D\xi, D\omega$ для образца и измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \bar{\omega} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1} \omega_i; \tag{6}$$

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2, s_\omega^2 = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N-1}(\omega_i - \bar{\omega})^2; \tag{7}$$

Для измерений в формулах (4) и (6) используется набор зёрен (3).

Гипотеза о совпадении ПРЗР, ПРУР в образце и в измерениях проверяется по критерию однородности χ^2. Для этого составлялась статистика

$$Z = N\tilde{N}\sum_{j=1}^{r}\frac{(\frac{m_j}{N}-\frac{\tilde{m}_j}{\tilde{N}})^2}{m_j+\tilde{m}_j}, \tag{8}$$

где r - количество ячеек разбиения, m_j и $\tilde{m}_j$ – количество попавших в j-ю ячейку зёрен в образце и измерениях соответственно. Разбиение области значений размеров зёрен в каждом случае выбиралось таким образом, чтобы частоты попадания зёрен в отдельную ячейку для образца и измерений были близки друг к другу.

По критерию однородности χ^2 также проверяется соответствие однопараметрических представлений ФРО образца и измерений, которые вычисляются по формуле [1]

$$\begin{aligned} &f_N = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{N}C_i q(\frac{t-t_i}{\alpha}), C_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{N}x_i},\\ &t\in[-\pi,\pi], \cos\frac{t}{2} = \cos\frac{(\phi+\psi)}{2}\cos\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{9}$$

$q(t)$ – гауссовское ядро сглаживания.

Для ФРО измерений в формуле (9) используются те ориентировки и размеры зёрен, которые были получены в результате модельного эксперимента.

Численные результаты

Результаты для образцов без границ

По схеме, изложенной в пункте 2.1 было произведено моделирование двух образцов с параметрами гамма-распределения

(1) $a = 2, b = 1$, тогда $M\xi = \frac{a}{b} = 2$ – средний размер зерна в образце, $D\xi = \frac{a}{b^2} = 2$;

(2) $a = 8, b = 2$, тогда $M\xi = \frac{a}{b} = 4$ – средний размер зерна в образце, $D\xi = \frac{a}{b^2} = 2$.

По критерию согласия χ^2 проверяется совпадение гамма-распределения и распределения полученных размеров зёрен образца. Гипотеза о совпадении принимается с уровнем доверия 0.95, значение статистики оказалось порядка 10^{-5} с количеством степеней свободы 50.

Количество зерен N в образце было выбрано равным 1000. Ориентации зёрен в образце моделировались специализированным методом Монте-Карло для ЦНР на SO(3) с остротой текстуры $\varepsilon = \frac{1}{8}$, количество свёрток $n = 6$ [1].

Далее использовалась модель эксперимента, предложенная в пункте 2.2. Для данного образца были выбраны следующие значения параметров измерений [2]:

а) h =0.5 мкм; 1.0 мкм; 2.0 мкм для образца (1), h =2.2 мкм; 3.0 мкм; 4.0 мкм для образца (2);

б) $\omega_0 = 5^o, 10^o, 20^o$.

Шаги сканирования для образцов выбирались так, чтобы количество зёрен в одном образце, размер которых меньше шага, было примерно равно количеству зёрен в другом образце.Образцы измерялись целиком, поэтому количество измеренных зерен составляло 1000.

Результаты и рекомендации к выбору параметров EBSD измерений выражены в виде утверждений.

Утверждение 1. *При выборе шага сканирования h следует учитывать долю зёрен δ_{less_h}, размер которых меньше h.*

Утверждение 2. *На средний угол разориентации и дисперсию ПРУР сильно влияет выбор порогового угла разориентации, и слабо – шага сканирования.*

Утверждение 3. *Гипотеза о совпадении ПРЗР, ПРУР, ФРО образца и измерений согласно критерию однородности χ^2 принимается с уровнем доверия 0.95 при малом $\omega_0 = 5^o$ и шагах h =0.5 мкм; 1.0 мкм и h =2.2 мкм; 3.0 мкм для образцов (1) и (2) соответственно.*

Утверждение 4. *Для восстановления ФРО сильно текстурированных образцов следует выбирать небольшой пороговый угол разориентации.*

Для рассматриваемых образцов в качестве такого угла можно выбрать $\omega_0 = 5^o$.

Утверждение 5. *Уменьшение шага сканирования незначительно улучшает восстановление ФРО по отдельным ориентировкам.*

Результаты для образцов с границами

В качестве образца с границами исследовался образец (1), в который были добавлены границы по схеме, отписанной в пункте 2.1.

В результате измерений нового образца, в котором содержится около 10 % границ от общего размера зёрен, были зафиксированы следующие наблюдения.

В эксперименте измерялась часть образца с границами, равная образцу без границ, поэтому исследовалось 912 зёрен.

Утверждение 6. *При уменьшении шага сканирования число попаданий на границу возрастает.*

Утверждение 7. *При попадании на границу зерна присвоенная данной точке ориентировка, найденная как среднее арифметическое двух соседних, может образовывать отдельное зерно (назовём его мнимым [2]).*

Следствие из Утверждения 7. Наличие мнимых зёрен сильно искажает получаемые результаты вычисления статистических характеристик текстуры, причём, чем меньше параметры измерений h и ω_0 , тем сильнее искажение.

Выводы

Разрабатывается двумерная математическая модель образца и EBSD эксперимента для различных параметров измерений: шага сканирования и порогового угла разориентации. Показывается, что существенное влияние на получаемые результаты измерений оказывает выбор порогового угла разориентации. Для его выбора следует использовать знание способа изготовления образца. При большом содержании в образце границ слишком маленький шаг сканирования может привести к искажению результатов вследствие возникновения мнимых зёрен. Для получения более точных результатов при выборе шага сканирования необходимо, кроме среднего размера зерна в образце, использовать дополнительную информацию, отражающую дисперсию размеров, например, долю зёрен в образце с размером, меньшим шага.

Литература

1. Савелова Т.И., Иванова Т.М., Сыпченко М.В. Методы решения некорректных задач текстурного анализа и их приложения. М.: НИЯУ МИФИ, 2012. 268 С.

2. Антонова А.О., Савёлова Т.И. Оценка погрешностей вычисления характеристик текстуры поликристаллов путём изменения параметров измерений методами электронной микроскопии // Журнал вычислит.матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. №2. С. 322–334

ОБ ОПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ПРОСВЕТЛЕНИЯ И АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ОСЛАБЛЕННОЙ ЗАДАЧИ В СМЫСЛЕ ЧЕБЫШЕВА

И.А. Ахмедов[1], Ю.И. Худак[2]

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА), Москва, Россия

e-mail: [1]`ilzarka@gmail.com`, [2]`hudak@mirea.ru`

REGARDING THE OPTICAL PROBLEM OF ENLIGHTENMENT AND ALGORITHMS FOR SOLVING THE ATTENUATION PROBLEM IN THE CHEBYSHEV SENSE

Abstract: The report is devoted to the mathematical modeling of electromagnetic fields in layered media (MDS). The theorem describing the solution of the classical problem of enlightenment for a double-layered MDS and the mathematical formulation of the problem of enlightenment in the Chebyshev sense. Studied the localization of zeroes of profiling functions double-layered MDS and enlightenment areas of the such systems.

Keywords: optics, enlightenment, magnetodielectrics system, MDS, the algorithm for solving the problem of enlightenment.

1. Работа посвящена математическому моделированию электромагнитных полей в многослойных магнитодиэлектрических системах (МДС) (см., например, [1]).

Однако, многие задачи для таких систем (см., например, [2], [3]) мало изучены, даже при $N = 2, 3$.

Опираясь на [2] – [4], в частности, установлено, что при $N = 2$ пространство параметров (материалов) слоистых систем является плоским графом с 20 вершинами, 66 рёбрами и 48 гранями (см. рис. 1).

Показано, что относительно подходящих вспомогательных переменных всевозможные границы областей ограничения профилирующей функции по заданному уровню $h = \alpha_j^2, j = 0, 1, 2, 3$, где $\alpha_j, j = 0, 1, 2, 3$ вычислительные параметры двухслойных МДС, являются гиперболами.

Доказаны утверждения о локализации нулей профилирующих функций двухслойных МДС и областей просветления таких систем.

В [2] анонсирована теорема, описывающая решения классической задачи просветления (см., например, [1]) для двухслойных МДС и дана математическая постановка задачи просветления в смысле Чебышева для любого числа слоёв N (см. также [3]).

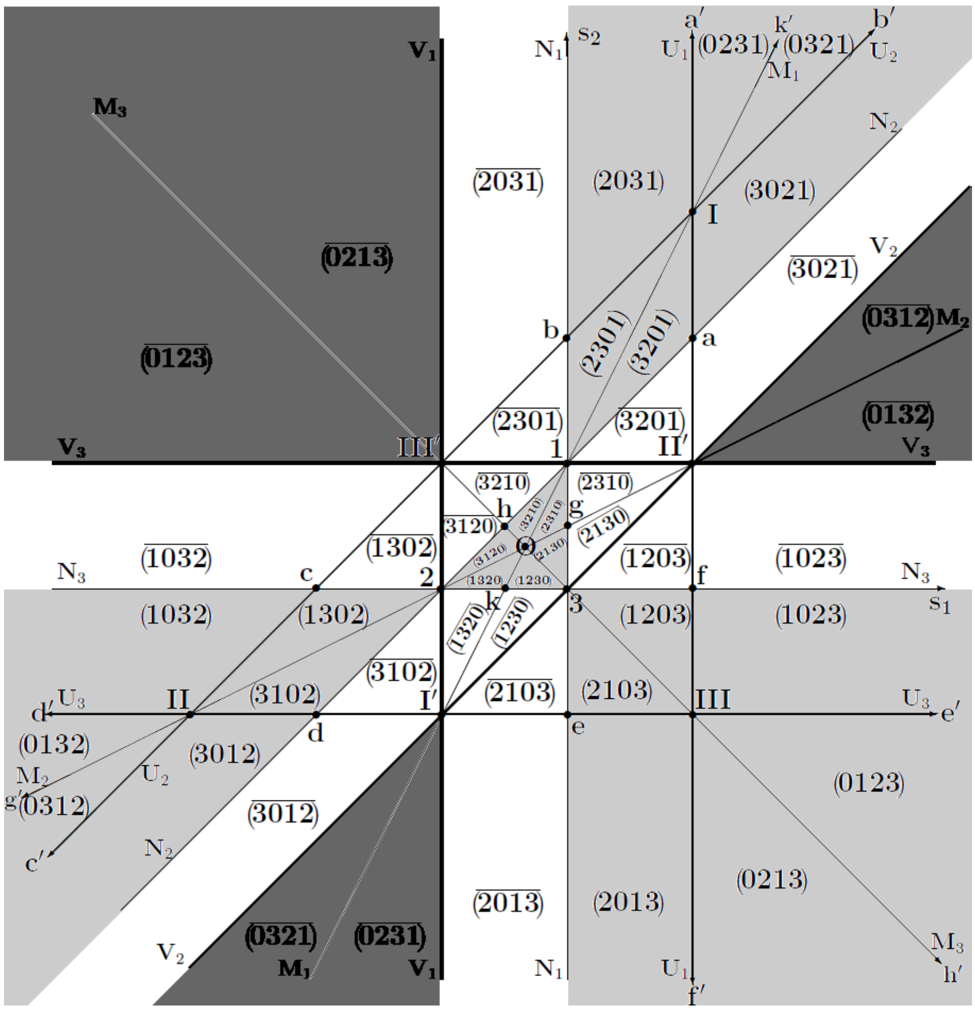


Рис. 1. Пространство параметров $\mathcal{P}_2$ двухслойных МДС — ***карта*** изменения ***свойств*** функции $F(t_1, t_2)$. Наборами чисел $(ijkl)$ отмечены области, для точек которых выполнены ***упорядочивающие*** неравенства $\alpha_i^2 < \alpha_j^2 < \alpha_k^2 < \alpha_l^2$ и условие (3). Наборами чисел $\overline{(ijkl)}$ отмечены области, для точек которых выполнены ***упорядочивающие*** неравенства, а условие (3) не выполняется. Три жирные линии ***вырождения*** $\theta_j = 1$ (на них $\alpha_j^2 = \alpha_0^2$ и $\alpha_i^2 = \alpha_l^2$, $i \neq j, 0$, $l \neq j, 0$), образуют ***средний*** треугольник $\mathbf{I}', \mathbf{II}', \mathbf{III}'$. Три полужирные линии $\theta_j = \Theta$ (на них $\alpha_j^2 = \alpha_0^2$), образуют ***большой*** треугольник $\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}$. Три тонкие линии $\theta_j = \Theta^{1/2}$ (на них $\alpha_j = 0$), образуют ***малый*** треугольник $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$. Кроме того, нанесены три медианы всех треугольников (на них $\alpha_j^2 = \alpha_k^2$). Условие (3) выполняется в замкнутом малом треугольнике и его замкнутых внешних углах.

Ниже сформулирована и решена (при $N = 2$) ослабленная задача просветления в смысле Чебышева, для чего предложен метод углового "сканирования" областей просветления, позволяющий эффективно находить толщины слоёв просветляющих покрытий.

2. Проблема ***согласования*** (в радиотехнике) или ***просветления*** (в оптике) состоит в уменьшении величины $\mathbf{R_F}$ — коэффициента отражения Френеля между двумя полупространствами, путём "***включения***" между ними некоторой МДС.

Математическая постановка ***классической задачи просветления*** (см. [1]): Для ***заданной*** частоты ω_0 минимизировать функционал: $\mathbf{R}(\omega_0; \vec{p}, \vec{\nu}) \underset{\vec{p},\vec{\nu}}{\longrightarrow} \min$.

Будем говорить, что МДС даёт просветление на частоте ω, если:

$$\mathbf{R}_N(\omega) < \mathbf{R_F}\,, \tag{1}$$

МДС даёт ***окно просветления*** (Ω_1, Ω_2), если (1) справедливо $\forall\omega \in (\Omega_1, \Omega_2)$, а ***полное*** просветление возможно на частоте ω_0, если для ω_0 существуют такие значения $\vec{p}$, $\vec{\nu}$, что: $\mathbf{R}(\omega_0; \vec{p}, \vec{\nu}) = 0$.

Показано, что в классической задаче просветления в зависимости от $\vec{p}$, $\vec{\nu}$, существует счетное множество локальных минимумов $\{\omega_0\}$ для $\mathbf{R}_N(\omega)$. В точках $\{\omega_0\}$ — $\mathbf{R}_N(\omega_0)$ одно и то же. При "удачном" выборе $\vec{p}$ — $\mathbf{R}_N(\omega_0) = 0$.

Задача просветления в смысле Чебышева ([2]):
Для интервала $[\Omega_1, \Omega_2]$ минимизировать функционал: $\max\limits_{\Omega_1\leqslant\omega\leqslant\Omega_2} \mathbf{R}_N(\omega; \vec{p}, \vec{\nu}) \underset{\vec{p},\vec{\nu}}{\longrightarrow} \min$.

В [3] показано, что задача просветления в смысле Чебышева для $N = 1$ имеет единственный глобальный минимум и, возможно, конечное число, зависящее от величины интервала $[\Omega_1, \Omega_2]$, локальных минимумов.

Будем говорить, что рассматривается ***ослабленная*** задача просветления в смысле Чебышева, если минимизация в этой задаче проводится только по вектору переменных $\vec{\nu}$ (при фиксированном значении вектора параметров $\vec{p}$ в пространстве параметров $\mathcal{P}_2 = \{\vec{p}\}$).

Определим ***порождающие*** функции (см. [2]), сделав в элементах первого столбца матрицы передачи МДС подстановку:

$$t_1 = \nu_1 \cdot \omega\,,\ \ldots\,,\ t_N = \nu_N \cdot \omega \tag{2}$$

Показано, что в задачах просветления и синтеза по априори задаваемым энергетическим характеристикам МДС можно иметь дело только со второй из этих двух функций, которую будем называть ***профилирующей*** и обозначать $F(\vec{t})$, $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_N)$. Согласно определению эта функция имеет период π $\forall t_j$, $j = 1, \ldots, N$, а основной N-мерный куб её периодов будем обозначать T_0^N.

Будем говорить, что профилирующая функция при данном $\vec{p}$ имеет ***область просветления*** $G^j_{\vec{p}}$ в некотором j-ом её периоде T_j^N, если $\forall\,\vec{t} \in G^j_{\vec{p}} \subset T_j^N$: $F(\vec{t}) < \alpha_0^2$.

С учётом периодичности профилирующая функция $F(\vec{t})$ всегда имеет ***счётное*** множество областей просветления (если они вообще существуют при данном $\vec{p}$).

Для областей просветления, расположенных в одном и том же периоде профилирующей функции, но отвечающих разным значениям параметра $\vec{p}$) можно сформулировать следующий ***принцип предпочтения***:

Будем говорить, что область просветления $G_{\vec{p}_1}$ ***лучше*** области просветления $G_{\vec{p}_0}$, если $G_{\vec{p}_0} \subset G_{\vec{p}_1}$.

Если $G_{\vec{p}}$ какая-либо область просветления, то всякая МДС, получаемая из $F(\vec{t})$ по (2) с $\vec{\nu}$ так, что пересечение луча (2) с $G_{\vec{p}}$ состоит из ***более*** чем одной точки, обязательно имеет хотя бы одно ***окно просветления***.

В замкнутой области просветления $\overline{G}_{\vec{p}}$ функция $F(\vec{t})$ достигает своего минимума, который будет также достигаться и на каждом периоде. Поэтому существует счётное множество (зависящее от $\vec{p}$, $\vec{\nu} = \vec{\nu}(\vec{p})$) локальных минимумов $\{\omega_0\}$ $\mathbf{R}_N(\omega)$.

3. В пространстве параметров $\mathcal{P}_2 = \{\vec{p}\}$ есть такие линии, что поведение профилирующей функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ ***качественно*** меняется при "переходе" точки $\vec{p}$ через эти линии.

Т.к. в приложениях функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ имеется ***характерный*** параметр: $\Theta = p_3/p_0$, то в $\mathcal{P}_2$ удобно ввести "***показательные***" координаты s_1, s_2: $\theta_1 \overset{\text{def}}{=} \Theta^{s_1 + 1/2}$, $\theta_3 \overset{\text{def}}{=} \Theta^{-s_2 + 1/2}$, а тогда $\theta_2 = \Theta^{s_2 - s_1}$.

Пространство $\mathcal{P}_2$ в координатах s_1, s_2 изображёно на рис. 1.

4. В квадрате периодов профилирующей функции T^2 разделённом прямыми $t_1 = \frac{\pi}{2}, t_2 = \frac{\pi}{2}$ на четыре "четверти" $T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}$ существуют две замкнутые четырёхугольные области, в которых ***не существует*** нулей профилирующей функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ ***ни при каких*** значениях параметров $s_1, s_2 \in \mathcal{P}_2 = \{\vec{p}\}$. Расположены безнулевые четырёхугольники вдоль главных диагоналей четвертей T_{10}, T_{01} центральносимметрично друг другу (относительно центра T^2). Граница каждого безнулевого четырёхугольника состоит из двух отрезков границы квадрата T^2 и двух кривых, для которых можно выписать явные параметрические уравнения. Обе кривые исходят из полувершины $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, обращены выпуклостью навстречу друг другу и соединяют указанную полувершину с соответствующими точками границы T^2.

5. Условие:

$$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 < 0 \tag{3}$$

является необходимым и достаточным для существования внутренних для четвертей T_{ij} нулей функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$. Эти нули при изменении параметров s_1, s_2 в областях доминирования **I, II, III, O** парны и заполняют части треугольников: для **I** — северо-восточную половину $\mathbf{T_{10}}$ и юго-западную $\mathbf{T_{01}}$, для **II** — юго-западную половину $\mathbf{T_{10}}$ и северо-восточную $\mathbf{T_{01}}$, для **III** — юго-западную половину $\mathbf{T_{00}}$ и северо-восточную $\mathbf{T_{11}}$, для **O** — северо-восточную половину $\mathbf{T_{00}}$ и юго-западную $\mathbf{T_{11}}$. Нули $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$, отвечающие разным значениям s_1, s_2, простые и различны (за исключением полувершинных решений). Каждый неполувершинный нуль функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ однозначно определяет соответствующие этой функции значения параметров s_1, s_2.

Литература

1. М. Борн, Э. Вольф Основы оптики. М. "Физматлит 1970г.

2. Ю. И. Худак О задаче просветления в классической постановке, Доклады АН, 2013, т.448, № 5, 1-4.

3. Ю. И. Худак О наилучшем однослойном просветляющем покрытии для интервала частот, ЖВМ и МФ, 1990, т.30, №2, 325-327.

4. I. Akhmedov, Yu. Hudak The Anti-reflective Coating for The Normal Incidence of Light, PROGRESS IN ANALYSIS, Proceeding of the 8th Congress of the International Sosiety for Analysis, its Applications, and Computation (ISAAC) (22-27 August 2011), Volume 1, Moskow, Peopless' Frendship University of Russia Publisher, 2012, 128-137.

ЭМПИРИЧЕСКАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ, ВОССТАНОВЛЕНИЕ И КОРРЕКЦИЯ СУБЪЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ

Д.А. Балакин[1], Ю.М. Нагорный[2], Ю.П. Пытьев[3]

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: [1]`kvorosh@gmail.com`, [2]`imtech5@umail.ru`, [3]`yuri.pytyev@gmail.com`

Аннотация: Рассмотрены методы эмпирической верификации и эмпирического восстановления модели субъективных суждений исследователя о модели исследуемого объекта, зависящей от неизвестного параметра. Субъективная модель определена как пространство с мерами правдоподобия и доверия, определяющими модальности суждений исследователя об истинности каждого значения параметра.

Ключевые слова: субъективная модель, верификация, коррекция, оценивание

EMPIRICAL VERIFICATION, RESTORATION AND CORRECTION OF A SUBJECTIVE MODEL

Abstract: Methods are considered for the empirical verification and empirical construction of the model of the researcher-modeler's subjective judgements about the model of the research object that depends on an unknown parameter. The subjective model is defined as the space with plausibility and belief measures that characterize the modalities of researcher-modeler's judgements on the truth of each value of the parameter.

Keywords: subjective model, verification, correction, empirical estimation

Среди известных методов математического моделирования субъективных суждений, допускающих эмпирическое построение и верификацию, отметим байесовский подход [1], в котором значения плотности вероятности интерпретируются как степени уверенности субъекта в истинности его суждений; теорию Демпстера-Шеффера и ее модификации [2, 3], в которых модальности суждений субъекта определяются значениями мер доверия и правдоподобия, заданных общей весовой функцией; субъективную логику [4], в которой уверенность иследователя в истинности суждения характеризуется его субъективным весом, а неуверенность – общим для всех событий весом неопределенности. Всем этим методам свойственна трудность формализации знаний, не являющихся ни абсолютно достоверными, ни абсолютно недостоверными: от исследователя требуется указать численную степень уверенности в истинности всех своих высказываний. Перечисленным методам свойственны и частные проблемы, например, проблема выбора априорного распределения в байесовском подходе, проблема выбора правила комбинирования в теории Демпстера-Шеффера и в субъективной логике. Предложенный в [5] и рассмотренный далее подход свободен от этих недостатков, ибо требует от исследователя лишь упорядочить суждения по правдоподобию и доверию их истинности.

Меры правдоподобия и доверия и их свойства

Математическая модель субъективных суждений модельера-исследователя (м.-и.) и их модальностей определена в [5, 6] как пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\tilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\tilde{x}})$ с мерами правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\tilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \hat{\mathcal{L}}$, в котором X — множество возможных значений неизвестного параметра x модели $M(x)$ объекта исследования, $\mathcal{P}(X)$ — класс всех подмножеств X, $\tilde{x}$ — неопределенный элемент (н.э.) со значениями в X, моделирующий неизвестный параметр $x \in X$, меры $\mathrm{Pl}^{\tilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\tilde{x}}$ характеризуют модальности субъективных суждений м.-и. об истинности каждого $x \in X$ значениями $\mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(\tilde{x} = x)$ и $\mathrm{Bel}^{\tilde{x}}(\tilde{x} \neq x)$, $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, +, \times) = ([0,1], \leqslant, \max, \min)$, $\hat{\mathcal{L}} = ([0,1], \leqslant, \hat{+}, \hat{\times}) = ([0,1], \hat{\leqslant}, \min, \max)$ суть шкалы значений мер $\mathrm{Pl}^{\tilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\tilde{x}}$, в которых $a \leqslant b \Leftrightarrow b \hat{\leqslant} a$, $a, b \in [0,1]$. Для всех $E \in \mathcal{P}(X)$

$$\mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(\tilde{x} \in E) = \sup_{x \in E} t^{\tilde{x}}(x), E \neq \varnothing, \mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(\varnothing) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0, \mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(X) = 1,$$

$$\mathrm{Bel}^{\tilde{x}}(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\tilde{x}}(\tilde{x} \in E) = \inf_{x \in X \setminus E} \hat{s}^{\tilde{x}}(x), E \neq X, \mathrm{Bel}^{\tilde{x}}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1, \mathrm{Bel}^{\tilde{x}}(\varnothing) = 0.$$

Функции $t^{\tilde{x}}(\cdot) : X \to \mathcal{L} : t^{\tilde{x}}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(\tilde{x} = x)$ и $\hat{s}^{\tilde{x}}(\cdot) : X \to \hat{\mathcal{L}} : \hat{s}^{\tilde{x}}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} = \mathrm{Bel}^{\tilde{x}}(\tilde{x} \neq x)$ называются распределениями правдоподобий и доверий значений н.э. $\tilde{x}$, значения $t^{\tilde{x}}(x)$ и $\hat{s}^{\tilde{x}}(x)$ определяют правдоподобие истинности равенства $\tilde{x} = x$ и доверие истинности неравенства $\tilde{x} \neq x$, значения $\mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(E)$ и $\mathrm{Bel}^{\tilde{x}}(E)$ суть правдоподобие и доверие истинности включения $\tilde{x} \in E \in \mathcal{P}(X)$. Пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\tilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\tilde{x}})$, в свою очередь, вполне характеризует $\tilde{x}$ и далее называется его моделью.

Использование данных наблюдений

Математическая модель субъективных суждений м.-и. должна допускать эмпирическую верификацию, основанную на данных наблюдений за объектом, с целью соотнесения сформулированной исследователем субъективной модели с реальностью, ее эмпирическую коррекцию на основе этих данных, если модель соотносится с реальностью достаточно хорошо, и эмпирическое построение на основе этих же данных, если его интересуют модели объекта, согласующиеся с результатами наблюдений. При этом следует различать согласия субъективной модели и эмпирически построенной и субъективной модели с данными наблюдений.

Далее считаем, что м.-и. доступны данные наблюдений за объектом, и он намерен использовать их как для построения статистической модели н. э. $\tilde{x}$ как эмпирической модели возможных значений $x \in X$, так и для оценки реалистичности его модели субъективных суждений, представленной н.э. $\tilde{x}$. С этой целью м.-и. для каждого $x \in X$ формулирует статистическую задачу проверки гипотезы $H(x) = \{x\}$ против класса $K(x)$ альтернативных $H(x)$ гипотез о возможных, отличных от x, значениях, например, против $K(x) = X \setminus \{x\}$, $x \in K(x)$, где x — неизвестное значение параметра вероятности $\mathrm{Pr}(\cdot; x)$, контролировавшей данные наблюдений.

Обозначим $\omega^{(n)} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n$ данные n наблюдений, $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot; x) : \mathcal{A}^n \to [0,1]$ — контролировавшую их вероятность, $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) \in \mathcal{A}^n$ — оптимальную область, минимизирующую вероятность $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega(x, x', \mathrm{pr})\}; x')$ ошибочно принять гипотезу $H(x) = \{x\}$ при конкурирующей частной альтернативе $\{x'\} \subset K(x)$, где

$$\mathrm{pr} = \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega_*(x, x', \mathrm{pr})\}; x) \in [0,1] \tag{1}$$

— вероятность принять гипотезу $H(x)$, когда она и на самом деле верна. Ограничимся семействами $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot; x)$, $x \in X$, для которых оптимальная область $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$ существует $\forall\, \mathrm{pr} \in [0,1]$ и $\forall x' \in K(x)$, $x \in X$.

Построение статистической модели н.э. $\widetilde{x}$

В случае простой гипотезы и простой альтернативы модель объекта охарактеризована условиями $H(x) = \{x\}$, $K(x) = \{x'(x)\} \neq \{x\}$, $x \in X$, то есть $\forall x \in X$ объект может находиться в одном из двух «состояний», определенных либо значением x, либо $x' = x'(x) \neq x$, где отображение $x'(\cdot) : X \to X$ известно м.-и.

Рассмотрим семейство статистических задач проверки гипотез $H(x) = \{x\}$ против $K(x) = \{x'(x)\}$, $x \in X$, когда условие оптимальности областей $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$, $x \in X$, $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, достаточны для построения статистической модели н. э. $\tilde{x}$. При оговоренных свойствах семейства $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot; x)$, $x \in X$, как известно [7], оптимальная область принятия $H(x) = \{x\}$ против любой $K(x) = \{x'\} \neq \{x\}$ имеет вид

$$\Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) = \{\omega^{(n)} \in \Omega^n, \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) \geq \lambda \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x')\}, x, x' \in X, x \neq x',$$

где $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x)$, $\omega^{(n)} \in \Omega^n$, — плотность $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot; x)$ относительно некоторой меры μ, которая не зависит от x, значение $\lambda = \lambda(\mathrm{pr}) \geq 0$ определено условием (1).

Для любых $x, x' \in X$, $x \neq x'$ $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) \subset \Omega_*(x, x', \mathrm{pr}')$, если $\mathrm{pr} \leq \mathrm{pr}', \mathrm{pr}, \mathrm{pr}' \in [0, 1]$, то есть отображение $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$ монотонно по pr (по включению).

Определим семейства взаимно обратных точечно-множественных отображений $\Phi(\cdot, \mathrm{pr}) : X \to \mathcal{A}^n$ и $\Phi^{-1}(\cdot, \mathrm{pr}) : \Omega^{(n)} \to \mathcal{P}(X)$, $\mathrm{pr} \in [0, 1]$,

$$\Phi(x; \mathrm{pr}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Omega_*(x, x'(x), \mathrm{pr}), x \in X,$$

$$\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in X, \omega^{(n)} \in \Phi(x; \mathrm{pr})\}, \omega^{(n)} \in \Omega^n, \quad (2)$$

где $\Phi(x; \mathrm{pr}) \in \mathcal{A}^n$ есть множество элементарных событий $\omega^{(n)} \in \Omega^n$, при которых принимается $H(x)$, $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr}) \in \mathcal{P}(X)$ есть множество $x \in X$, при которых принимается $H(x)$, если наблюдение $\omega^{(n)} \in \Phi(x; \mathrm{pr})$. Согласно (2) $\forall \, \mathrm{pr} \in [0, 1]$, $\forall x \in X$, $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega^n, x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})\}; x) = \mathrm{pr}$, где случайное множество $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})$ покрывает (оценивает) значение x параметра вероятности $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot; x)$, контролировавшей наблюдения $\omega^{(n)}$, и отображение $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})$ монотонно по $\mathrm{pr} \in [0, 1]$. Эти свойства отображений Φ, Φ^{-1}, как статистических характеристик объекта исследования, позволяют м.-и. рассматривать $x \in X$ как значения случайного н.э. $\tilde{x}(\omega^{(n)})$ и считать этот случайный н.э. эмпирической моделью его субъективных суждений о возможных значениях неизвестного параметра x модели $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}(\cdot; x))$, контролировавшей данные наблюдений $\omega^{(n)}$, ибо:

1. Чем больше минимальная вероятность $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, при которой гипотеза $H(x)$ принимается, тем значительнее наблюдение $\omega^{(n)}$ свидетельствует против $H(x)$, тем менее правдоподобно равенство $\tilde{x}(\omega^{(n)}) = x$.

2. Чем больше максимальная вероятность $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, при которой гипотеза $H(x)$ отклоняется, тем значительнее наблюдение $\omega^{(n)}$ свидетельствует против $H(x)$, тем менее правдоподобно равенство $\tilde{x}(\omega^{(n)}) = x$.

Эти замечания определяют статистическую модель случайного н.э. $\tilde{x}(\omega^{(n)})$ вариантами случайных распределений правдоподобий и доверий его значений:

$$t_0^{\tilde{x}}(x; \omega^{(n)}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 - \inf\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0, 1], x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})\}, \hat{s}_0^{\tilde{x}}(x; \omega^{(n)}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 - t_0^{\tilde{x}}(x; \omega^{(n)}),$$

$x \in X$, $\omega^{(n)} \in \Omega^n$, и соответствующие варианты случайных правдоподобия и доверия

$$\mathrm{Pl}_0^{\tilde{x}}(E; \omega^{(n)}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 - \inf\{\mathrm{pr} \in [0, 1] | E \cap \Phi^{-1}(\omega^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr}) \neq \varnothing\} =$$
$$= \sup_{x \in E} t_0^{\tilde{x}}(x; \omega^{(n)}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pl}_0^{\tilde{x}}(\tilde{x} \in E; \omega^{(n)}),$$
$$E \in \mathcal{P}(X),\ E \neq \varnothing,\ \mathrm{Pl}_0^{\tilde{x}}(\varnothing; \omega^{(n)}) = 0,\ \omega^{(n)} \in \Omega^n;$$

$$\mathrm{Bel}_0^{\tilde{x}}(E; \omega^{(n)}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 - \mathrm{Pl}_0^{\tilde{x}}(X \setminus E; \omega^{(n)}) = \sup\{\mathrm{pr} \in [0, 1] | \Phi^{-1}(\omega^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr}) \subset E\} =$$
$$= \inf_{x \in X \setminus E} \hat{s}_0^{\tilde{x}}(x; \omega^{(n)}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bel}_0^{\tilde{x}}(\tilde{x} \in E; \omega^{(n)}),$$
$$E \in \mathcal{P}(X),\ E \neq X,\ \mathrm{Bel}_0^{\tilde{x}}(X; \omega^{(n)}) = 1, \omega^{(n)} \in \Omega^n.$$

В случае простой гипотезы $H(x) = \{x\}$ и сложной альтернативы $K(x) \subset X \setminus \{x\}$, $x \in X$, вообще говоря, существования оптимального класса Ω_* недостаточно для построения статистической модели н.э. $\tilde{x}$, ибо $\forall x \in X$ оптимальная область $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$ определяется «частной альтернативой» $\{x'\} \subset K(x)$, а ее м.-и. указать не может; м.-и. $\forall x \in X$ знает только $H(x) = \{x\}$ и $K(x)$.

Для построения статистической модели н.э. $\tilde{x}$ необходимо, чтобы $\forall x \in X\ \forall x' \in K(x)\ \forall\, \mathrm{pr} \in [0,1]\ \exists \Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) = \Omega^*(x, K(x), \mathrm{pr}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Phi(x; \mathrm{pr})$, т.е. чтобы $\forall\, \mathrm{pr} \in [0,1]\ \forall x \in X$ существовал класс равномерно относительно $x' \in K(x)$ оптимальных областей $\Phi(x; \mathrm{pr})$ принятия $H(x)$, $x \in X$, [7]. Пусть, например, $H(x) = \{x\}$, $K(x) = X \setminus \{x\}$, $x \in X = \mathcal{R}^1$, $\mathrm{Pr}(\cdot; x) = \mathcal{N}(x, \sigma^2 = 1)$. Так как в классе несмещенных областей существует равномерно относительно $x' \in K(x)$ оптимальная область принятия $H(x)$: $\forall x' \in K(x)$ $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) = \Phi(x; \mathrm{pr}) = \{\omega^{(n)} \in \mathcal{R}^n, |\omega_{(n)} - x| \le \alpha_n(\mathrm{pr})\}$, где $\omega_{(n)} = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j$, ω_i, $i = 1, \ldots, n$, взаимно независимы, а $\alpha_n = \alpha_n(\mathrm{pr})$ — корень уравнения $\mathrm{Pr}^{(n)}(|\omega_{(n)} - x| \le \alpha_n) = \mathrm{pr}$, [7], то вариант случайного распределения $\tilde{x}$

$$t_0^{\tilde{x}}(x; \omega^{(n)}) = \sqrt{2/\pi} \int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{n}|\omega_{(n)} - x|} \exp(-z^2/2) dz, x \in \mathcal{R}^1.$$

Наконец, для семейства статистических задач проверки гипотез $H(x) = \{x\}$, $K(x) = X \setminus \{x\}$, $x \in X$, множество $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})$ можно определить непосредственно как оценивающее множество максимального правдоподобия (о.м.м.п.). Функция $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x)$, $x \in X$, называется функцией правдоподобия, x' — более правдоподобным, чем x, если $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x') > \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x)$, семейство оценивающих множеств $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$, $\omega^{(n)} \in \Omega^n$, называется семейством о.м.м.п., если для любых $\omega^{(n)} \in \Omega^n$ и $\mathrm{pr} \in [0,1]$ включение $x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}, \mathrm{pr})$ влечет включение любого $x' \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}, \mathrm{pr})$, не менее правдоподобного, чем x: $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x') \le \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x)$. Семейство о.м.м.п. $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}, \mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$, $\omega^{(n)} \in \Omega^n$, определим условиями: $\forall \omega^{(n)} \in \Omega^n$ $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}, \mathrm{pr}) = \{x \in X : \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) \ge \lambda \sup\{\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x'), x' \in X\}\}$, где $\lambda = \lambda(\mathrm{pr}) \in [0,1]$ определяется из уравнения $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega^n, x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})\}; x) = \mathrm{pr}$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$.

При регулярности [7] семейства $\{\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot; x) | x \in X = \mathcal{R}^k\}$ и единственности при $n > n_0$ оценки максимального правдоподобия $x(\omega^{(n)}) = \operatorname*{argmax}_{x' \in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x')$ параметра $x \in X$ распределение статистики $-2\ln(\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) / \sup\limits_{x' \in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x'))$ при $n \to \infty$ и верной гипотезе $H(x)$ сходится к распределению χ^2 с k степенями свободы. $F_{\chi^2_k}(-2\ln \lambda^{(n)}(\mathrm{pr})) \to \mathrm{pr}$ при $n \to \infty$, где $F_{\chi^2_k}(\cdot)$ — функция распределения χ^2 с k степенями свободы, откуда

$$t^{\tilde{x}(\omega^{(n)})}(x) - 1 + F_{\chi^2_k}\left(-2\ln(\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) / \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x(\omega^{(n)})))\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Для $\mathrm{Pr}(\cdot; x) \backsim \mathcal{N}(x, 1)$ $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) = (2\pi)^{-n/2} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (\omega_i - x)^2)$, $\omega^{(n)} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n$, $x \in X = \mathcal{R}^1$, $\operatorname*{argmax}_{x' \in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x') = x(\omega^{(n)}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \omega_i$, о.м.м.п. $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr}) = \{x \in X, |x(\omega^{(n)}) - x| \le \sqrt{-2\ln \lambda(\mathrm{pr})} / \sqrt{n} = \alpha_n(\mathrm{pr})\}$, где $\alpha_n(\mathrm{pr})$ — корень уравнения $\mathrm{Pr}^{(n)}(|\omega_{(n)} - x| \le \alpha_n) = \mathrm{pr}$.

Эмпирическая верификация субъективной модели

Согласие субъективной модели н.э. $\tilde{x}$ с моделью его оценки $\tilde{x}(\omega^{(n)})$ Если м.-и. предложил модель н.э. $\tilde{x}$ до появления данных наблюдений за моделируемым объектом, то он может использовать н.э. $\tilde{x}(\omega^{(n)})$ для анализа состоятельности своей модели н.э. $\tilde{x}$, считая $\tilde{x}(\omega^{(n)})$ статистической оценкой $\tilde{x}$.

Пусть, например, согласно его модели x_0 — единственное максимально правдоподобное значение, $t^{\tilde{x}}(x_0) = 1$. Если данные $\omega^{(n)}$ контролировались $\mathcal{N}(x_0, 1)$, и, например, $x_0 < x(\omega^{(n)})$, то вероятность получить любое $x' > x(\omega^{(n)})$ равна $\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int\limits_{x(\omega^{(n)})}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(z-x_0)^2}{2/n}\right) dz = \frac{1}{2} t_0^{\tilde{x}}(x_0; \omega^{(n)})$. Если $t_0^{\tilde{x}}(x_0; \omega^{(n)}) \lesssim 10^{-3}$, то модель н.э. $\tilde{x}$ плохо согласуется с моделью $\tilde{x}(\omega^{(n)})$.

Если исследователь считает, что согласие его модели н.э. $\tilde{x}$ с моделью н.э. $\tilde{x}(\omega^{(n)})$ удовлетворительное, то он может ее использовать для коррекции своей модели, применив методы построения «коллективной экспертизы» [9].

Согласие модели н.э. $\tilde{x}$ с данными $\omega^{(n)}$ наблюдений за объектом Судить о том, насколько предложенная м.-и. модель н.э. $\tilde{x}$ согласуется с данными $\omega^{(n)}$ наблюдений, следует, не обращаясь к н.э. $\tilde{x}(\omega^{(n)})$. Рассмотрим семейство неопределенных множеств (н.м.) [5, 6] $\Phi(\tilde{x}; \mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, определенных отображениями (2). Поскольку $\mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(\omega^{(n)} \in \Phi(\tilde{x}; \mathrm{pr})) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\{t^{\tilde{x}}(x) | x \in X, \omega^{(n)} \in \Phi(x; \mathrm{pr})\}$ — правдоподобие истинности неопределенного высказывания, согласно которому н.м. $\Phi(\tilde{x}, \mathrm{pr})$ покрывает $\omega^{(n)}$, то чем больше $\mathrm{pr}(\omega^{(n)}) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0, 1], \mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(\omega^{(n)} \in \Phi(\tilde{x}, \mathrm{pr})) = 1\}$ — минимальная вероятность pr покрытия $\omega^{(n)}$ н.м. $\Phi(\tilde{x}; \mathrm{pr})$, при которой правдоподобие покрытия $\mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(\omega^{(n)} \in \Phi(\tilde{x}; \mathrm{pr})) = 1$, тем значительнее наблюдение $\omega^{(n)}$ свидетельствует против модели н. э. $\tilde{x}$. Поэтому (случайное) правдоподобие истинности неопределенного высказывания, согласно которому модель н.э. $\tilde{x}$ согласуется с данными наблюдений $\omega^{(n)}$, $\tilde{x} \backsim \omega^{(n)}$, определим равенством

$$\mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(\tilde{x} \backsim \omega^{(n)}) \overset{\mathrm{def}}{=} 1 - \mathrm{pr}(\omega^{(n)}) = 1 - \inf\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0, 1], \mathrm{Pl}^{\tilde{x}}(\tilde{x} \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})) = 1\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 14-07-00441.

Литература

1. Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В. Байесовские сети: Логико-вероятностный подход.— СПб. : Наука, 2006.

2. Wang P. A Defect in Dempster-Shafer Theory // In Proceedings of the Tenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence.— 1994.— P. 560–566.

3. Smarandache F. Unification of Fusion Theories (UFT) // International Journal of Applied Mathematics & Statistics.— 2004.— Vol. 2.— P. 1–14.

4. Josang A. A Logic for Uncertain Probabilities // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems.— 2001.—June.— Vol. 9, no. 3.— P. 279–311.

5. Пытьев Ю. П. Математическое моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования // Математическое моделирование.— 2013.— Т. 25, № 4.— С. 102–125.— doi: 10.1134/S2070048213060094.

6. Пытьев Ю. П., Фаломкина О. В. Субъективное моделирование в научных исследованиях // Всероссийская конференция «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы».— Москва, 2014.

7. Уилкс С. Математическая статистика.— М. : Наука, 1967.

8. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения.— М. : Наука, 1968.

9. Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности.— 2 изд.— М. : Физматлит, 2015.

УЛУЧШЕННЫЙ АЛГОРИТМ УДАЛЕНИЯ ЛИШНИХ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ИЗ СИСТЕМЫ

А.А. Бедринцев[1], В.В. Чепыжов[2]

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия

e-mail: [1]alekseybed@phystech.edu, [2]chep@iitp.ru

Аннотация: Рассморена задача нахождения в системе линейных неравенств тех, удаление которых не изменяет ее множество решений. Известен метод решения этой задачи на основе серии задач линейного программирования. Предложена рандомизированная модификация этого алгоритма на базе метода генерации случайных точек внутри многогранника, позволяющая сократить время решения задачи.

Ключевые слова: Системы линейных неравенств, линейное программирование, Hit-and-run, Billiard walk.

IMPROVED ALFORITHM FOR REDUNDANT LINEAR INEQUALITIES IDENTIFICATION

Abstract: Problem of identification of redundant linear constraints is considered. Redundant constraints may be removed from the system without changing its solution. Method based on series of linear programming problems is known. Randomized modification of the method is proposed. Procedure of random points generation inside polyhedron is in the core of the modification. The improved algorithm is faster than basic one.

Ключевые слова: Linear inequalities, redundant constraints, linear programming, Hit-and-run, Billiard walk.

Постановка задачи

Пусть дан набор $P = \{p_i\}_{i=1}^N$ полупространств $p_i = \{x \in \mathbb{R}^d | a_i^T x \le b^i\}$. Их пересечение есть выпуклый многогранник $M(P) = \bigcap\limits_{i=1}^N p_i$, задаваемый системой линейных неравенств $M(P) = \{x \in \mathbb{R}^d | Ax \le b\}$, где A – матрица размером $N \times d$, строки которой a_i^T – векторы нормалей к гиперплоскостям ∂p_i, а $b = (b^1, ..., b^N)^T$, неравенство между векторами понимается покомпонентно. Пусть $M(P) \neq \emptyset$, т.е. система неравенств совместна.

Рассмотрим такие подмножества $Q \subseteq P$, что $M(Q) = M(P)$, т.е. множества решений систем неравенств, задающих полупространства из Q и P, совпадают. Поставим задачу нахождения минимального такого подмножества Q:

$$\begin{aligned} &\min_{Q \subseteq P} |Q| \\ &s.t.\ M(Q) = M(P) \end{aligned} \tag{1}$$

Неравенства (ровно как соответствующие полупространства решений и границы-гиперплоскости), задающие элементы Q, естественно называть *существенными*, а неравенства, соответствующие элементам $P \setminus Q$ – *несущественными* или *лишними*.

Актуальность задачи

Инженерные задачи сводятся к задачам оптимизации – поиска минимума (максимума) функции на допустимом множестве. Допустимое множество определяет область значений переменных, которые соответствуют корректным значениям геометрических и физических характеристик разрабатываемого объекта. Это могут быть известные из предметной области границы изменения отдельных параметров и неравенства-связи между несколькими переменными. Нередко такие ограничения формулируются в виде системы линейных неравенств $Ax \leq b$.

Часто реальный физический объект параметризуется вектором большой размерности. В силу связей между компонентами вектора и ограничений на них данные, по крайней мере, приближенно, лежат в некотором подмножестве меньшей размерности. Для эффективного решения задач обработки данных применяют процедуры снижения размерности.

В одном из методов снижения размерности, методе главных компонент (Principal component analysis [1]), ищется наилучшее линейное приближение этого многообразия, т.е. наиболее близкая к точкам выборки гиперплоскость. Процедура сжатия имеет вид $y = C(x-a)$ и сопоставляет вектору x вектор y меньшей размерности. Процедура восстановления $\hat{x} = C^T y + a$ отображает вектор y в пространство исходной размерности. Параметры процедуры C и a подбираются так, чтобы минимизировать суммарную квадратичную ошибку восстановления $\sum\limits_{x \in X} \|x - \hat{x}\|^2$ на обучающей выборке – наборе векторов X.

При применении процедуры снижения размерности система линейных ограничений $Ax \leq b$ исходной задачи оптимизации принимает вид $AC^T y \leq b - Aa$. Допустимое множество в задаче, решаемой в пространстве меньшей размерности – та часть «сжатого» пространства, которая при восстановлении попадает в исходный многогранник $M(P)$. Оно задается системой из того же количества неравенств, но в пространстве меньшей размерности.

На практике размерность пространства удается уменьшить в разы. Так, в [1] описание профиля поперечного сечения крыла самолета, который исходно параметризуется 57-ю ординатами в точках с фиксированными абсциссами, сжимается до размерности 6. При таком отображении в пространство меньшей размерности некоторые неравенства-ограничения могут стать лишними. Время решения оптимизационной задачи можно сократить, решив задачу (1), т.е. удалив лишние ограничения.

Известные методы

В [2] описаны некоторые методы решения задачи (1) и произведено их сравнение. Большинство алгоритмов, рассмотренных в [2], не могут быть обобщены на случай нелинейных ограничений. В работе [3] описан метод идентификации лишних неравенств на основе эллипсоида Дикина. В монографии [4] изложена процедура решения систем линейных неравенств. В процессе решения системы можно доказать, что некоторые неравенства являются лишними. Последние два метода дают только достаточные условия того, что неравенство является несущественным.

В статье [5] предложен критерий проверки неравенства на существенность на основе решения задачи линейного программирования. Рассматривается следующая задача линейного программирования:

$$\begin{aligned} z_i &= \min_x a_i^T x \\ s.t.\ A_{-i}x &\le b_{-i} \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь матрица A_{-i} получена из A удалением i-ой строки, а b_{-i} – вектор b без i-ого элемента.

Имеет место следующий критерий. Неравенство $a_i^T x \le b^i$ является лишним тогда и только тогда, когда $z_i \le b^i$.

На основе задачи (2) формулируется алгоритм *прогонки сверху* для решения задачи (1):

Алгоритм прогонки сверху:

1. Для каждого полупространства $p_i \in P$:
   (a) Проверить, является ли оно лишним, с помощью задачи типа (2).
   (b) Если да, удалить его из системы: $P = P \setminus \{p_i\}$.
2. $Q = P$ – множество существенных ограничений, решение задачи (1).

Оценим сложность проверки одного неравенства. Известно, что вычислительная сложность решения задачи линейного программирования, записанной в стандартном виде (ограничения приведены к виду равенств, а переменные принимают неотрицательные значения) с m ограничениями и n переменными есть $O(\frac{n^{1.5}m^{1.5}}{\ln m})$, где L – длина битового представления задачи [6].

Задача (2) с K ограничениями в стандартном виде переписывается в виде задачи с $n = K + 2d$ переменными и $m = K$ ограничений. Следовательно, сложность проверки одного неравенства есть $O(\frac{K^3}{\ln K})$, а сложность прогонки сверху – $O(\frac{N^4}{\ln N})$, если предполагать, что размерность пространства $d \ll N$.

Также автор [5] доказал еще несколько утверждений, позволяющих уменьшить количество задач (2) за счет классификации на лишние или существенные нескольких ограничений после решения одной задачи вида (2). В случае отсутствия вырожденности во взаимном расположении гиперплоскостей оптимальная точка задачи (2) – вершина $M(P)$. Наиболее эффективны следующие два утверждения. Обозначим $V(x) = \{a_i | a_i^T x = b^i\}$ – множество нормалей, соответствующих активным в точке x неравенствам, т.е. обращающимся в равенства.

Утверждение 1. *Если $V(x)$ – линейно независимая система векторов, то они соответствуют существенным неравенствам.*

Утверждение 2. *Если вектор a_k раскладывается с неотрицательными коэффициентами по векторам нормалей активных неравенств (кроме него самого):* $\exists u_i \geq 0 : a_k = \sum\limits_{a_i \in V(x) \setminus \{a_k\}} u_i a_i$, *то k-ое неравенство лишнее.*

Эти дополнительные проверки, как показывают эксперименты в [5], сокращая количество вычислений на 10-20%, не уменьшают асимптотику времени работы алгоритма.

Модификация метода на базе процедуры Hit-and-run

Предлагается рандомизированная модификация алгоритма, позволяющая его ускорить, а в случае, когда большинство неравенств системы являются существенными ($|P \setminus Q| = o(N)$), она позволяет уменьшить асимптотику времени работы алгоритма.

Известна процедура Hit-and-run [7] генерации случайных точек внутри многогранника. Пусть дан выпуклый многогранник $M(P)$ и некоторая его внутренняя точка $x_0 \in int\ M(P)$.

Алгоритм Hit-and-run:

1. Для $k = 1, 2, \ldots$:
   (a) Сгенерировать случайный вектор r_k.
   (b) Для прямой $x = x_{k-1} + r_k t$ найти все точки пересечения с гиперплоскостями из P. Необходимо решить линейные уравнения $a_i^T(x_{k-1} + r_k t_i^k) = b^i$.
   (c) Найти гиперплоскости с наименьшими по модулю неположительными и неотрицательными t_i^k: $t_{\alpha_k}^k = -\min\limits_{i: t_i^k < 0} |t_i^k|$, $t_{\beta_k}^k = \min\limits_{i: t_i^k > 0} |t_i^k|$ (если отрицательного t_i^k не существует, то $t_{\alpha_k}^k$ полагается равным минус бесконечности, если положительного t_i^k не существует, то $t_{\beta_k}^k$ полагается равным плюс бесконечности).
   (d) Выбрать случайное число $p_k \in [t_{\alpha_k}^k, t_{\beta_k}^k]$, положить $x_k = x_{k-1} + r_k p_k$.
2. $x_1, x_2, \ldots$ – случайные точки в многограннике.

«Посещенные» гиперплоскости, соответствующие индексам α_k и β_k, являются существенными и могут не проверяться с помощью процедуры (2). Однако про непосещенные гиперплоскости ничего сказать нельзя. Они могут соответствовать действительно лишним неравенствам, и до них с помощью процедуры Hit-and-run невозможно дойти, а могут быть существенными гипергранями малого объема, вероятность попасть в которые мала.

Метод Hit-and-run вычислительно эффективен. Сложность генерации одной точки – решения N линейных уравнений с d подобными слагаемыми и нахождения минимума и максимума среди N чисел (пренебрежем случаями, когда некоторые уравнения не имеют корней) – $O(Nd)$. Таким образом, без изменения асимптотики вычислительной сложности алгоритма можно сделать до $O(N^3)$ итераций процедуры Hit-and-run.

При генерации одной точки посещаются две гиперплоскости. Как показывает численный эксперимент, если предположить равную вероятность посещения существенных граней многогранника (например, правильный многоугольник на плоскости), то для посещения всех существенных граней достаточно сделать $O(|Q|)$ итераций. А именно, за число итераций, превышающее количество существенных граней в 5-6 раз, 99% существенных гиперплоскостей будут посещены.

Также известен более продвинутый метод блуждания по многограннику Billiard walk [8]. Доказана его сходимость к равномерному распределению. Его отличие от метода Hit-and-run в том, что на каждом шаге генерируется длина траектории. Если точка, двигаясь в случайном направлении, достигает границы многогранника, она отражается по правилу «угол падения равен углу отражения» и продолжает движение либо до следующей грани, либо до конца траектории. Конец траектории берется за новую сгенерированную точку. Выбирается случайное направление, длина траектории и процесс повторяется. В этом случае все посещенные гиперплоскости, от которых происходило отражение, помечаются как существенные. Для посещения одной гиперплоскости методом Billiard walk требуется примерно столько же операций, сколько в методе Hit-and-run.

Заметим, что из представленных оценок следует, что процедура получения приближенного решения задачи (1) удаления лишних неравенств на базе метода генерации случайных точек внутри многогранника имеет сложность $O(|Q|Nd) \subseteq O(N^2d)$ операций. Для получения точного решения необходимо на втором этапе непосещенные гиперплоскости проверить с помощью задач типа (2) с применением сформулированных выше утверждений. В случае, когда имеется значительное количество существенных неравенств, большинство из них может быть посещено, после чего останется проверить $o(N)$ неравенств. В этом случае время работы алгоритма асимптотически меньше оценки для базовой прогонки сверху.

Заключение

В статье рассмотрена задача удаления лишних неравенств из системы. Известный ранее метод на основе решения группы задач линейного программирования улучшен с помощью дополнительной процедуры на базе генерации случайных точек внутри многогранника решений системы. В процессе генерации точек ищутся пересечения луча с началом во внутренней точке многогранника с его гранями, которые являются существенными. Те грани, которые не были таким образом посещены, должны быть проверены с помощью базовой версии алгоритма. Данная предварительная процедура позволяет существенно ускорить работу алгоритма. Предложенный алгоритм решения поставленной задачи обобщается на случай нелинейных ограничений.

Исследование выполнено в ИППИ РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

Литература

1. Бурнаев Е.В., Чернова С.С. Об итеративном алгоритме подсчета главных компонент // Информационные процессы. Том 8. № 2. 2008. С. 99–107.

2. Paulraj S., Sumathi P. A Comparative Study of Redundant Constraints Identification methods in Linear programming Problems // Mathematical Problems in Engineering. Vol. 2010. Article ID 723402. 2010.

3. Boyd S. Convex Optimization. Cambridge: UniversityPress, 2004.

4. Черников С.Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.

5. Caron R.J., McDonald J.F., Ponic C.M. A degenerate extreme point strategy for the classification of linear constraints as redundant or necessary // Journal of Optimization Theory and Applications. Vol. 62, no. 2. 1989. pp. 225–237.

6. Anstreicher K. Linear Programming in operations // SIAM J. on Optimization. Vol. 9, No 4. 1999. pp. 803–812.

7. Smith R.L. Efficient Monte-Carlo Procedures for Generating Points Uniformly Distributed over Bounded Regions // Operations Research. Vol. 32. 1984. pp. 1296–1308.

8. Gryazina E., Polyak B. Random sampling: Billiard Walk algorithm // European Journal of Operational Research. Vol. 238. 2014. pp. 497–504.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Я.И. Белопольская[1], Е.И. Немченко[2]

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: [1]`yana@yb1569.spb.edu`, [2]`nemchenko_ekaterina@mail.ru`

Аннотация: В работе построен численный алгоритм построения классического решения задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений, основанный на вероятностном представлении этого решения и численном решении соответствующей стохастической задачи.

Ключевые слова: стохастические уравнения, квазилинейные параболические уравнения, численные решения, задача Коши

STOCHASTIC MODELS ASSOCIATED WITH THE CAUCHY PROBLEM FOR QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS AND NUMERICAL ALGORITHMS OF ITS SOLUTION

Abstract: We suggest a numerical algorithm to construct a classical solution of the Cauchy problem for quasilinear parabolic equations. The algorithm is based on a stochastic representation of the required solution and numerical solution of the correspondent stochastic problem.

Keywords: stochastic equations, quasilinear parabolic equations, numerical solutions, the Cauchy problem

Стохастические модели, ассоциированные с задачей Коши для нелинейных параболических уравнений вида

$$u_s + \frac{1}{2}A^2(x,u)u_{xx} + a(x,u)u_x + f(u) = 0 \quad u(T,x) = u_0(x), \tag{1}$$

привлекают интерес исследователей уже несколько десятилетий [1]–[3]. Здесь u_s, u_x, u_{xx} обозначают соответствующие частные производные, $s \in [0,T], x \in R$, а коэффициенты a, A, f – скалярные функции, которые могут нелинейно зависеть как от самой функции u (семилинейный случай), так и от ее производных до второго порядка. Основная идея, лежащая в основе построения этих моделей в семилинейном случае, состоит в том, что при априорном предположении о существовании классического решения задачи (1), естественное вероятностное представление ее решения нетрудно получить с помощью формулы Ито. Пусть $w(t) \in R$ – стандартный винеровский процесс и u – классическое решение задачи (1). Рассмотрим стохастическое уравнение

$$d\xi(\theta) = a(\xi(\theta), u(\theta, \xi(\theta)))d\theta + A(\xi(\theta), u(\theta, \xi(\theta)))dw(\theta), \quad \xi(t) = x, \tag{2}$$

где $a(x, u), A(x, u)$ - достаточно регулярные вещественные функции на $R \times R$. Применяя формулу Ито получим требуемое представление в виде

$$u(t, x) = E[u_0(\xi_{t,x}(T)) + \int_t^T f(u(\tau, \xi_{t,x}(\tau))d\tau)]. \tag{3}$$

С другой стороны, нетрудно заметить, что соотношения (2)–(3) представляют собой замкнутую систему, которую можно решить независимо от (1) .

При этом, если компонента $u(t, x)$ решения системы (2)–(3) будет дважды дифференцируемой функцией по x, то тем самым будет построено единственное классическое решение задачи Коши (1). Заметим, что система (2)–(3) позволяет построить естественные алгоритмы для построения численного решения задачи (1).

Описанный подход можно обобщить и рассмотреть задачу Коши для системы параболических уравнений вида

$$v^m_s + \frac{1}{2}A^2(x, v)v^m_{xx} + a(x, v)v^m_x + \sum_{l=1}^{d} B^m_l v^l_x + \sum_{l=1}^{d} c^m_l v^l + f^m(v) = 0 \quad v(T, x) = v_0(x) \in R^d, \tag{4}$$

Соответствующая стохастическая система при этом будет иметь вид

$$d\zeta(\theta) = a(\zeta(\theta), v(\theta, \zeta(\theta)))d\theta + A(\zeta(\theta), v(\theta, \zeta(\theta)))dw(\theta), \quad \zeta(s) = x \in R, \tag{5}$$

$$d\eta(\theta) = c(\zeta(\theta), v(\theta, \zeta(\theta)))\eta(\theta)d\theta + C(\zeta(\theta), v(\theta, \zeta(\theta)))\eta(\theta)dw(\theta), \quad \eta(s) = h \in R^d, \tag{6}$$

$$\langle h, v(s, x)\rangle = E\langle \eta_{s,h}(T), v_0(\zeta_{s,x}(T))\rangle + \int_t^T \langle \eta(\tau), f(v(\tau, \zeta_{s,x}(\tau))\rangle d\tau)], \tag{7}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в R^d и $B = CA$.

Для того, чтобы распространить этот подход на случай квазилинейных параболических уравнений, т.е. если a, A и f в (1) зависят от x, u и u_x нужно с помощью метода дифференциального продолжения превратить рассматриваемую задачу в систему семилинейных параболических уравнений относительно функции $V = (V^1, V^2, V^3)$, где $V^1 = u, V^2 = u_x, V^3 = u_{xx}$, а затем воспользоваться приведенным выше подходом.

Рассмотрим реализацию этого подхода на примере решения задачи Коши вида

$$u_s + \frac{1}{2}A^2(u)u_{xx} + [u_x]^2 + f(u)u = 0 \quad u(T, x) = u_0(x). \tag{8}$$

В этом случае достаточно построить первое дифференциальное продолжение этого уравнения. Положив $V^0 = u, V^1 = u_x$, получим

$$V^1_s + \frac{1}{2}A^2(V^0)V^1_{xx} + A_u(V^0)A(V^0)V^1V^1_x + 2V^1V^1_x + f_u(V^0)V^1V^0 + f(V^0)V^1 = 0, \tag{9}$$

$V^1(T, x) = V^1_0(x) = u_x(T, x)$. Переписав уравнение (8) в виде

$$V^0_s + \frac{1}{2}A^2(V^0)V^0_{xx} + 2V^1V^0_x - [V^1]^2 + f(V^0)V^0 = 0, \quad V^0(T, x) = u_0(x), \tag{10}$$

заметим, что система (9), (10) имеет нужную структуру вида (4) и соответствующая стохастическая задача имеет вид

$$d\zeta(\theta) = 2V^1(\theta, \zeta(\theta))d\theta + A(V^0(\theta, \zeta(\theta)))dw(\theta), \quad \zeta(s) = x \in R, \tag{11}$$

$$d\eta(\theta) = c(V^0(\theta, \zeta(\theta)))\eta(\theta)d\theta + C^{V^0,V^1}(\zeta(\theta)))\eta(\theta)dw(\theta), \quad \eta(s) = h \in R^2, \tag{12}$$

$$\langle h, V(s,x)\rangle = E[\langle \eta(T), G_0(\zeta_{s,x}(T))\rangle], \tag{13}$$

где $V(s,x) = (V^0(s,x), V^1(s,x)) = (u(s,x), u_x(s,x))^*$ – вектор-столбец,

$$c(V^0) = \begin{pmatrix} f(V^0) & f_u(V^0)V^1 \\ -V^1 & f(V^0) \end{pmatrix}, \; C^{V^0,V^1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_u(V^0)V^1 \end{pmatrix}, \; G_0 = \begin{pmatrix} V_0^0 \\ V_0^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(T) \\ u_x(T) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть существует классическое решение задачи Коши (8). Тогда справедливо вероятностное представление*

$$u(s,x) = E[S^0(s,T)u_0(\zeta_{s,x}(T))], \tag{14}$$

где процессы $\zeta(t) \in R, \eta(t) = (\eta^0(t), \eta^1(t)) \in R^2$ удовлетворяют СДУ (11), (12) и $S^0(s,t)h^0 = \eta^0(t)$.

Численные схемы решения семилинейных параболических уравнений были предложены в работах [4], [5]. Мы воспользуемся идеями и результатами этих работ для рассматриваемой нами задачи.

Для построения схемы численного решения задачи (8), (а точнее задачи (9), (10)) на основе представления вида (13) дискретизуем рассматриваемые стохастические уравнения. Пусть $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ – разбиение отрезка $[0,T]$ и $\Delta = \frac{T-t}{n}$. Решение задачи (11)–(13) можно построить, воспользовавшись методом последовательных приближений (методом итераций). При этом в силу эволюционных свойств отображения $\Gamma(s,t)$, заданного соотношением $\Gamma(s,T)G_0 = E[\langle \eta_{s,z}(T), G_0(\zeta_{s,x}(T))\rangle$ итерировать можно послойно, т.е. не на всем интервале $[t,T]$, а лишь на интервалах $[t_k, t_{k+1}]$.

Другими словами, воспользовавшись методом Эйлера, получим соотношения

$$\tilde{\zeta}_{t_0,x} = x, \tilde{\zeta}_{t_k,x}(t_{k+1}) = x + 2V^1(t_k,x)\Delta + A(V^0(t_k,x))\varepsilon_k\sqrt{\Delta} \tag{15}$$

$$\tilde{\eta}^0_{t_0,h^0} = h^0, \tilde{\eta}^0_{t_k,h^0}(t_{k+1}) = h^0 + [f(V^0(t_k,x))h^0 + f_u(V^0(t_k,x))V^1(t_k,x)h^1]\Delta \tag{16}$$

$$\tilde{\eta}^1_{t_0,h^1} = h^1, \tilde{\eta}^1_{t_k,h^1}(t_{k+1}) = h^1 - [V^1(t_k,x)h^0 - f(V^0(t_k,x))h^1]\Delta \tag{17}$$

$$+A_u(V^0(t_k,x))V^1(t_k,x)h^1\varepsilon_k\sqrt{\Delta},$$

где ε_k – независимые одинаково распределенные случайные величины с законом распределения $P(\varepsilon_k = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Используя формулы (15)–(17) при $h^0 = h^1 = 1$, получим

$$\tilde{V}^0(t_k,x) = \frac{1}{2}[[1 + [f(\tilde{V}^0(t_k,x)) + f_u(\tilde{V}^0(t_k,x))\tilde{V}^1(t_k,x)]\Delta] \tag{18}$$

$$\times\tilde{V}^0(t_{k+1}, x + 2\tilde{V}^1(t_k,x)\Delta + A(\tilde{V}^0(t_k,x))\sqrt{\Delta})] + \frac{1}{2}[[1 + [f(\tilde{V}^0(t_k,x))$$

$$+f_u(\tilde{V}^0(t_k,x))\tilde{V}^1(t_k,x)]\Delta]\tilde{V}^0(t_{k+1}, x + 2\tilde{V}^1(t_k,x)\Delta - A(\tilde{V}^0(t_k,x))\sqrt{\Delta})],$$

$$\tilde{V}^1(t_k,x) = \frac{1}{2}[1 - [\tilde{V}^1(t_k,x) - f(\tilde{V}^0(t_k,x))]\Delta \tag{19}$$

$$+A_u(\tilde{V}^0(t_k,x))\tilde{V}^1(t_k,x)\sqrt{\Delta}]\tilde{V}^1(t_k,x+2\tilde{V}^1(t_k,x)\Delta+A(\tilde{V}^0(t_k,x))\sqrt{\Delta})$$
$$+\frac{1}{2}[1-[\tilde{V}^1(t_{k+1},x)-f(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))]\Delta$$
$$-A_u(\tilde{V}^0(t_k,x))\tilde{V}^1(t_k,x)\sqrt{\Delta})]\tilde{V}^1(t_{k+1},x+2\tilde{V}^1(t_k,x)\Delta-A(\tilde{V}^0(t_k,x))\sqrt{\Delta}).$$

Приведенныне выше соотношения задают неявную схему построения численного решения задачи (8). Для того, чтобы найти $\tilde{V}^q(t_k,x), q=0,1$ из (13), воспользуемся итерационной схемой. При этом на первом шаге мы получим

$$\tilde{V}^0(t_n,x)=u_0(x), \tilde{V}^1(t_n,x)=u_x(t_n,x),$$

$$\tilde{V}^0(t_k,x)=\frac{1}{2}\tilde{V}^0(t_{k+1},x+2\tilde{V}^1(t_{k+1},x)\Delta+A(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))\sqrt{\Delta})] \tag{20}$$
$$\times[1+[f(\tilde{V}^0(t_{k+1},x+2\tilde{V}^1(t_{k+1},x)\Delta+A(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))\sqrt{\Delta})))+$$
$$f_u(\tilde{V}^0(t_{k+1},x+2\tilde{V}^1(t_{k+1},x)\Delta+A(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))\sqrt{\Delta})))\tilde{V}^1(t_{k+1},x)+2\tilde{V}^1(t_{k+1},x)\Delta$$
$$+A(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))\sqrt{\Delta}))]+\frac{1}{2}\tilde{V}^0(t_{k+1},x+2\tilde{V}^1(t_{k+1},x)\Delta-A(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))\sqrt{\Delta})]$$
$$\times[1+[f(\tilde{V}^0(t_{k+1},x+2\tilde{V}^1(t_{k+1},x)\Delta-A(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))\sqrt{\Delta})))+f_u(\tilde{V}^0(t_{k+1},x$$
$$+2\tilde{V}^1(t_{k+1},x)\Delta-A(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))\sqrt{\Delta}))\tilde{V}^1(t_{k+1},x+2\tilde{V}^1(t_{k+1},x)\Delta-A(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))\sqrt{\Delta}))],$$

$$\tilde{V}^1(t_k,x)=\frac{1}{2}[1-[\tilde{V}^1(t_{k+1},x)-f(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))]\Delta \tag{21}$$
$$+A_u(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))V^1(t_{k+1},x)\sqrt{\Delta})\tilde{V}^1(t_{k+1},x+2\tilde{V}^1(t_{k+1},x)\Delta+A(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))\sqrt{\Delta})]$$
$$+\frac{1}{2}[1-[\tilde{V}^1(t_{k+1},x)-f(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))]\Delta$$
$$-A_u(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))\tilde{V}^1(t_{k+1},x)\sqrt{\Delta})\tilde{V}^1(t_{k+1},x+2\tilde{V}^1(t_{k+1},x)\Delta-A(\tilde{V}^0(t_{k+1},x))\sqrt{\Delta})].$$

Соотношения (20), (21) определяют алгоритм явной схемы решения задачи Коши (9) , (10). Следует отметить, что этот алгоритм носит детерминированный характер, хотя в основе его лежат вероятностные представления. Сходимость полученного алгоритма можно установить с помощью оценок, аналогичных оценкам работы [4].

Построенный выше алгоритм допускает еще одну интересную интерпретацию. Предположим для простоты, что $f\equiv 0$. Исследуя полученные представления (3) и (7) нетрудно заметить, что при этом предположении решения задач (1) и (4) связаны с нелинейными эволюционными семействами отображений, действие которых задается соотноношениями

$$u(s,x)=E[u_0(\xi_{s,x}(T))]=U(s,T)u_0. \tag{22}$$
$$\langle h,v(s,x)\rangle=E[\langle\eta_{s,h}(T),v_0(\xi_{s,x}(T))\rangle]=\langle h,\Gamma(s,T)v_0\rangle. \tag{23}$$

Эволюционные свойства семейства $U(s,\theta)$ вида (22) являются следствием марковского свойства процесса $\xi(\theta)$, удовлетворяющего (2), а эволюционные свойства семейства $\Gamma(s,\theta)$ вида (23) являются следствием марковского свойства процесса $\zeta(\theta)$, удовлетворяющего (11), и эволюционных свойств мультипликативного операторного функционала $S(s,\theta):R^d\to R^d$ процесса $\zeta(t)$, порожденного решением $\eta(\theta)$ линейного СДУ (12), $\eta(\theta)=S(s,\theta)h$. При этом $\Gamma(s,T)G_0=\Pi_{k=1}^n\Gamma(t_k,t_{k+1})G_0$.

Для заданного выше разбиения отрезка $[s,T]$ рассмотрим два семейства отображений $\Gamma_n(s,T) = \prod_{k=1}^n \Gamma(t_{k-1},t_k)G_0(x)$ и отображение $Z_n(s,T) = \prod_{k=1}^n \tilde{Z}(t_{k-1},t_k)G_0(x)$ где $\tilde{Z}(t_{k-1},t_k)$ задано соотношением

$$\tilde{Z}(t_{k-1},t_k)V(t_{k-1},x) = E\langle\tilde{\eta}_{t_{k-1},1}(t_k), V(t_k,\tilde{\zeta}(t_k))\rangle, \tag{24}$$

а $(\tilde{\zeta}(t),\tilde{\eta}(t))$ заданы соотношениями (15) – (17). Заметим, что в отличие от Γ_n, отображение Z_n не обладает эволюционным свойством. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если на интервале $[s,T]$ существует классическое решение задачи Коши для системы (9), (10), то его можно представить в виде*

$$V(s) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n \tilde{Z}(t_{k-1},t_k)G_0, \tag{25}$$

где предел понимается в смысле равномерной сходимости.

Доказательство. Обозначим $\|\cdot\|_\infty$ равномерную норму, $\sup_x|u(x)| = \|u\|_\infty$ и оценим разность

$$\prod_{k=1}^n \Gamma(t_{k-1},t_k)G_0(x) - \prod_{k=1}^n \tilde{Z}(t_{k-1},t_k)G_0(x)$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1}\prod_{k=m+1}^n \Gamma(t_k,t_{k+1})[\Gamma(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k)]\prod_{k=1}^{m-1}\tilde{Z}(t_{k-1},t_k)G_0(x).$$

При этом

$$\sup_x|\prod_{k=1}^n \Gamma(t_{k-1},t_k)G_0(x) - \prod_{k=1}^n \tilde{Z}(t_{k-1},t_k)G_0(x)| \tag{26}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{n-1}\prod_{k=m+1}^n \|\Gamma(t_k,t_{k+1})\|\|[\Gamma(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k)]\|\prod_{k=1}^{m-1}\|\tilde{Z}(t_{k-1},t_k)\|\|G_0\|_\infty.$$

Из оценок, полученных в работах [2], [3] следует,что справедливы неравенства

$$\sup_x\|\Gamma(s,T)G_0(x)\| = \sup_x E|\langle\eta(T),V_0(\zeta(T))\rangle| \leq \sup_x[E\|\eta(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}\|V_0\|_\infty],$$

$$\sup_x\|\tilde{Z}(t_{k-1},t_k)V(t_k,x)\| \leq exp[K\Delta]\|V(t_k)\|_\infty$$

$$\|[\Gamma(t_{k-1},t_k) - Z(t_{k-1},t_k)]V(t_k,x)\| \leq o(\Delta)\|V(t_k)\|_\infty.$$

Из этих оценок и (26) вытекает доказательство теоремы.

Работа поддержана грантом РФФИ 15-01-01453.

Литература

1. Фрейдлин М. И. Квазилинейные параболические уравнения и меры в функциональном пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 1967. Т. 1, N. 3. С. 74–82.

2. Белопольская Я.И., Далецкий Ю.Л. Исследование задачи Коши для систем квазилинейных уравнений помощью марковских процессов // Изв. ВУЗ Математика. 1978. N. 12. С. 6–17.

3. Ya.I. Belopolskaya, Dalecky Yu.L. Stochastic equations and differential geometry. Kluwer, 1990. 260 c.

4. Milstein G.N., Tretyakov M.V. Stochastic Numerics for Mathematical Physics. Springer Verlag, Berlin, 2004. 596 p.

5. Белопольская Я. И., Наголкина З. И. Об одном классе стохастических уравнений с частными производными // ТВП. 1982. Т. 27, N. 3. С. 551–559.

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРУБОПРОВОДА

П.А. Вельмисов, А.В. Корнеев

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия

e-mail: `velmisov@ulstu.ru`

Аннотация: В работе предложены математические модели вязкоупругого трубопровода. Исследуется динамическая устойчивость трубопровода на основе построенных функционалов типа Ляпунова и разработанного программного комплекса, позволяющего численно находить решение дифференциальных уравнений, описывающих колебания трубопровода.

Ключевые слова: математическое моделирование, вязкоупругий трубопровод, аэрогидроупругость, устойчивость, функционал, уравнения с частными производными, численные методы, метод Галеркина.

DYNAMIC STABILITY OF A PIPELINE

Abstract: The paper presents a mathematical model of an elastic pipeline. The article devoted to the problem of the dynamic stability of a pipeline. By means of designed functional Lyapunov type, stability theorems was formulated. A mathematical software package was developed to find approximate solution for differential equations, that describe a pipeline.

Keywords: mathematical modeling, viscoelastic pipeline, aerohydroelasticity, stability, partial differential equations, numerical methods, Galerkin method.

При исследовании колебаний деформируемых тел, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, одним из важнейших является вопрос об устойчивости этих колебаний. Поток, воздействуя на тело, может не только возбуждать колебания, но и приводить к увеличению амплитуды, скорости или частоты колебаний до значений, нарушающих надежность эксплуатации, вплоть до разрушения конструкции или ее элементов.

В работе исследуется динамика и динамическая устойчивость трубопровода (полого стержня при протекании внутри него жидкости). На плоскости xOy недеформированному стержню соответствует на оси Ox отрезок $(0, l)$. Скорость жидкости равна U и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox. Введем обозначения: $w(x,t)$ и $u(x,t)$ – упругие перемещения точки оси стержня в направлении осей Oy и Ox соответственно.

При учете только поперечного перемещения w динамика трубопровода описывается уравнением

$$\begin{gathered}(m_0+m_*)\,\ddot{w}+\left(\frac{EJ}{\rho}\right)''+m_*\frac{U^2}{\rho}+2m_*U\left(\arcsin w'\right)^{\cdot}+Nw''-\\ -\Theta_0 w''\Psi-\Theta_* w''\dot{\Psi}+\alpha\dot{w}''''-\beta\ddot{w}''+f(x,t,w,\dot{w})=0,\ \ x\in(0,l),\end{gathered}\tag{1}$$

где ρ и Ψ определяются выражениями

$$\frac{1}{\rho}=\frac{w''}{(1+(w')^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \Psi=\int\limits_0^l\sqrt{1+(w')^2}\,\mathrm{d}x-l \tag{2}$$

Коэффициенты m_*, m_0, J, F, Θ_0 вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered}m_0=\rho_0\pi\left(R_*^2-R_0^2\right),\ m_*=\rho_*\pi R_0^2,\ J=\frac{\pi}{4}\left(R_*^4-R_0^4\right),\\ F=\pi\left(R_*^2-R_0^2\right),\ \Theta_0=\frac{EF}{l}.\end{gathered}\tag{3}$$

Штрих и точка сверху обозначают частные производные по координате x и времени t соответственно. В уравнении (1) $w(x,t)$ – деформация (прогиб) в сечении в момент времени t; E – модуль упругости; U, m_*, ρ_* – скорость, масса жидкости (газа) на единицу длины и плотность жидкости (газа); l – длина трубы между опорами; R_*, R_0 – внешний и внутренний радиусы трубопровода; m_0, ρ_0 – масса металла на единицу длины трубы и плотность металла; N – сжимающая (растягивающая) сила; α – коэффициент внутреннего демпфирования; Θ_* – коэффициент внутреннего демпфирования, возникающего за счет удлинения трубопровода; коэффициент β учитывает инерцию вращения сечений. Все коэффициенты, входящие в уравнение, постоянные.

Предполагая w' малым, уравнение (1) запишем в виде

$$\begin{gathered}(m_0+m_*)\,\ddot{w}+\left[EJw''\left(1-\frac{3}{2}(w')^2\right)\right]''+m_*U^2w''\left[1-\frac{3}{2}(w')^2\right]+Nw''+\\ +2m_*U\dot{w}'\left[1+\frac{1}{2}(w')^2\right]-\frac{1}{2}\Theta_0 w''\int\limits_0^l(w')^2\,\mathrm{d}x-\Theta_* w''\int\limits_0^l w'\dot{w}'\,\mathrm{d}x+\\ +\alpha\dot{w}''''-\beta\ddot{w}''+f(x,t,w,\dot{w})=0\end{gathered}\tag{4}$$

Для определения неизвестной функции $w(x,t)$ уравнение (4) необходимо дополнить начальными условиями

$$w(x,0)=F(x),\;\; w'(x,0)=G(x). \tag{5}$$

Исследование устойчивости проводилось двумя методами. Первый метод основан на составлении функционалов типа Ляпунова для уравнения (4) в некоторых частных случаях. Так, для линейной модели

$$\begin{gathered} EJw'''' + (m_0+m_*)\,\ddot{w} + \left(N+m_*U^2\right)w'' + \\ +Nw'' + 2m_*U\dot{w}' + \xi\dot{w} + \mu w + \alpha\dot{w}'''' - \beta\ddot{w}'' = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где ξ – коэффициент внешнего демпфирования и μ – коэффициент жесткости основания, построен функционал

$$\Phi(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left[EJw''^2+(m_0+m_*)\,\dot{w}^2-\left(N+m_*U^2\right)w'^2+\beta\dot{w}'^2+\mu w^2\right]\mathrm{d}x, \tag{7}$$

на основе которого получено аналитическое условие устойчивости

$$N\le\frac{\pi^2}{l^2}EJ-m_*U^2. \tag{8}$$

Второй метод предполагает построение решения уравнения (4) методом Галеркина, в этом случае $w(x,t)$ задается в виде

$$w_M(x,t)=\sum_{k=1}^{M}w_k(t)g_k(x), \tag{9}$$

где $\{g_k(x)\}_1^\infty$ – полная на $[0,l]$ система базисных функций, соответствующих условиям закрепления концов трубопровода.

Обозначим левую часть уравнения (4) через $L(w)$. Предполагая закрепление обоих концов шарнирным ($w=w''=0$) выберем $g_k(x)=\sin\lambda_k x$, где $\lambda_k=\frac{k\pi}{l}$, $k=\overline{1,\infty}$. На основе процедуры метода Галеркина получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w_k(t), k=\overline{1,M}$

$$\int\limits_0^l L\left(w_M(x,t)\right)\sin\lambda_k x\,\mathrm{d}x=0,\quad k=\overline{1,M} \tag{10}$$

Аналогично из (5) определяются начальные условия для $w_k(t), k=\overline{1,M}$

$$\begin{gathered} w_k(0)=\tfrac{2}{l}\int\limits_0^l F(x)\sin\lambda_k x\,\mathrm{d}x=0,\quad k=\overline{1,M} \\ w_k'(0)=\tfrac{2}{l}\int\limits_0^l G(x)\sin\lambda_k x\,\mathrm{d}x=0,\quad k=\overline{1,M} \end{gathered} \tag{11}$$

С помощью разработанного комплекса программ исследовалась динамическая устойчивость в зависимости от сжимающего воздействия N и скорости потока жидкости (газа) U. Параметры исследуемой механической системы были выбраны следующим образом: $E=210\cdot10^9$ – модуль упругости стали, $\rho_*=1000$ – плотность воды; $\rho_0=7000$ – плотность стали; $l=1$, $R_*=0,05$, $R_0=0,046$, $\Theta_*=0,6$, $\alpha=0,2$,

$\beta = 0.5$. Функции $F(x)$ и $G(x)$ в (5) задавались в следующем виде: $F(x) = 0,02 \sin \frac{\pi x}{l}$, $G(x) = 0$. Функция f в (4) задавалась следующим образом: $f(x,t,w,\dot{w}) = \xi \dot{w} + \mu w$, где $\xi = 2$ – коэффициент внешнего демпфирования и $\mu = 40$ – коэффициент жесткости основания. Все величины приведены в системе СИ.

Полученная задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10) с начальными условиями (11) решалась с помощью пакета математических программ Wolfram Mathematica 8. Проведенные расчеты показали, что различие результатов для двух и большего числа приближений (например $M = 20$) в методе Галеркина несущественно, примеры соответствующих графиков приведены на рис. 1. Поэтому при расчетах можно ограничиться двумя приближениями.

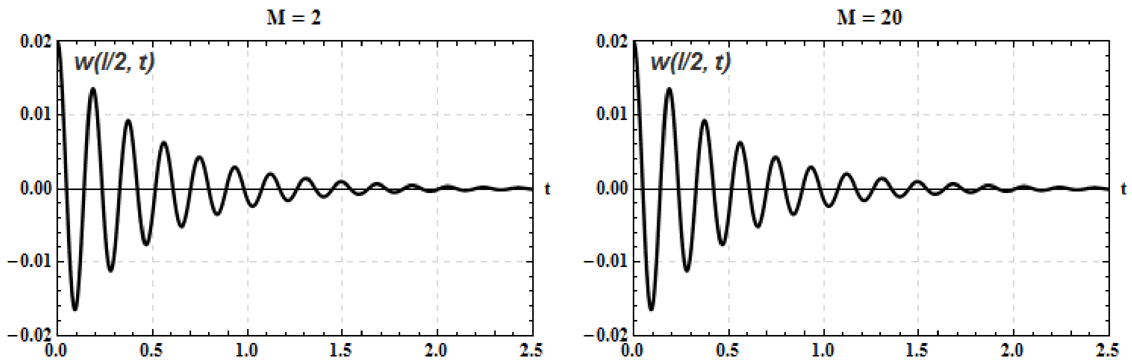


Рис. 1. Пример вычисления колебаний точки $x_0 = l/2$ с разным количеством приближений M в методе Галеркина

При помощи разработанного комплекса программ на плоскости (U, N) построены области устойчивости и неустойчивости колебаний. Критерий неустойчивости механической системы при заданных параметрах -– неограниченное возрастание амплитуды колебаний с течением времени. Результат исследования изображен на рис. 2: серыми символами 'x' показаны точки, в которых наблюдается возрастание амплитуды колебаний; черные круги на рисунке соответствуют точкам, в которых амплитуда колебаний с течением времени стремится к нулю; на рисунке также изображена теоретическая граница области устойчивости, соответствующая параболе (8).

Согласно рис. 2, наблюдается хорошее соответствие теоретических результатов и численного эксперимента. Полученная в результате численного эксперимента область устойчивости незначительно шире, чем рассчитанная по формуле (8), что объясняется, в частности, учетом демпфирования и нелинейности модели.

При учете как поперечной $w(x,t)$, так и продольной $u(x,t)$ деформации трубопровода, можно предложить для описания его динамики следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} (m_0 + m_*)u_{tt} - EF_0 \left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)_x + \gamma_0 u_{xxt} + g(x,t,u,u_t) = 0 \\ (m_0 + m_*)w_{tt} - EF_0 \left[w_x \left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)\right]_x + EJ\left(w_{xx}\delta^3\right)_{xx} + \alpha_0 w_{xxxxt} - \\ -\beta_0 w_{xxtt} + m_* U^2 w_{xx}\delta^3 + 2m_* U \phi w_{xt} + f(x,t,w,w_t) = 0 \\ \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)}}, \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - w_x^2}} \end{cases} \qquad (12)$$

Индексы x и t снизу обозначают частные производные по переменным x и t соответственно.

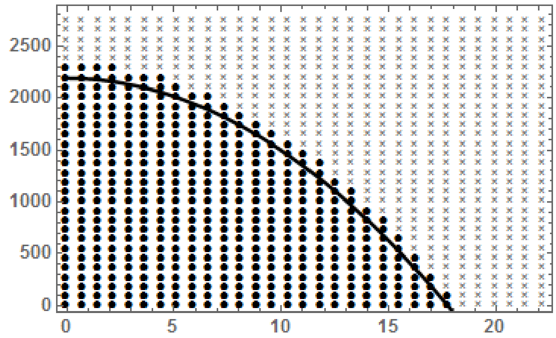


Рис. 2. Область устойчивости на плоскости (U, N)

Предполагая w_x и u_x малыми, систему уравнений (12) запишем в виде

$$\left\{\begin{array}{l}(m_0+m_*)u_{tt}-EF_0\left(u_x+\frac{1}{2}w_x^2\right)_x+\gamma_0 u_{xxt}+g(x,t,u,u_t)=0\\ (m_0+m_*)w_{tt}-EF_0\left[w_x\left(u_x+\frac{1}{2}w_x^2\right)\right]_x+EJ\left(w_{xx}\left[1-3\left(u_x+\frac{1}{2}w_x^2\right)\right]\right)_{xx}+\\ +\alpha_0 w_{xxxxt}-\beta_0 w_{xxtt}+m_*U^2 w_{xx}\left[1-3\left(u_x+\frac{1}{2}w_x^2\right)\right]+2m_*U\left(1+\frac{1}{2}w_x^2\right)w_{xt}+\\ +f(x,t,w,w_t)=0\end{array}\right. \quad (13)$$

Для исследования устойчивости использовалось два метода. Первый метод основан на составлении функционалов типа Ляпунова для системы уравнений (13) в некоторых частных случаях. Второй предполагает построение решений системы уравнений (13) методом Галеркина, в этом случае $w(x,t)$, $u(x,t)$ задаются в виде

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{n} w_k(t)g_k(x), \quad u(x,t)=\sum_{k=1}^{n} u_k(t)f_k(x) \quad (14)$$

где $\{g_k(x)\}_1^\infty$, $\{f_k(x)\}_1^\infty$ – полные на $[0,l]$ системы базисных функций, соответствующих условиям закрепления концов трубопровода.

Внешние воздействия $f(x,t,w,w_t)$, $g(x,t,u,u_t)$ предполагаются действующими в момент времени t либо мгновенно, либо с запаздыванием:
$f=f\left(x,t,w\left(x,t-\tau_1\right),w_t\left(x,t-\tau_2\right)\right)$, $g=g\left(x,t,u\left(x,t-\tau_3\right),u_t\left(x,t-\tau_4\right)\right)$.

Таким образом, в ходе исследования разработан комплекс программных средств для численного моделирования динамики трубопровода с учетом взаимодействия с потоком жидкости (газа), вязоупругим основанием (упрочняющим слоем) и влияния продольного сжимающего (растягивающего) усилия. Для сформулированных моделей построены функционалы и на их основе проведены аналитические исследования динамической устойчивости трубопровода. Получены в аналитической форме достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на значение сжимающего усилия N и скорости потока жидкости (газа) U. На основе разработанного программного комплекса, проведено также численное исследование устойчивости колебаний трубопровода, определен вид колебаний в зависимости от параметров задачи. На плоскости (U,N) построены области устойчивости и неустойчивости колебаний, полученные как аналитическим способом, так и в результате численного эксперимента.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

Литература

1. Анкилов А.В. О динамической устойчивости трубопровода / А.В. Анкилов, П.А. Вельмисов // Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике: Труды международной "Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН-2007"(г. Ульяновск, 17-18 мая 2007 г.). – Ульяновск: УлГТУ, 2007. –Т. 4. – С. 10–14.

2. Вельмисов П.А. Математическое моделирование динамики упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии / П.А. Вельмисов, А.А. Васильева, Е.П. Семенова // Труды 7 Международной конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов (2-5 февраля 2009г., г. Ульяновск)". – Ульяновск: УлГУ, 2009. – С. 68–70.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

П.А. Вельмисов, Ю.А. Тамарова, С.В. Шарова

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия

e-mail: velmisov@ulstu.ru

Аннотация: В статье рассматриваются некоторые вопросы асимптотической теории движения идеального газа. На основе полученного в статье асимптотического нелинейного уравнения исследуются трансзвуковые течения газа, учитывающие поперечные по отношению к основному потоку возмущения. Построены некоторые точные частные решения этого уравнения и указаны их приложения к решению ряда задач трансзвуковой аэродинамики. Также получено новое асимптотическое уравнение, описывающее возмущения однородного потока при сверхзвуковом режиме обтекания. Основной проблемой исследования этих уравнений является их нелинейность.

Ключевые слова: аэродинамика, трансзвуковые течения газа, сверхзвуковые течения газа, дифференциальные уравнения с частными производными, асимптотическое разложение.

ASYMPTOTIC EQUATIONS OF GAS DYNAMICS

Abstract: The article is devoted to some issues of the asymptotic theory of ideal gas flow. Transonic gas flows taking into account the transverse perturbations are studied on the basis of nonlinear equation obtained in this paper. Some exact particular solutions of this equation are constructed and their application to solving a number of transonic aerodynamics problems are shown. The new asymptotic equation describing perturbations of a uniform stream at the supersonic flow is also obtained. The main problem of the study of these equations is their nonlinearity.

Keywords: aerodynamics, transonic gas flows, supersonic gas flows, partial differential equations, asymptotic expansion.

1. Безвихревые изэнтропические течения газа в цилиндрических безразмерных координатах x, r, θ, t описываются уравнением:

$$\begin{gathered}\Phi_{tt}+2\Phi_x\Phi_{xt}+2\Phi_r\Phi_{rt}+\frac{2}{r^2}\Phi_\theta\Phi_{\theta t}+2\Phi_x\Phi_r\Phi_{rx}+\frac{2}{r^2}\Phi_\theta\Phi_r\Phi_{\theta r}+\frac{2}{r^2}\Phi_x\Phi_\theta\Phi_{\theta x}+\\+\Phi_x^2\Phi_{xx}+\Phi_r^2\Phi_{rr}+\frac{1}{r^4}\Phi_\theta^2\Phi_{\theta\theta}=a^2\left(\Phi_{xx}+\Phi_{rr}+\frac{1}{r}\Phi_r+\frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta}\right),\end{gathered} \tag{1}$$

$$a^2 = p^{\frac{\chi-1}{\chi}} = \frac{\chi+1}{2} - \frac{\chi-1}{2}\left(2\Phi_t + \Phi_x^2 + \Phi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\Phi_\theta^2\right). \qquad (2)$$

В (1) - (2) $\Phi(x,r,\theta,t)$ - потенциал скорости, t - время, a - скорость звука, p - давление, χ - показатель адиабаты Пуассона, индексы снизу обозначают частные производные.

Введем для $\Phi(x,r,\theta,t)$ асимптотическое разложение:

$$\Phi = x + \varepsilon\psi(r,\theta,t^0) + \varepsilon^3\varphi(x^0,r,\theta,t^0) + ...,\ x = \varepsilon x^0,\ t = \frac{1}{\varepsilon}t^0, \qquad (3)$$

где ε - малый параметр, функция $\varphi(x^0,r,\theta,t^0)$ определяет основное течение, а функция $\psi(r,\theta,t^0)$ задает поперечное возмущение. Подставляя (3) в (1) - (2) и оставляя члены старшего порядка, получим для функции $\varphi(x^0,r,\theta,t^0)$ трансзвуковое уравнение:

$$\begin{aligned}&2\varphi_{x^0t^0} + (\chi+1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0} + 2\psi_r\varphi_{x^0r} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta\varphi_{x^0\theta} - \Delta\varphi + \\ &+\frac{\chi-1}{2}\left(2\psi_{t^0} + \psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right)\varphi_{x^0x^0} = L(\psi).\end{aligned} \qquad (4)$$

В (4) введены обозначения:

$$\begin{aligned}&-L(\psi) \equiv \psi_{t^0t^0} + 2\psi_r\psi_{rt^0} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_{\theta t^0} + \psi_r^2\psi_{rr} + \frac{1}{r^4}\psi_\theta^2\psi_{\theta\theta} + \\ &+\frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_r\psi_{r\theta} - \frac{1}{r^3}\psi_r\psi_\theta^2, \qquad \Delta\varphi \equiv \varphi_{rr} + \frac{1}{r}\varphi_r + \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}.\end{aligned}$$

Функция $\psi(r,\theta,t^0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$. Если $\psi \equiv 0$, то получим классическое трансзвуковое уравнение Линя-Рейсснера-Тзяна [1]:

$$2\varphi_{x^0t^0} + (\chi+1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0} - \varphi_{rr} - \frac{1}{r}\varphi_r - \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta} = 0,$$

которое в стационарном случае переходит в уравнение смешанного типа Кармана-Фальковича [2,3]:

$$(\chi+1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0} - \varphi_{rr} - \frac{1}{r}\varphi_r - \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta} = 0$$

.

Уравнение (4) описывает трансзвуковые течения газа, возникающие при воздействии на обтекаемое тело бокового (по отношению к основному направлению движения, совпадающему с направлением оси x) возмущения основного трансзвукового потока. Для внутреннего обтекания, например для течений в соплах, таким возмущением может быть закрутка потока ($\psi = \Gamma(t)\theta$). Для внешнего обтекания летательных аппаратов таким возмущением является, например, боковой, меняющий свою скорость с течением времени ветер $\psi = V_\infty(t)r\cos(\theta + \alpha(t))$.

При переходе через ударную волну, заданную уравнением $g(x,r,\theta,t) = 0$, решения уравнений газовой динамики должны удовлетворять на ее фронте условиям Ренкина-Гюгонио:

$$\begin{aligned}&\left(g_t + \Phi_x^*g_x + \Phi_r^*g_r + \frac{1}{r^2}\Phi_\theta^*g_\theta\right)\left(g_t + \Phi_xg_x + \Phi_rg_r + \frac{1}{r^2}\Phi_\theta g_\theta\right) = \\ &= \frac{\chi-1}{\chi+1}\left(g_t + \Phi_xg_x + \Phi_rg_r + \frac{1}{r^2}\Phi_\theta g_\theta\right) + \frac{2a^2(\Phi)}{\chi+1}\left(g_x^2 + g_r^2 + \frac{1}{r^2}g_\theta^2\right), \qquad \Phi = \Phi^*.\end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь Φ и Φ^* соответствуют течению с разных сторон от ударной волны, $a^2(\Phi)$ задается выражением (2). Условия на фронте ударной волны $x^0 = x^0(r,\theta,t^0)$ получим из условий (5), подставляя в них разложение (3) и оставляя члены старшего порядка:

$$\begin{gathered} 2\frac{\partial x^0}{\partial t^0} + \left(\frac{\partial x^0}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial x^0}{\partial \theta}\right)^2 + 2\psi_r\frac{\partial x^0}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta\frac{\partial x^0}{\partial \theta} = \\ = \frac{\chi-1}{2}\left(2\psi_{t^0} + \psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right) + \frac{\chi+1}{2}(\varphi_{x^0} + \varphi^*_{x^0}), \qquad \varphi = \varphi^*. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь φ и φ^* соответствуют течению с разных сторон от ударной волны. Если в (6) положить $\varphi \equiv \varphi^*$, то получим характеристическое уравнение для (4).

Выведем условия на обтекаемой поверхности, мало отличающейся от цилиндрической, задав ее в виде

$$r = r_0(\theta,t^0) + r_2(x^0,\theta,t^0)\varepsilon^4 + \ldots. \tag{7}$$

Подставляя (3) и (7) в точное условие непротекания $-\Phi_x r_x + \Phi_r - r^{-2}r_\theta\Phi_\theta = r_t$ и оставляя старшие члены, получим:

$$\psi_r - r_0^{-2}r_{0\theta}\psi_\theta = r_{0t^0}, \qquad \varphi_r - r_0^{-2}r_{0\theta}\varphi_\theta = r_{2x^0}. \tag{8}$$

Здесь значения φ_r, φ_θ, ψ_r, ψ_θ вычисляются при $r = r_0(\theta,t^0)$.

Уравнение звуковой поверхности ($V^2 = a^2$) в трансзвуковом приближении принимает вид:

$$N \equiv \frac{\chi+1}{2}\left(\psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right) + (\chi-1)\psi_{t^0} + (\chi+1)\varphi_{x^0} = 0. \tag{9}$$

Для установившихся течений ($\partial/\partial t$) уравнение (4) имеет смешанный тип. В этом случае звуковая поверхность $N = 0$ является поверхностью параболичности уравнения (4), при этом в сверхзвуковой области (области гиперболичности) $N > 0$, в дозвуковой области (области эллиптичности) $N < 0$.

Подставляя (3) в выражение для давления (2), проводя разложение в ряд Тейлора и оставляя старшие по порядку члены, получим асимптотическую формулу для определения давления:

$$P = 1 - \chi\varepsilon^2\left(\psi_{t^0} + \varphi_{x^0} + \frac{1}{2}\psi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\psi_\theta^2\right).$$

Рассмотрим некоторые точные частные решения уравнения (4). В частности, уравнение (4) имеет решение (индекс ноль у переменных x, t будем здесь и далее опускать):

$$\varphi = \sum_{k=0}^{3}\varphi_k(r,\theta,t)x^k. \tag{10}$$

Рассмотрим стационарный случай. Положим $\psi = \Gamma\theta$, $\Gamma = const$. Тогда уравнение (4) примет вид:

$$(\chi+1)\varphi_x\varphi_{xx} + \frac{2}{r^2}\Gamma\varphi_{x\theta} - \Delta\varphi + \frac{\chi-1}{2r^2}\Gamma^2\varphi_{xx} = 0. \tag{11}$$

В классе решений (10) в случае установившихся течений содержится решение уравнения (11), которое описывает течение газа в соплах Лаваля с постоянным ускорением ($\varphi_{xx} = const$) и учитывает закрутку потока:

$$\varphi = ax^2 + (\chi+1)a^2r^2x + \left[\frac{\chi-1}{2}\Gamma^2 a \ln^2 r + \frac{1}{8}(\chi+1)^2a^3r^4\right]. \tag{12}$$

Уравнение звуковой поверхности для (12), согласно (9), имеет вид:

$$x = -\frac{\chi+1}{2}ar^2 - \frac{\Gamma^2}{4ar^2}.$$

Условия (8) имеют вид: $\dfrac{\partial r_0}{\partial\theta} = 0$, $\dfrac{\partial r_2}{\partial x} = \varphi_r$ (φ_r вычисляется при $r = r_0$). Тогда получим уравнение обтекаемой поверхности:

$$r = r_0 + \varepsilon^4\left[r_0a^2(\chi+1)x^2 + \left((\chi-1)\Gamma^2 a\frac{\ln r_0}{r_0} + \frac{1}{2}(\chi+1)^2a^3r_0^3\right)x\right], r_0 = const. \tag{13}$$

Решение (12) описывает течения в кольцеобразных соплах, уравнения внутренней и внешней стенок которых получим из (13) при $r_0 = r_0^{(1)}$, $r_0 = r_0^{(2)}$, $r_0^{(k)} = const \neq 0$. В качестве примера на рисунке 1 изображены стенки сопла и звуковая поверхность, соответствующие решению (12), при $r_0^{(1)} = 0,1$, $r_0^{(2)} = 1$, $\Gamma = 1$, $\chi = 1,4$, $a = 30$, $\varepsilon = 0,1$.

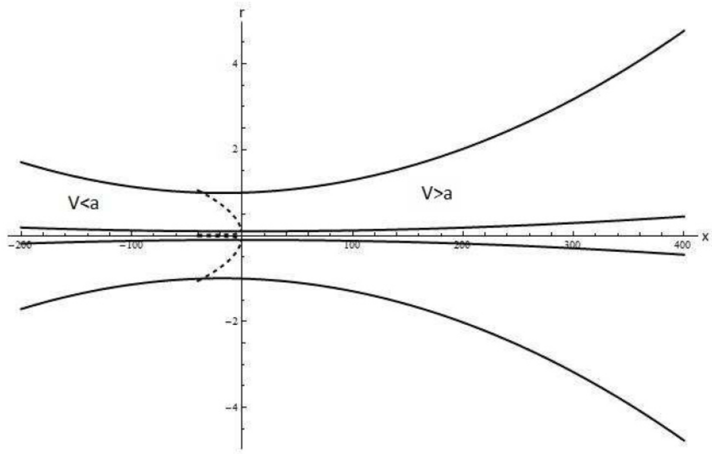


Рис. 1. Сечение сопла

Левее звуковой поверхности (на которой $V = a$) скорость потока дозвуковая ($V < a$), правее - сверхзвуковая ($V > a$), реализуется течение Майера с переходом через скорость звука по всей горловине сопла.

Если в (12) $\Gamma = 0$, то получим известное решение, описывающее течение в центре сопла Лаваля [2].

Рассмотрим решение уравнения (11), обладающее свойствами: V_x, V_r, $V_\theta \to 0$ при $r \to \infty$

$$\varphi = f(x,\theta)r^{-2} + g(r,\theta), \triangle g = 0. \tag{14}$$

Это решение допускает обобщение: $\varphi = f(\xi,\eta)r^{-2} + g(r,\theta)$, $\xi = x + \alpha\ln r$, $\eta = \theta + \beta\ln r$, α, β - произвольные числа. Подставляя (14) в (11), получим уравнение для функции $f(x,\theta)$:

$$(\chi+1)f_x f_{xx} + 2\Gamma f_{x\theta} - 4f - f_{\theta\theta} + \frac{\chi-1}{2}\Gamma^2 f_{xx} = 0. \tag{15}$$

Условия (8) примут вид: $\dfrac{dr_0}{d\theta} = 0$, $-2fr_0^{-3} + g_r = \dfrac{\partial r_2}{\partial x^0}$ (g_r вычисляется при $r = r_0$). Уравнение (15) имеет решение вида:

$$f(x,\theta) = \sum_{k=0}^{3} f_k(\theta)x^k. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций, зависящих от θ:

$$\begin{cases} 18f_3^2(\chi+1) - 4f_3 - f_3^{''} = 0, \\ 18f_2f_3(\chi+1) + 6\Gamma f_3^{'} - 4f_2 - f_2^{''} = 0, \\ (\chi+1)(4f_2^2 + 6f_1f_3) + 4\Gamma f_2^{'} - 4f_1 - f_1^{''} + 3(\chi-1)\Gamma^3 f_3 = 0, \\ 2(\chi+1)f_1f_2 + 2\Gamma f_1^{'} - 4f_0 - f_0^{''} + (\chi-1)\Gamma^2 f_2 = 0, \end{cases}$$

общее решение которой несложно получить, положив $f_3(\theta) = 0$.

Некоторые другие частные решения уравнения (4) рассмотрены в [4-5].

2. Течения, возникающие при обтекании поверхностей сверхзвуковым потоком газа, описываются уравнением (1), в котором a^2 определяется выражением:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} = 1 + \frac{\chi-1}{2}M_0^2 - \frac{\chi-1}{2a_0^2}\left(2\Phi_t + \Phi_x^2 + \Phi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\Phi_\theta^2\right). \tag{17}$$

Здесь V_0, p_0 - скорость, давление однородного потока, a_0 - скорость звука в однородном потоке; $M_0 = \dfrac{V_0}{a_0}$ - число Маха.

Введем асимптотическое разложение:

$$\Phi = V_0x + \varepsilon\psi(r,\theta,t) + \varepsilon^2\varphi(\xi^0,r,\theta,t) + ..., \xi^0 = \varepsilon^{-1}\xi, \xi = x - \beta r, \beta = \sqrt{M_0^2 - 1}, \tag{18}$$

где ε - малый параметр. Подставляя (18) в (1), получим для функции $\varphi(\xi^0,r,\theta,t)$ уравнение:

$$\begin{gathered} 2V_0\varphi_{\xi^0 t} + 2\beta a_0^2\varphi_{\xi^0 r} + [(\chi+1)V_0M_0^2\varphi_{\xi^0} + (\chi-1)M_0^2\psi_t - 2V_0\beta\psi_r]\varphi_{\xi^0\xi^0} + \\ + \frac{1}{r}\beta a_0^2\varphi_{\xi^0} = a_0^2(\psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r + \frac{1}{r^2}\psi_{\theta\theta}) - \psi_{tt}. \end{gathered} \tag{19}$$

Условия на обтекаемой поверхности $r = r_0(\theta,t) + r_1(\xi^0,\theta,t)\varepsilon + r_2(\xi^0,\theta,t)\varepsilon^2 + ...$ имеют вид: $-V_0r_{1\xi^0} = r_{0t}$, $\psi_r - r_0^{-2}\psi_\theta r_{0\theta} = (\beta + r_{1\xi^0})\varphi_{\xi^0} + V_0r_{2\xi^0} + r_{1t}$. Значения ψ_r, ψ_θ, φ_{ξ^0} вычисляются при $r = r_0(\theta,t)$.

Условия на фронте ударной волны $\xi^0 = \xi^0(r,\theta,t)$ получим из условий (5), подставляя в них разложение (18) и оставляя члены порядка ε^{-1}:

$$\frac{\chi+1}{2}M_0^2V_0(\varphi_{\xi^0} + \varphi^*_{\xi^0}) = V_0\frac{\partial\xi^0}{\partial t} + \beta a_0^2\frac{\partial\xi^0}{\partial r} + V_0\beta\psi_r - \frac{(\chi-1)M_0^2}{2}\psi_t,\ \varphi = \varphi^*.$$

Здесь φ и φ^* соответствуют течению с разных сторон от ударной волны.

Асимптотическая формула для определения давления имеет вид

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\chi}{a_0^2}\varepsilon(\psi_{t^0} + V_0\varphi_{\xi^0})\right).$$

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

Литература

1. Lin C.C., Reissner E., Tsien H.S. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // Jour. Math. Phys.1948. Vol. 27. N 3. Pp. 220–231.

2. Фалькович С.В. К теории сопла Лаваля // ПММ.1946. N 10. С. 503–512.

3. Karman Th. von The similarity law of transonic flow // J. Math. Phys. 1947. Vol. 26. N 3. Pp. 182–190.

4. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическое моделирование трансзвуковых течений // Автоматизация процессов управления. N 1(35). Ульяновск. 2014. С.47–54.

5. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Асимптотические уравнения трансзвуковых течений газа // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2014. Материалы научной конференции, 14 -18 апреля 2014 г. СПб.: Изд. РГПУ им. А.И.Герцена. 2014. С.41–48.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ 3.5D КОНЦЕНТРАЦИИ МАСС С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Ю.В. Гласко[1], С.А. Скачков[2]

[1]*Научно-исследовательский Вычислительный Центр МГУ, Москва, Россия,*
[2]*Российский Государственный Геологоразведочный Университет, Москва, Россия*

e-mail: [1]glaskoyv@mail.ru

Аннотация: В статье рассматривается задача концентрации масс в кубе. Предложен алгоритм концентрации, который использует интерпретацию выметенных плотностей и статистическую регуляризацию. Оптимальные параметры алгоритма выявлены посредством серии вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: выметание масс, концентрация масс, невязка, регуляризирующий функционал, априорная информация.

3.5-DIMENSIONAL STUDY OF THE PROBLEM CONCENTRATION OF MASS WITH MATHEMATICAL MODEL AND COMPUTING EXPERIMENT APPROACH

Abstract: In the article we study problem of concentration mass in cube. Algorithm of the concentration, using interpretation of sweep density and statistical regularization, is produced. The optimal algorithm parameters are detected by set of computing experiments.

Keywords: balayage of masses, concentration of masses, discrepancy, smoothing functional, a priori information.

Целью задачи интерпретации геофизического поля является определение области Ω и ее плотности $\delta(\omega)$, то есть характеристик источника измеренного поля. При моделировании основных параметров области Ω мы будем опираться на 2-е геофизические модели месторождения нефти: антиклинальную и геосолитонную [1]. На основе представлений о структуре месторождения УВ, которая дается антиклинальной моделью, мы можем определить сегмент глубин залежи Ω. Для этого используется метод определения особых точек (интропродолжение). Аппарат интропродолжения опробован на 2-ух и 3-х уровневых структурах. Морфологическую структуру области-залежи можно построить на основе геосолитонной модели. Указанная модель предполагает многоуровневое расположение области $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \Omega_j$ вдоль вертикальной к дневной поверхности геосолитонной трубки. Для определения плотности и ряда параметров морфологической структуры используется алгоритм 3.5-мерной концентрации плотности с границы Γ области $V \supset \Omega : \quad \delta_\Gamma(s^*),\ s^* \in \Gamma \equiv \partial V$. При этом алгоритм концентрации многократно использует 3.5D выметание из искомой области Ω.

2D математическая модель процесса выметания масс [2] представляет собой краевую задачу для параболического уравнения. В работе [2] представлена модель 2D концентрации. Модели использованы для интерпретации серии месторождений нефти и газа.

В данной статье модель выметания соответствует результатам работ В.Н. Страхова [3] и В.Г. Филатова [2]. Она расширена в сравнении с работой В.Г. Филатова [2] для 3.5D случая относительно плотности $u(x, y, z, t)$ меняющейся со временем t в области V с границей $\Gamma \equiv \partial V$.

$$D\Delta u(X,t) = u_t(X,t),\ X \equiv (x,y,z) \in V,\ 0 < t < T \tag{1}$$

$$D\frac{\partial u(X,t)}{\partial n}\bigg|_\Gamma = -\frac{\partial u}{\partial t}(X,t)\bigg|_\Gamma \tag{2}$$

$$u(X,0) = \begin{cases} \delta(\omega) \equiv \delta(X,0), & \forall\, \omega, X \in \Omega \\ 0, & \forall\, X \in V \setminus \Omega \end{cases} \tag{3}$$

Физически условие (2) означает, что масса, сосредоточенная в объеме V, с течением времени диффундирует через границу объема. При этом она сосредотачивается на этой границе в форме простого слоя. Коэффициент диффузии $D > 0$ - произвольная константа. В прочем, условие можно упростить, тем самым, введя задачу выметания в класс линейных проблем.

$$D\Delta u(X,t) = u_t(X,t),\ X \equiv (x,y,z) \in V,\ 0 < t < T \tag{4}$$

$$D\frac{\partial u(X,t)}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0 \tag{5}$$

$$u(X,0) = \begin{cases} \delta(\omega) \equiv \delta(X,0), & \forall\, \omega, X \in \Omega \\ 0, & \forall\, X \in V \setminus \Omega \end{cases} \tag{6}$$

Здесь условие (5) означает, что поток плотности через границу области V : $\Gamma = \partial V$ равен нулю. Таким образом, диффундирующая масса не покидает области V и ее границы.

Модель $3.5D$ концентрации, как обратной к выметанию задачи, содержит условие в конечный момент процесса T.

$$D\Delta u(X,t) = u_t(X,t),\ X \equiv (x,y,z) \in V,\ 0 < t < T \tag{7}$$

$$D\int\limits_0^T \left.\frac{\partial u(X,t)}{\partial n}\right|_\Gamma = \delta(X,T)|_\Gamma \tag{8}$$

$$u(X,T) = \begin{cases} 0, & \forall\, X \in V \setminus \partial V \\ \delta_\Gamma(s^*) \equiv \delta(X,T), & s^*, X \in \partial V \end{cases} \tag{9}$$

В операторной форме задача концентрации (определения p) имеет вид:

$$Ap = \delta_\Gamma(s^*),\quad s^* \in \Gamma \tag{10}$$

Здесь $p = \{\Omega, \delta(\omega)\}$, $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \Omega_j \subset V$, $\delta(\omega) = \{\delta_j(\omega)\}$, $j = 1, ..., N$, A- оператор выметания. По сути, вместе с плотностью $u(X,t)$ в каждый момент времени $0 < t < T$ мы ищем начальное распределение плотности $u(X,0)$ для процесса концентрации. Истинное $u(X,0)$ позволяет однозначно определить p. При этом начальное условие содержит как плотностную, так и морфологическую характеристики. Опираясь на геосолитонную модель, мы можем предложить модель залежи Ω, как несколько простых геометрических фигур расположенных вдоль геосолитонной трубки.

Задачу выметания численно можно решать методом конечных разностей и методом конечных элементов. Мы рассмотрим вариант второго метода.

Численно выметание можно реализовать на сетке посредством 6-и точечной схемы Д. Зидарова [4]. Такой подход позволяет требовать от плотности не более чем кусочной непрерывности в V : $\delta(\omega) \in C(\Omega)$. Отметим, что метод конечных разностей требует от искомой функции (плотности) дважды непрерывной дифференцируемости, что является достаточно жестким для геофизических задач условием.

Алгоритм концентрации включает задачу минимизиции квадрата невязки между заданной $\delta_\Gamma(s^*)$, $s^* \in \Gamma$ и граничной плотностью рассчитанной посредством многократного вычисления плотности $\delta(\omega)$, $\omega \in \Omega$ методом Монте-Карло и ее выметания на границу ∂V. При этом Ω определяется на первом этапе алгоритма на основании целевого условия. Задача минимизации квадрата невязки решается для системы вложенных компактов:

$$\hat{p} = arginf\, \rho^2(Ap, \delta_\Gamma(s^*)),\ V \to \hat{V} \tag{11}$$

, где $\rho^2(Ap, \delta_\Gamma(s^*)) = \|Ap - \delta_\Gamma(s^*)\|^2_{L_2}$.

Задачу решаем на компакте с использованием априорной информации. С точки зрения разведочной геофизики куб V более информативен, чем ограниченная плоскостью область.

В случае большой погрешности во входных данных и недостатке априорной информации наряду с квадратом невязки мы используем тихоновский функционал.

Мы решаем задачу концентрации по априорной информации о $\delta_\Gamma(s^*)$ для случая, когда частично заданы Ω и $\delta(\omega)$ ($\delta(\omega) \in [0.4\,\text{г/см}^3, 1\,\text{г/см}^3]$).Задача решается в два этапа. На первом - по изолиниям на гранях V мы определяем морфологию области Ω. На втором - $\delta(\omega)$ в рамках статистической регуляризации.

В проведенных вычислительных экспериментах V представляет следующий куб $[0, 1\,\text{км}] \times [0, 1\,\text{км}] \times [0, 4/3\,\text{км}]$.

Посредством интерпретации рассчитанных карт, мы локализуем топологию области Ω в виде: шара малого радиуса расположенного на глубине 1 км (модель 1); двух шаров на различных глубинах (модель 2); двух горизонтальных круговых цилиндров (модели 3,4); топологического произведения шара на два перпендикулярных отрезка параллельных осям абсцисс и ординат. Для более мелкого шага локализуется морфология области Ω, как: куб в центре области V; параллелепипед (модель 7); две связных области в форме кубов (модель 8).

На втором этапе концентрации мы определяем плотности локализованных объектов как постоянные, но для некоторых связных областей расположенных на разных глубинах различные величины.

Для точных значений плотности $\bar{\delta}_\Gamma(s^*)$ погрешность результата $\epsilon = \|\delta(\omega) - \bar{\delta}(\omega)\|^2_{L_2} \leq 1.5\%$. Для заданных с погрешностью значений плотности $\tilde{\bar{\delta}}_\Gamma(s^*)$: $\delta = \|\tilde{\bar{\delta}}_\Gamma(s^*) - \bar{\delta}_\Gamma(s^*)\|^2_{L_2} \leq 5\%$ погрешность результата $\epsilon \leq 5\%$.

Алгоритм включен в комплекс программ интерпретации для нефтяных месторождений. Интерфейс комплекса использует объектно-ориентированный инструментарий применяемый и при разработке НИР "Создание и развитие информационных систем учебного и административного назначения МГУ" (номер ЦИТИС 01201253080).

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В.Г. Филатову, академику В.И. Старостенко, профессору А.Г. Яголе за полезные замечания при разработке темы концентрации масс, академику В.Н. Страхову за изначальную постановку проблемы для геофизики. Благодарю профессоров А.И. Кириллова, С.А. Розанову за организационную поддержку и представителей школы сингулярных задач (профессора Н.Н. Нефедова) за конструктивные замечания относительно модели.

Литература

1. Мегеря В. М., Филатов В. Г., Старостенко В. И., Корчагин И. Н., Лобанов А. М., Гласко Ю. В., Волоцков М. Ю., Скачков С. А. Возможности и перспективы применения несейсмических методов для поисков скоплений углеводородов и геосолитонная концепция их образования // Геофизический журнал. 2012. Т. 34, N 3. С. 4–21.

2. Филатов В.Г. Автореферат на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Устойчивые способы обработки и интерпретации потенциальных полей на основе регуляризации и концентрации источников. Киев: ИГ АН УССР, 1988. 49 с.

3. Страхов В.Н. О выметании масс по Пуанкаре и его использовании при решении прямых и обратных задач гравиметрии // ДАН СССР. 1977. Т. 236, N 1. С. 54–57.

4. Зидаров Д. О решении некоторых обратных задач потенциальных полей и их применение к вопросам геофизики. София: Издательство Болгарской АН, 1968. 143 с.

5. Гласко Ю.В. Одна задача эквивалентного перераспределения масс// Физика Земли. 2012. Т.48. N 2. С. 88–93.

АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

Ж.К. Жээнтаева

Кыргызско-Узбекский университет, Ош, Кыргызстан

e-mail: `jjk_kuu@mail.ru`

Аннотация: В статье предлагаются неформальные алгоритмы для выдвижения и подтверждения гипотез о существовании асимптотического разложения решений начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием аргумента по все более быстро затухающим решениям и описываются результаты их использования.

Ключевые слова: алгоритм, асимптотика, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, численный эксперимент

ALGORITHMS TO INVESTIGATE ASYMPTOTIC OF SOLUTIONS OF DELAY-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATION

Abstract: Non-formal algorithms to stand and to substantiate hypotheses on existing of asymptotic expansions of solutions of initial value problems for linear differential equations with bounded delay by more and more rapidly fading solutions are proposed. Results of their using are presented.

Keywords: algorithm, asymptotic, delay-differential equation, numerical experiment

Введение

Уравнение с ограниченным запаздыванием в наиболее общем виде записывается, как

$$x'(t) = L(t; x(t+s : -h \le s \le -h_1 \le 0)), t \in R_+ = [0, \infty), h, h_1 = const, \qquad (1)$$

где $L(t; x(\cdot)) : R_+ \times C[-h, -h_1] \to R$ - непрерывный оператор, с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0], \qquad (2)$$

где $\varphi(t) \in C[-h, 0]$ - заданная функция; требуется найти решение в $C^1(R_+)$.

Это решение будем обозначать $X(t; \varphi(\cdot))$. Аналогично будем обозначать решение аппроксимирующего разностного уравнения.

Если оператор L - линейный, то уравнение (1) можно переписать в виде [7]

$$x'(t) = \int_{h_1}^{h} d_s K(t, s) x(t-s) ds, \qquad (3)$$

где $K(t, s)$ - заданная функция ограниченной вариации по s, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям.

В свою очередь, уравнение вида (3) с одним постоянным сосредоточенным запаздыванием записывается в виде

$$x'(t) = A(t)x(t-h), t \in R_+. \tag{4}$$

Будем предполагать, что в линейном случае существует норма оператора L:

$$\| L \| = \sup\{\int_{h_1}^{h} d_s|K(t,s)| : t \in R_+\} = \| A \| = \sup\{|A(t)| : t \in R_+\}.$$

Если функция $K(t,s)$ возрастает по s (соответственно $A(t) > 0$), то уравнение называется "устойчивого типа"; если функция $K(t,s)$ убывает по s (соответственно $A(t) < 0$), то - "неустойчивого типа".

Из теории Флоке (см. например [3]) следует, что для линейных автономных уравнений (функция K не зависит от t (соответственно $A(t) = a = const$)), характеристическое уравнение

$$\lambda = \int_{h_1}^{h} d_s K(s) e^{\lambda s} \ \ (\lambda = a e^{-\lambda h}) \tag{5}$$

имеет бесконечное количество решений $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ...$ в комплексной плоскости, таких, что $lim_{k\to\infty} Re\ \lambda_k = -\infty$, и решение (1)-(2) представимо в виде асимптотического ряда

$$X(t; \varphi(\cdot)) \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_k \varphi(\cdot) e^{\lambda_k t} t^{p_k}, \tag{6}$$

где C_k - линейные функционалы от начальной функции (степенной сомножитель возникает в случае кратных корней уравнения (5)).

Отсюда следует, что в автономном случае существуют такие "базовые"решения $\xi_k(t)$ и константы $\mu_k \to -\infty, k = 0, 1, 2, ...$, что

$$X(t; \varphi(\cdot)) \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi_k(t), t \in R_+, \xi_k(t) = O(e^{\mu_k t}). \tag{7}$$

(Эти результаты частично перенесены на уравнения с периодическими коэффициентами).

Переходим к обзору результатов по неавтономным уравнениям (результаты будем формулировать применительно к скалярному случаю). Знаки O, o будем использовать для $t \to \infty$.

В [1] для уравнений вида (3) доказано, что при

$$\| L \| \, h < \frac{1}{e} \tag{8}$$

решения разделяются на "медленно меняющиеся" (знакопостоянные в скалярном случае), названные "специальными" ($x_0(t)$), и быстро затухающие.

Примечание. Величина в левой части (8) - безразмерная, что придает универсальность получаемым оценкам.

В [2] доказано, что для таких уравнений с малым запаздыванием любое решение (1)-(2) представляется в виде

$$X(t; \varphi(\cdot)) = C_0(\varphi(\cdot)) x_0(t) + o(x_0(t)). \tag{9}$$

В [4] доказано, что при выполнении (8) и $h_1 > 0$ существует еще такое решение $x_1(t)$, что

$$X(t;\varphi(\cdot)) = C_0(\varphi(\cdot))x_0(t) + C_1(\varphi(\cdot))x_1(t) + o(x_1(t)).$$

В [6], [8] оценка вида (8) обобщена на нелинейные уравнения вида (1).

В [7] представление решения вида (9) доказано для уравнений неустойчивого типа.

В [9] показано, что при нарушении условия (8) представление (7) может не иметь места.

В данной статье предлагаются неформальные алгоритмы для выдвижения и подтверждения гипотез о существовании асимптотического разложения решения начальной задачи для линейного дифференциального уравнения с ограниченным запаздыванием аргумента по относительно все более быстро затухающим решениям и описываются результаты их использования.

1. Основная гипотеза и разностная схема

Мы будем формулировать гипотезы применительно к уравнению (4).

Гипотеза 1. Если $\| A(t) \| < \infty, A(t)h \geq const > -\frac{1}{e}$ и $A(t)$ ни на каком отрезке не слипается с нулем, то имеет место представление вида (7).

Для численных экспериментов построим разностную схему.

Не умаляя общности, заменой независимой переменной можно считать, что h - натуральное число. Шаг по t возьмем равным 1. Обозначим сеточную функцию $X[m] \approx x(m), m = -h, -h+1, ..., 0, 1, 2, ...$, тогда из (2) получаем:

$$X[m] = \varphi(m), m = -h, -h+1, ..., 0. \tag{10}$$

Из (4) получаем расчетную формулу:

$$X[m] = X[m-1] + A(m)X[m-h-1], m = 1, 2, 3, ..., n, \tag{11}$$

где n - достаточно большое (выбираемое пользователем) число.

Также исходными данными, задаваемыми пользователем, являются нижняя и верхняя границы диапазона для (безразмерной величины) $A(t)h$. Значения $A(1), ..., A(n)$ выбираются алгоритмом случайно - нижняя или верхняя граница указанного пользователем диапазона.

С начальным условием

$$X_0[m] = 0, m = -h, -h+1, ..., -1; X_0[0] = 1$$

вычисляется сеточная функция, соответствующая специальному решению.

Далее, для других решений $X[m]$ начальной задачи (10)-(11) вычисляется отношение

$$D[m] = \frac{X[m]}{X_0[m]}, m = 1, 2, 3, ..., n, \tag{12}$$

и его визуальная стабилизация подтверждает существование предела

$$D_0(x(\cdot)) = \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{x_0(t)}. \tag{13}$$

Если этот предел существует, введем оператор

$$W(x(\cdot))(t) = x(t) - D_0(x(\cdot))x_0(t).$$

Так же будем обозначать его неформальный аналог из (12) для функций дискретной переменной.

2. Гипотеза для уравнения "смешанного" типа и ее подтверждение

Гипотеза 2. Если $-\frac{1}{e} < const_1 \leq A(t)h < const_2$, то имеет место представление вида (9).

1-е следствие из Гипотезы 2. Для решения любой начальной задачи предел (13) существует.

2-е следствие из Гипотезы 2. Для $x_2(t) = Wx(\cdot)(t)$ предел (13) существует и равен нулю.

Примечание. С математической точки зрения, 2-е следствие вытекает из первого, но с вычислительной точки зрения (при замене D_0 на стабилизировавшееся значение $D[m] \approx D[n]$) 2-е следствие является дополнительной проверкой правильности приближенного вычисления первого предела.

Многократные вычисления по указанному алгоритму даже для очень широкого диапазона $-0.3 \leq A(t)h \leq 100$ во всех случаях дали стабилизацию в (12) и тем самым подтвердили Гипотезу 2.

3. Гипотеза для уравнения неустойчивого типа и ее подтверждение

При $a > 0$ уравнение (5) имеет одно вещественное положительное решение λ_0 (дающее специальное решение задачи (4)-(2)), следующее комплексное решение $\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1$ дает два (медленно) колеблющихся решения $e^{\mu_1 t}cos(\nu_1 t)$ и $e^{\mu_1 t}sin(\nu_1 t)$, но в неавтономном случае нельзя гарантировать, что они будут иметь одинаковый характеристический показатель. Поэтому мы предлагаем:

Гипотеза 3. Для уравнения неустойчивого типа существуют такие медленно колеблющиеся решения $x_1(t), x_2(t)$ начальной задачи (4)-(2), что для любой начальной функции $\varphi(t)$ будет

$$X(t;\varphi(\cdot)) = C_0\varphi(\cdot)x_0(t) + C_1\varphi(\cdot)x_1(t) + C_2\varphi(\cdot)x_2(t) + o(|x_1(t)| + |x_2(t)|). \tag{14}$$

Для подтверждения этой гипотезы, кроме решения $X_0[m]$, берем еще две линейно независимых (ступенчатых) начальных функции $\Phi_1[m], \Phi_2[m], m = -h, -h+1, ..., 0$, вычисляем

$$X_1[m] = W(X[\cdot;\Phi_1[\cdot]])[m], X_2[m] = W(X[\cdot;\Phi_2[\cdot]])[m],$$

визуально убеждаемся, что они является медленно колеблющимися решениями, и берем их в качестве аппроксимаций для членов разложения в (14).

Далее, берем любую начальную функцию $\Phi_3[m], m = -h, -h+1, ..., 0$, вычисляем для нее C_0 согласно (12) и соответствующую функцию $X_3[m] = W(X[\cdot;\Phi_3[\cdot]])[m]$. Для этой функции вычисляем C_1, C_2 из условия

$$\sum_{m=n-h}^{n}(X_3[m] - C_1X_1[m] - C_2X_2[m])^2 \downarrow \min$$

по методу наименьших квадратов. При численных экспериментах в качестве приближения к характеристическому показателю сеточной функции мы взяли

$$\Theta = max\{\frac{\parallel X \parallel_{[k,k+h-1]}}{\parallel X \parallel_{[k-h,k-1]}} : k\}.$$

Эти показатели вычислялись для $X_1[m], X_2[m]$ и $X_4[m] = X_3[m] - C_1X_1[m] - C_2X_2[m]$. Были получены следующие результаты:

$$1. \leq A(t)h \leq 2. : \Theta_1 \approx \Theta_2 \approx 0.5; \Theta_4 \approx 0.2;$$

$$2. \le A(t)h \le 3. : \Theta_1 \approx \Theta_2 \approx 0.6; \Theta_4 \approx 0.3;$$

$$3. \le A(t)h \le 5. : \Theta_1 \approx \Theta_2 \approx 1.0; \Theta_4 \approx 0.5;$$

$$5. \le A(t)h \le 10. : \Theta_1 \approx \Theta_2 \approx 1.2; \Theta_4 \approx 0.6.$$

Поскольку во всех случаях Θ_4 существенно меньше Θ_1 и Θ_2, полученные результаты подтверждают Гипотезу 3.

Результаты данной статьи коротко опубликованы в [10]. Мы надеемся, что дальнейшие вычисления помогут уточнить формулировки и найти строгие доказательства гипотез.

Литература

1.Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. - М.-Л.: Гостехиздат, 1951. - 255 с.

2. Рябов Ю.А. Применение метода малого параметра Ляпунова-Пуанкаре в теории систем с запаздыванием // Инженерный журнал, 1961. - Т. 1, No. 2. - С. 3-15.

3. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения, пер. с англ. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. - 248 с.

4. Kozakiewicz E. Zur Abschätzung des Abklingens der nuchtschwingenden Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit nacheilendem Argument // Wissenschaftliche Zeit- schrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Reihe Mathematik-Naturwissenschaften, 1966, 15:5, 675-676.

5. Kozakiewicz E. Über lineare Differential-Funktional- relationen erster Ordnung vom instabilen Typ // Mathematische Nachrichten, 1969, 40:1-3, 61-78.

6. Панков П.С. Об асимптотическом представлении решений операторно- дифференциальных уравнений, близких к вырожденным // Сборник трудов аспирантов и соискателей (физико-математических наук), выпуск 4. - Фрунзе: Киргизский государственный университет, 1971. - С. 94-103.

7. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. - М.: Наука, 1972. - 352 с.

8. Панков П.С. Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения, 1977. - Т. 3, No. 4. - С.456–460.

9. Панков П.С. Пример линейного однородного дифференциальные уравнения с запаздыванием, не имеющего конечномерного экспоненциально устойчивого при $t \to \infty$ пространства решений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1977. - С.117-125.

10. Жээнтаева Ж.К. Алгоритм для экспериментального исследования асимптотики решений линейных уравнений с запаздывающим аргументом // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования: Тексты и тезисы докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 г. - М.: Российский университет дружбы народов, 2014. - С. 211-212.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОГО РЕЗЕРВНОГО ИСТОЧНИКА ТОКА

Д.И. Максимов

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец, Россия

e-mail: timonpm@mail.ru

Аннотация: В данной работе строится математическая модель теплового резервного источника тока, позволяющая рассчитывать тепловое поле в некоторый момент времени. Исследуются именения температур на поверхности и внутри источника.

Ключевые слова: тепловой источник тока, уравнение теплопроводности, метод прогонки

MATHEMATICAL MODEL OF THERMAL POWER BACKUP SOURCE

Abstract: In this paper we construct a mathematical model of thermal backup power source, allowing to calculate the thermal field at some time. We study the application specified temperature on the surface and inside the source.

Keywords: thermal power source, the heat conduction equation, sweep method

Выходные характеристики тепловых резервных источников тока (РИТ) зависят от его нестационарного теплового температурного поля. Продолжительность работы РИТ прямо связана с обеспечением необходимого рабочего температурного диапазона электрохимических элементов, обычно 500-630°С. Наиболее эффективным средством сохранения тепла является надежная тепловая защита электрохимических элементов и батареи в целом. Следовательно, необходимо подобрать теплоизоляцию между блоком электрохимических элементов и корпусом, не превышая габариты батареи ($\varnothing$40мм, $h = 75$мм) и времени работы (20 секунд и более), исходя из теплофизических характеристик материалов.

Тепловая схема защиты подбиралась путем сравнения характеристик температурных полей различных вариантов расчетных схем для многослойного осесимметричного тела.

Каждый слой имеет свои теплофизические характеристики: коэффициент теплопроводности λ, удельная теплоемкость c и плотность ρ.

Нестационарный перенос тепла теплопроводностью описывается уравнением Фурье-Кирхгофа [1]. В цилиндрических координатах это уравнение имеет вид:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right].$$

Поскольку РИТ имеет осевую симметрию, то данное уравнение можно переписать в виде [2]:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right].$$

В качестве начального условия используется начальную температуру:

$$T_{\text{н}} = T_0.$$

На левой границе используется условие симметрии:

$$r = 0: \frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

На правой, верхней и нижней границах происходит теплообмен с окружающей средой:

$$r = R: -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \kappa_{right}(T - T_{right}),$$
$$z = 0: \lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa_{down}(T - T_{down}),$$
$$z = H: -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa_{up}(T - T_{up}).$$

где κ_{right}, κ_{down}, κ_{up} – коэффициент теплоотдачи, а T_{right}, T_{down}, T_{up} – температура окружающей среды.

Для определения теплового взаимодействия между слоями, имеющими различные теплофизические характеристики, используются граничные условия четвертого рода:

$$z = \widetilde{z}: \begin{cases} \check{T} = \hat{T}, \\ -\check{\lambda} \dfrac{\partial \check{T}}{\partial z} = -\hat{\lambda} \dfrac{\partial \hat{T}}{\partial z}. \end{cases}$$

Таким образом, необходимо решить двумерную нестационарную задачу.

Для решения поставленной задачи используется численный метод конечных разностей на равномерной сетке [3].

Область разбивается на N_r и N_z равных промежутков с шагом h_z и h_r по r и z соответственно. Временная ось также разбивается на N_t равных промежутков с шагом τ.

$$r_i = ih_r,\ i = \overline{0,\ N_r}; \quad z_j = jh_z,\ i = \overline{0,\ N_z}; \quad t_n = n\tau,\ n = \overline{0,\ N_t}.$$

Дифференциальные операторы заменяются на их конечно-разностные аналоги и проводится дискретизация уравнения на основе локально-одномерной схемы [4]:

$$c_{i,j}\rho_{i,j} \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^{n}}{\tau} = \frac{\lambda_{i,j}}{r_i} \left[\frac{r_{i+1/2} T_{i+1,j}^{n+1/2} - (r_{i-1/2} + r_{i+1/2}) T_{i,j}^{n+1/2} + r_{i-1/2} T_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_r^2} \right],$$

$$c_{i,j}\rho_{i,j} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} = \lambda_{i,j} \left[\frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{h_z^2} \right],$$

где

$$r_{i-1/2} = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}, \quad r_{i+1/2} = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}.$$

Между слоями в качестве теплофизических параметров среды используются средние значения их характеристик:

$$\lambda = \frac{\check{\lambda} + \hat{\lambda}}{2},\ \rho = \frac{\check{\rho} + \hat{\rho}}{2},\ c = \frac{\check{c} + \hat{c}}{2}$$

Для для решения системы используется метод прогонки [2].

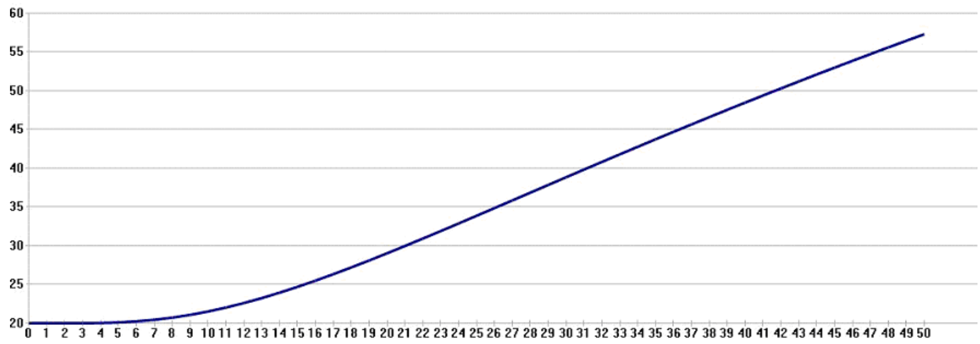


Рис. 1. Зависимость изменения температуры на корпусе от времени работы РИТ.

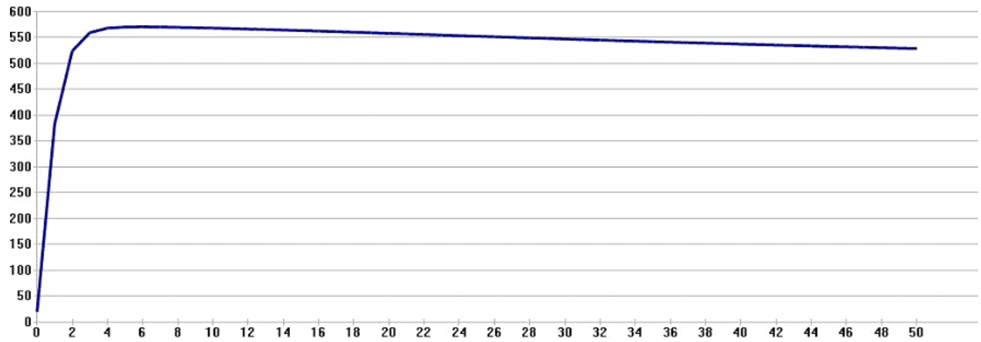


Рис. 2. Зависимость изменения температуры электролита от времени работы РИТ.

Данная математическая модель была реализована в виде программы для расчета температурного поля в каждом слое РИТ в некоторый момент времени. На основе расчетных данных получены графики изменения температур (рис. 1, 2).

Таким образом, как видно из графиков, максимально допустимая температура корпуса не достигается при времени работы источника порядка 50 секунд, а температура электролита находится в рабочем диапазоне.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство МГУ, 1999. – 799с.

2. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512с.

3. Ращиков В.И., Рошаль А.С. Численные методы решения физических задач: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 208с.

4. Самарский А.А. Теория разностных схем. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 616с.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВ МОДЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

О.Н. Масина

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Россия

e-mail: olga121@inbox.ru

Аннотация: Изучены качественные свойства моделей, описываемых дифференциальными включениями с аккретивными операторами. Получены условия существования и асимптотической устойчивости решений. К исследуемым моделям приводят задачи, в которых значения операторов являются многоэлементными множествами. Качественные свойства изучаемых моделей используются при применении системного подхода к исследованию устойчивости моделей, описываемых различными типами дифференциальных уравнений и включениями. Системный подход базируется на переходе от детерминистического описания модели к стохастическому и на принципе редукции задачи об устойчивости решений дифференциального включения к задаче об устойчивости других типов уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное включение, стохастическое дифференциальное уравнение, системный подход, ключевая модель, устойчивость, принцип редукции

RESEARCH OF QUALITATIVE PROPERTIES OF THE MODELS DESCRIBED BY DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF THE SPECIAL TYPES

Abstract: Qualitative properties of the models described by differential inclusions with accretive operators are studied. Conditions and asymptotic stability of solutions are received. Lead problems in which values of operators are multivalued sets to the studied models. Qualitative properties of the studied models are used at application of system approach to stability research of the models described by different types of the differential equations and inclusions. System approach is based on transition from the deterministic description of model to the stochastic and on the principle of a reduction of a problem about stability of solutions of differential inclusion to a problem on stability of other types of the equations.

Keywords: differential inclusion, stochastic differential equations, system approach, key model, stability, principle of a reduction

Актуальным направлением исследований дифференциальных моделей является анализ устойчивости при наличии многозначных правых частей. Вопросы существования и устойчивости решений дифференциальных уравнений различных типов и диффереациальных включений изучены в [1–14] и других работах. Основным методом исследования является метод обобщенных функций Ляпунова [10–14]. В работах [10, 11, 13] описан системный подход, позволяющий с единой точки зрения рассматривать свойства устойчивости моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с запаздыванием, стохастическими дифференциальными уравнениями, дифференциальными включениями, нечеткими дифференциальными уравнениями. Указанный подход базируется на переходе от детерминистического описания модели к стохастическому и на принципе редукции задачи об устойчивости решений дифференциального включения к задаче об устойчивости других типов уравнений.

В частности, системный подход может рассматриваться как общая концептуальная основа, позволяющая с единой точки зрения изучать свойства устойчивости решений стохастических уравнений [1, 2, 10, 11, 13] и нечетких уравнений [8, 10, 11, 13].

Устойчивоподобные свойства стохастического уравнения и соответствующего ему нечеткого уравнения связаны следующим образом [13]: 1) если нулевое решение нечеткого уравнения α-устойчиво по Ляпунову при каждом $\alpha \in (0, 1]$ (равномерно по α), то нулевое решение соответствующего стохастического уравнения устойчиво по вероятности (соответственно устойчиво почти наверное); 2) если нулевое решение нечеткого уравнения асимптотически α-устойчиво при любом $\alpha \in (0, 1]$ (равномерно по α), то нулевое решение соответствующего стохастического уравнения асимптотически устойчиво по вероятности (соответственно асимптотически устойчиво почти наверное). Обратные утверждения в общем случае неверны, так как каждому неустойчивому стохастическому уравнению соответствует бесконечное множество нечетких дифференциальных уравнений, среди которых могут быть как устойчивые, так и неустойчивые. Поэтому из устойчивости соответствующего нечеткого дифференциального уравнения не следует, вообще говоря, соответствующая устойчивость исходного стохастического уравнения.

Кроме того, от свойств устойчивости дифференциального включения с помощью ключевой модели и принципа редукции можно переходить к свойствам устойчивости нечеткого дифференциального уравнения. Указанный принцип предполагает переход от многомерных дифференциальных уравнений, описывающих исследуемые модели, к векторному дифференциальному включению и нечеткому дифференциальному уравнению. Этот переход учитывает нечеткие изменения параметров в исследуемых моделях. Полученное нечеткое уравнение для каждого α-уровня, $\alpha \in (0, 1]$, задается соответствующим дифференциальным включением. Множество всех движений включения порождает многозначное отображение, соответствующее α-уровню функции, являющейся решением соответствующего нечеткого дифференциального уравнения.

При применении системного подхода на основе принципа редукции учитываются качественные свойства, в том числе устойчивость, дифференциальных включений. Одним из видов диффереціальных включений являются дифференциальные включения с аккретивными операторами. Указанные включения используются в задачах, в которых значениями операторов являются многоэлементные множества. Вопросы исследования аккретивных операторов и устойчивости решений дифференциальных включений с аккретивной правой частью рассматривались в [8, 9, 13]. В работе [9] исследуются дифференциальные включения, соответствующие аккретивным операторам в банаховом пространстве. В настоящей статье рассматриваются такие включения для случая одномерного евклидова пространства. Получены условия существования и асимптотической устойчивости решений. Введено понятие обобщенной невозрастающей (неубывающей) многозначной функции и установлена связь между неубывающими многозначными функциями и аккретивными.

Пусть X – банахово пространство с нормой $\|.\|$. Рассмотрим в этом пространстве многозначный оператор $A : X \to 2^X$, где 2^X – множество всех непустых подмножеств из X. Обозначим через $D(A) ::= \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}$ и $Im(A) ::= \bigcup_{x \in D(A)} Ax$ область определения и множество значений оператора A.

Нелинейный многозначный оператор $A : X \to 2^X$ называется аккретивным, если для любых x, $y \in D(A)$ и любых $x^* \in Ax$, $y^* \in Ay$ выполняется неравенство

$$\forall \lambda > 0, \|x + \lambda x^* - y - \lambda y^*\|_X \geq \|x - y\|_X. \tag{1}$$

Показано, что если оператор A аккретивный, то для любых $\lambda > 0$ и $z \in Im(A)$ включение

$$z \in x + \lambda Ax \tag{2}$$

имеет не более одного решения x. Для любого $\lambda > 0$ каждому значению $z \in D(I+\lambda A)$ соответствует единственное $x \in D(A)$ такое, что $z \in x+\lambda Ax$. Обозначим это значение через $J_\lambda z$ и полученное отображение $J_\lambda : D(I+\lambda A) \to D(A)$ назовем резольвентой оператора A. Резольвента $J_\lambda ::= (I+\lambda A)^{-1}$ для каждого $\lambda > 0$ имеет область определения $D_\lambda ::= D(J_\lambda) ::= Im(I+\lambda A)$.

В [12] установлено, что оператор A аккретивный тогда и только тогда, когда резольвента $J_\lambda ::= (I+\lambda A)^{-1}$ есть однозначное отображение и для всех $a, b \in D_\lambda$ выполняется неравенство

$$\|J_\lambda a - J_\lambda b\|_X \leq \|a-b\|_X. \tag{3}$$

Пусть $X = R$ есть одномерное евклидово пространство со скалярным произведением $(a,b) ::= ab$.

Многозначная функция $f : R \to 2^R$ называется обобщенно неубывающей (невозрастающей), если для любых $x, y \in R$ и любых $x^* \in f(x)$, $y^* \in f(y)$ при $x \neq y$ выполняется неравенство $(x-y, x^*-y^*) \geq 0$ (соответственно $(x-y, x^*-y^*) \leq 0$).

Установлено, что если функция $f : R \to 2^R$ обобщенно неубывающая, то соответствующий оператор f будет аккретивным. При $X = R$ аккретивный оператор имеет счетное число точек разрыва первого порядка, а в точке x, где имеется скачок от значения α к значению $\beta > \alpha$, множество Ax совпадает с отрезком $[\alpha, \beta]$ или с произвольной его частью.

Пример 1. *Оператор $A : (x,y) \to (z,y)$, где*

$$z = \begin{cases} 1+x & \text{при } x > 0, \\ [-1,1] & \text{при } x = 0, \\ -1+x & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

аккретивный.

Пример 2. *[9] Многочлен с нечетными степенями и положительными коэффициентами*

$$f(t) ::= a_0 t^{2n_0+1} + a_1 t^{2n_1+1} + \ldots + a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n > 0$$

аккретивный.

Будем по определению считать, что функция $f : R \to R$ называется обобщенно монотонной (обобщенно аккретивной), если эта функция кусочно-монотонная, т. е. область определения функции разбивается на счетное число интервалов, в каждом из которых функция не убывает и непрерывна, или не возрастает и непрерывна, и в каждой граничной точке между двумя интервалами имеются конечные пределы и слева, и справа.

Пример 3. *Если разложить функцию $y = x+1$ в ряд Фурье на отрезке [-1; 1], то получим кусочно-возрастающую функцию с периодом 2, которая будет обобщенно аккретивной.*

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in -Ax \tag{4}$$

с аккретивным оператором A в одномерном евклидовом пространстве.

Теорема 1. *Если оператор $A : (a, b) \to 2^R$ аккретивный, то для любого начального значения $x(s) = q \in R$, $s \in (a, b)$ включение (4) имеет единственное непродолжаемое решение.*

Доказательство. Если в любой окрестности точки $x = q$ множество Ax содержит значения разных знаков, то можно считать $0 \in Aq$ и поэтому искомое решение будет постоянной функцией $x(t) = q$, $\forall t \in (a, b)$.

Если множество Ax имеет в некоторой окрестности (m, n) точки q только положительные значения, то пусть (m, n) есть максимальная такая окрестность. Построим однозначную функцию f так, что $f(x) \in Ax$ при всех $t \in (m, n)$. Тогда включение (4) равносильно уравнению

$$\frac{dx}{dt} = -f(x). \tag{5}$$

Так как функция $f(x)$ монотонная и кусочно-возрастающая, то функция $f(x)$ будет почти всюду дифференцируемой и по теореме Пикара-Линделефа уравнение (5) всегда имеет единственное решение с начальным значением $x(s) = q \in (m, n)$ и его всегда можно расширить на максимальный интервал.

Если множество Ax имеет в некоторой окрестности (m, n) точки q только отрицательные значения, существование единственного решения $x = G(F(q) + s - t)$ обосновывается аналогично. Теорема доказана.

Аккретивный оператор многозначен лишь в отдельных точках и поэтому любое решение включения (4) состоит всегда из единственного решения. Отсюда следует, что оператор A имеет значением многоэлементное множество на множествах нулевой меры. Поэтому в каждом многоэлементном значении Ax оператора A можно оставить только один элемент. Полученный при этом однозначный оператор B, для которого дифференциальное уравнение $dx/dt = -Bx$ будет иметь те же самые решения, что и исходное включение $dx/dt \in -Ax$. Поэтому включения с аккретивными правыми частями, для которых доказана теорема об единственности движения в каждом решении, можно рассматривать как дифференциальные уравнения с однозначной правой частью.

Теорема 2. *Если оператор $A : (a, b) \to 2^R$ обобщенно аккретивный, то для любого начального значения $x(s) = q \in R$, $s \in (a, b)$ включение (4) имеет единственное непродолжаемое решение.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. *Если оператор A принимает значение $\{0\}$ в некоторой точке $c \in (a, b)$, то точка c относительно включения (4) будет асимптотически устойчива. При этом если 0 внутренняя точка множества Ac, то каждое решение включения (4) попадает в точку c в конечный момент времени t и остается в этой точке при всех больших значениях t.*

Доказательство. Для равносильного (4) уравнения $dx/dt = -f(x)$ функция $V(x) = (x - c)^2$ является функцией Ляпунова с определенно отрицательной производной $DV(x) = -(x - c)f(x)$ и асимптотическая устойчивость следует из второго метода Ляпунова. Интеграл $\int\limits_c^q dx/f(x)$ заведомо имеет конечное значение и поэтому любое решение с начальной точкой $x(s) = q$ попадает в точку c в момент времени $t = c + \int_c^q dx/f(x)$.

Отметим, что если оператор A непрерывен в точке c, то все равно все решения включения (4) могут попадать в точку c за конечное время, как показывает следующий

Пример 4. *Пусть* $Ax = (3/2)x^{1/3}$, *тогда все решения* $x(t) = (q^{2/3} + s - t)^{3/2}$ *уравнения* $dx/dt = -(3/2)x^{1/3}$ *попадают в точку покоя* $c = 0$ *в момент* $t = q^{2/3} + s$.

Отсюда ясно, что любое решение включения (4) также асимптотически устойчиво, и это останется верным, если $a = -\infty$ *или* $b = +\infty$.

Условия существования и устойчивости решений дифференциальных включений с аккретивными операторами используются при применении системного подхода, основанного на принципе редукции задачи об устойчивости решений дифференциального включения к задаче об устойчивости других типов уравнений. Полученные результаты могут найти применение при решении задач устойчивости математических моделей естествознания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований(проект N 15-07-08795).

Литература

1. Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // ПММ. 1960. Т. 24. С. 809–823.

2. Kozin F. Stability of the linear stodastic systems // Lecture notes in math. V. 294. New York: Springer Verlag, 1972. P. 189–192.

3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

4. Филиппов А.Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестник МГУ. Сер. Мат., мех. 1967. N 3. С. 16–26.

5. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

6. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986.

7. Antosiewicz H.A., Cellina A. Continues selections and differential relations // J. Diff. Eq. l975. V. 19. P. 386–398.

8. Трубников Ю.В., Перов А.И. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск, 1986.

9. Kato T. Accretive operators and nonlinear evolutions equations in Banach spaces. 1968. V. 18. Part I. P. 13–161.

10. Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1990 (2-е дополн. изд. М.: УРСС, 2007).

11. Меренков Ю.Н. Устойчивоподобные свойства дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений. Монография. М.: Изд-во РУДН, 2000.

12. Масина О.Н. О существовании решений дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. N 6. С. 845–847.

13. Дружинина О.В., Масина О.Н. Методы исследования устойчивости и управляемости нечетких и стохастических динамических систем. М.: ВЦ РАН, 2009.

14. Масина О.Н., Дружинина О.В. Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. М.: ВЦ РАН, 2011.

ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ПРОСТЕЙШУЮ МДС ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ

А.В. Митин[1], Ю.И. Худак[2]

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА), Москва, Россия

e-mail: [1]`mitin@mirea.ru`, [2]`hudak@mirea.ru`

PASSING OF THE ELLIPTICALLY POLARIZED WAVE THROUGHT THE ELEMENTARY MDS AT SLOPING FALLING

Abstract: The problem of the choice of the parameters of antireflection layer for the best uniform minimization of reflection in the frequency range at a constant angle of incidence for elliptically polarized wave is solved.

Keywords: antireflection layer, uniform minimization of reflection, oblique incidence, elliptically polarized wave.

Для эллиптически поляризованной волны решена задача о выборе параметров промежуточного слоя для наилучшего равномерного просветления в смысле Чебышева на интервале частот $[\Omega_1, \Omega_2]$ ([2]) при фиксированном угле падения $0 < \beta_0 < \pi/2$.

Описание системы и обозначения

Пусть магнитодиэлектрическая система (МДС) состоит из двух полупространств разделённых одним промежуточным слоем. Пусть материалы всех слоёв не имеют проводимости и характеризуются диэлектрической и магнитной проницаемостями: ε_j, μ_j $(j = 0, 1, 2)$.

Электромагнитное поле в МДС описывается решением системы уравнений Максвелла, удовлетворяющим "материальным" уравнениям поля: $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, где $\vec{E}$, $\vec{H}$ – векторы напряжённости, а $\vec{D}$, $\vec{B}$ – индукции электрического и магнитного полей, если на границах сред непрерывны тангенциальные составляющие $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Будем рассматривать гармонически зависящие от времени поля в виде плоских волн: $\vec{E} = \vec{E}_r \cdot e^{-i\omega t}$ и $\vec{H} = \vec{H}_r \cdot e^{-i\omega t}$, где амплитуды $\vec{E}_r$ и $\vec{H}_r$ зависят только от пространственных координат, постоянны в каждой из плоскостей $\perp$ волновому вектору $\vec{k}_j$ для каждой из сред $(j = 0, 1, 2)$ и образуют с ним правую тройку векторов.[1]

Введём правую систему декартовых координат так, чтобы плоскость OYZ совпадала с левой границей промежуточного слоя, ось OX была направлена внутрь этого слоя, а волновой вектор $\vec{k}_0$ составлял с ней острый угол β_0.

Известно [1], что в каждом из слоёв МДС $(j = 0, 1, 2)$ общее решение уравнений Максвелла будет линейной комбинацией, вообще говоря, с комплексными коэффициентами d_0, d_1, линейно поляризованных **ТЕ-** и **ТМ**-волн, у которых $\vec{E} \parallel$ плоскости OYZ для **ТЕ**-волны и $\vec{H} \parallel$ плоскости OYZ для **ТМ**-волны.

Квадраты модулей d_0, d_1 имеют физический смысл коэффициентов пропорциональности при плотностях энергии в **ТЕ-** и **ТМ**-компонентах, вообще говоря,

[1]Индекс r всюду ниже мы опускаем, а ω далее будет обозначать волновое число $\frac{\omega}{c}$, где c – скорость света.

эллиптически поляризованной плоской волны, для которой разность фаз d_0, d_1 определяет форму эллипса поляризации.

Координатные записи $\vec{E}$ и $\vec{H}$ будут:

ТЕ-волна:

$$\vec{E} = (0, 0, E_z)\,, \quad \vec{H} = (H_x, H_y, 0)\,. \tag{1}$$

ТМ-волна:

$$\vec{E} = (E_x, E_y, 0)\,, \quad \vec{H} = (0, 0, H_z)\,. \tag{2}$$

Пусть: $n_j = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j}$ – показатели преломления и $p_j = \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}}$ – величины, обратные к волновым сопротивлениям j-ой среды.

Условие непрерывности тангенциальных составляющих $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на границах j-го и $(j+1)$-го слоёв (при $x = a_0 = 0, x = a_1 = D$, где D – толщина конечного слоя) даёт уравнения:

$$\begin{array}{l} E_\tau^{(j)}(a_j - 0, y, z) = E_\tau^{(j+1)}(a_j + 0, y, z) \\ H_\tau^{(j)}(a_j - 0, y, z) = H_\tau^{(j+1)}(a_j + 0, y, z) \end{array},$$

из которых, в частности, следует закон преломления Снеллиуса:

$$n_0 \sin\beta_0 = n_1 \sin\beta_1 = n_2 \sin\beta_2\ .$$

Для **ТЕ** и **ТМ** поляризаций, уравнения Максвелла, описывающие плоскую волну, эквивалентны (см. [3]) системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & i\omega\frac{\tilde{n}}{\tilde{p}} \\ i\omega\tilde{n}\tilde{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}\ , \tag{3}$$

где

$$E = E_z, \quad H = H_y \quad \text{и} \quad E = E_y, \quad H = H_z \tag{4}$$

и величины $\tilde{n}$ и $\tilde{p}$ имеют разный смысл:

для ТЕ-волны: $\tilde{n} = n\cos\beta, \quad \tilde{p} = p\cos\beta$ для ТМ-волны: $\tilde{n} = n\cos\beta, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\cos\beta}$.

В каждом слое общее решение уравнений (3) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \tilde{C}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{p} \end{pmatrix} e^{i\omega\tilde{n}(x-x_0)} + \tilde{C}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde{p} \end{pmatrix} e^{-i\omega\tilde{n}(x-x_0)},$$

где $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$ – произвольные комплексные постоянные.

В физической интерпретации $\tilde{C}_0^{(j)}$ – комплексная амплитуда волны, распространяющейся вправо (“набегающей”), а $\tilde{C}_1^{(j)}$ – волны, распространяющейся влево (“отражённой”) в j-м слое.

Коэффициенты $\tilde{C}_0$ и $\tilde{C}_1$ ([2]) при переходе из одного слоя в другой удовлетворяют условию инвариантности:

$$\tilde{p}_j \left(\left|\tilde{C}_0^{(j)}\right|^2 - \left|\tilde{C}_1^{(j)}\right|^2 \right) = \tilde{p}_k \left(\left|\tilde{C}_0^{(k)}\right|^2 - \left|\tilde{C}_1^{(k)}\right|^2 \right),$$

для любых номеров j, k, эквивалентному закону сохранения энергии.

Поэтому $\widetilde{p}_0 \left|\widetilde{C}_0^{(0)}\right|^2$ – пропорционально плотности энергии в набегающей на систему волне, а $\widetilde{p}_0 \left|\widetilde{C}_1^{(0)}\right|^2$ – плотности энергии волны, отражённой от всей системы.

Пусть: $\widetilde{C}_1^{(2)} = 0$ (отсутствие отражения на $+\infty$) и $\widetilde{C}_0^{(2)} = 1$ (условие нормировки).

Для обоих случаев **TE** и **TM** поляризации обозначим:

$\widetilde{\theta} = \frac{\widetilde{p}_2}{\widetilde{p}_0}$; $\widetilde{\theta}_1 = \frac{\widetilde{p}_1}{\widetilde{p}_0}$; $\widetilde{\theta}_2 = \frac{\widetilde{p}_2}{\widetilde{p}_1}$ и $\theta = \frac{p_2}{p_0}$; $\theta_1 = \frac{p_1}{p_0}$; $\theta_2 = \frac{p_2}{p_1}$. $s = \sin^2\beta_0$, $h_1 = \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_0} = \sqrt{\frac{n_1^2-n_0^2 s}{n_1^2-n_1^2 s}}$, $h_2 = \frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} = \sqrt{\frac{n_1^2 n_2^2-n_1^2 n_0^2 s}{n_1^2 n_2^2-n_2^2 n_0^2 s}}$, $h = \frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_0} = \sqrt{\frac{n_2^2-n_0^2 s}{n_2^2-n_2^2 s}}$, и $\widetilde{\nu}_1 = Dn_1\cos\beta_1 = D\sqrt{n_1^2-n_0^2 s}$, где D – толщина среднего слоя, и $\widetilde{t} = \omega\,\widetilde{\nu}_1$.

Тогда:

$$\left|\widetilde{C}_1^{(0)}\right|^2 = \widetilde{\alpha}_0{}^2\cos^2\widetilde{t} + \widetilde{\alpha}_1{}^2\sin^2\widetilde{t}, \tag{5}$$

где $\widetilde{\alpha}_0 = \frac{1}{2}\left(1-\widetilde{\theta}\right)$; $\widetilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\theta}_2-\widetilde{\theta}_1\right)$.

Величина $\widetilde{t}$ в (5), в силу закона Снеллиуса будет вещественной, если $n_1^2 \geq n_0^2 s$. Далее будем считать это условие выполненным, как и аналогичное условие для МДС без просветляющего слоя: $n_2^2 \geq n_0^2 s$.

Ниже вместо общего значка "$\sim$" над буквами будем для различения случаев **TE** и **TM** писать: "$\vee$" – для **TE**- и "$\wedge$" – для **TM**-волны.

Конкретизируем: $\overset{\vee}{\theta} = \theta h$; $\overset{\vee}{\alpha}_0 = \frac{1}{2}(1-\theta h)$; $\overset{\vee}{\alpha}_1 = \frac{1}{2}(\theta_2 h_2 - \theta_1 h_1)$, а также: $\overset{\wedge}{\theta} = \frac{\theta}{h}$; $\overset{\wedge}{\alpha}_0 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\theta}{h}\right)$; $\overset{\wedge}{\alpha}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2}{h_2}-\frac{\theta_1}{h_1}\right)$. При этом $\widetilde{\nu}_1$ и $\widetilde{t}$ одинаковы для обеих поляризаций.

Величины $\overset{\vee}{p}_j\left(\left|\overset{\vee}{C}{}_0^{(j)}\right|^2 - \left|\overset{\vee}{C}{}_1^{(j)}\right|^2\right)$ и $\hat{p}_j\left(\left|\hat{C}{}_0^{(j)}\right|^2 - \left|\hat{C}{}_1^{(j)}\right|^2\right)$, являются инвариантами для всех слоёв $j = 0, 1, 2$ системы.

В силу независимости распространения **TE**- и **TM**-волн в МДС, одна и та же линейная комбинация рассмотренных выше инвариантов с положительными коэффициентами $\overset{\vee}{w}$ и $\hat{w}$ (в каждом слое j), также является инвариантом, который, в физической интерпретации, соответствует плотности энергии ЭМ-поля в системе [1].

Энергетический коэффициент отражения равен отношению плотности энергии отражённой от системы волны, к плотности энергии падающей волны:

$$R = \frac{\overset{\vee}{w}\left|\overset{\vee}{C}{}_1^{(0)}\right|^2 + \hat{w}\left|\hat{C}{}_1^{(0)}\right|^2}{\overset{\vee}{w}\left|\overset{\vee}{C}{}_0^{(0)}\right|^2 + \hat{w}\left|\hat{C}{}_0^{(0)}\right|^2} = \frac{\overset{\vee}{w}\left|\overset{\vee}{C}{}_1^{(0)}\right|^2 + \hat{w}\left|\hat{C}{}_1^{(0)}\right|^2}{\overset{\vee}{w}\left|\overset{\vee}{C}{}_1^{(0)}\right|^2 + \overset{\vee}{w}\overset{\vee}{\theta} + \hat{w}\left|\hat{C}{}_1^{(0)}\right|^2 + \hat{w}\overset{\wedge}{\theta}},$$

где $\overset{\vee}{w}$ и $\hat{w}$ – положительные постоянные, определяющие энергетические интенсивности **TE**- и **TM**-составляющих в падающей волне.

Математическая постановка и решение задачи о наилучшем равномерном просветлении в диапазоне частот $[\Omega_1, \Omega_2]$ (при постоянном угле падения для эллиптической поляризации).

Требуется выбрать такие параметры конечного слоя $\widetilde{\nu}_1$ и p_1, при которых энергетический коэффициент отражения системы R минимален в диапазоне частот

$[\Omega_1, \Omega_2]$:

$$\max_{\omega\in[\Omega_1,\Omega_2]} R(\omega, \widetilde{\nu}_1, p_1) \xrightarrow[\widetilde{\nu}_1, p_1]{} \min \ . \tag{6}$$

Т.к.

$$R = \frac{f}{f+1}, \qquad f = \frac{\overset{\vee}{w}\left|\overset{\vee}{C}{}_1^{(0)}\right|^2 + \hat{w}\left|\hat{C}{}_1^{(0)}\right|^2}{\overset{\vee}{w}\overset{\vee}{\theta} + \hat{w}\overset{\wedge}{\theta}} \ , \tag{7}$$

то, в силу монотонности R по аргументу f, задача сводится к минимизации f:

$$\max_{\omega\in[\Omega_1,\Omega_2]} f(\omega, \widetilde{\nu}_1, p_1) \ . \tag{8}$$

При фиксированном β_0 – знаменатель в (7) постоянен, и его можно отбросить.

Условие $R(\omega_0, \widetilde{\nu}_1, p_1) < R(\omega_0, 0, p_0)$ (см. [2]), назовём *условием просветления.*

Оно показывает, что возможно подобрать параметры промежуточного слоя так, чтобы при хотя бы одной фиксированной частоте ω_0 энергетический коэффициент отражения R был бы меньше, чем в системе без просветляющего слоя, и сводится к:

$$\overset{\vee}{w}\overset{\vee}{\alpha}_1{}^2 + \hat{w}\overset{\wedge}{\alpha}_1{}^2 < \overset{\vee}{w}\overset{\vee}{\alpha}_0{}^2 + \hat{w}\overset{\wedge}{\alpha}_0{}^2 \ , \tag{9}$$

т.к. эквивалентно наличию локального минимума функции f, рассматриваемой, как функция только от $\widetilde{\nu}_1$, при фиксированном p_1, в точке t, при которой $\widetilde{t} = \pi/2$.

Для минимизации функционала (8), при фиксированном p_1, при выполнении условия просветления, необходимо и достаточно, подбирая $\widetilde{\nu}_1$, поместить середину отрезка $[\widetilde{t}(\Omega_1, \widetilde{\nu}_1), \widetilde{t}(\Omega_2, \widetilde{\nu}_1)]$ в одну из точек с $\widetilde{t} = \pi/2 + \pi k$ $(k = 0, 1, \dots)$, где достигаются минимумы синусоиды: $(\Omega_1\,\widetilde{\nu}_1 + \Omega_2\,\widetilde{\nu}_1)/2 = \pi/2 + \pi k$, или

$$\widetilde{\nu}_1^{\,min} = \frac{\pi + 2\pi k}{(\Omega_1 + \Omega_2)} \ , \tag{10}$$

при том, что длина $[\Omega_1, \Omega_2]$ не должна превышать периода синусоиды:

$$(\Omega_2 - \Omega_1)\,\widetilde{\nu}_1 < \pi \ . \tag{11}$$

Теперь найдём p_1, при котором минимумы f наиболее глубоки. Значение функции $f = \overset{\vee}{w}(\overset{\vee}{\alpha}_0{}^2\cos^2\widetilde{t} + \overset{\vee}{\alpha}_1{}^2\sin^2\widetilde{t}) + \hat{w}(\overset{\wedge}{\alpha}_0{}^2\cos^2\widetilde{t} + \overset{\wedge}{\alpha}_1{}^2\sin^2\widetilde{t})$ в точке $\widetilde{t} = \frac{\pi}{2}$ равно

$$\overset{\vee}{w}\overset{\vee}{\alpha}_1{}^2 + \hat{w}\overset{\wedge}{\alpha}_1{}^2 \ . \tag{12}$$

Исследуя на минимум эту сумму при изменении p_1, после ряда преобразований получим: $\overset{\vee}{w}\overset{\vee}{\theta}_2{}^2 + \overset{\vee}{w}\overset{\vee}{\theta}_1{}^2 + \hat{w}\overset{\wedge}{\theta}_2{}^2 + \hat{w}\overset{\wedge}{\theta}_1{}^2 = \left(\overset{\vee}{w}h_2^2 + \hat{w}\frac{1}{h_2^2}\right)p_2^2 \cdot \frac{1}{p_1^2} + \left(\overset{\vee}{w}h_1^2 + \hat{w}\frac{1}{h_1^2}\right)\frac{1}{p_0^2} \cdot p_1^2$.

В последнем выражении, считая p_1^2 параметром, находим экстремум:

$$p_1^{min} = \sqrt{p_0 p_2} \ \cdot \ \sqrt[4]{\frac{\overset{\vee}{w}h_2^2 + \frac{\hat{w}}{h_2^2}}{\overset{\vee}{w}h_1^2 + \frac{\hat{w}}{h_1^2}}} \tag{13}$$

Замечание 1. *В отличие от линейной* **TE**- *или* **TM**-*поляризации, в случае эллиптической поляризации энергетический коэффициент отражения R ни при какой частоте не обращается в нуль.*

Это доказывает невозможность сведения задачи о наилучшем просветлении при наклонном распространении для эллиптической поляризации к аналогичной задаче при нормальном распространении волны "заменой параметров", как это возможно для линейной **TE**- или **TM**-поляризации.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. 1°. *Для каждого значения параметра p_1 из диапазона $[p_0, p_2]$ найдётся* ***конечное*** *число значений $\widetilde{\nu}_1$, определяемых формулами (10) и (11), при которых функционал $\max\limits_{\omega\in[\Omega_1,\Omega_2]} R(\omega)$ имеет локальный минимум.*

2°. *Для любого $p_1 \in [p_0, p_2]$ точки минимума функционала $\max\limits_{\omega\in[\Omega_1,\Omega_2]} R(\omega)$ строго* ***упорядочены*** *по величине, и среди них есть* ***единственный*** *глобальный минимум, определяемый условием $k = 0$ в (10).*

3°. *Глобальный минимум функционала $\max\limits_{\omega\in[\Omega_1,\Omega_2]} R(\omega)$ будет* ***лучшим*** *из возможных, когда p_1 удовлетворяет условию (13).*

Литература

1. M. Born, E. Wolf Principles of Optics. 7th ed – Cambridge, 2002.

2. Ю. И. Худак О наилучшем однослойном просветляющем покрытии для интервала частот, ЖВМ и МФ, 1990, т.30, №2, 325-327.

3. A. V. Mitin, Yu. I. Hudak The Anti-reflective Coating for The Oblique Incidence of Light // Proceeding of the 8th Congress of the International Sosiety for Analysis, its Applications, and Computation (22-27 August 2011), Volume 1, Editors V.I. Burenkov, M.L.Goldman, E.B.Laneev, V.D.Stepanov, Moskow, Peopless' Frendship University of Russia Publisher, 2012, 128-137.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СУБЪЕКТИВНЫХ СУЖДЕНИЙ

Ю.П. Пытьев[1], О.В. Фаломкина[2]

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: [1]`yuri.pytyev@gmail.com`, [2]`olesya.falomkina@gmail.com`

Аннотация: В статье рассмотрены математические методы, позволяющие моделировать субъективные суждения модельера-исследователя (м.- и.) об истинности предложенной им (субъективной) модели объекта исследования и любых, основанных на ней выводов, а также эволюцию модальностей его суждений, обусловленную поступлением новых данных наблюдений за объектом.

Ключевые слова: Мера правдоподобия, доверия, интегрирование, субъективные суждения, информативность, актуальность информации

MATHEMATICAL MODELLING OF SUBJECTIVE JUDGMENTS

Abstract: In the article mathematical modeling methods of subjective judgments in scientific researches are considered. These methods also allow modelling of evolution of researcher's judgments based on new observation data.

Keywords: Measure of plausibility, measure of belief, subjective judgments, integration, valuability of information

Согласно точке зрения на математическое моделирование как на информационную технологию получения новых знаний об объекте исследования, непременным требованием к его математической модели является ее адекватность цели исследования. Это означает, что математическая модель объекта исследования должна обеспечивать достаточно точное прогнозирование результатов измерений объекта при контролируемых условиях выполнения измерительного эксперимента, которым при измерениях должен удовлетворять объект исследования (если это является целью исследования), и/или модель должна на основе данных измерительного эксперимента с требуемой точностью позволять оценивать значения указанных модельером-исследователем (м.-и.) характеристик объекта, причем — не измеряемого объекта, характеристики которого искажены в измерительном эксперименте, а объекта исследуемого, не искаженного измерением (если это является целью исследования) [2].

Разумеется, для построения такой модели исследователь должен использовать все доступные ему формализованные знания из соответствующей предметной области. Но неформализованные, неполные и недостоверные априорные знания свойств объекта исследования, научный опыт и интуицию ученого учесть при построении модели непросто. Эту ситуацию достаточно точно отражают следующие цитаты: «Как известно, наука и техника до сих пор отвергают субъективизм, хотя хорошо известен и тот факт, что новые открытия и изобретения, как правило, — результат деятельности правого полушария (головного мозга), основанной на субъективном опыте и интуиции учёного, а объективизация и логическое обоснование — результат деятельности левого полушария, определяющей вторичные, вспомогательные средства передачи идеи людям. Более того, известно, что и в процессе объективизации субъективных соображений правое полушарие играет важную роль.»(см. [3]) и «Вопрос «какова наилучшая мера неопределенности, неясности и неточности» на сегодня остается без убедительного ответа и ждет серьезного обсуждения» (см. [4]). Обе цитаты актуальны и в настоящее время, более того, следует добавить, что в научной, технической и прочей исследовательской и творческой деятельности невозможно исключить использование неполной, недостоверной и противоречивой информации, в том числе — высказанной в форме субъективных суждений. Сказанное характеризует актуальность разработки методов математического моделирования подобной информации.

Математической основой рассматриваемого метода является *предложенное м.-и.* пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ с мерами правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$, в котором X — множество возможных значений неизвестного параметра x модели $M(x)$, $\mathcal{P}(X)$ — класс всех подмножеств X, неопределенный элемент (н. э.) $\widetilde{x}$ со значениями в X характеризует модальности субъективных суждений м.-и. об истинности каждого значения $x \in X$ правдоподобием $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ равенства $\widetilde{x} = x$ и доверием $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$ неравенства $\widetilde{x} \neq x$ [1, 2]. Правдоподобие $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и доверие $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ принимают значения в шкалах $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, +, \times) = ([0,1], \leqslant, \max, \min)$ и $\widehat{\mathcal{L}} = ([0,1], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = ([0,1], \widehat{\leqslant}, \min, \max)$ соответственно. Операции сложения $+$, $\widehat{+}$ и умножения $\times$, $\widehat{\times}$ определены согласно равенствам $a + b = \max\{a, b\}$, $a \widehat{+} b = \min\{a, b\}$, $a \times b = \min\{a, b\}$, $a \widehat{\times} b = \max\{a, b\}$, и неравенство $a \leqslant b$ эквивалентно $b \widehat{\leqslant} a$, $a, b \in [0, 1]$. Для любого $E \in \mathcal{P}(X)$ меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$

определены равенствами

$$\begin{aligned} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in E)=\sup_{x\in E} t^{\widetilde{x}}(x),\ E\neq\varnothing;\quad \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varnothing)\overset{\text{def}}{=}0,\\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in E)=\inf_{x\in X\setminus E} \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x),\ E\neq X;\quad \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(X)\overset{\text{def}}{=}1, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$t^{\widetilde{x}}(x)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}=x),\quad \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\neq x),\quad x\in X. \tag{2}$$

Функции $t^{\widetilde{x}}(\cdot):X\to\mathcal{L}$ и $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(\cdot):X\to\widehat{\mathcal{L}}$ называются распределениями правдоподобий и доверий значений $\widetilde{x}$, $t^{\widetilde{x}}(x)$ и $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x)$ суть правдоподобие истинности равенства $\widetilde{x}=x$ и доверие истинности неравенства $\widetilde{x}\neq x$, $x\in X$, значения $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)$ определяют правдоподобие и доверие истинности включения $\widetilde{x}\in E\in\mathcal{P}(X)$. Пространство $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ характеризует н.э. $\widetilde{x}$ и называется его моделью.

Свойства мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ их значений. Определения (1), (2) и их содержательная интерпретация являются следствиями того, что м.-и., основываясь на своих, как правило, ассоциативных, интуитивных и других неполных и недостоверных знаниях свойств объекта исследования, *может предложить* модель $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н.э. $\widetilde{x}$, указав в (2), насколько, по его мнению, относительно правдоподобны равенства $\widetilde{x}=x$, $x\in X$, и насколько следует относительно доверять неравенствам $\widetilde{x}\neq x$, $x\in X$, где «относительно» означает, что (см. [1]) 1) *численные значения мер* $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)$, $E\in\mathcal{P}(X)$, в (1), отличные от нуля и единицы, не могут быть содержательно истолкованы, а существенна лишь их упорядоченность; 2) меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}$ ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}$) считаются эквивалентными, если существует функция $\gamma(\cdot)\in\Gamma$ такая, что для всех $E\in\mathcal{P}(X)$ $\gamma(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E))=\mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(E)$ ($\exists\gamma(\cdot)\in\Gamma\ \forall E\in\mathcal{P}(X)$ $\gamma(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E))=\mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(E)$), где Γ — класс непрерывных, строго монотонных функций $\gamma(\cdot):[0,1]\to[0,1]$, $\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=1$, образующих группу относительно групповой операции «$\circ$», $(\gamma\circ\gamma')(a)\overset{\text{def}}{=}\gamma(\gamma'(a))$, $a\in[0,1]$.

Условия 1), 2) в терминах свойств шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ означают, что класс Γ

1. *определяет группу* $\overline{\Gamma}$ *автоморфизмов* $\gamma:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ и $\gamma:\widehat{\mathcal{L}}\to\widehat{\mathcal{L}}$, $\gamma\in\overline{\Gamma}$, шкал $\mathcal{L}=([0,1],\leqslant,+,\times)$ и $\widehat{\mathcal{L}}=([0,1],\widehat{\leqslant},\widehat{+},\widehat{\times})$ значений мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot):\mathcal{P}(X)\to\mathcal{L}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot):\mathcal{P}(X)\to\widehat{\mathcal{L}}$. Это означает, что $\forall\,\gamma(\cdot)\in\Gamma$ $\gamma([0,1])=[0,1]$, $\forall\,a,b\in[0,1]$ $\gamma(a*b)=\gamma(a)*\gamma(b)$, где $*$ — символ любой из бинарных операций: сложения $+$, $\widehat{+}$ и умножения $\times$, $\widehat{\times}$, и для бинарных отношений $\leqslant$, $\widehat{\leqslant}$: $a\ \leqslant\ b\Leftrightarrow\gamma(a)\leqslant\gamma(b)$, $a\mathrel{\widehat{\leqslant}}b\Leftrightarrow\gamma(a)\mathrel{\widehat{\leqslant}}\gamma(b)$. *Из этого и требований: непрерывности операций* $*:[0,1]^2\to[0,1]$, *их коммутативности, эквивалентности* $a\leqslant b\Leftrightarrow b\mathrel{\widehat{\leqslant}}a$, $a,b\in[0,1]$, *и свойств* 0 *и* 1*:* $a+0=a\widehat{\times}0=a\times 1=a\widehat{+}1=a$ $a+1=a\widehat{\times}1=1$, $a\times 0=a\widehat{+}0=0$, $a\in[0,1]$ *следуют равенства* $a+b=a\widehat{\times}b=\max\{a,b\}\overset{\text{def}}{=}\max(a,b)$, $a\times b=a\widehat{+}b=\min\{a,b\}\overset{\text{def}}{=}\min(a,b)$, $a,b\in[0,1]$ см. [1];

2. *определяет группу изоморфизмов*, обозначим и ее $\overline{\Gamma}$, $\gamma:\mathcal{L}\to\gamma\mathcal{L}$, $\gamma:\widehat{\mathcal{L}}\to\gamma\widehat{\mathcal{L}}$, $\gamma\in\overline{\Gamma}$. Это означает, что $\forall\,\gamma(\cdot)\in\Gamma\ \forall a\in\mathcal{L},\widehat{\mathcal{L}}\Rightarrow\gamma(a)\in\gamma\mathcal{L},\gamma\widehat{\mathcal{L}}$, *определены* бинарные операции $*$ и бинарные отношения $\leqslant,\widehat{\leqslant}$ в шкалах $\gamma\mathcal{L}$ и $\gamma\widehat{\mathcal{L}}$, изоморфных $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$: $a*b\Rightarrow\gamma(a*b)=\gamma(a)*\gamma(b)$, $a\leqslant b\Leftrightarrow\gamma(a)\leqslant\gamma(b)$, $a\mathrel{\widehat{\leqslant}}b\Leftrightarrow\gamma(a)\mathrel{\widehat{\leqslant}}\gamma(b)$, $a,b\in[0,1]$; здесь и далее символы $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ означают «влечет» и «эквивалентно».

В терминах операций сложения в шкалах $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ в равенствах (1) $\forall E\in\mathcal{P}(X)$ $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in E)=\underset{x\in E}{+}t^{\widetilde{x}}(x),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varnothing)=\underset{x\in\varnothing}{+}t^{\widetilde{x}}(x)\overset{\text{def}}{=}0$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in E)=\underset{x\in X\setminus E}{\widehat{+}}\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x)$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(X)=\underset{x\in\varnothing}{\widehat{+}}\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x)\overset{\text{def}}{=}1$, причем условия нормировки $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X)=1$,

$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing) = 0$ не зависят от выбора шкал $\gamma\mathcal{L}$ и $\gamma\widehat{\mathcal{L}}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, и в случае конечного X означают, что среди значений $x \in X$ есть истинное.

«Координатные представления» шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$. Согласно 2) «координатные представления»[1] $\gamma\,\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$ и $\widehat{\gamma}\,\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{\gamma} \in \overline{\Gamma}$ шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ им изоморфны, поэтому каждый м.-и. сообразно своим предпочтениям может выбрать любую пару $\gamma\mathcal{L}$ и $\widehat{\gamma}\mathcal{L}$, $\gamma, \widehat{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, координатных представлений шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ для формулировки модели неопределенного элемента $\widetilde{x}$. При этом, будучи сформулированными в некоторых парах шкал $\mathcal{L}'$, $\widehat{\mathcal{L}}'$ и $\mathcal{L}''$, $\widehat{\mathcal{L}}''$, *модели считаются эквивалентными, если существует пара шкал $\mathcal{L} = \gamma'\mathcal{L}' = \gamma''\mathcal{L}''$ и $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\gamma}'\widehat{\mathcal{L}}' = \widehat{\gamma}''\widehat{\mathcal{L}}''$, $\gamma', \gamma'', \widehat{\gamma}', \widehat{\gamma}'' \in \overline{\Gamma}$, в которых их формулировки совпадают, а содержательно истолкованы могут быть только те, формулировки которых не зависят от выбора шкал $\mathcal{L}$, $\widehat{\mathcal{L}}$, т. е. одинаковы для всех м.-и.*

Правдоподобие и доверие истинности субъективных суждений как неопределенных высказываний. В рассматриваемом контексте н.э. $\widetilde{x}$ моделирует субъективные суждения м.-и. о возможных значениях $x \in X$ и их модальности. Такая интерпретация н.э. основана на теоретико-множественном представлении логики высказываний [1], согласно которому в $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ X — множество элементарных высказываний (э.в.), любое высказывание a взаимно однозначно представлено множеством $A \in \mathcal{P}(X)$ э.в. $x \in X$, каждое из которых влечет a: $a \leftrightarrow A = \bigcup\limits_{\substack{x \in X \\ x \to a}} \{x\} \equiv \{x \in X,\, x \to a\}$, где $\leftrightarrow$ и $\to$ — символы взаимно однозначного соответствия и логической импликации. Каждое э.в. $x \in X$ представлено в X одноточечным множеством $\{x\}$, $x \leftrightarrow \{x\}$, и выделено среди всех высказываний условием: любое э.в. $x \in X$ не следует ни из какого высказывания, кроме x и всегда ложного $\mathbf{0}$.

При таком представлении меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ следует интерпретировать как модальные операторы, определенные на множестве всех высказываний $\mathcal{P}(X)$ и принимающие значения в шкалах $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ соответственно, правдоподобие $t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ $(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E))$ интерпретируется как правдоподобие истинности субъективного суждения как неопределенного высказывания, согласно которому $\widetilde{x} = x$ $(\widetilde{x} \in E)$, где $x \leftrightarrow \{x\}$ $(e \leftrightarrow E)$, доверие $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$ $(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E))$ — доверие истинности субъективного суждения как неопределенного высказывания $\widetilde{x} \in X \setminus \{x\}$ $(\widetilde{x} \in E)$, где $\neg x \leftrightarrow X \setminus \{x\}$ $(e \leftrightarrow E)$, $x \in X$.

Правдоподобия и доверия истинности следствий неопределенной модели. Пусть $\varphi(\cdot) : X \to Y$ — некоторая функция, задающая н.э. $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$ со значениями в пространстве $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}})$, в котором $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(A) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \in A) = \sup\limits_{y \in A} t^{\widetilde{y}}(y)$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \in A) = \inf\limits_{y \in Y \setminus A} \widehat{t^{\widetilde{y}}}(y)$, $A \in \mathcal{P}(Y)$, где

$$t^{\widetilde{y}}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} = y) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) = y) = \sup_{\substack{x \in X, \\ \varphi(x) = y}} t^{\widetilde{x}}(x), \tag{3}$$

$$\widehat{t^{\widetilde{y}}}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \neq y) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \neq y) = \inf_{\substack{x \in X, \\ \varphi(x) = y}} \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x), \tag{4}$$

— правдоподобие и доверие истинности субъективных суждений м.-и., согласно которым $\varphi(\widetilde{x}) = y$ и, соответственно, $\varphi(\widetilde{x}) \neq y$, $y \in Y$.

Пусть $A^{\cdot} : X \to \mathcal{P}(Y)$ и $A_{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$ — взаимно обратные отображения: $\forall x \in X$ $A^x = \{y \in Y, x \in A_y\}$, $\forall y \in Y$ $A_y = \{x \in X, y \in A^x\}$. Назовем неопределенным множеством [1], заданным на $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ со значениями в $\mathcal{P}(Y)$ образ $A^{\widetilde{x}}$ н.э. $\widetilde{x}$, его индикаторными функциями одноточечного покрытия назовем

[1] «координата» $a \in [0,1]$ в $\mathcal{L}$, $\widehat{\mathcal{L}}$ представлена «координатой» $\gamma(a) \in [0,1]$ в $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma\widehat{\mathcal{L}}$

$$t^{A^{\widetilde{x}}}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Pl}^{\widetilde{x}}(y \in A^{\widetilde{x}}) \equiv \text{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A_y), \quad \widehat{t}^{A^{\widetilde{x}}}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Bel}^{\widetilde{x}}(y \in A^{\widetilde{x}}) \equiv \text{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A_y). \quad (5)$$

В данном случае $t^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ и $\widehat{t}^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ — правдоподобие и доверие истинности субъективного суждения, согласно которому $y \in A^{\widetilde{x}}$ или, что эквивалентно, $\widetilde{x} \in A_y$.

Эти факты позволяют м.-и., исходя из модели $(X, \mathcal{P}(X), \text{Pl}^{\widetilde{x}}, \text{Bel}^{\widetilde{x}})$ н.э. $\widetilde{x}$, определить правдоподобия и доверия истинности *любых* субъективных суждений о *любых* характеристиках объекта исследования, обусловленных его моделью $M(\widetilde{x})$. Для любой неопределенной характеристики объекта $\varphi(\widetilde{x}) = \Phi(M(\widetilde{x}))$ и $A^{\widetilde{x}} = F(M(\widetilde{x}))$ правдоподобия и доверия истинности субъективных суждений м.-и., согласно которым $\varphi(\widetilde{x}) = y$, $\varphi(\widetilde{x}) \neq y$ и $y \in A^{\widetilde{x}}$, $y \in Y$ определены в (3), (4) и в (5).

Модели полного незнания и полного знания модели объекта исследования. Случай полного незнания модели $M(x), x \in X$, определяется инвариантными относительно выбора шкал $\gamma\mathcal{L}$ и $\gamma\widehat{\mathcal{L}}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, распределениями $t^{\widetilde{x}}(x) = \text{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x) = 1$ и $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) = \text{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x) = 0$, $x \in X$, согласно которым все значения $\widetilde{x} = x$, $x \in X$, равноправдоподобны и любому неравенству $\widetilde{x} \neq x$ доверять нельзя. В этом случае *такое же распределение в* (3), (4) *будет иметь любая функция* $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$, *а именно* $t^{\widetilde{y}}(y) = 1$, $\widehat{t}^{\widetilde{y}}(y) = 0$, $y \in Y$.

В случае полного знания $t^{\widetilde{x}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_0, \\ 0, & \text{если } x \neq x_0 \end{cases}$, $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = x_0, \\ 1, & \text{если } x \neq x_0 \end{cases}$, $x \in X$, то есть x_0 — единственное правдоподобное значение параметра $x \in X$ модели $M(x)$ и любому другому значению доверять нельзя. В этом случае *такое же распределение* в (3), (4) *будет иметь любая функция* $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$, *а именно* $t^{\widetilde{y}}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y = \varphi(x_0), \\ 0, & \text{если } y \neq \varphi(x_0) \end{cases}$, $\widehat{t}^{\widetilde{y}}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = \varphi(x_0), \\ 1, & \text{если } y \neq \varphi(x_0) \end{cases}$, $y \in Y$. Это означает, что м.-и. в любом случае может предложить модель $(X, \mathcal{P}(X), \text{Pl}^{\widetilde{x}}, \text{Bel}^{\widetilde{x}})$.

Интегрирование относительно мер правдоподобия Pl **и доверия** Bel**.** Обозначим $\mathcal{L}(X)$ $(\hat{\mathcal{L}}(X))$ — класс функций $g(\cdot): X \to [0,1] (\hat{g}(\cdot): X \to [0,1])$ с операциями $(g_1 * g_2)(x) = g_1(x) * g_2(x)$ $((\hat{g}_1 \hat{*} \hat{g}_2)(x) = \hat{g}_1(x) \hat{*} \hat{g}_2(x))$, $x \in X$, $* \in \{+, \times\} (\hat{*} \in \{\hat{+}, \hat{\times}\})$. Далее $\mathcal{L}(X)$ и $\hat{\mathcal{L}}(X)$ — классы *всех* функций с операциями сложения и умножения $+$, $\times$ и $\widehat{+}$, $\widehat{\times}$ и отношениями $\leqslant$ и $\widehat{\leqslant}$ соответственно.

Определение 1. pl-*(*bel-*) интегралом называется функция* $\text{pl}(\cdot): \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ *(*$\text{bel}(\cdot): \hat{\mathcal{L}}(X) \to \hat{\mathcal{L}}$*), однородная:* $\forall a \in [0,1]$, $\forall g(\cdot): X \to \mathcal{L}$ $\text{pl}((a \times g)(\cdot)) = a \times \text{pl}(g(\cdot))$, *где в левой части равенства* $a(\cdot): X \to \mathcal{L}$, $a(x) = a, x \in X$, *(*$\forall a \in [0,1]$, $\forall g(\cdot): X \to \hat{\mathcal{L}}$ $\text{bel}((a \widehat{\times} g)(\cdot)) = a \widehat{\times} \text{bel}(g(\cdot))$*), и* вполне *аддитивная:* $\forall g_j(\cdot): X \to \mathcal{L}, j \in J$, $\text{pl}(\underset{j \in J}{+} g_j(\cdot)) = \underset{j \in J}{+} \text{pl}(g_j(\cdot))$ *(*$\forall g_j(\cdot): X \to \hat{\mathcal{L}}, j \in J$, $\text{bel}(\underset{j \in J}{+} g_j(\cdot)) = \underset{j \in J}{+} \text{bel}(g_j(\cdot))$*), где J — произвольное множество индексов.*

Меры правдоподобия $\text{Pl}(\cdot): \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ и доверия $\text{Bel}(\cdot): \mathcal{P}(X) \to \hat{\mathcal{L}}$) определены равенствами $\forall E \in \mathcal{P}(X)$ $\text{Pl}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \text{pl}(\chi_E(\cdot))$ и $\text{Bel}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{bel}(\chi_A(\cdot))$, где $\chi_E(\cdot)$, $\hat{\chi}_E(\cdot)$ — индикаторные функции E, $\chi_E(x) = \hat{\chi}_E(x) = 1, x \in E$, $\chi_E(x) = \hat{\chi}_E(x) = 1, x \in X \setminus E$. Справедлива следующая

Теорема 1. *[1]* $\forall\, \text{pl}(\cdot): \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ $\exists t(\cdot): X \to \mathcal{L}$ $\forall g(\cdot)$*:* $\text{pl}(g(\cdot)) = \sup\limits_{x \in X} \min\{t(x), g(x)\} \equiv \underset{x \in X}{+}(t(x) \times g(x)) = \text{pl}_t(g(\cdot))$*,* $\forall\, \text{bel}(\cdot): \hat{\mathcal{L}}(X) \to \hat{\mathcal{L}}$ $\exists \widehat{t}(\cdot): X \to \widehat{\mathcal{L}}$ $\forall \widehat{g}(\cdot): X \to \widehat{\mathcal{L}}$ $\text{bel}(\widehat{g}(\cdot)) = \inf\limits_{x \in X} \max(\widehat{t}(x), \widehat{g}(x)) \equiv \underset{x \in X}{\widehat{+}}(\widehat{t}(x) \widehat{\times} \widehat{g}(x)) = \text{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{g}(\cdot))$.

Из определения pl- и bel- интегралов и теоремы 1 следуют равенства (1), (2) и полная аддитивность мер Pl_t и $\text{Bel}_{\widehat{t}}$.

Заключение. Рассмотрен метод математического моделирования субъективных суждений, основанный на теории мер правдоподобия и доверия и интегрирования относительно этих мер [1], позволивший преодолеть многие проблемы, свойственные известным методам математического моделирования субъективных суждений, в частности: 1) для формулировки модели субъективных суждений исследователю достаточно упорядочить значения правдоподобий элементарных высказываний (как и в рамках формализма модальной логики [6]), а не оценивать их численно, как предлагается делать на основе известных методов [7-10]; 2) модель «полного незнания» свойств модели объекта исследования, как и в теории Демпстера-Шеффера [9], в субъективной логике [10] и в нечеткой модальной логике [6], не зависит от модели измерений и от мощности множества элементарных высказываний, в отличие от моделей «полного незнания» в байесовском подходе [7, 8]; 3) модель «полного знания» свойств модели объекта исследования и модель любого следствия модели «полного знания» является моделью «полного знания», как и для известных методов [7-10]; 4) в рассмотренном методе, в отличие от известных методов, модель любого следствия модели «полного незнания» является моделью «полного незнания»; 5) разработаны новые методы эмпирического построения и верификации модели субъективных суждений [5], отличные от известных методов в байесовском подходе [7, 8], в теории Демпстера-Шеффера [9], в субъективной логике [10].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований(проект 14-07-00441).

Литература

1. Пытьев Ю. П. Моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, N4. – С. 102-125. – doi: 10.1134/S2070048213060094.

2. Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, приложения – 2 изд. – М. : Физматлит, 2015.

3. Прикладные нечеткие системы. Сб. под ред. Т.Тэрано, К.Асаи, М.Сугено. М.:Мир, 1993.

4. Итоги рассмотрения факторов неопределенности и неясности в инженерном искусстве. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. Ред. Р.Ягер. Радио и связь. М.: 198

5. Балакин Д.А., Нагорный Ю.М., Пытьев Ю.П. Эмпирическая верификация, восстановление и коррекция субъективной модели.//Всероссийская конф. «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы». М.: 2014.

6. Bhavsar V.C., Mironov A.M. Fuzzy modal logics.//Proceedings of Workshop on Multi-Valued Logic Programming and Applications, MVLPA 2006, Seattle, WA, 2006, pp. 73-88.

7. Cowell R. G., Dawid A. P., Lauritzen S. L. and Spiegelhalter D. J. (1999) Probabilistic Networks and Expert Systems. New-York: Springer-Verlag.

8. Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В. Байесовские сети. Логико-вероятностный подход. – М.: Наука, 2006. – 608 с.

9. Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence. – Princeton University Press, 1976.

10. Josang A. Multi-Agent Preference Combination using Subjective Logic. 11th Workshop on Preferences and Soft Constraints (SofT'11), Perugia, September 2011.

Секция 7. Приложения математики и информатики

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ РАЗЛИЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

А.Г. Бодров[1], А.А. Никитин[2]

[1]*НИУ Высшая школа экономики, Москва, Россия*
[2]*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

e-mail: [1]`drinob@gmail.com`, [2]`nikitin@cs.msu.ru`

Аннотация: В данной статье рассмотрены численные методам решения интегрального уравнения, описывающего равновесное состояние в биологической пространственной модели. Использованные численные методы - метод Нистрема и метод рядов Неймана (последовательных приближений) - дают достаточно точное решение. В статье предложен способ перехода от многомерного уравнения к одномерному в радиально-симметричном случае, а так же предложены явные формулы для ядра $\overline{\mathfrak{M}}(\ell, r)$ в случае нормальных ядер $m(\xi), w(\xi)$.

Ключевые слова: интегральные уравнения, математическая биология, численные методы.

STUDY OF THE EQUILIBRIUM INTEGRAL EQUATION IN SPACES OF DIFFERENT DIMENSIONS

Abstract: In this article we consider the numerical solution of an integral equation, describing an equilibrium in a spatial biological model. Used numerical methods produce an exact approximation in one-dimensional case. Also in this article proposed a way to reduce multi-dimensional case to one-dimensional in radial-symmetric case, and given an explicit formula for kernel $\overline{\mathfrak{M}}(\ell, r)$ in the case of normal kernels $m(\xi), w(\xi)$.

Keywords: integral equations, mathematical biology, numerical methods.

Введение

Данная статья посвящена изучению невырожденной особой точки (равновесия) системы интегродифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} N = (b-d)\, N - d' \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(\xi) C(\xi) d\xi, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} C(\xi) = Nbm(\xi) + b\int\limits_{\mathbb{R}^n} m(\xi') C(\xi+\xi') d\xi' - \big(d + d' w(\xi)\big) C(\xi) - \frac{d' C(\xi)}{N} \int\limits_{\mathbb{R}^n} w(\xi') C(\xi') d\xi'. \end{cases}$$

Здесь $N(t), C(t,\xi)$-неизвестные функции[1], b, d, d'-неотрицательные константы-параметры модели, а $w(\xi), m(\xi)$-плотности вероятностей, которые так же являются

[1]Аргумент t далее опускаем.

параметрами модели. Данная система описывает динамику одновидовой пространственной биологической модели, предложенной Ульфом Дикманом и Ричардом Лоу (Ulf Dieckmann, Richard Law) в работах **[1]**, **[2]**.

Рассмотрим равновесную систему уравнений, т.е. систему при $\frac{\partial}{\partial t}N(t) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial t}C(t,\xi) \equiv 0$ и, для сокращения записей, перейдем к нормированной ожидаемой попарной плотности $\tilde{C}(\xi) = C(\xi)/N^2$. Нетривиальное решение первого уравнения (являющегося пространственным аналогом логистического уравнения) можно легко выразить в явном виде: $N = (b-d)\cdot\left(d'\int\limits_{\mathbb{R}^n} w(\xi)\tilde{C}(\xi)d\xi\right)^{-1}$. Теперь выпишем равновесное уравнение на $\tilde{C}(\xi)$ подставив в него равновесное N:

$$\big(b + d'w(\xi)\big)\tilde{C}(\xi) = \frac{bd'}{b-d}\int\limits_{\mathbb{R}^n} w(\xi)\tilde{C}(\xi)d\xi m(\xi) + b\int\limits_{\mathbb{R}^n} m(\xi')\tilde{C}(\xi+\xi')d\xi' \tag{1}$$

В данной работе мы будем искать решение этого уравнения (которое и будем называть уравнением равновесия попарной плотности биологических видов) в классе функций $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Можно доказать (см. **[3]**, **[4]**), что при $d \neq 0$ не существует нетривиального решения данного уравнения. Поэтому, положим в дальнейшем $d = 0$.

Метод Нистрема.

Пусть далее дано уравнение $Af = \gamma$, где A – линейный (интегральный) оператор, γ – известная функция, f – неизвестная функция. Тогда можно дискретно аппроксимировать оператор A и функцию γ на некоторой сетке G и получить систему линейных алгебраических уравнений $A_G f_G = \gamma_G$, которую можно решить явно (например, используя LU-разложение).

Для аппроксимации несобственного интеграла, который мы будем рассматривать в смысле главного значения, вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ на сетке G следует воспользоваться тем, что он представим в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{L\to\infty}\int\limits_{-L}^{L} f(x)dx,$$

что подразумевает, что при достаточно больших L выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \int\limits_{-L}^{L} f(x)dx\right| < \varepsilon,$$

для любого, сколь угодно малого, $\varepsilon > 0$. После “округления” несобственного интеграла - $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \approx \int\limits_{-L}^{L} f(x)dx$, можно приблизить получившийся собственный интеграл с помощью квадратурных формул:

$$\int\limits_{-L}^{L} f(x)dx \approx \sum_{x_i \in G} w_i f(x_i),$$

где w_i - веса точек сетки x_i. Саму сетку в таком случае следует брать из соображений оптимального покрытия отрезка $[-L, L]$.

Небольшую проблему в данном случае представляет свертка, как интеграл зависящий от параметра, поскольку приближение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} m(\xi')\tilde{C}(\xi-\xi')d\xi' \approx \int\limits_{-L}^{L} m(\xi')\tilde{C}(\xi-\xi')d\xi'$$

может оказаться неверным при ξ близком к L. Однако, в этом случае можно воспользоваться тем, что $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \tilde{C}(\xi) = 1$, и приблизить свертку как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} m(\xi')\tilde{C}(\xi-\xi')d\xi' \approx \int\limits_{-L}^{L} m(\xi')\left[\tilde{C}(\xi-\xi') - 1\right] d\xi' + \int\limits_{-\infty}^{\infty} m(\xi')d\xi'.$$

С использованием данного метода и квадратур Ньютона-Котеса первого порядка (метода трапеций) на наборе тестовых функций, предложенных в **[3]**, была достигнута относительная поточечная ошибка в 0.5% **[5]**. При увеличении порядка квадратур наблюдалось увеличение ошибки.

Многомерный случай

Сложность вычисления решения методом Нистрема - $O(n^3)$, где n - число точек на сетке G. Поэтому использование метода Нистрема для решения многомерной задачи является неэффективным, поскольку для получения приемлимой точности требуется экспоненциально увеличивать число точек на сетке.

Сложность решения методом Нистрема по памяти - $O(n^2)$, что так же затрудняет вычисления. Однако здесь можно воспользоваться описанным в **[5]** методом рядов Неймана $\Big($подразумевающим поиск решения в виде $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A^i\gamma\Big)$, фактически представляющим собой метод Якоби (простых итераций), неявно примененный к матрице системы A_G. Однако, сходимость данного метода применительно к уравнению (1) в многомерном случае все равно оставляет желать лучшего.

Можно вспомнить, что все функции в задаче - радиально-симметричные. Это позволяет доказать следующее утверждение:

Лемма 1. *Если функция $\tilde{C}(\vec{x})$ является решением* (1)*, то радиально-симметричная функция*

$$\widehat{C}(\vec{x}) = \frac{1}{S_n(|\vec{x}|)} \oint\limits_{|\vec{x}'|=|\vec{x}|} \tilde{C}(\vec{x}')d\vec{x}',$$

где $S_n(|\vec{x}|) = \oint\limits_{|\vec{x}'|=|\vec{x}|} d\vec{x}' = \dfrac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}|\vec{x}|^{n-1}$-площадь поверхности n-мерной сферы радиуса $|\vec{x}|$ так же является решением (1)*.*

Таким образом можно совершить переход к многомерной сферический системе координат в уравнении (1) и получить уравнение:

$$(b + d'\omega(r))\,\tilde{C}(r) = b\int\limits_0^\infty \overline{\mathfrak{M}}(\ell, r)\,\tilde{C}(\ell)d\ell + d'm(r)\int\limits_0^\infty \mathbb{J}(\ell)\,\omega(\ell)\,\tilde{C}(\ell)\,d\ell,$$

где $\mathbb{J}(\ell)$ - якобиан со взятыми интегралами по переменным, соответствующим углам, $\overline{\mathfrak{M}}(\ell, r)$ - функция, полученная в результате преобразования якобиана, домноженного на $m(\xi - \xi')$.

В случае если $m(\xi)$ - плотность многомерного нормального распределения с диагональной матрицей ковариации с σ_m^2 на диагонали, ядро $\overline{\mathfrak{M}}(\ell, r)$ в двумерном случае будет иметь вид:

$$\mathfrak{M}(\ell, r) = \frac{1}{2\pi\sigma_m}\,e^{-\frac{r^2+\ell^2}{2\sigma_m^2}}\,\mathfrak{I}_0\left(\frac{\ell r}{\sigma_m^2}\right).$$

Здесь $\mathfrak{I}_0\left(\frac{\ell r}{\sigma_m^2}\right)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода.

В трехмерном случае $\overline{\mathfrak{M}}(\ell, r)$ будет иметь вид:

$$\overline{\mathfrak{M}}(\ell, r) = \frac{(2\sigma_m)^{\frac{1}{2}}}{(\pi)^{\frac{1}{2}} r\ell}\,e^{-\frac{r^2+\ell^2-2rl}{2\sigma_m^2}}.$$

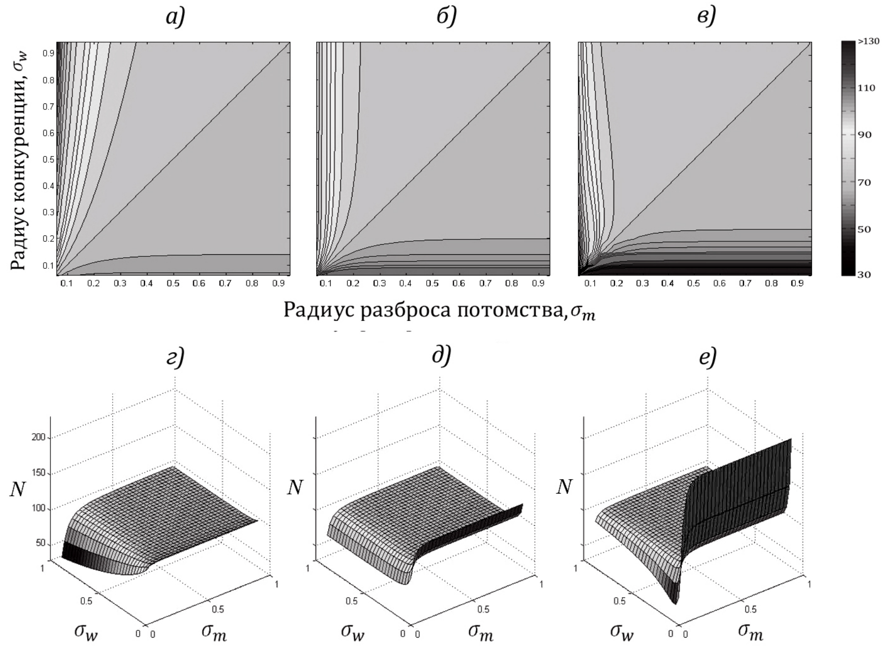
В данной модели наблюдаются два хорошо известных биологам эффекта - кластеризация (clustering) и перерасброс (overdispersion).

Первый эффект сводится к тому, что при малых значениях σ_m — дисперсии распределения $m(\xi)$ — и больших значениях σ_w — дисперсии распределения $w(\xi)$ — наблюдается склонность популяции к жизни в маленьких группах-кластерах, внутри которых наблюдается высокая конкуренция, что приводит к снижению численности популяции N и ярко выраженному "пику" в области нуля у попарной корреляции $C(\xi)$.

Второй эффект вызван тем, что при $\sigma_m \gg 0$, $\sigma_w \approx 0$ выживают преимущественно потомки на больших расстояниях, что приводит к практически отсутствующей конкуренции с потомками, увеличению численности популяции N и ярко выраженной "яме" в области нуля у попарной корреляции $C(\xi)$.

На представленном изображении можно заметить, что эффект переразброса становится более ярко выражен при увеличении размерности, в то время как эффект кластеринга проявляет себя по-разному. Для одномерного случая (рисунки *а)*, *г)*) можно эмпирически заметить склонность к вымиранию вида при увеличении σ_w в случае кластеризации, в двумерном случае (рисунки *б)*, *д)*) можно заметить стремление к асимптоте сверху, в то время как в трехмерном случае (рисунки *в)*, *е)*) заметно восстановление популяции после резкого ее уменьшения в самом начале.

Авторы статьи предполагают, что подобное поведение эффекта кластеризации вызвано тем, что плотность многомерного нормального распределения все в большей степени "уходит" от 0 при увеличении размерности. Таким образом в трехмерном случае можно предположить, что при увеличении σ_w индивидуум начинает конкурировать не с соседями по кластеру, а с находящимися на большем расстоянии индивидуумами.



Модель так же зависит от значений параметров d' и b, однако, можно легко заметить, что после деления уравнения (1) на b он будет входить в него только в составе d'/b, и таким образом можно рассматривать только этот параметр. Его увеличение приводит к тому, что вышеописанные эффекты становятся более ярко выраженными.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых - кандидатов наук МК-6108.2015.9

Литература

1. Law R., Dieckmann U. Moment approximations of individual-based models. The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity. Cambridge:Cambridge University Press, 2000. P.252–270.

2. Law R., Dieckmann U. Moment approximations of individual-based models. The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity. Cambridge:Cambridge University Press, 2000. P.412–455.

3. Данченко В.И., Давыдов А.А., Никитин А.А. Об интегральном уравнении для стационарных распределений биологических сообществ // Проблемы динамического управления. Сборник научных трудов. Выпуск 3. М.:ВМиК МГУ, 2009. С.15–29.

4. Давыдов А.А., Данченко В.И., Звягин М.Ю. Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества // Особенности и приложения, Тр. МИАН. М.:МАИК. 2009. **267**. С.46–55.

5. Бодров А. Г., Никитин А. А. Качественный и численный анализ интегрального уравнения, возникающего в модели стационарных сообществ // Доклады Академии Наук. 2014. **455** N 5. С.507–511.

УПРАВЛЕНИЕ СТРУКТУРОЙ МАРКОВСКОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В.А. Каштанов[1], О.Б. Зайцева[2]

[1] *Высшая школа экономики (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
[2] *Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет, Москва, Россия*

e-mail: [1]`vakashtanov@hse.ru`, `vakashtan@yandex.ru`, [2]`o_zaiceva@mail.ru`

Аннотация: В работе строится оптимальная стратегия управления системой массового обслуживания с переменной структурой, которая описывается управляемым полумарковским процессом с конечным множеством состояний. Приведен алгоритм решения задачи и результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: система массового обслуживания, стратегия, управление, рандомизация, управляемый полумарковский процесс, детерминированная стратегия, система с переменной структурой.

MANAGEMENT STRUCTURE OF MARKOV QUEUING SYSTEM

Abstract: We construct the optimal strategy for management system with variable structure, which is described by a controlled semi-Markov process with a finite set of states. An algorithm for solving the problem and the results of numerical experiments.

Keywords: queueing system, strategy, management, randomization, controlled semi-markov process, deterministic strategy, system with variable structure.

В отличие от классических моделей массового обслуживания [2,4] в рассматриваемой модели реализуется динамическое изменение числа работающих каналов обслуживания. Исследуется управляемая система массового обслуживания, на вход которой поступает Пуассоновский поток требований с параметром λ, а длительность обслуживания требований имеет экспоненциальное распределение с параметром μ.

Обозначим максимальное возможное число задействованных обслуживающих приборов n, $n \geqslant 1$, и N, $N \geqslant 1$, число постоянно задействованных мест для ожидания.

Процедура выбора числа работающих каналов предполагает решение этого вопроса в моменты изменения числа требований, находящихся в системе, либо в момент потери требования.

Пусть $t_0 = 0,\ t_k, k \geqslant 1$, последовательность соседних моментов поступления заявок и их ухода из системы и предположим, что обслуживаемые в момент t_k требования не могут перейти в очередь или уйти из системы, и в системе не может быть свободных задействованных приборов. Если момент t_k есть момент ухода требования из системы, то освободившийся канал занимается требованием из очереди при ее наличии и выключается при отсутствии требований в очереди.

Обозначим через $i,\ 0 \leq i \leq n$, число требований, находящихся на обслуживании (число задействованных каналов) и через $j,\ 0 \leq j \leq N$, число заявок, находящихся в очереди. В момент $t_k + 0$ принимается рандомизированное решение о числе каналов, которые будут функционировать в дальнейшем, то есть решение о том, сколько заявок перевести из очереди на обслуживание. Решение о том, что далее будут функционировать $k,\ 0 \leq k \leq n-i$, новых каналов, принимается с вероятностью $0 \leq \gamma_{ij}(k) \leq 1$. Для введенных вероятностей справедливо условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{min(j,n-i)} \gamma_{ij}(k) = 1. \tag{1}$$

Если момент t_k есть момент поступления требования в систему, то предполагаем, что поступившее требование теряется, если нет мест в очереди и занимает одно из свободных мест в очереди, если таковые есть.

Качество функционирования характеризуется аддитивным функционалом накопления, который определяется константами: c_0 - прибыль за одно обслуженное требование; c_1 - потери за один час работы одного задействованного канала; c_2 - плата за один час пребывания в очереди требования; c_3 - плата за потерю одного требования.

Таким образом, получаем процесс изменения во времени числа заявок $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ на обслуживании и в очереди соответственно (множество двумерных траекторий случайного процесса), и на множестве ступенчатых траекторий выше введенные константы определяют функционал - математическое ожидание накопленного эффекта (прибыль) $S(t)$ за время t. Наконец, в моменты $t_k + 0$ принимаются решения об изменении структуры системы массового обслуживания.

Описанная выше схема полностью укладывается в модель дискретного управления полумарковским процессом [1,3], для которой справедливы следующие утверждения: $\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = S$, экстремум этого функционала S достигается на вырожденных распределениях и

$$S = \frac{\sum_{j\in E} s_j \pi_j}{\sum_{j\in E} m_j \pi_j}, \tag{2}$$

где E множество состояний управлямого процесса, s_j математическое ожидание накопленного эффекта за время непрерывного пребывания в состоянии j, m_j математическое ожидание времени непрерывного пребывания в состоянии j, π_j стационарное распределение вложенной цепи Маркова (значение исследуемого процесса в моменты изменения состояний).

Определим эти характеристики для описанного выше управляемого процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$.

Описание стратегии управления. Для каждого состояния $(i, j) \in E$ пространство управлений $U_{i,j}$ определяется включениями $U_{i,j} = \{k : k \in [0, 1, ..., min(n-i, j)]\}$, а стратегии определяются вероятностными распределениями $\gamma_{ij}(k)$.

Определим множество вырожденных стратегий, среди которых отыскивается оптимальная стратегия,

$$\gamma_{ij}(m) = 1,\ m = k,\ \gamma_{ij}(m) = 0,\ m \neq k,\ k \in [0, 1, ..., min(n-i, j)].$$

Другими словами, фиксированная вырожденная стратегия есть вектор размерности $K = (n + 1)(N + 1)$ (число состояний исследуемого процесса), каждая компонента которого определяет решение, которое принимается в соответствующем состоянии с вероятностью единица.

Так как в состоянии (i, j) число решений равно $min(n - i, j) + 1$, то число вырожденных стратегий равно

$$M = \prod_{0\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq N} \{min(n-i, j) + 1\} \tag{3}$$

В дальнейшем будем выписывать харектеристики управляемого процесса при некоторой фиксированной вырожденной стратегии управления $k = k_{(i,j)}, (i,j) \in E$.

Описание объекта управления. Объектом управления будет двумерный Марковский процесс $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$, где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ число обслуживаемых заявок и число заявок в очереди в момент t.

Множество состояний $(i,j) \in E$ определяется неравенствами $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq N$. Число состояний исследуемого процесса равно

$$K = (n+1)(N+1). \tag{4}$$

Полумарковская матрица процесса $\xi(t)$ определяются равенствами

$$Q_{(i,j)(i+k,j-k+1)}(t,k) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu(i+k)}(1 - e^{-(\lambda+\mu i)t}),$$

$$Q_{(i,j)(i+k,j-k-1)}(t,k) = \frac{\mu(i+k)}{\lambda + \mu(i+k)}(1 - e^{-(\lambda+\mu i)t}),$$

$$0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq N,\ k \in [0, 1, ..., min(n-i, j)],\ j-k \neq N,\ j-k \neq 0, \tag{5}$$

$$Q_{(i,N)(i,N)}(t,0) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu i}(1 - e^{-(\lambda+\mu i)t}),$$

$$Q_{(i,N)(i,N-1)}(t,0) = \frac{\mu i}{\lambda + \mu i}(1 - e^{-(\lambda+\mu i)t}),$$

остальные элементы полумарковской матрицы равны нулю.

Поясним равенства (5). Если число работающих операторов равно i и принято решение подключить еще k операторов, то начинают обслуживание $i+k$ требований и в очереди остается $j-k$ требований. Если следующий Марковский момент, произошедший до момента t, есть момент прихода следующего требования, то исследуемый процесс перейдет до момента t в состояние $(i+k), (j-k+1)$. Если следующий Марковский момент, произошедший до момента t, есть момент ухода требования из системы, то исследуемый процесс перейдет до момента t в состояние $(i+k), (j-k-1)$, поскольку по предположению при освобождении обслуживающего прибора из очереди одно требование переходит на обслуживание, если очередь не пуста. Если очередь пуста $j-k=0$, то переход в состояние $(i+k), (j-k-1)$ равна нулю. Если все места для ожидания заняты в состоянии (i,N) и принято решение $k=0$, то пришедшее требование потеряется и с положительной вероятностью процесс переходит в состояния (i,N) и $(i-1,N)$. Вероятности этих событий выписаны в равенствах (5).

В дальнейшем при построении матрицы переходных вероятностей вложенной цепи Маркова используем равенство

$$\lim_{t\to\infty} Q_{(i,j)(m,l)}(t,k) = p_{(i,j)(m,l)}(k).$$

Используя выражения (5) для полумарковского ядра, получаем матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова

$$p_{(i,j)(i+k,j-k+1)}(t,k) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu(i+k)},\ p_{(i,j)(i+k,j-k-1)}(t,k) = \frac{\mu(i+k)}{\lambda + \mu(i+k)},$$

$$0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq N,\ k \in [0, 1, ..., min(n-i, j)],\ j-k \neq N,\ j-k \neq 0, \tag{6}$$

$$p_{(i,N)(i,N)}(t,0)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu i},\ p_{(i,N)(i,N-1)}(t,0)=\frac{\mu i}{\lambda+\mu i},$$

остальные элементы полумарковской матрицы равны нулю.

Заметим, что в этой матрице в каждой строке будет не более двух положительных элементов.

Если в состоянии $(i,j)\in E$ принимается решение $k\in U_{i,j}$, то $i+k$ требований обслуживается и $j-k$ требований стоят в очереди. Тогда математические ожидания $R_{(i,j)(m,l)}(t,k)$ накопленного эффекта за время t при условии, что процесс из состояния (i,j) перешел в состояние (m,l) и было принято решение k, определяются равенствами

$$R_{(i,j)(i,j+1)}(t,k)=c_1(i+k)t+c_2(j-k)t,$$

$$R_{(i,j)(i,j-1)}(t,k)=c_0+c_1(i+k)t+c_2(j-k)t,$$

$$0\le i\le n,\ 0\le j\le N,\ k\in[0,1,...,min(n-i,j)],\ j-k\ne N, \tag{7}$$

$$R_{(i,N)(i,N)}(t,0)=c_1 i+c_2Nt+c_3,$$

$$R_{(i,N)(i,N-1)}(t,0)=c_0+c_1 i+c_2Nt,$$

Остальные математические ожидания вычислять не надо, поскольку соответствующие элементы полумарковского ядра равны нулю.

Математические ожидания $s_{(i,j)}$ дохода за время непрерывного пребывания процесса в состоянии $(i,j)\in E$ определяются равенствами

$$s_{(i,j)}=\sum_{(m,l)\in E}\sum_{k\in U_{i,j}}\int_0^\infty R_{(i,j)(m,l)}(x,k)dQ_{(i,j)(m,l)}(x,k)\gamma_{(i,j)}(k)$$

или при фиксированной вырожденной стратегии получаем

$$s_{(i,j)}(k)=\sum_{(m,l)\in E}\int_0^\infty R_{(i,j)(m,l)}(x,k)dQ_{(i,j)(m,l)}(x,k)$$

С учетом соотношений (5) и (7) получаем для фиксированной вырожденной стратегии

$$s_{(i,j)}(k)=\frac{c_0\mu(i+k)+c_1(i+k)+c_2(j-k)}{\lambda+\mu(i+k)},$$

$$0\le i\le n,\ 0\le j\le N,\ k\in[0,1,...,min(n-i,j)],\ j-k\ne N, \tag{8}$$

$$s_{(i,N)}(0)=\frac{c_0\mu i+c_1 i+c_2N+c_3\lambda}{\lambda+\mu i}.$$

Математические ожидания $m_{(i,j)}$ времени непрерывного пребывания процесса в состоянии (i,j) при фиксированной вырожденной стратегии определяются равенствами

$$m_{(i,j)}(k)=\int_0^\infty tdQ_{(i,j)(i+k,j-k+1)}(t,k)+\int_0^\infty tdQ_{(i,j)(i+k,j-k-1)}(t,k)=\frac{1}{\lambda+\mu(i+k)},$$

$$0\le i\le n,\ 0\le j\le N,\ k\in[0,1,...,min(n-i,j)],\ j-k\ne N,\ j-k\ne 0, \tag{9}$$

$$m_{(i,N)}(0)=\int_0^\infty tdQ_{(i,N)(i,N)}(t,0)+\int_0^\infty tdQ_{(i,j)(i,N-1)}(t,0)=\frac{1}{\lambda+\mu N}.$$

Наконец, выпишем систему алгебраических уравнений уравнений для стационарных вероятностей $\pi_{i,j}$

$$\pi_{(i,j)} = \sum_{(s,l)\in E} \pi_{(s,l)} p_{(s,l)(i,j)}(k_{(s,l)}), \sum_{(i,j)\in E} \pi_{(i,j)} = 1, \ k_{(s,l)} = 0, 1, ..., min(n-s, l). \qquad (10)$$

Подставляем решение системы уравнений (10) и выражения (9) и (8), вычисленные для фиксированной вырожденной стратегии $k = k_{(i,j)}, (i, j) \in E$, в соотношение (2) и получаем значение целевого функционала.

Перебирая значения целевого функционала для всех M вырожденных стратегий $\{k_{(i,j)}, (i, j) \in E\}$ определяем максимум целевого функционала $S(k_{(i,j)}, (i.j) \in E)$ и соответствующую этому максимуму оптимальную стратегию $\{k^{(0)}_{(i,j)}, (i, j) \in E\}$.

ВЫВОД. Наблюдая в момент ухода или прихода заявки состояние (i, j) , где i число обслуживаемых заявок и j число заявок в очереди, нужно принимать решение дополнительно подключить еще $k^{(0)}_{(i,j)}$ операторов, то есть перевести $k^{(0)}_{(i,j)}$ заявок из очереди на обслуживание.

Алгоритм решения задачи.

Для каждой вырожденной стратегии:

1. Вычисляется набор математических ожиданий $m_{(i,j)}$ времени непрерывного пребывания процесса в состоянии (i, j) (9);
2. Вычисляется набор математических ожиданий $s_{(i,j)}$ дохода за время непрерывного пребывания процесса в состоянии $(i, j) \in E$ (8);
3. Вычисляются элементы $p_{(i,j),(m,l)}$ матрицы переходных вероятностей (6);
4. Определяется решение $\pi_{(i,j)}$ системы алгебраических уравнений (10);
5. Вычисляется значение целевого функционала (2).

Пример 1. *Приведем результаты расчета оптимальной стратегии управления для следующих параметров, определяющих структуру системы массового обслуживания,* $n = 3$, $N = 2$. *Число состояний, определяемое равенством* (4), *равно* $K = 12$. *Так как в дальнейшем необходимо выписывать матрицы, для которых установлен порядок строк и столбцов, установим порядок в двумерном массиве состояний* $\{(i, j), 0 \le i \le 3, 0 \le j \le 2\}$, *положив*

$$1 = (0, 0), 2 = (0, 1), 3 = (0, 2), 4 = (1, 0), 5 = (1, 1), 6 = (1, 2),$$

$$7 = (2, 0), 8 = (2, 1), 9 = (2, 2), 10 = (3, 0), 11 = (3, 1), 12 = (3, 2).$$

Соотношение $k \in [0, 1, ..., min(n-i, j)]$ определяет множество решений в состоянии (i, j). Тогда, используя новую кодировку состояний, можно утверждать, что для состояний $i = 1, 4, 7, 10, 11, 12$ множества решений состоят из одного элемента $k = 0$, для состояний $i = 2, 5, 8, 9$ множества решений состоят из двух элеменов $k = 0, 1$, для состояний $i = 3, 6$ множества решений состоят из трех элементов $k = 0, 1, 2$. Таким образом, для рассматриваемого примера имеем $M = 144$ вырожденных стратегии (3), каждая из которых выражается 12-разрядным вектором с компонентами 0,1,2. Далее заметим, что анализ структуры матрицы переходных вероятностей (6) показывает: для всех вырожденных стратегий, у которых в состоянии $i = 2$ принимается решение $k = 0$, это состояние $i = 2$ является поглощающим. Следовательно, для этих вырожденных стратегий $\pi_2 = 1, \pi_j = 0, j \neq 2$ и $S = 2c_2 + c_3\lambda$ и среди этих стратегий не может быть оптимальной, если $c_0 > 0$. Для оставшихся 96 вырожденных стратегий были реализованы этапы вычислительного эксперимента для следующих вариантов исходных данных: $\lambda = \mu = 1$ и $(c_0 = 10, c_1 = c_2 = -1, c_3 = -1)$,

$(c_0 = 10, c_1 = -5, c_2 = 0, c_3 = -5)$, $(c_0 = 10, c_1 = -12, c_2 = -1, c_3 = -5)$, $(c_0 = 15, c_1 = -12, c_2 = -1, c_3 = -5)$:
для варианта 1 оптимальная стратегия $(0,1,1,0,1,1,0,1,0,0,0,0)$ и $S_{opt} = 8.906$,
для варианта 2 оптимальная стратегия $(0,0,2,0,1,2,0,0,1,0,0,0)$ и $S_{opt} = 4.930$,
для варианта 3 оптимальная стратегия $(0,1,2,0,1,2,0,1,1,0,0,0)$ и $S_{opt} = -2.020$,
для варианта 4 оптимальная стратегия $(0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,0,0)$ и $S_{opt} = 2.913$.

Литература

1. Вопросы математической теории надежности / Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К., Каштанов В.А. и др.: Под ред. Гнеденко Б.В. — М.: Радио и связь, 1983. — 376 с.

2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: КомКнига, 2005. — 400 с.

3. Джевелл В.С. Управляемые полумарковские процессы. — В сб.: Кибернетический сборник. Новая серия. В. 4. М.: Мир, 1967. — С. 97-137.

4. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания: Учебное пособие. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2012. — 304 с.

МЕТОДЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ СЛАБОСТРУКТУРИРОВАННЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТАРИФОВ НА ТРАНСПОРТЕ

И.Е. Денежкина, Д.С. Набатова

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия

e-mail: `DSNabatova@fa.ru`

Аннотация: В статье рассматривается применение методов многокритериальной оптимизации для слабоструктурированных систем к задачам формирования оптимальных тарифов для пассажиров железнодорожного транспорта.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, слабоструктурированные системы, метод AHP, метод ELECTRE.

METHODS OF MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION FOR SEMISTRUCTURED SYSTEMS IN THE TASK OF GENERATING OPTIMAL TARIFFS ON TRANSPORT

Abstract: This article discusses the application of the methods of multi-criteria optimization for semi-structured systems to the problems of formation of optimum tariffs for passenger rail transport.

Keywords: multi-objective optimization, semi-structured system, the method AHP, ELECTRE method.

В задачах поиска оптимальных решений для многих социально-экономических процессов, и не только, исследователи часто сталкиваются с проблемой построения адекватных моделей. Часто варианты решения представлены набором параметров по перечню критериев оценивания. Для таких задач построение функциональных зависимостей между параметрами системы, как правило, не возможно. Методы теории принятия решений представляют целый ряд алгоритмов, предназначенных для подобного рода задач. Они объединены под общим названием – методы многокритериальной оптимизации для слабоструктурированных проблем.

Спектр применения таких методов значительно шире, чем для классических методов оптимизации. С проблемой осознанного выбора одной альтернативы из множества оцениваемых по нескольким критериям, сталкиваются все, начиная от министра, принимающего значимое решение для страны, до автолюбителя, озадаченного покупкой новой машины.

Серьезной социально-экономической проблемой является формирование тарифов для пригородного железнодорожного сообщения. Для многих регионов этот вид перевозок является дотационным. Недостаточность выделяемых средств и возникающий в связи с этим рост цен, приводит к серьезным последствиям. Это рост пассажиров безбилетников и сокращение объема перевозок, за счет отмены электропоездов. Такие действия со стороны РЖД приводят к росту возмущения со стороны пассажиров, оплачивающих свой проезд и при этом не имеющих возможность добраться до места назначения в то время, когда им удобно.

При формировании и изменении тарифных планов для пригородного сообщения необходимо предварительно оценивать последствия методами теории принятия решений.

Критерии для оценки не ограничиваются экономической эффективностью. Это может быть удобство и популярность у пассажиров, социальная значимость и т.д. Понятно, что для таких задач построить функциональные зависимости между параметрами и критериями эффективности невозможно. В этом случае нужно использовать методы многокритериальной оптимизации для слабоструктурированных моделей. Для таких моделей на первое место выходит субъективный фактор экспертной оценки. В задачах многокритериальной оптимизации с помощью таких методов можно организовать направленный перебор существующих решений, чтобы выбрать либо наилучшее решение, либо расположить их в порядке перспективности.

Рассмотрим применение метода аналитической иерархии (AHP - Analytic Hierarchy Process) для решения задачи выбора наилучшего варианта проездных абонементов из нескольких предложенных. Для применения этого метода необходимо определить цель, перечень критериев - $C_1, C_2, ..., C_i, ..., C_m$; перечень альтернатив, с оценками по каждому критерию - $A_1, A_2, ..., A_s, ...A_d$. Процесс принятия решений представляется в виде иерархической структуры: на первом уровне находится цель, на втором уровне – критерии, на третьем уровне – множество альтернатив. Эксперт должен выполнить попарное сравнение альтернатив и критериев и ответить на вопрос о том, какая альтернатива предпочтительна, имеет большее воздействие или более вероятна для данного критерия C_i. Оценкам экспертов сопоставляется численная шкала по заданным правилам. Если для каких-либо критериев представлены количественные характеристики, то для них также выставляются оценки.

Рассмотрим применение метода аналитической иерархии для решения задачи выбора наилучшего варианта проездных абонементов из нескольких предложенных. В качестве исходных данных рассмотрим 5 видов абонементных билетов на 10 поездок:

1. с фиксированной датой и минимальной стоимостью поездки S_1 – альтернатива A_1;

2. на 30 дней со стоимостью поездки $S_2 > S_1$ - альтернатива A_2;

3. на 90 дней со стоимостью $S_3 > S_2$ - альтернатива A_3;

4. с возможностью поездки в любом направлении, на 10 дней и стоимостью поездки $S_4 > S_1$ - альтернатива A_4.

5. на 30 дней, с возможностью поездки в любом направлении и стоимостью поездки $S_5 > S_1$ - альтернатива A_5.

Будем их оценивать по трем критериям:

1. экономическая выгода – C_1;

2. популярность среди пассажиров – C_2;

3. поддержка местных властей – C_3;

Для сравнения критериев и альтернатив используются экспертные оценки.

На предварительном этапе эксперты должны оценить значимость или приоритетность каждого критерия по сравнению с остальными критериями по специальной шкале. Традиционно используют следующую систему оценок:

невозможно ответить – 0;

равная важность критериев (альтернатив) – 1;

умеренное превосходство – 3;

существенное превосходство – 5;

значительное превосходство – 7;

очень большое превосходство – 9.

В соответствии с методом AHP экспертные оценки сводятся в таблицу сравнения критериев. Далее, по каждому критерию сравниваются заданные альтернативы, заполняются аналогичные таблицы для каждого критерия.

После того, как для каждого критерия вычислены таблицы количественного предпочтения альтернатив – всего 3 таблицы, нужно найти величину нормируемого веса альтернативы A_s по критерию $C_i - v_{is}$, $i = 1, 2, 3$; $s = 1, ...4$. Значения весов v_{is} указываются в последнем столбце каждой из таблиц и вычисляется интегральный показатель E_s для каждой альтернативы A_s $s = 1, ...4$: $E_s = \sum_{i=1}^{d} w_i v_{is}$. В качестве оптимальной выбирается альтернатива A_k, для которой $E_k = \max\limits_{s} E_s$ [1].

Рассмотрим определение оптимального тарифа для предложенных альтернатив с помощью метода AHP. На предварительном этапе эксперты должны оценить значимость или приоритетность каждого критерия по сравнению с остальными критериями. Положим, что самым значимым критерием эксперты считают поддержку местных властей, т.к. согласно законодательству, местные власти компенсируют из бюджета убытки пригородного пассажирского сообщения. Второй по значимости критерий – стоимость, и последний – популярность у пассажиров. Таким образом, у критерия C_3 по сравнению с C_1 оценка 7 баллов, у критерия C_2 по сравнению с C_1 – оценка 5 баллов.

Таблица сравнения критериев заполняется по следующим правилам:

если критерий C_i превосходит критерий C_j, то элемент $c_{ij} = \{3, 5, 7, 9\}$, если критерии равнозначны, то $c_{ij} = 1$. Элемент c_{ji} равен обратному значению $c_{ji} = 1/a_{sr}$. Диагональные элементы c_{ii} равны единице. Вес каждого критерия определяется как среднее геометрическое элементов соответствующей строки таблицы

$\alpha_i = \sqrt[m]{c_{i1} c_{i2} ... c_{im}}$, $w_i = \alpha_i / \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$; $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

Далее, необходимо сравнить по каждому критерию все альтернативы. Результаты приведены в таблицах 2-4. Элементы этих таблиц вычисляются по аналогичным правилам.

Таблица 1. Сравнение критериев.

Критерии	C_1	C_2	C_3	α_i	Вес w_i
C1	1	0,2	0,143	0,306	0,072
C2	5	1	0,333	1,185	0,279
C3	7	3	1	2,759	0,649

По критерию экономическая выгода приоритет определяется по цене абонемента.

Таблица 2. Сравнение альтернатив для критерия C_1 – экономическая выгода.

Альтернатива	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	λ_i	Вес v_i
A1	1	0,333	0,143	0,2	0,111	0,254	0,033
A2	3	1	0,2	0,333	0,143	0,491	0,064
A3	7	5	1	3	0,333	2,036	0,264
A4	5	3	0,333	1	0,2	1	0,130
A5	9	7	3	5	1	3,936	0,510

По критерию популярность у пассажиров эксперты оценили как самый популярный - абонемент A_4 (7 баллов), следующие по популярности - A_3 и A_5, затем - A_2, и наименее популярный - A_1.

Таблица 3. Сравнение альтернатив для критерия C_2 – популярность среди пассажиров.

Альтернатива	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	λ_i	Вес v_i
A1	1	0,333	0,2	0,143	0,2	0,286	0,042
A2	3	1	0,333	0,2	0,333	0,582	0,086
A3	5	3	1	0,333	1	1,379	0,203
A4	7	5	3	1	3	3,160	0,466
A5	5	3	1	0,333	1	1,379	0,203

Местные власти посчитали самым социально ориентированным абонемент A_3, следующий - A_2, далее A_4 и A_1 и самый незначимый – A_5.

Анализ таблиц показывает, что система оценок отражается в значениях весов. Каждая альтернатива, наиболее высоко оцениваемая по данному критерию, имеет и максимальный вес. Равные по значимости альтернативы, оцениваются одинаковыми весами.

После того, как для каждого критерия составлены таблицы количественного предпочтения альтернатив – всего 3 таблицы, нужно найти величину v_{is} нормируемого веса альтернативы A_s по критерию C_i, $i = 1, 2, 3$; $s = 1, ..., 5$. Значения весов v_{is} указываются в последнем столбце каждой из таблиц.

Таблица 4. Сравнение альтернатив для критерия C_3 – поддержка местных властей.

Альтернатива	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	λ_i	Вес v_i
A1	1	0,333	0,2	1	3	0,725	0,104
A2	3	1	0,333	3	5	1,718	0,246
A3	5	3	1	5	7	3,499	0,501
A4	1	0,333	0,2	1	3	0,725	0,104
A5	0,333	0,2	0,143	0,333	1	0,316	0,045

Вычислим интегральный показатель E_s для каждой альтернативы A_s, $s = 1, ..., 5$:

$E_s = \sum_{i=1}^{3} w_i v_{is}$,$s = 1, 2, 3, 4, 5$.

В результате расчета получим:

$E_1 = 0,081$; $E_2 = 0,188$; $E_3 = 0,401$; $E_4 = 0,207$; $E_5 = 0,123$.

В качестве оптимальной альтернативы выбирается альтернатива A_k с максимальным интегральным показателем. В нашем случае наиболее предпочтительным является абонемент на 30 дней (альтернатива A_3).

Метод AHP отличается практической направленностью на сравнение реальных альтернатив. При этом, введение новой альтернативы в рассмотрение требует пересчета всех таблиц и может привести к существенному изменению предпочтений между ранее заданными альтернативами. Применение метода ELECTRE (Метод ранжирования многокритериальных альтернатив Elimination Etchoix Traduisant la Realite) позволяет включать в рассмотрение новые альтернативы, учитывая результаты предыдущих сравнений на основе не абсолютных, а относительных оценок. Идея метода отражена в названии, перевод которого звучит как исключение и выбор, отражающие реальность. Метод ELECTRE направлен на решение задач с уже заданными многокритериальными альтернативами. В этом методе не определяется количественно показатель качества каждой из альтернатив, а устанавливается лишь условие превосходства одной альтернативы над другой.

Статья подготовлена по результатам исследований, выполненных за счет бюджетных средств по Государственному заданию Финуниверситета 2014 года.

Литература

1. Набатова Д.С. Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений. М.: Финансовый университет, 2013. С 83-91.

САМООРГАНИЗУЮЩИЕСЯ КАРТЫ В ЗАДАЧАХ БИОМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

А.С. Овакимян[1], С.Г. Саркисян[2], М.А. Зироян[3]

[1]*Ереванский государственный университет, Ереван, Армения*
[2]*Ереванский государственный университет, Ереван, Армения*
[3]*Российский государственный социальный университет, Москва, Россия*

e-mail: [1]`ahovakimyan@ysu.am`, [2]`siranushs@ysu.am`, [3]`zirmanya@mail.ru`

Аннотация: В статье разработана и программно реализована нейронная сеть типа самоорганизующейся карты для решения рассматриваемой задачи. Разработана библиотека специальных Java-классов, обеспечивающая параллельную обработку данных. Сеть апробирована на ряде контрольных примеров с целью экспериментальной настройки ее параметров. Самоорганизующаяся карта имеет четыре параметра, от значений которых зависит эффективность работы сети. Этими параметрами являются количество внутренних нейронов сети, характеристика сетки, выражаемая отношением ширины сетки, на которой расположены нейроны, к ее высоте, начальный коэффициент обучения, число итераций обучения. На основе экспериментов найдены значения параметров сети, при которых для классификации радужки сеть работает наиболее эффективно.

Ключевые слова: нейронные сети, самоорганизующиеся карты, биометрическая идентификация, распознавание образов, Java-классы.

SELF-ORGANIZING MAPS IN BIOMETRIC IDENTIFICATION PROBLEMS

Abstract: In the paper a problem of constructing and implementing of a neural network to solve the problem of biometric identification via iris is considered. The neural network has a type of self-organizing map. It receives the image of a human eye picture at input, performs preprocessing of input data to allocate iris, identifies the essential components in input data, and then classifies the iris.

Software implementation of a neural network was performed in Java. Via experiments the settings of the network are chosen. These settings provide a sufficiently high efficiency of iris recognition. Network was tested for other classification tasks, and it's the fact that the values found for the parameters of the network are also very satisfactory for those tasks.

Keywords: neural network, self-organizing map, biometric identification, image recognition, Java-classes

За последние два десятилетия технологии биометрической идентификации сделали большой шаг вперед и заняли прочные позиции на рынке систем безопасности. Системы безопасности пользуются большим спросом со стороны различных учреждений и организаций: банков, аэропортов, библиотек и др. В биометрических системах идентификация человека проводится по его биометрическим параметрам, а не по ключу или карточке. По прогнозам экспертов, доля биометрических систем в ближайшие годы будет составлять значительную часть от общего рынка систем безопасности [1].

Методы биометрической идентификации многообразны. Они основаны как на статических биометрических характеристиках, таких как отпечатки пальцев, геометрия лица, сетчатка глаза, радужная оболочка глаза, рисунок вен руки, так и на динамических характеристиках, таких как голос, почерк, сердцебиение, походка. Что касается экспертов, их мнения в вопросе выделения основных биометрических характеристик совпадают. По их мнению это отпечатки пальцев рук, геометрия лица и радужная оболочка глаза [2,3].

Радужная оболочка является уникальной характеристикой человека. Метод идентификации по радужке является наиболее точным в биометрических технологиях. Но этот метод сегодня на международном рынке составляет всего 6-9%, в то время как технология биометрического распознавания по отпечаткам пальцев составляет более половины рынка.

В настоящее время для реализации задач биометрической идентификации на помощь приходят информационные технологии, обеспечивающие эффективную и оперативную обработку биометрической информации.

Биометрические задачи идентификации принадлежат классу задач распознавания образов, среди которых особое место занимают задачи классификации. В этих задачах образ должен быть классифицирован, то есть соотнесен к одному из классов объектов на основе данных об уже существующих образах. Существует много способов решения задач распознавания образов, среди которых используются также искусственные нейронные сети [4]. В работе рассмотрена задача построения и реализации нейронной сети типа самоорганизующейся карты для решения задачи биометрической идентификации личности по радужной оболочке глаза. Нейронная сеть получает на входе образ фотографии человеческого глаза, выполняет предварительную обработку по выделению радужной оболочки с помощью оператора Собеля и трасформации Хаффа, выделяет существенные компоненты во входных данных, и затем решает задачу классификации радужки [5, 6, 7]. Программная реализация системы биометрической идентификации выполнена на языке Java.

1. Нейронные сети и самоорганизующиеся карты

Искусственная нейронная сеть (ИНС) является математической моделью биологического нейрона. Она состоит из связанных друг с другом нейронов. Нейронная сеть подвергается обучению путем представления ей входной информации в виде числовых последовательностей. В ходе обучения настраиваются внутренние связи между нейронами, благодаря которым сеть наделяется способностью распознавать незнакомые образы.

Существуют различные типы нейронных сетей, которые различаются как топологией, так и алгоритмами обучения. В задачах классификации образов одними из наиболее эффективных являются самоорганизующиеся карты (СОК), которые обучаются алгоритмами без учителя. СОК состоит из двух слоев: входного и функционального. В функциональном слое нейроны расположены на сетке, состоящей из ячеек. Каждый нейрон занимает одну ячейку и связан со всеми нейронами входного слоя (рис. 1).

СОК действует по принципу "победитель получает все". То есть, когда последовательность входных векторов предъявляется сети, все нейроны функционального слоя вызывают функцию активации, которая отражает связь между входными данными и весовыми связями этих нейронов. Победителем становится тот нейрон, для которого функция активации принимает оптимальное значение, например максимальное или минимальное. В данном случае в качестве функции активации выбрана функция евклидова расстояния между вектором входных данных и весовым вектором нейрона, а оптимальным значением функции считается ее минимальное значение. Если V_1, V_2, V_3, $\ldots$, V_n – входной вектор, а функциональный слой СОК состоит из k нейронов, имеющих весовые коэффициенты

$$W_{11}, W_{12}, W_{13}, \ldots, W_{1n}$$

$$W_{21}, W_{22}, W_{23}, \ldots, W_{2n}$$

$$\ldots$$

$$W_{k1},\, W_{k2},\, W_{k3},\, \ldots,\, W_{kn}$$

где W_{ij} весовой коэффициент i-ого нейрона функционального слоя, связанного с j-ым нейроном входного слоя, то победителем будет тот нейрон, для которого

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(V_j - W_{ij})^2} = \min, \quad i = 1,\, \ldots,\, k$$

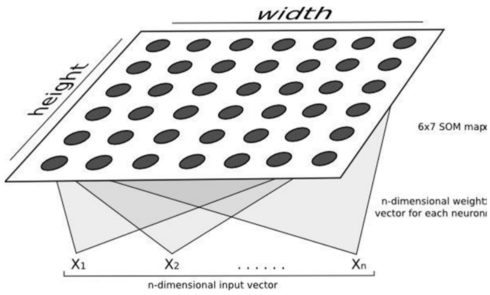


Рис. 1. Структура самоорганизующейся карты

На этапе обучения сети предъявляется обучающая последовательность данных. Суть обучения состоит в том, что на каждом шаге определяется нейрон-победитель, и нейроны, расположенные в некоторой окрестности нейрона-победителя все больше приближаются к нему. В результате обучения близкие по назначению нейроны собираются в областях сетки, определяемых обучающей последовательностью (рис. 2).

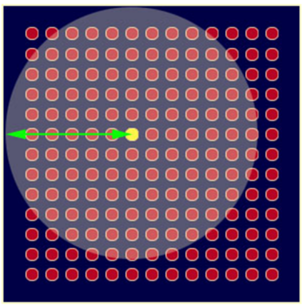


Рис. 2. Окрестность нейрона-победителя

Радиус окрестности нейрона-победителя меняется по формуле:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right), \quad t = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Эксперименты показывают, что в качестве начального значения радиуса окрестности целесообразно брать

$$\sigma_0 = \frac{\max(width,\, height)}{2}$$

где $width$ - ширина сетки функционального слоя, $height$ - высота, λ - временная константа, вычисляемая по формуле

$$\lambda = \frac{n}{\log \sigma_0}$$

где n - число итераций обучения.

Таким образом, радиус окрестности меняется по экспоненциальному закону (рис. 3)

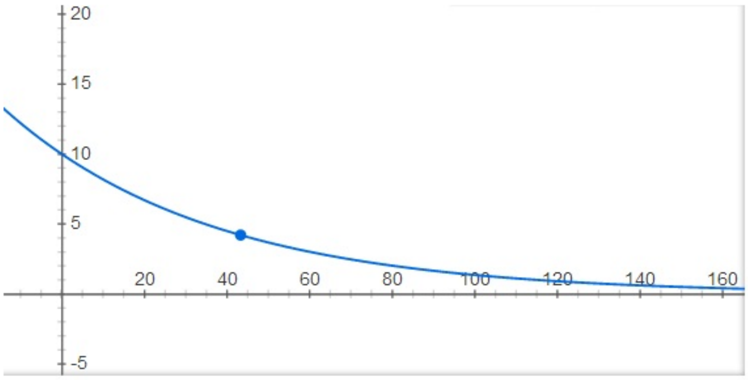


Рис. 3. Изменение радиуса окрестности нейрона-победителя

В ходе обучения сети нейрон-победитель и нейроны из его σ-окрестности меняют свои весовые коэффициенты следующим образом

$$W(t+1) = W(t) + \theta(t)L(t)(V(t) - W(t))$$

где t - номер итерации, $L(t) = L_0 \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)$, $t = 1, 2, 3, \ldots$, $\theta(t) = \exp\left(-\frac{dist^2}{2\sigma^2(t)}\right)$, $t = 1, 2, 3, \ldots$, $dist$ - расстояние между нейроном и нейроном-победителем на сетке функционального слоя. Функция $L(t)$ называется коэффициентом обучения, $\theta(t)$ отражает влияние расположения нейрона на сетке. Очевидно, что больше всего меняются веса победившего нейрона (рис. 4).

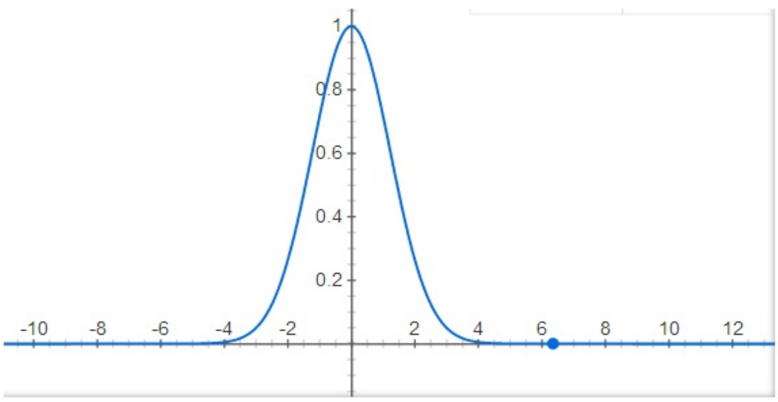


Рис. 4. Влияние расстояния от нейрона-победителя на изменение весов

После обучения сеть в состоянии распознать данные, похожие на те, на которых она обучена.

2. Распознавание радужной оболочки

Распознавание радужной оболочки глаза является задачей биометрической идентификации. Радужная оболочка уникальна для каждого человека и остается неизменной в течение всей его жизни. Она является надежной характеристикой, поскольку не подвержена искажению, обусловленному временем или непосредственным контактом при взятии образца.

В настоящее время существует множество программных систем, распознающих человека по радужной оболочке. В данной работе эта задача решается с помощью нейронной сети типа самоорганизующаяся карта.

Задача распознавания радужной оболочки разделена на три подзадачи: обнаружение окружности радужной оболочки на изображении глаза, выделение круга с радужной оболочкой, собственно распознавание радужной оболочки с помощью самоорганизующейся карты.

Существует множество алгоритмов для обнаружения разных фигур на изображении. Среди них наиболее эффективным является трансформация Хаффа [5]. В рассматриваемой задаче применяется кругообразное преобразование Хаффа, поскольку искомый образ на изображении - это круг.

Преобразование Хаффа выполняется более эффективно, когда заранее применяются алгоритмы обнаружения и выделения границ искомых фигур на изображения. В работе для решения этой задачи использован оператор Собеля [6]. Это дискретный дифференциальный оператор, который вычисляет приближенное значение градиента функции, отражающей яркость изображения в каждой его точке. Таким образом обнаруживается величина и направление увеличения яркости в каждом пикселе изображения и, следовательно, вероятность того, что пиксел находится на границе некоторого образа. На рис. 5 приведен результат работы оператора Собеля, примененного к изображению человеческого глаза. На рисунке видны выделенные границы.

Можно повысить эффективность работы оператора Собеля учитывая тот факт, что радужка окружена областью белого цвета, а она сама имеет более темный цвет. Следовательно, существует определенное порогое значение яркости пикселя, такое, что пиксели с большим значением яркости лежат вне области радужки, а пиксели с меньшим значением яркости - внутри области радужки. Таким образом, если значение пикселя меньше, чем пороговое, то оно заменяется нулем, в противном случае - максимальным возможным значением. В результате такой замены пиксели изображения будут разбиты на два класса - темных и светлых пикселей, и оператор Собеля будет работать более эффективно.

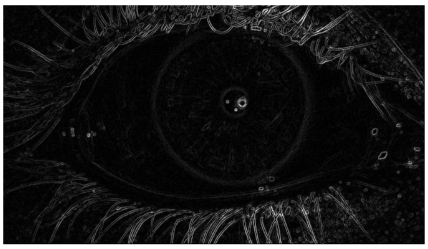


Рис. 5. Результат работы оператора Собеля

Трансформация Хаффа - это метод для нахождения фигур на изображения.

Это общий механизм, с помощью которого можно обнаружить все заранее известные виды фигур: прямые линии, овалы, круги и т.д. В работе применяется круговая трансформация Хаффа, предназначенная для обнаружения кругов на изображении, уже обработанном оператором Собеля. Данные хранятся в трехмерной матрице, где первые две размерности задают двумерное изображение, а третья размерность должна принять значение радиуса, с которым ищется круг на изображении. Через все граничные точки, то есть точки, где значение пикселя не равно нулю, проводят окружности, а значения в матрице для соответствующих писелей увеличиваются на единицу. В результате работы алгоритма та точка, в которой пересекаются окружности, будет центром искомой окружности. Берется та окружность, значение радиуса которой максимальна в матрице. На практике обычно ищут круги с фиксированным заранее радиусом.

После некоторой дополнительной обработки изображения глаза по выделению полосы между двумя окружностями (границ радужки и зрачка), превращения изображения из цветного в черно-белое, увеличения контрастности и яркости, а также преобразования по выделению главных компонентов с целью уменьшения нейронов входного слоя сети [7], входной вектора предъявляется нейронной сети для классификации образа, то есть соотнесения к соответствующему классу образов.

3. Экспериментальная настройка параметров самоорганизующейся карты

Разработана и программно реализована нейронная сеть типа самоорганизующейся карты для решения рассматриваемой задачи. Разработана библиотека специальных Java- классов, обеспечивающая параллельную обработку данных [8]. Сеть апробирована на ряде контрольных примеров с целью экспериментальной настройки ее параметров.

Самоорганизующаяся карта имеет четыре параметра, от значений которых зависит эффективность работы сети. Этими параметрами являются количество внутренних нейронов сети, характеристика сетки, выражаемая отношением ширины сетки, на которой расположены нейроны, к ее высоте, начальный коэффициент обучения, число итераций обучения. На основе экспериментов найдены значения параметров сети, при которых для классификации радужки сеть работает наиболее эффективно.

На рис. 6 показана зависимость эффективности сети от числа нейронов функционального слоя. Зависимость выражена в процентах. Количество нейронов берется кратным количеству обучающих векторов. По оси абсцисс отложены значения коэффициента кратности, по оси ординат - процент правильно распознанных образов.

Как видно на графике, эффективность сети вначале резко растет при увеличении коэффициента кратности. Затем эффективность сети не растет. Это предельное значение коэффициента кратности равно 10. Другими словами, сеть является наиболее эффективной, когда количество нейронов примерно в 10 раз больше, чем количество обучающих данных.

Другим параметром сети является форма прямоугольника сетки функционального слоя. Этот параметр выражается отношением высоты сетки к ее ширине. На рис. 7 показана зависимость эффективности сети от формы прямоугольника сетки. По оси абсцисс отложены значения отношением высоты сетки к ее ширине, по оси ординат - процент правильно распознанных образов.

Как видно из графика, при увеличении отношения высоты сетки к ее ширине эффективность сети растет, и при значении, равном 100, она почти перестает расти.

Это значение выбрано в качестве наилучшего значения для данного параметра сети.

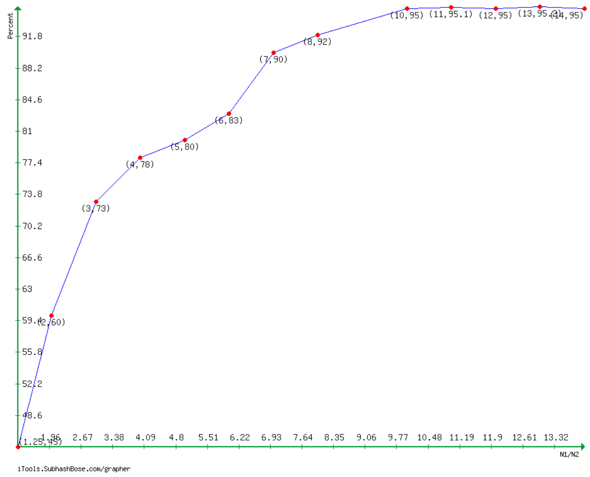


Рис. 6. Зависимость эффективности сети от числа нейронов

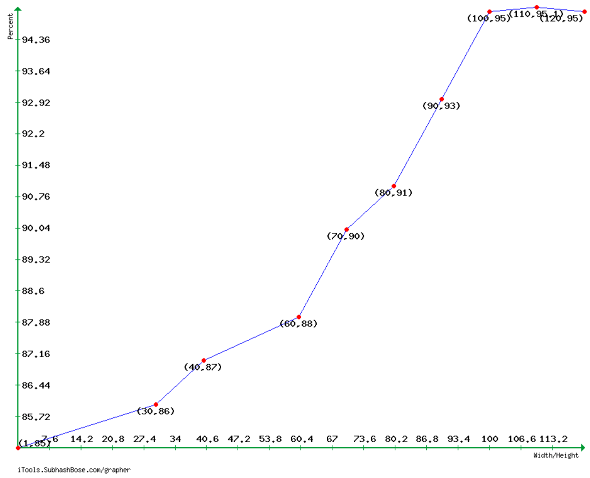


Рис. 7. Зависимость эффективности сети от формы сетки

Два других параметров сети связаны с обучением сети. Первым является начальный коэффициент обучения. На рис. 8 показана зависимость эффективности сети от этого коэффициента.

Как видно на графике, вначале эффективность сети растет, но после достижения коэффициентом обучения значения 0.1, она начинает убывать. Таким образом, значение 0.1 для начального коэффициента обучения считается оптимальным для рассматриваемой задачи.

Последним параметром сети, от которого зависит ее эффективность, - это число итераций обучения. График на рис. 9 иллюстрирует эту зависимость. По оси абсцисс отложены значения числа итераций, по оси ординат - процент правильно распознанных образов.

Как видно на графике, вначале, при увеличении числа итераций эффективность сети растет. Но при достижении значения 100, она уже почти не меняется.

Поэтому, можно сделать вывод, что в качестве наилучшего числа итераций можно считать значение 100.

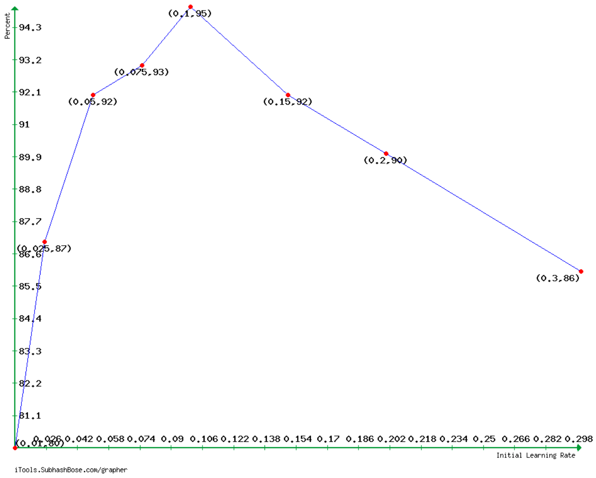


Рис. 8. Зависимость эффективности сети от начального коэффициента обучения

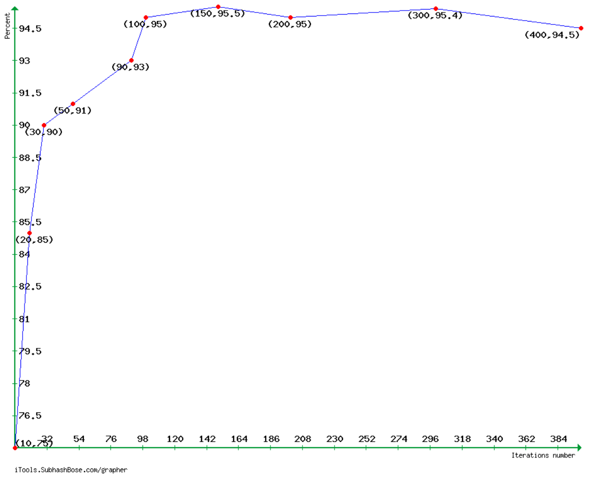


Рис. 9. Зависимость эффективности сети от числа итераций обучения

Таким образом, на основе экспериментов по апробации самоорганизующейся карты и анализа исследуемых параметров, можно констатировать, что эффективность нейронной сети типа самоорганизующейся карты для задачи распознавания радужной оболочки при соответствующем подборе значений параметров может составить в среднем 95%.

Сеть была апробирована и для решения других задач классификации, и оказалось, что найденные значения параметров сети также являются весьма удовлетворительными.

Литература

1. Кухарев, Г.А. Биометрические системы: методы и средства идентификации личности человека. СПб., 2001

2. Дегтярева, А. Методы идентификации личности по радужной оболочке глаза. Компьютерная графика и мультимедиа. 2004. - Вып. № 2 (6) http://www.cgm.computergraphics.ru/content/view/61

3. Матвеев, И. Распознавание человека по радужке. Системы безопасности. - 2004. Вып. № 5. http://www.secuteck.ru/articles2/sys_ogr_dost/human_recogn_ss_5_2004.

4. Anil K. Jain, Jianchang Mao, K. M. Mohiuddin. Artificial Neural Networks: A Tutorial. Computer - Special issue: neural computing: companion issue to Spring 1996 IEEE Computational Science & Engineering, Volume 29, Issue 3, March 1996.

5. Samta Gupta, Susmita Ghosh Mazumda. Sobel Edge Detection Algorithm. International Journal of Computer Science and Management Research. Vol 2, Issue 2, February 2013

6. Just Kjeldgaard Pedersen, Simon. Circular Hough Transform. Aalborg University, Vision, Graphics, and Interactive Systems. November, 2007.

7. Jolliffe, I.T. Principal Component Analysis (Springer Series in Statistics), Springer; 2nd edition (October 2, 2002)

8. Anna Hovakimyan, Siranush Sargsyan, Arshak Nazaryan. Self-Organizing Map Application for Iris Recognition. Journal of Commun. & Comput. Eng. ISSN 2090-623, www.m-sciences.com, Volume 3, Issue 2, 2013, Pages 10:13

Секция 8. Пути повышения мотивации к изучению математики и естественных наук в современном обществе

ПРОЕКТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧАЩИХСЯ - ОДИН ИЗ ПУТЕЙ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ

Р.Ж. Атамуратова

Областная специализированная школа-интернат для одаренных детей с углубленным изучением различных предметов, Актау, Казахстан

e-mail: r.atamuratova@mail.ru

Аннотация: В статье затрагивается тема организации проектной деятельности на уроках математики. Автор выдвигает гипотезу о том, что в ходе проектной деятельности у учащихся повысится уровень мотивации обучения, уровень самостоятельности в приобретение математических знаний. Данная гипотеза основывается на ее собственном опыте, подтвержденными обученности учеников.

Ключевые слова: Проектно-исследовательская работа на уроках математики поможет школьникам развить мышление, нестандартное видение объекта, обогатить личностный опыт, найти реальные пути применения знаний в жизненной практике.

STUDENT'S PROJECT WORK IS ONE OF THE WAY OF INCREASING MOTIVATION TO STUDYING OF MATHEMATICS

Abstract: The organizations of project work in the mathematical lessons are revealed in the article. The author puts forward the hypothesis that students' motivation level to the studying, independence in gaining mathematical knowledge will be increased during the project work. Given hypothesis is based on her own experience, backed up the teaching of the students.

Keywords: The research work will help students develop thinking, non-standing vision of the subject to enrich the personal experience, to find real ways of using knowledge in the practice.

Возрастающее количество исследований подтверждает, что дети учатся эффективнее и их интеллектуальные достижения выше, при условии активного их вовлечения в обсуждения, диалог, аргументацию и исследования. В процессе работы я столкнулась со следующей проблемой. Востребованными качествами выпускника на сегодняшний день являются: способность брать на себя ответственность, участвовать в совместном принятии решения, оценивать и анализировать, делать свой выбор. При этом на уроках математики учитель преподает учащимся систему знаний, умений и навыков. Основной вид деятельности - решение задач. Сегодня овладение определенным объемом навыков перестает быть самоцелью и превращается в процесс воспитания, развития и образования личности. Учителю приходится задумываться над новыми методами обучения, использовать новые технологии преподавания, которые развивают мотивацию школьников к учебно-познавательной деятельности, повышают их интеллектуальный уровень, раскрывают творческие способности. Поэтому сегодня актуален вопрос: «Какие технологии все же выбрать?» «Как преподнести материал, чтобы раскрыть интеллектуальные способности учащихся?»

На мой взгляд, формированию надпредметных навыков, или как сейчас принято говорить компетенций, способствует проектная деятельность, которая стала предметом педагогического исследования и полем инновационной образовательной практики. У ученика появляется возможность расширения и совершенствования своих интеллектуальных знаний, овладения элементами проектной деятельности, проектных умений.

Проектной деятельностью учащиеся школы занимаются давно. Однако проекты в своем большинстве, создавались в гуманитарных и естественно- научных областях знаний.

У меня назрела необходимость показать применение математических знаний в жизни. Изучая такие сложные темы, как «Производная», «Интеграл», ребята все чаще задавали вопрос: «А зачем это нужно?» В рамках урока показать это не было возможности из-за насыщенности программы. Возникла идея организации проектной деятельности учащихся, где они смогут применить математические знания в решении исследовательских, творческих и практических задач.

Я предположила, что в ходе проектной деятельности у учащихся повысится уровень мотивации обучения, уровень самостоятельности в приобретение математических знаний.

Что же такое проект?

Проект - происходит от латинского projectus. Его буквальный перевод – «брошенный вперед» - уже объясняет многое. В современном русском языке слово «проект» имеет несколько весьма близких по смыслу значений. Так называют:

а) совокупность документов, необходимых для создания какого либо сооружения или изделия;

б) предварительный текст какого – либо документа;

в) какой – либо замысел или план.

Как и всякое направление обучения, проектное обучение имеет свою историю и свои корни в культуре. В начале XX века американский философ и педагог Дж.Дьюи и его последователь В.Х Килпатрик стали авторами «метода проектов». Суть новаторской идеи заключалась в том, что дети, исходя из своих интересов, вместе с учителем выполняли собственные проекты. Так, решая какую-либо задачу, они включались в реальную деятельность и овладевали новыми знаниями.

В настоящее время «метод проектов» переживает второе рождение. Дети выполняют «проекты» - конкретные задания, связанные с учебным материалом. Важная роль в организации этой деятельности – умение учителя определить в нем приоритетное направление и соответственно разработать цели, методику реализации и содержание.

Исходя из возникших потребностей учащихся, были определены темы проектов: «Почему параболоид», «Вторая космическая», «Этот Великий Ньютон».

Первый проект, созданный в 2011 году ученицей 10б класса Ыстыбаевой Аяужан на тему:«Построение сечений в многограннике» носил исследовательский характер, так как должен был ответить на вопрос: как правильно построить сечения , обьяснить, что такое след. Продуктом этого проекта стала компьютерная презентация с небольшим видеофильмом.

Второй проект – ознакомительно-ориентированный, направлен на сбор информации по указанной теме, обработку этой информации, обобщение полученных сведений. Результатом проекта стало выступление ученика 10б класса Мухамеддинова Рафаэля на уроке на тему: «Арифметическая и геометрическая последовательности вокруг нас». Продуктом данного проекта стал реферат.

В дальнейшей работе в основу таких проектов были положены такие темы как: «Мы живем среди чисел», «Пирамиды прошлого, настоящего и будущего», «Задачи на движение» и другие.

Каждый проект от возникновения идеи до полного своего завершения проходит ряд ступеней развития: погружение в проект, планирование, поиск информации, обобщение результатов и выводов, презентация, оценка процесса и результатов работы. На каждом этапе степень активности учеников и учителя различны. В учебном проекте ученики должны работать самостоятельно, и степень самостоятельности зависит не от их возраста, а от сформированности умений проектной деятельности.

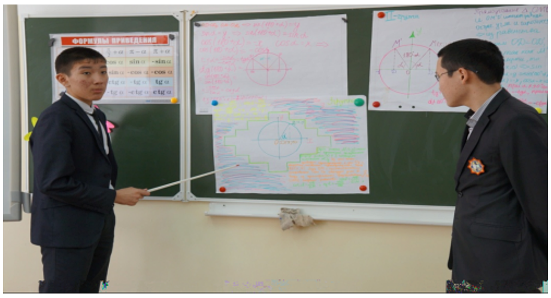
Как я и предполагала, у моих учеников повысилась мотивация изучения математики. Знания, которые они получали на уроках, применялись не только для решения абстрактных математических заданий типа: «Реши уравнение», или «Упрости выражение», но и для решения практических (контекстных) задач.

Степень самостоятельности учеников была различной. Она зависела как от возраста, так и от индивидуально – психологических особенностей школьника. Каждый участник проекта имел возможность развивать свои умения проектной деятельности.

Проведенные психологические исследования мотивации и самостоятельности методом опроса подтвердило мое предположение о том, что эти качества могут повышаться в условиях проектной деятельности. Из сказанного видно, что учащиеся видят реальное применение своих знаний, понимают, как много, оказывается, они еще не знают, у них появляется чувство ответственности. Кроме того, они видят, что жизненные проблемы не имеют только однозначного решения, вариантов может быть несколько, и в этом случае проявляются творческие способности ребят. Готовясь к защите своего проекта, ребята должны выстроить свое выступление так, чтобы оно было максимально аргументированным, четким и логичным, что развивает, помимо логики и мышления, культуру речи.

Реализация проектного метода на практике ведет к изменению позиции учителя. Из носителя готовых знаний он превращается в организатора познавательной деятельности своих учеников. Меняется и психологический климат на уроке, так как учителю приходится переориентировать свою учебно-воспитательную работу. Из авторитетного источника информации преподаватель становится соучастником исследовательского, творческого процесса, наставником, консультантом, организатором самостоятельной деятельности учащихся. В этом я вижу основной результат своей работы.

Проектно-исследовательская работа на уроках математики поможет школьникам развить мышление, нестандартное видение объекта, обогатить личностный опыт, найти реальные пути применения знаний в жизненной практике. Часто на уроках я применяю и учебные мини- проекты. Учащиеся приучены работать самостоятельно, умеют отстаивать свое мнение. Они обладают достаточным багажом знаний и социальным опытом, который не позволяет им теряться в новых условиях, а быть уверенными в себе. На своих уроках я использую творческие работы. Творческие работы школьников могут быть представлены в следующих формах: информационно – реферативные, проблемно – реферативные, экспериментальные, описательные, исследовательские. Чаще всего это применимо либо к биографии или вкладу великих математиков, либо в выведении новых формул или к геометрическим гипотезам и теоремам. Такие работы повышают интерес к предмету, повышает мотивацию учащихся. Цель моих уроков: развитие математической грамотной речи учащихся, умение анализировать, обобщать, синтезировать, ориентироваться в информационном пространстве. С этой целью я практикую на своих уроках защиты постеров, приучаю составлять краткие опорные схемы по изученному материалу. Самый верный способ помочь ребенку раскрыть себя – научить учиться. В этом помогает самостоятельный поиск.

Все учителя стремятся к созданию благоприятной среды для достижения максимального успеха в преподавании и обучении. Я считаю, что долг и дар учителя заключается в том. чтобы создать условия , в которых ученик мог бы проявить себя и показать путь для самореализации.

Вот уже 5год я готовлю детей к проектной деятельности.

За последние три года мои ученики принимали активное участие в различных мероприятиях областного, республиканского и международных уровней. И надо отметить, что участие всегда было результативным.

В 2014 году мои ученики стали лауреатами Республиканского фестиваля «Шаг в будущее» , который проводился среди Назарбаев Интеллектуальных школ в г. Семей (Казахстан). Мои ученики выступали с научным проектом на тему: « Замечательные точки и линии в треугольнике».


В 2013 году ученица 11 класса заняла 1 место на Международном конкурсе научных проектов имени Джолдасбекова в Алматы.

В 2012, 2013,2014 годах занимали вторые места на Международном конкурсе «Математика и проектирование» в Москве.

Сегодня школа должна формировать людей с новым типом мышления, инициативных, творческих личностей. Чтобы реализовать эти задачи необходимы нововведения- инновации. Мы понимаем со всей ясностью, что деятельность учителя должна быть направлена не на освоение учениками имеющейся информации, а на новую организацию сознания ребенка, при которой идет развитие коммуникативных способностей каждого, развитие мышления, умения высказать свою точку зрения владея техникой рефлексии, так как меняется мир , меняемся мы.

Во многом успешность ученика зависит от эффективности учителя. Эффективный учитель – это в первую очередь компетентный учитель. По Шульману компетентному учителю помогают «три помощника учителя» - это голова, рука и сердце . Эффективен тот учитель, который может развить у учащихся самостоятельное мышление, желание учиться лучше. На мой взгляд, мы должны рассматривать наших учеников, наши учебные планы и методы преподавания с совершенно других позиций. Современный урок- свободный урок, освобожденный от страха: никто никого не пугает и никто никого не боится. На таких уроках работают все и каждый, имеют право высказать свое мнение. Исследования психологов и педагогов показывают: чтобы научить школьников самостоятельно и творчески учиться, нужно включить их в специально организованную самостоятельную деятельность, сделать "хозяевами" этой деятельности. Для этого нужно выработать у школьников мотивы к учебной деятельности.

На своих уроках акцент делаю на диалогическое обучение, в котором интегрируются и другие методы: групповая работа, элементы критического мышления, значимость составления вопросов согласно теории Блума в соответствии с возрастными особенностями учащихся.

Меня волновали вопросы: «Каким образом можно добиться успеха в усвоении учащимися необходимых знаний и ответить на все их интересующие вопросы?», «Как можно построить урок, чтобы развить у учащихся грамотную, математическую речь, умение рассуждать, аргументировать, доказывать свои гипотезы?»

Я решила исследовать возможность применения групповой работы на уроках математики и проследить результаты работы в 7 классе. Учащиеся этого класса мотивированы на учебу, есть явные и скрытые лидеры. Проблема, которая часто встречается на уроках математики - это неумение наших учеников математически, грамотно излагать свои мысли, аргументировать, доказывать, делать выводы, критически мыслить. Групповая работа способна в какой-то мере решить данную проблему, способствовать развитию познавательного интереса учащихся.

Заключение

Современное общество ставит перед школой задачу подготовки самостоятельных, способных к самообучению, ответственных, обладающих коммуникативными навыками граждан. Школа не может дать знания на всю жизнь, а вот научить, выработать стремление к постоянному самосовершенствованию – её главная задача. В целом проектно-исследовательская работа с детьми позволит: создать возможности для проявления одарённости и таланта; обеспечить условия для профессиональной ориентации, творчества и образования повышенного уровня школьника ,внедрить методические разработки и информационные технологии в систему работы учителей-предметников; повысить познавательный интерес к предмету выработать у школьников мотивы к учебной деятельности.

Литература

1.Богоявленская Д. Б. Пути к творчеству. — М., 1981. 213с.

2.Волков И.П. Много ли в школе талантов. — М., 1989. С.45-52

3. Математика.9-11 классы: проектная деятельность учащихся /авт.- сост. М. В. Величко. - Волгоград: Учитель, 2007. С.112-123

4. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Математическое моделирование систем измерения давления // Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство: избранные труды меж. науч. конф. / под ред. Л.Д. Кудрявцева. Ереван, 2012. С. 113–123.

КАК ПОВЫСИТЬ МОТИВАЦИЮ БУДУЩИХ ЭКОНОМИСТОВ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ

И.А. Байгушева

Астраханский государственный университет, Астрахань, Россия

e-mail: iabai@mail.ru

Аннотация: В статье в качестве пути повышения мотивации будущих экономистов к изучению математики рассматривается реализация принципа профессиональной направленности через формирование обобщенных методов решения типовых профессиональных задач экономиста в процессе математической подготовки в вузе.

Ключевые слова: учебная мотивация, типовая профессиональная задача, обобщенный метод.

HOW TO INCREASE MOTIVATION OF FUTURE ECONOMISTS TO STUDYING OF MATHEMATICS

Abstract: In article as a way of increase of motivation of future economists to studying of mathematics realization of the principle of a professional orientation through formation of the generalized methods of the solution of standard professional tasks of the economist in the course of mathematical preparation in higher education institution is considered.

Keywords: educational motivation, typical professional task, generalized method.

На современном этапе развитие экономической науки тесно связано с применением математики к исследованию научных и производственных задач. Не случайно 80 % лауреатов Нобелевской премии в области экономики, присуждаемой с 1969 года, получили за успешное применение математического аппарата в исследованиях экономических процессов. Математика заняла важное место в экономической науке, а математическая подготовка – в системе экономического образования. Претерпело существенные изменения содержание математической подготовки экономистов в высшей школе: увеличился её объем, появились новые дисциплины как фундаментального, так и прикладного характера.В связи с этим во ФГОС ВПО по экономическим направлениям подготовки количество учебного времени, отведенного для изучения дисциплин математического цикла, возросло на 48,7 % по сравнению со стандартами второго поколения. При этом увеличена долясамостоятельной учебной деятельности студентов в общей трудоемкости образовательных программ.

И сказанного выше следует, что без высокой положительной мотивации студентов к изучению математики невозможно подготовить экономиста новой формации, отвечающего современным требованиям общества. В работах отечественных ученых (П. Я. Гальперин, В. Д. Давыдов, И. А. Зимняя, А. К. Маркова, Н. Ф. Талызина, Д. Б. Эльконин и др.) мотивация признана первым и обязательным компонентом учебной деятельности. Под учебной мотивацией мы понимаем психологическую структуру, состоящую из потребности в учении, смысла учения, мотивов учения, цели, эмоций, отношений и интересов [1]. Как показало наше исследование и исследования других авторов (Н. А. Бурмистрова, Р. Л. Исакова, Э. Л. Локтионова, Т. П. Монако, И. Г. Худякова и др.) достаточно большой процент студентов экономических направлений подготовки не имеет развитой мотивации к изучению математики. Это связано, прежде всего, с несформированным в школе интересом к математике, непониманием значимости математических знаний для будущей профессиональной деятельности. Решение этой острейшей проблемы мы связываем с профессиональной направленностью математической подготовки экономистов в вузе [2], поскольку ведущим мотивационным фактором к обучению для студентов является востребованность приобретаемых знаний вих будущей профессиональной деятельности. Под профессиональной направленностьюматематической подготовки будущих экономистов мы понимаем ориентацию математическойподготовки в её целевом, содержательном и процессуальном аспектах на динамическое моделирование профессионального труда экономиста.

Для реализации принципа профессиональной направленности при обучении математике в вузе, как правило, включают в содержание математической подготовки профессионально направленные задачи. Как показывает практика, использование задач профессиональной направленности при изучении математики способствует повышению учебной мотивации студентов, демонстрируя студентам примеры использования математических знаний для решения профессиональных задач. Но при этом у студентов не формируется способностьприменять математические знания для решения любых конкретных профессиональных задач, т. к. не определена типология профессионально направленных задач, решаемых с использованием математических знаний, и не разработаны обобщенные методы их решения. В результате каждая новая профессионально направленная задача предстает перед студентом новой проблемой. В результате такой учебной практики учебная мотивация студента понижается.

В качестве ведущей идеи реализации профессиональной направленности нами была выбрана идея Н. Ф. Талызиной: «При разработке целей обучения конкретному предмету, прежде всего, необходимо выделить основную систему задач, для решения которых готовится обучаемый» [3, с. 275].Если выявить типы профессиональных задач экономиста, решаемых с использованием математических знаний; разработать обобщенные методы решения таких задач, то это позволит однозначно определить объем и содержание опорных математических знаний, необходимых для реализации обобщенных методов.Формированиеобобщенных методов решения типовых профессиональных задач у будущих экономистов при обучении математике в вузе как деятельность определенного содержания, позволит выпускникам применять полученные математические знания в составе обобщенных методов, адекватным задачам их профессиональной деятельности.

Опираясь на эту идею, мы уточнили цель математической подготовки будущих экономистов как формирование обобщенных методов решения типовых профессиональных задач экономиста, требующих использования математическихзнаний. Под *типовой профессиональной задачей экономиста* (ТПЗ) будем понимать цель, которую экономист многократно ставит перед собой в процессе выполнения профессиональной деятельности. *Обобщенный метод решения* ТПЗ – последовательность взаимосвязанных обобщенных действий, направленных на достижение цели ТПЗ, т. е. получение конечного продукта ТПЗ с заданными свойствами. При этом под *обобщенным действием* мы понимаем результат обобщения конечных продуктов выполнения конкретной деятельности. *Опорные математические знания* – знания, необходимые и достаточные для выполнения обобщенного действия. Сформированность обобщенного метода решения ТПЗ означает, что человек способен применить этот метод для решения любой конкретной профессиональной задачи экономиста, относящейся к определенному типу. Обобщенные методы решения ТПЗ становятся стилем мышления экономиста, обеспечивают независимость от конкретных условий профессиональной деятельности, что повышает его мобильность и конкурентоспособность на рынке труда.

На основе анализа квалификационных характеристик экономистов и применения метода экспертных оценок была определена типология профессиональных задач экономиста, решение которых требует использования математических знаний:1) сбор и обработка экономической информации;2) нахождение или оценка значений показателей, характеризующих экономическую деятельность;3) выявление зависимости, её вида и свойств между показателями экономической деятельности; 4) прогнозирование будущих значений показателей экономической деятельности;5) планирование экономической деятельности.Типология профессиональных задач экономиста позволяет систематизировать множество частных примеров применения математики в экономике, разработатьобобщенные методы решения ТПЗ [2], опираясь на которые можно составить план решения любой конкретной задачи, относящейся к одному из выделенных типов.

Основные положения психолого-педагогической теории деятельности позволили выделить общую схему построения обобщенных методов решения типовых профессиональных задач, состоящую из следующих действий:

1) Выделить цель задачи, содержащую в формулировке вид деятельности, конечный продукт и его свойства.

2) Выделить экономическую деятельность, результатом или параметром которой является конечный продукт.

3) Выявить предмет деятельности и его существенные свойства, которые могут быть значимыми для получения конечного продукта, отвечающего требованиям задачи.

4) Построить математическую модель исходного состояния предмета деятельности: ввести математические понятия для описания его существенных свойств и указать законы, уравнения взаимосвязей между ними.

5) Выбрать математические методы и средства деятельности на основе требований к конечному продукту деятельности или на основе свойств имеющейся математической модели предмета деятельности.

6) Составить общий план деятельности по преобразованию предмета деятельности в конечный продукт с заданными свойствами в соответствии с выбранными методами и средствами.

7) Выполнить преобразование предмета деятельности в конечный продукт с заданными свойствами в соответствии с составленным планом.

8) Выделить существенные свойства полученного в результате преобразований конечного продукта, сравнить их с планируемыми при выделении цели задачи и дать их экономическую интерпретацию

9) Скорректировать, если необходимо, математическую модель предмета деятельности, выбор математических методов и средств деятельности и общий план деятельности.

На основе полученной общей схемы были разработаны обобщенные методы решения выделенных пяти типов профессиональных задач экономиста [2].

Модель непрерывного формирования обобщенных методов решенияТПЗ в процессе математической подготовки бакалавров экономики в вузе представлена в таблице.

В качестве основного дидактического средства обучения на междисциплинарном и профессиональном этапах математической подготовки экономистов в вузе используются соответственно псевдопрофессиональные и профессиональные задачи выделенных пяти типов. Основное отличие псевдопрофессиональной задачи от профессиональной заключается в цели деятельности. Целью псевдопрофессиональной задачи является применение математических знаний (в составе обобщенного метода решения) для решения профессиональной проблемы. Целью профессиональной задачи является собственно решение профессиональной проблемы.

В качестве основного дидактического средства обучения на междисциплинарном и профессиональном этапах математической подготовки экономистов в вузе используются соответственно псевдопрофессиональные и профессиональные задачи выделенных пяти типов. Основное отличие псевдопрофессиональной задачи от профессиональной заключается в цели деятельности. Целью псевдопрофессиональной задачи является применение математических знаний (в составе обобщенного метода решения) для решения профессиональной проблемы. Целью профессиональной задачи является собственно решение профессиональной проблемы.

К фундаментальным математическим дисциплинам в структуре математической подготовки экономистов относим такие дисциплины как «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Методы оптимальных решений». Состав прикладных математических дисциплин зависит от профиля подготовки экономиста. К таким дисциплинам можно, например, отнести дисциплины «Эконометрика», «Теория игр», «Исследование операций», «Финансовая математика».

Таблица 1. Модель математической подготовки бакалавровпо направлению «Экономика» в вузе на основе формирования обобщенных методов ТПЗ

Этап математической подготовки	**Цель этапа**	**Средства обучения**	**Учебные дисциплины**
Адаптационный (1 семестр)	Формирование действий выделения цели и планирования деятельности по решению задач	Учебные задачи школьного курса математики	Практикум по математике
Дисциплинарный, (2-4 семестры)	Формирование отдельных действий обобщенных методов решения ТПЗ	Учебные задачи вузовского курса математики	Фундаментальные математические дисциплины
Междисциплинарный, (3-7 семестры)	Формирование обобщенных методов решения ТПЗ	Псевдо-профессиональные задачи экономиста	Фундаментальные и прикладные математические дисциплины
Профессиональный, (7-8 семестры)	Формирование навыка самостоятельного применения обобщенных методов решения ТПЗ	Профессиональные задачи экономиста	Профильные дисциплины, производственная практика, дипломное проектирование

Роль преподавателей математических дисциплин в реализации профессионального этапа математической подготовки экономиста в вузе заключается в консультировании студентов и преподавателей экономических дисциплин по вопросам теории и методики применения обобщенных методов для решения ТПЗ экономистов, соруководстве учебными и дипломными проектами будущих экономистов.

Разработана методика формирования обобщенных методов решения ТПЗ на междисциплинарном этапе, построенная в соответствии с принципами психологической теории поэтапного формирования умственных действий (П. Я. Гальперин, А. Н. Леонтьев, Н. Ф. Талызина и др.), реализуемая в несколько этапов [4]:

1) *Этап стратегического планирования*: преподаватель выстраивает модульную структуру учебной дисциплины и определяет типы профессиональных задач экономиста, решение которых возможно на основе математических знаний каждого учебного модуля математической подготовки экономистов в вузе.

2) *Этап подготовки преподавателя*: преподаватель разрабатывает содержание обучения обобщенным методам решения ТПЗ на междисциплинарном этапе ма-

тематической подготовки экономистов в вузе. Виды деятельности преподавателя на этом этапе:разработать конкретные задачи каждого типа для решения в рамках учебных модулей;конкретизировать обобщенные методы решения ТПЗ при решении задач соответствующих типов.

3) *Мотивационный этап*: предложить решить несколькоконкретных ТПЗ одного типа. Поскольку метод решения не сформирован, возникает проблемная ситуация.

4) *Этап подготовки студентов*: студенты (под руководством преподавателя) разрабатывают методы решения ТПЗ, предложенных на мотивационном этапе.

5) *Методологический этап*: студенты самостоятельно (под руководством преподавателя) выделяют обобщенное содержание и последовательность действийметода решения ТПЗ данного типа.

6) *Обучающий этап*: студенты решают конкретные ТПЗ с опорой на разработанный обобщенный метод решения задач данного типа.

7) *Этап контроля*: студентам предлагают решить ТПЗ данного типа, проверяя не только правильность полученного результата, но и соответствие его действий при решении задачи последовательности действий обобщенного метода.

Как показала практика математической подготовки бакалавров по направлению «Экономика, формирование обобщенных методов решения ТПЗ не требует дополнительного учебного времени и способствует не только повышению учебной мотивации студентов, но и повышению качества математической подготовки в аспекте её профессиональной направленности.

Литература

1. Маркова А. К. Психология профессионализма. – М.: Знание, 1996. – 312 с.

2. Байгушева И. А. Профессионально направленная математическая подготовка экономистов в вузе. - Астрахань: Изд. дом«Астраханский университет», 2013. –172 с.

3. Талызина Н. Ф. и др. Пути разработки профиля специалиста. – Саратов: СГУ,1987.–176 с.

4. Байгушева И. А. Система формирования обобщенных методов решения профессиональных задач при математической подготовке экономистов в высшей школе. – Астрахань: Изд. дом «Астраханский университет», 2014. – 144 с.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В ШКОЛЕ, ЕГО РОЛЬ И ЗНАЧЕНИЕ

С.Н. Бычков

Московский институт открытого образования, Москва, Россия

e-mail: bytc@mail.ru

Аннотация: В работе рассматриваются проблемы мотивации в преподавании дисциплин физико-математического цикла в школе в зависимости от интересов учащихся. Показана ограниченность «прагматически-профессионального подхода» для формирования требуемой мотивации. Предлагается новый подход к формированию мотивации к изучению физики и математики у гуманитарно-ориентированных учащихся.

Ключевые слова: дисциплины физико-математического цикла, мотивация, историко-категориальный подход.

PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION IN SCHOOLS, ITS ROLE AND IMPORTANCE

Abstract: Problems of students' motivation in physico-mathematical education in school are considered depending on their personal interests. The limitations of a "pragmatical-professional approach" for the formation of the required motivation are shown. A novel approach for the formation of motivation in physical and mathematical education is proposed aiming at students with interests in the Humanities.

Keywords: sciences, motivation, historical-categorical approach.

Для физика или математика уже сама постановка вопроса о целесообразности обстоятельного изучения в школе наук, служащих основой современных технологий, выглядит довольно странной: «проблематизация» обучения этим дисциплинам подобна попытке рубить сук, на котором сидишь. Однако в действительности ситуация является не столь однозначной.

Для будущих инженеров и информатиков физика и математика – основа их предстоящей деятельности, так что проблемы мотивации при изучении данных предметов для них, конечно, не существует. Но эта профессиональная деятельность будет происходить, так сказать, «внутри» указанных дисциплин, когда специалист в полной мере опирается на лучшие достижения предшественников, не ставя под сомнение какие-либо основоположения наук о природе или количественных отношениях (известный философ Т. Кун называет это «нормальной наукой»; аналогичную позицию занимают и многие ученые-исследователи). А как быть, если учащийся полагает, что для его будущей профессии физика или математика не представляют первостепенного значения? С точки зрения «прагматически-профессионального подхода» у него нет особого резона разделять подход сверстников, уже работающих внутри «физико-математической парадигмы». Слова о возможной важности математики и физики для будущего развития «его профессии» вряд ли положительно скажутся на мотивации, поскольку на данный момент не ясно, какие именно разделы могут оказаться полезными завтра, а учить все подряд сегодня на случай, если что-то вдруг понадобится завтра, убедить себя трудно: ведь вероятен и вариант, когда ничего из выученного в будущей работе по профессии не окажется востребованным.

Для гуманитарно-ориентированных учащихся ситуация осложняется также тем, что в humanities в отличие от science практически не встречаются случаи, когда какой-то концепции удается занять доминирующее положение в мировой науке. В гуманитарном знании ситуация противоборства нескольких более или менее равноценных концепций – скорее правило, нежели исключение (как это имеет место в естествознании). Поэтому для гуманитариев «нормальная наука» в лучшем случае – труднодостижимый идеал.

Здесь, казалось бы, и можно попытаться привлечь внимание гуманитарно-ориентированных учащихся к физико-математическому естествознанию, беря в качестве авторитета, например, такого универсального ученого, как М.В. Ломоносов: «Математику уже затем учить надобно, что она ум в порядок приводит». Или привести мнение великого немецкого математика Д. Гильберта: «Я уверен: все, что может быть объектом научного исследования в целом, и постольку, поскольку оно созревает для оформления в теорию, прибегает к аксиоматическому методу и через него косвенно к математике. Обращаясь вперед, по направлению к более глубокому пласту аксиом, в дополнительном понимании мы достигаем более глубокого проникновения в сущность научного мышления и еще более ясно осознаем единство нашего знания. В свидетельствах аксиоматического метода, как представляется, математика призвана играть лидирующую роль в науке в целом» [1, с. 104]. Можно вспомнить также, что такая почтенная гуманитарная наука, как социология, первоначально называлась «социальной физикой» (что указывает на парадигмальную роль физической науки для зарождения обществознания).

Для представителей humanities, однако, мнения даже столь авторитетных в естествознании имен мало что значат: возможность уменьшения разногласий в своей среде они видят не в привлечении методов science, а прежде всего в развитии исследований внутри собственных научных дисциплин. Попытаемся поэтому абстрагироваться от конкретных имен и подойти к проблеме повышения мотивации изучения физико-математического естествознания «гуманитариями» более объективным образом.

Естественные и гуманитарные науки роднит одно простое обстоятельство: они созидаются людьми и, следовательно, имеют собственную историю. Естественные науки имеют более простой предмет изучения и развивались гораздо дольше, поэтому и с более или менее бесспорными истинами дело в них обстоит гораздо лучше, чем в науках гуманитарных. Данное обстоятельство имеет следствием тенденцию такого изложения истории физико-математического естествознания, когда имевшиеся в прошлом разноречивые воззрения оцениваются с позиций господствующей на данный момент парадигмы (нормальной науки). Только этим, например, можно объяснить значительно более высокую оценку атомизма Демокрита современной физикой по сравнению с физикой конца XIX в. В истории гуманитарных наук из-за отсутствия по настоящее время аналогичной естествознанию «нормальной науки» принято более нейтральное изложение соперничающих концепций (в частности, из-за невозможности, в отличие от естественных наук, ставить специальные «проверочные эксперименты»).

Может создаться впечатление, что имеющиеся различия в наличном состоянии science и humanities не дают возможности хотя бы частичного сближения мотивационных установок «физиков» и «лириков» в образовании посредством удачного использования истории школьных дисциплин, что история физики и история исторической науки, скорее, способствуют разделению, отчуждению «двух культур» (в терминологии Ч.П. Сноу), нежели их сближению. Между тем для повышения мотивации изучения физики и математики всеми категориями учащихся необходимо эти «две культуры» не разделять, а сближать.

Если дисциплинарные реалии современной истории науки не позволяют напрямую воспользоваться скрытыми в них потенциями в целях школьного образования, то можно попытаться использовать историю науки более опосредованным способом, прибегнув к помощи другой гуманитарной науки – философии.

Вероятно, наиболее почитаемый среди представителей естественных наук философ – И. Кант – развивал в рамках своего учения, обобщавшего достижения физики Ньютона, взгляд, что «мы не можем мыслить ни одного предмета иначе как с помощью категорий...» [2, с. 214]. Поскольку «категории не выводятся из природы и не сообразуются с ней как с образцом», то поэтому «возникает вопрос, как понять то обстоятельство, что природа должна сообразоваться с категориями, т. е. каким образом категории могут a priori определять связь многообразного в природе, не выводя эту связь из природы» [Там же]. Поскольку Кант считал, что «явления суть лишь представления о вещах, относительно которых остается неизвестным, какими они могут быть сами по себе» [Там же. С. 213], то ответ на поставленный вопрос фактически сводится к тому, что указанное выше обстоятельство «не более странно, чем то, что сами явления должны a priori сообразоваться с формой чувственного созерцания» [Там же]. Последнее же обусловлено психофизиологическим строением человеческого организма и тем самым инвариантно по отношению к «стилю мышления» той или иной культуры.

Восходящая к Канту вера во всеобщность категориального мышления, связанного с содержательными образными представлениями, была подорвана, однако, последующим развитием физико-математического естествознания. Крупный немецкий философ Э. Кассирер так описывает причины неудачи кантовской концепции: «Часто один и тот же ученый при объяснении того же самого феномена или родственного ему круга феноменов просто возводил рядом друг с другом совершенно различные образные представления. Даже столь фундаментальная работа, как "Электричество и магнетизм" Максвелла, дает пример пестрой последовательности разнородных картин, меняющихся с калейдоскопической быстротой» [3, с. 361]. Неудача Максвелла (и ряда других физиков) в придании уравнениям электромагнетизма степени наглядности, сопоставимой с наглядностью механики или термодинамики, подтолкнула к изменению взглядов в физике на то, что считать наилучшим способом объяснения природных явлений. Собственный вывод о том, что в физике XX в. «схематизм образов уступил свое место символизму принципов» [Там же. С. 366], Кассирер подкрепляет авторитетной цитатой из Г. Вейля: «Созерцаемые пространство и время уже не должны... служить посредником, с чьей помощью физика конструирует внешний мир; таковым становится четырехмерный континуум в абстрактно-арифметическом смысле. Если для Гюйгенса цвета были "действительными" колебаниями эфира, то теперь они оказываются лишь функциональными математическими процессами с периодическим характером, причем в этих функциях четыре независимые переменные выступают как репрезентации соотнесенного с координатами посредника. Все остальное есть лишь символическая конструкция в том точном смысле, что был введен в математику Гильбертом» [4, s. 80; цит. по: Кассирер Э. Философия символических форм. Т. 3. С. 367].

И вот здесь мы видим, что критика отстаивавшегося немецкими философами И. Кантом, И.Г. Фихте, Г.В.Ф. Гегелем взгляда на категориальную сущность человеческого мышления может проводиться сегодня не только с точки зрения физической науки, но и с точки зрения другой школьной дисциплины – информатики. В информатике учащиеся привыкают – или не привыкают – к мысли о том, что символизм формальных языков науки позволяет точнее описывать и изменять реальность, нежели опирающееся на естественные языки категориальное мышление. И снова это аргумент не в пользу «лириков»...

Допустим, что «физики» правы против «лириков» и что «символизм принципов» работает успешнее «схематизма образов» в технологической деятельности, опирающейся на достижения математики, физики и информатики, и вернемся к проблемам преподавания этих наук гуманитарно-ориентированным учащимся. В истории науки мы имеем дело не с природой как таковой и не с техникой как таковой, а с исследующими природу и созидающими технику людьми, с их целесообразной жизнедеятельностью. Никто еще не доказал (и вроде бы не пытался этого делать), что философские категории, описанные классической немецкой философией применительно к целесообразной человеческой жизнедеятельности задолго до научно-технической революции XX века, после этой революции перестали быть к ней применимы. Да, для описания природы и техники сегодня более удобными считаются символические языки науки, но для описания деятельности творцов науки и техники лучше философских категорий по-прежнему ничего не видно.

Чем хороши (и для преподавания в том числе) философские категории? Тем, что, в соответствии с Кантом, мы ими пользуемся, когда решаем ту или иную проблему, даже не отдавая себе в этом никакого отчета. Философия рассматривает категории как «наиболее мелкие единицы мышления» и позволяет разворачивать – в целях преподавания – индивидуальный опыт творцов науки и техники во всеобщее достояние повторяющих в сокращенном и «выпрямленном» виде этот опыт не обязательно столь же талантливых (или гениальных) учащихся школы.

Вернемся к началу рассматриваемой проблемы роли и значения физико-математического образования в школе. Как указывалось, для одних «прагматически-профессиональный подход» снимает с мотивацией все проблемы, но для других тот же самый подход приводит к прямо противоположному: нежеланию прикладывать серьезные усилия для овладения идеями физики и математики. Неразрешимость проблемы мотивации при изучении математики и естественных наук в рамках подобного прагматического подхода свидетельствует о том, что на базовом – в отличие от углубленного – уровне в основу школьного преподавания должен быть положен совершенно иной принцип. И на это (применительно к математике) уже достаточно давно указал Н.Х. Розов. По его убеждению, для учащихся, не предполагающих посвятить жизнь математике, естествознанию или технике, важно понимание концептуальных моментов математической теории (а это не предполагает выработку технических навыков математических исчислений) и действия математических законов в окружающем мире, применение их для научного объяснения явлений [5, с. 60].

Для иллюстрации (возможной) плодотворности историко-категориального подхода к преподаванию школьной математики рассмотрим пример геометрии (к опыту которой апеллировали и Ломоносов, и Гильберт) и, соответственно, аксиоматико-дедуктивного геометрического способа рассуждений. М.В. Ломоносов использовал этот метод для изложения химии, Гильберт применял его в своих физических исследованиях. В XX в. идеи Гильберта наибольшее воздействие оказали на математизацию экономической науки.

Если бы предсказание Гильберта оправдалось в полной мере и, наряду с экономикой, физика, биология и история также были бы перестроены на основе аксиоматического метода, то изучение строгих канонов дедуктивной геометрии действительно имело бы смысл, ибо оно подготавливало бы учащихся к использованию аксиоматики и дедукции в областях их будущей профессиональной деятельности. Однако этого не случилось: всеобщего прогресса в преобразовании разделов современной науки на принципах аксиоматико-дедуктивного метода не произошло.

Можно показать, что это не случайно. Аксиоматический метод с необходимостью возникает только в одной области знания, а именно, в той, в которой он исторически и был создан: в древнегреческой геометрии в IV в. до н.э. [6, с. 30-54]. В других науках (в качестве дополнительных примеров укажем на «Этику» Спинозы и аксиоматическое изложение механики Г. Гамелем) аксиоматико-дедуктивный метод был перенесен на чуждую ему почву и потому не стал основанием соответствующей «нормальной науки» (единственное исключение в непродолжительный период с начала 90-х гг. XX в. до 2008 г. составила западная Economics). Так, аксиоматизация Гамеля не поколебала ньютоновского гипотетико-дедуктивного изложения механики, которое и по сей день остается парадигмальным. Не обретя статус общенаучного метода, аксиоматико-дедуктивный подход не оправдал возлагавшихся на него надежд и в области преподавания, в том числе и самой математики.

С точки зрения Гильберта, на высказанное выше утверждение о необходимости аксиоматико-дедуктивного метода для одной только геометрии можно было бы возразить: «Как можно утверждать что-либо об аксиоматико-дедуктивном методе как таковом более определенным образом, чем утверждает геометрия о свойствах фигур посредством самого этого метода?» Историко-категориальный подход против подобного возражения может привести следующий аргумент: «Геометрия рассматривает фигуры и тела как независимо существующие от человеческой деятельности объекты и потому вынуждена постулировать их общие свойства в виде аксиом, в то время как описание возникновения идеи дедукции может опираться на безусловно существующие вместе с целесообразной человеческой жизнедеятельностью категории и потому не нуждается в каких-либо специальных аксиомах и постулатах».

В заключение обсуждения преподавания дисциплин физико-математического цикла сформулируем тезис: видимо, единственно возможный подход к решению проблемы повышения мотивации к их изучению в современном обществе состоит в том, чтобы «учить затем, чтобы понимать». Дело за «малым»: за конкретизацией этих общих идей применительно к отдельным разделам соответствующих учебных дисциплин. Реальная сложность заключается в том, что философия науки, которая изначально ставила перед собой именно такие общие задачи, на сегодняшний день так и не получила на них удовлетворительного ответа. И решать их сегодня приходится исходя не из мотиваций «высокой» науки, а из потребностей «приземленной» педагогики.

Литература

1. Гильберт Д. Математическое мышление // Методологический анализ оснований математики. М.: Наука, 1988. С. 97–104.

2. Кант И. Соч. Т. 3. М.: Мысль, 1964. 798 с.

3. Кассирер Э. Философия символических форм. Т. 3. Феноменология познания. М.– СПб., 2002. 397 с.

4. Weyl H. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. Munchen, 1927.

5. Розов Н.Х. Гуманитарная математика // Математика в высшем образовании. 2003. № 1. С. 53–62.

6. Бычков С.Н., Зайцев Е.А. Математика в мировой культуре. М.: Изд-во РГГУ, 2006. 228 с.

СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК ФАКТОР РАЗВИТИЯ МОТИВАЦИИ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

С.Н. Дворяткина[1], Р.А. Мельников[2]

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец, Россия e-mail: [1]sobdvor@yelets.lipetsk.ru, [2]roman_elets_08@mail.ru

Аннотация: В статье заявлена проблема выявления ключевых условий, влияющих на формирование у студентов положительного отношения к изучению математики в вузе, связанных с организацией контроля и оценки учебной деятельности. Во введении актуализируется проблема изучения корреляции между силой мотива и успешностью проявления учебной деятельности, обосновываются ее психологические основы. В основной части установлена роль внешних и внутренних мотивов учебной деятельности; обосновано для установления доминирующего мотива использование в процессе обучения задач, допускающих несколько решений; проиллюстрировано решение конкретной задачи несколькими способами. В заключении даны рекомендации по использованию задач с многовариантным решением.

Ключевые слова: методика обучения математике в вузе, внешние и внутренние мотивы учебной деятельности, задачи с многовариантным решением.

CONTENT FEATURES OF THE ORGANIZATION OF CONTROL OF KNOWLEDGE IN MATHEMATICS OF STUDENTS AS FACTOR OF DEVELOPMENT OF MOTIVATION OF EDUCATIONAL ACTIVITY

Abstract: In article the problem of identification of the key conditions influencing formation at students of the positive relation to studying of mathematics in higher education institution, bound to the organization of monitoring and an assessment of educational activity is declared. In introduction the problem of studying of correlation between power of motive and success of manifestation of educational activity is staticized, its psychological bases locate. In the main part the role of external and internal motives of educational activity is established; use in the course of tutoring of the tasks allowing some decisions is proved for establishment of the dominating motive; the solution of a specific objective in several ways is illustrated. In the conclusion recommendations about use of tasks with the multivariant decision are made.

Keywords: the technique of training in mathematics in higher education institution, external and internal motives of educational activity, a task with the multivariant decision.

В последние годы усилилось понимание педагогами и психологами роли положительной мотивации к учению в обеспечении успешного овладения знаниями и умениями. Осознание высокой значимости мотива учения привело к формированию дидактического принципа мотивационного обеспечения учебного процесса. Исследователями была установлена корреляция между силой мотива в процессе обучения и успешностью проявления учебной деятельности, ее эффективностью, а также степенью освоения выбранной специальности студентами [1]. Выявлено, что высокая позитивная мотивация играет роль компенсирующего фактора в случае недостаточно высоких способностей; в обратном направлении этот принцип не срабатывает. Таким образом, для успешной учебы наличие фактора позитивной мотивации оказывается сильнее, чем фактор интеллекта.

Однако достаточно сложно выделить один ведущий мотив в учебной деятельности. Ряд исследователей в качестве основополагающих мотивов выделяют профессиональные и личного престижа (А.Н. Печников, Г.А. Мухина), другие прагматические (Ф.М. Рахматулина), третьи познавательные (В.М. Дамиров). Доказано, что на разных курсах роль доминирующих мотивов может меняться. Следовательно, мотивацию будем рассматривать со структурных позиций, как некую совокупность мотивов. Согласно схеме В.Д. Шадрикова [2], мотивация обусловлена потребностями и целями личности, уровнем притязаний и идеалами, условиями деятельности и мировоззрением, убеждениями и направленностью личности. С учетом этих факторов происходит принятие решения, формирование намерения. Поэтому следует говорить о полимотивированном характере учебной деятельности, предполагающей наличие иерархии побудительных оснований с точки зрения влияния на конечный результат. Парадоксально, что побудительной силы внешних мотиваторов может быть достаточно для достижения высоких результатов в учении, но хорошее знание учебного предмета еще не означает, что познавательные мотивы сформированы.

Поскольку в рамках деятельностной парадигмы всякое действие может быть описано на двух уровнях его организации – субъективном и объективном, то исследование мотивации организуется по схеме «двойной стимуляции», например, наличие двух целей — вещественной и познавательной (по А.Н. Леонтьеву), или двух типов задач – объектно-ориентированных и субъектно-ориентированных (по В.А. Петровскому), или двух видов мотивов — объектной и субъектной ориентации (по А.М. Матушкину).

В связи с вышеизложенным считаем, что ведущими мотивами учебной деятельности у студентов являются следующие группы: внешние мотивы, удовлетворяющие задаче социальной адаптации личности (жизнеобеспечения, комфорта, социального статуса) и внутренние мотивы, решающие задачи личностного развития (общей активности, творческой активности, социальной полезности)[3]. В педагогической практике различие в мотивации обнаруживается в отношении обучаемых к различным проверочным работам: на оценку или для установления личностной самооценки. Очевидно, что вопрос выбора содержания учебного материала на этапе оценки учебной деятельности для установления доминирующего мотива представляется наиболее важным и интересным.

Одним из основных направлений современной психологии развития является операционализация философского принципа М.К. Мармадашвилли о том, что развитие осуществляется в ситуации невозможности. Поэтому необходимы специальные средства и механизмы, обеспечивающие понимание, объективацию и описание феноменов развития [4]. В этом аспекте любая проблемная ситуация, с которой сталкивается обучающийся, не только несет в себе потенциал для него в виде "зоны ближайшего развития" но и обеспечивает вероятность проявления потенциальных возможностей для себя, развития объективной мотивации учебной деятельности. Действия с операторами в пределах заданной неопределенности математической задачи, с одной стороны моделируют ситуацию развития, с другой — объективизируют отдельные составляющие процесса развития (мышления, памяти и др.) в виде деятельностного преодоления субъектом различных ограничений.

Избыточность познавательной или личностной активности проявляется в поиске (или выборе из возможных вариантов) оптимального решения. В математической науке установлено, что каждое событие должно быть оценено более чем одним способом, поэтому от обучаемых следует требовать многовариантного решения проблем. Использование в процессе обучения задач, допускающих несколько решений, направлено на активизацию мыслительной деятельности, интеллектуальной инициативы, способности самостоятельно добывать знания, используя потенциал математики; стимулирует личностное развитие и приводит к аккумулированию профессионального мастерства. Приведем пример задания, имеющего многовариантное решение: найти решение задачи Коши:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x),\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1.$$

Для решения уравнения такого вида можно использовать следующие методы:

1) опираясь на теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, применить метод неопределенных коэффициентов;

2) использовать метод вариации констант;

3) применить операционный метод: найти изображение искомой функции (по Лапласу), восстановить оригинал методом неопределенных коэффициентов;

4) применить операционный метод: заменить правую часть уравнения – функцией Дирака, получить изображение, воспользоваться формулой Дюамеля;

5) исходя из формулы Коши многократного интегрирования функции, преобразовать данное дифференциальное уравнение в интегральное уравнение Вольтерры второго рода, решить полученное уравнение любым из известных способов (выбор способа зависит от формы ядра).

1 способ (метод неопределенных коэффициентов).

1) Составим однородное дифференциальное уравнение, соответствующее данному неоднородному уравнению:

$$y'' - y = 0 \tag{$*$}$$

Его характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$k^2 - 1 = 0.$$

Очевидно, что $k = \pm 1$. Тогда

$$y_0 = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$$

– общее решение уравнения (*).

2) Частное решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$\widetilde{y} = x \cdot (Ax + B) \cdot e^x$$

или

$$\widetilde{y} = (Ax^2 + Bx) \cdot e^x.$$

3) Найдем $\widetilde{y'}$ и $\widetilde{y''}$.

$$\widetilde{y'} = (Ax^2 + (2A + B) \cdot x + B) \cdot e^x,$$

$$\widetilde{y''} = (Ax^2 + (4A + B) \cdot x + 2A + 2B) \cdot e^x.$$

4) Подставив $\widetilde{y}$, $\widetilde{y'}$, $\widetilde{y''}$ в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$(Ax^2 + (4A + B) \cdot x + 2A + 2B) \cdot e^x - (Ax^2 + Bx) \cdot e^x = xe^x.$$

Сократим обе части последнего равенства на e^x и преобразуем результат такого упрощения к виду:

$$4Ax + 2A + 2B = x.$$

Ясно, что

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 2A + 2B = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Тогда $\widetilde{y} = (\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x)e^x$.

5) Общее решение исходного уравнения будем искать в виде $y = y_0 + \widetilde{y}$ (по теореме о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения). Значит,

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x)e^x$$

или

$$y = (\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + C_1)e^x + C_2e^{-x}. \tag{1}$$

6) Для нахождения значений констант C_1 и C_2 будем использовать начальные условия. Ясно, что

$$y(0) = C_1 + C_2 = \frac{1}{4}. \tag{2}$$

Далее

$$y' = (\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + C_1)e^x - C_2e^{-x}.$$

Поэтому

$$C_1 - \frac{1}{4} - C_2 = 0. \tag{3}$$

7) Решив систему, составленную из уравнений (2) и (3), получим, что $C_1 = \frac{1}{4}$ и $C_2 = 0$.

Ответ: $y = \frac{1}{4}(x^2 - x + 1)e^x$.

2 способ (метод вариации констант).

1) Составим однородное дифференциальное уравнение, соответствующее данному неоднородному уравнению:

$$y'' - y = 0 \tag{$*$}$$

Его характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$k^2 - 1 = 0.$$

Очевидно, что $k = \pm 1$. Тогда

$$y_0 = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$$

– общее решение уравнения (*).

2) Варьируем константы, т.е.

$$y = C_1(x) \cdot e^x + C_2(x) \cdot e^{-x} \tag{$**$}$$

3) Согласно методу вариации констант далее надо решить систему вида:

$$\begin{cases} C'_1(x)\cdot y_1 + C'_2(x)\cdot y_2 = 0, \\ C'_1(x)\cdot y'_1 + C'_2(x)\cdot y'_2 = f(x). \end{cases}$$

У нас $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $f(x) = xe^x$.
Поэтому будем иметь

$$\begin{cases} C'_1(x)\cdot e^x + C'_2(x)\cdot e^{-x} = 0, \\ C'_1(x)\cdot e^x - C'_2(x)\cdot e^{-x} = xe^x. \end{cases}$$

Сложим почленно уравнения этой системы. Получим:

$$2C'_1(x)e^x = xe^x, \quad C'_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad C_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + \widetilde{C}_1$$

Из первого уравнения системы с учетом, что $C'_1(x) = \frac{1}{2}x$ следует:

$$\frac{1}{2}x\cdot e^x + C'_2(x)\cdot e^{-x} = 0$$

$$C'_2(x) = -\frac{1}{2}xe^{2x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}\int xe^{2x}dx.$$

Итегрируя по частям, получим

$$C_2(x) = -\frac{1}{4}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + \widetilde{C}_2$$

Тогда по формуле (**)

$$y = \left(\frac{1}{4}x^2 + \widetilde{C}_1\right)e^x + \left(-\frac{1}{4}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + \widetilde{C}_2\right)e^{-x}$$

или

$$y = \frac{1}{4}x^2e^x + \widetilde{C}_1e^x - \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{4}e^x + \widetilde{C}_2e^{-x}$$

То есть

$$y = \widetilde{C}_1e^x + \widetilde{C}_2e^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)e^x$$

Используем начальные условия

$$y(0) = \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \Rightarrow \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2 = 0.$$

$$y' = \widetilde{C}_1e^x - \widetilde{C}_2e^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x$$

$$y'(0) = \widetilde{C}_1 - \widetilde{C}_2 = 0$$

Значит,

$$\begin{cases} \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2 = 0, \\ \widetilde{C}_1 - \widetilde{C}_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_2 = 0.$$

Таким образом,

$$y = \frac{1}{4}\left(x^2 - x + 1\right) \cdot e^x.$$

Этот результат полностью соответствует тому ответу, который был получен способом 1.

3 способ (операционный метод)

1) Пусть $y(x)$ – функция оригинал, то есть $y \doteqdot Y(p)$. Тогда по свойству дифференцирования оригинала

$$y' \doteqdot p \cdot Y(p) - \frac{1}{4}; \quad y'' \doteqdot p^2 \cdot Y(p) - \frac{1}{4}p.$$

По таблице оригиналов и изображений имеем:

$$x \cdot e^x \doteqdot \frac{1}{(p-1)^2}.$$

2) Составим операторное уравнение, соответствующее данному дифференциальному:

$$p^2 Y(p) - \frac{1}{4}p - Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Решим его относительно $Y(p)$:

$$Y(p) \cdot (p^2 - 1) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{4}p;$$

$$Y(p) = \frac{4 + p(p-1)^2}{4(p-1)^2(p^2-1)} = \frac{4 + p(p-1)^2}{4(p-1)^3(p+1)} =$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{4}p(p^2 - 2p + 1)}{(p-1)^3(p+1)} = \frac{1 + \frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}p}{(p-1)^3(p+1)}.$$

3) Разложим полученную дробь на элементарные дроби:

$$\frac{\frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}p + 1}{(p-1)^3(p+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{(p-1)^3} + \frac{D}{p+1}$$

или

$$\frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}p + 1 = A(p-1)^2(p+1) - B(p^2-1) + C(p+1) + D(p-1)^3.$$

Раскроем скобки в правой части этого равенства и перегруппируем слагаемые:

$$\frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}p + 1 = (A+D)p^3 + (-A+B-3D)p^2 + (-A+C+3D)p + (A-B+C-D).$$

Очевидно, что

$$A = \frac{1}{4};\ B = -\frac{1}{4};\ C = \frac{1}{2};\ D = 0.$$

Значит,

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{4}}{p-1} - \frac{\frac{1}{4}}{(p-)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(p-1)^3}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, будем иметь:

$$y = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{4}x^2e^x$$

или

$$y = \frac{1}{4}(x^2 - x + 1)e^x.$$

Учитывая, что одним из ключевых условий, влияющим на формирование у студентов положительного отношения к учебе, в частности, на изучение математики, является организация контроля и оценки учебной деятельности, то использование задач, имеющих многовариантное решение, представляется вполне оправданным и перспективным, что может быть реализовано, например, в семестровом задании. Разработка подобных заданий удачно встраивается в бально-рейтинговую систему оценки учебной деятельности студентов. За решение подобной задачи может применяться повышающий коэффициент (т.е. «базовый балл» за решение задачи одним способом умножается на коэффициент, численно равный количеству правильно приведенных решений). Предлагаемый подход будет полезен для разработки современных учебно-методических комплексов и рабочих программ.

Литература

1. Гребенюк О.С., Гребенюк Т.Б. Основы педагогики индивидуальности: учебное пособие. Калининград: Янтарный сказ, 2000. 572с.

2. Шадриков В.Д. Введение в психологию: мотивация поведения. М.: Логос, 2001. 136 с.

3. Дворяткина С.Н. Развитие вероятностного стиля мышления в процессе обучения математике: теория и практика. М.: ИНФРА-М, 2013. 272 с.

4. Эльконин Д.В. Введение в психологию развития (в традиции культурно-исторической теории Л.С. Выгодского). М.: Тривола, 1994. 168 с.

ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА СТУДЕНТОВ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВЕ РАБОТЫ С ОБЛАКОМ ПРОГРАММИРОВАНИЯ WOLFRAM

Е.М. Ганичева

Вологодский государственный педагогический университет, Вологда, Россия

e-mail: emg-ca@mail.ru

Аннотация: В статье рассматривается использование облачной версии системы «Математика» для формирования познавательного интереса студентов к обучению математике в вузе.

Ключевые слова: познавательный интерес, информационные технологии в обучении математике, система символьной математики.

FORMATION OF COGNITIVE INTEREST OF STUDENTS TO STUDYING OF MATHEMATICS ON THE BASIS OF WORK WITH THE WOLFRAM PROGRAMMING CLOUD

Abstract: In article use of the cloudy version of Mathematics system for formation of cognitive interest of students to training in mathematics in higher education institution is considered.

Keywords: cognitive interest, information technologies in training in mathematics, system of symbolical mathematics.

Одной из ведущих целей образования в информационном обществе является формирование устойчивой мотивации к обучению, развитию, творчеству и познанию в течение всей жизни. В любом виде деятельности необходимо постоянно развиваться, совершенствовать свои умения, обладать способностями системного видения ситуации и принимать решения с учетом многих факторов.

Компонентом внутренней мотивации является познавательный интерес. Г.И. Щукина определяет познавательный интерес как избирательную направленность личности, обращенную в область познания к её предметной стороне и к самому процессу овладения знаниями [4]. Он может быть охарактеризован тремя признаками: положительными эмоциями по отношению к деятельности, присутствием познавательного компонента эмоций, наличием мотива. Собственно, мотив и является результатом самой деятельности. Поэтому, организуя образовательный процесс, необходимо обеспечить возникновение позитивных переживаний относительно познавательной деятельности, её форм, методов, содержания. В таком случае эффективными становятся процессы памяти, мышления, внимания. То, что требует напряжения, но в то же время является посильным, делать интересно.

Изучение курса геометрии высшей школы предполагает наличие у студентов высокого уровня абстрактного мышления, способности представить пространственные геометрические объекты. Решение задач на определение характеристик геометрических объектов путем формальных вычислений не способствует пониманию изучаемого материала. В такой ситуации использование инструмента, с помощью которого можно было бы наглядно представить линии, поверхности, выполнить сложные вычисления могло бы повлиять на развитие познавательного интереса, целостного представления о математических объектах.

Одним из таких инструментов является система символьных, графических и численных вычислений «Математика», где для визуализации математических объектов используются средства дву- и трехмерной графики [1].

По своей сущности система «Математика» является языком программирования высокого уровня, позволяющимпользователю реализовать как процедурный, так и функциональный стиль программирования, а также правила преобразования символьных выражений. Система является удобным инструментом математических исследований, поскольку позволяет применить разнообразные численные методы.

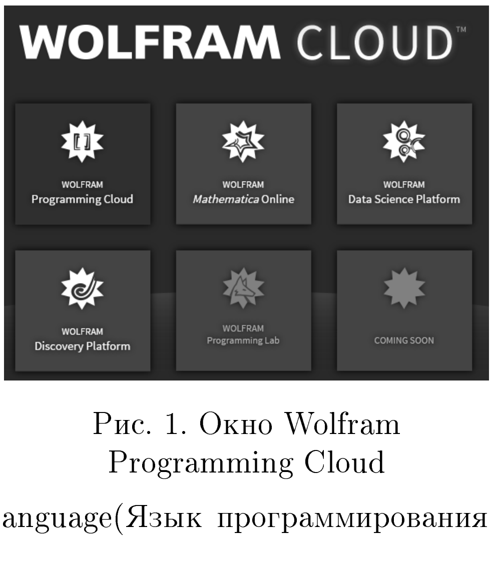


Рис. 1. Окно Wolfram Programming Cloud

В июне 2014 года стало доступным для пользователей Wolfram Programming Cloud (Облако программирования Wolfram–www.wolframcloud.com) (Рис.1) — первый объект среди продуктов, в основе которых новый язык программирования Wolfram Language(Язык программирования

Wolfram).В настоящее время любой зарегистрированный пользователь, имеющий доступ к сети Интернет, получает возможность пользоваться этой системой.

Облако программирования Wolfram — это приложение языка Wolfram, которое разработано для программирования, создания и развертывания облачных программ.

Работа с облачной версией не требует серьёзной подготовки. Необходимо только зайти в Wolfram Programming Cloud из любй программы - обозревателя под своим именем и выбрать пункт Create a new notebook.При этом откроется окно блокнота, на рабочем поле которого можно вводить код.

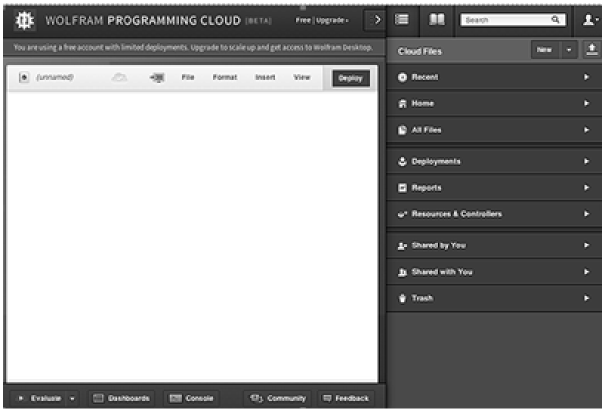


Рис. 2. Окно блокнота

Свойство интерактивности обеспечивает возможность сразу же выполнить вычисления или символьные преобразования, построить графические объекты и увидеть результат непосредственно в блокноте.

Например, при вводе команды

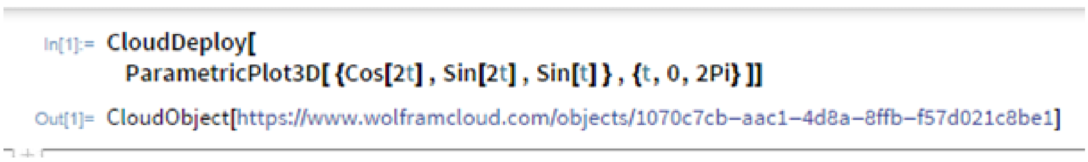
ParametricPlot3D[Cos[2t],Sin[2t],Sin[t],t,0,2Pi]

и нажатии клавиш Shift+Enter на экране будет построена кривая Вивиани, параметрические уравнения которой имеют вид:

$$x(t) = \cos 2t;\ y(t) = \sin 2t;\ z(t) = \sin t, \text{ где } t \in [2, 2\pi].$$

Одно из самых важных достижений Wolfram Programming Cloud заключается в том, что оно позволяет использовать Wolfram Language для того, чтобы развернуть эту функцию в облаке.С использованием интерфейса программирования приложений Web API реализовать это в языке Wolfram просто. Для этого достаточно создать символьную функцию API, а затем поместить её в облако. После этого можно вызвать эту API функцию, перейдя по соответствующему URL - адресу. Записанный код на языке Wolfram будет выполнен в Облаке Wolfram и мы получим результат в том месте, откуда мы вызывали API функцию, в данном случае в виде PNG-изображения:

CloudDeploy[ParametricPlot3D[Cos[2t],Sin[2t],Sin[t],t,0,2Pi]]


```
In[1]:= CloudDeploy[
          ParametricPlot3D[{Cos[2t], Sin[2t], Sin[t]}, {t, 0, 2Pi}]]

Out[1]= CloudObject[https://www.wolframcloud.com/objects/1070c7cb-aac1-4d8a-8ffb-f57d021c8be1]
```

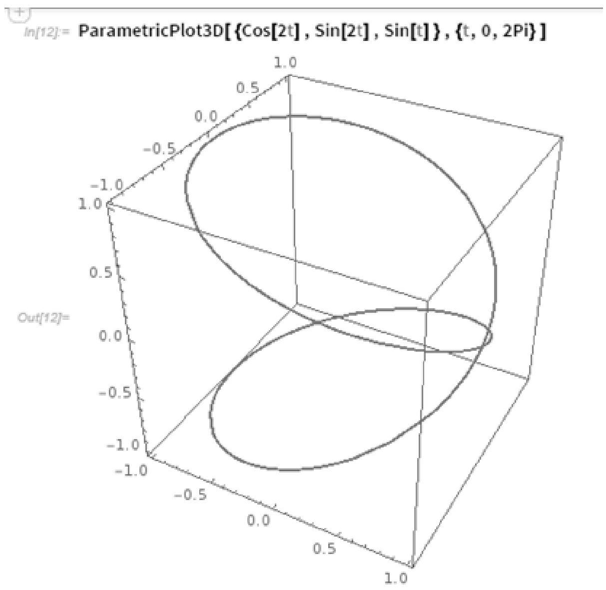


Рис. 3. Кривая Вивиани

Ясное представление о внешнем виде кривой в пространстве, безусловно, будет для студентов стимулом к решению задач, например, такого типа [3]:

Дана винтовая линия: $x = \arccos t$, $y = \arcsin t$, $z = bt$. Написать уравнения главной нормали, бинормали, соприкасающейся плоскости, спрямляющей плоскости и найти координатные векторы канонического репера в произвольной точке линии.

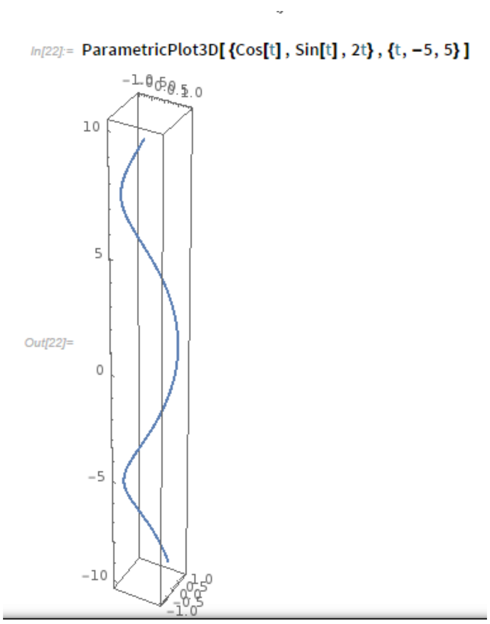


Рис. 4. Кривая в пространстве

Основным источником интереса к учебной деятельности является прежде всего ее содержание. В данном случае обучающийся осваивает способы действия с новым для него инструментом, приобретает практический опыт работы с математическими объектами.

Разумеется, применение такого средства обучения потребует дополнительных усилий со стороны преподавателя. Это касается, прежде всего, разработки новых типов заданий, организационных форм работы, способов взаимодействия, в том числе сетевого [2]. При этом, учитывая, что количество часов аудиторных занятий весьма ограничено, следует задуматься об организации самостоятельной деятельности с использованием средств современных информационных технологий. Чтобы усилить стимулирующее влияние содержания, необходимо четко соблюдать требования принципов научности, систематичности и последовательности, связи обучения с жизнью и практикой.

Осваивая приёмы работы в Облаке программирования Wolfram, студенты имеют возможность ознакомиться с готовыми интерактивными модулями для выполнения вычислений (Рис.5), пользоваться встроенной справочной системой, содержащей

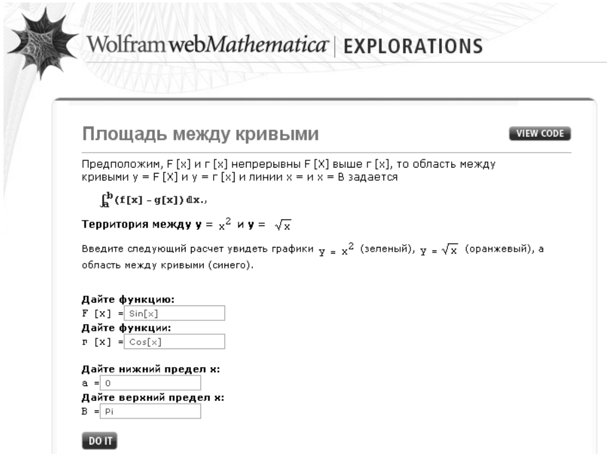


Рис. 5. Окно модуля «Исследования»

сведения о нескольких тысячах функций и самостоятельно научиться применять их, тем самым поднимаясь на особую стадию развития познавательного интереса –интереса творческого.

Литература

1. Воробьёв Е.М. Введение в систему символьных, графических и численных вычислений «Математика -5». М.: «ДИАЛОГ-МИФИ», 2005. 368 с.

2. Тестов В.А. Переход к новой образовательной парадигме в условиях сетевого пространства //Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского.2012. № 4-1. С.50-56.

3. Сборник задач по геометрии: Учеб.пособие для студентов мат. и физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В.Т.Базылев, К.И.Дуничев, В.П.Иваницкая и др.; Под ред. В.Т.Базылева. М.:Просвещение, 1980. 238 с.

4. Щукина Г.И. Педагогические проблемы формирования познавательного интереса учащихся. М.: Педагогика, 1968.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ-ГУМАНИТАРИЕВ

Е.А. Ефимова

Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия

e-mail: `yefimova-elena@yandex.ru`

Аннотация: Обсуждаются проблемы, возникающие при обучении математике будущих специалистов в области информационных технологий, которые ориентированы на приложения в гуманитарных областях знаний.

Ключевые слова: математика, информационные технологии, гуманитарный университет, интеллектуальные системы, робототехника.

SOME PROBLEMS IN TEACHING MATHEMATICS TO THE HUMANITIES STUDENTS

Abstract: The problems of teaching mathematics to Humanities University students who specialize in the field of information technology and focus on applications in the humanities fields are discussed.

Keywords: mathematics, information technology, university of humanities, intelligent systems, robotics

Отделение интеллектуальных систем РГГУ выпускает специалистов в области информационных технологий, ориентированных на приложения в гуманитарной сфере, прежде всего, в лингвистике, социологии, психологии и психиатрии, юриспруденции и политологии. Подобные специалисты должны иметь хорошее представление о предметной области, а также иметь возможность тесно взаимодействовать с исследователями, работающими в данных областях. Поэтому сразу следует отметить, что готовить специалистов в области информационных технологий должны не только технические, но и гуманитарные университеты. Компьютерные технологии в настоящее время развиваются настолько быстро, что их область применения в гуманитарных областях знаний постоянно расширяется.

Подготовка специалиста в области информационных технологий в гуманитарном университете имеет свою специфику. Прежде всего, она определяется основной областью приложений, которую составляют гуманитарные науки. Специалисты должны иметь хорошее представление о предметной области, поэтому студенты должны на достаточно серьезном уровне изучать гуманитарные дисциплины. Кроме этого, гуманитарные знания слабо формализованы, точные методы исследования довольно часто не применимы, соответственно, для них необходимо разрабатывать и использовать свои, специфические методы исследования. С другой стороны, специалист в области информационных технологий должен иметь достаточную техническую подготовку.

Где бы ни осуществлялась подготовка специалиста в области информационных технологий, основное содержание его обучения составляют математика и программирование.

Большинство кандидатских диссертаций, которые защитили выпускники отделения, составляют диссертации по техническим наукам (в области информационных технологий). Подавляющее большинство из них связано с приложениями в различных областях знаний, прежде всего, гуманитарных (но не только), такого метода интеллектуального анализа данных как ДСМ-метода автоматического порождения гипотез. Каждая область применения требует разработки своего способа представления знаний, модификации алгоритмов и своей «настройки» автоматических рассуждений. Приложения математической логики являются одним из основных направлений, развивающихся на отделении, поэтому вполне естественно, что студенты изучают много курсов, связанных с математической логикой.

Другим большим направлением исследований отделения является автоматическая обработка текстов на естественном языке, в рамках которого создаются системы морфологического и синтаксического анализа. Студенты изучают курсы синтаксиса, семантики, лексикографии, математической лингвистики, методы автоматической обработки текста.

Еще одним направлением является разработка системы онтологий, в которой для представления знаний используется категорный подход. Студенты строят примеры описания понятий в виде алгебраических систем, а также изучают основные определения теории категорий.

Кроме этого, разрабатываются программы для специалистов в области стиховедения, в которых для анализа стихотворных текстов используются методы математической статистики, а также специалистов в других областях гуманитарного знания.

Недавно появилось новое направление — робототехника, которое не только требует повышения уровня владения математическими методами, но и предоставляет большие возможности для их практического применения. Оно может, с одной стороны, стимулировать студентов заниматься математикой, с другой стороны, помочь студентам в овладении некоторыми математическими понятиями.

Итак, основное противоречие в обучении специалистов в области информационных технологий в гуманитарном университете заключается в том, что, с одной стороны, студенты должны иметь предпочтения в области гуманитарных наук, с другой стороны, в результате обучения они должны стать техническими специалистами.

На отделение интеллектуальных систем РГГУ нередко приходят выпускники физико-математических классов, которые сознательно выбирают место учебы. Вместе с тем значительное количество студентов заканчивает гуманитарные классы средних учебных заведений и изначально не имеют достаточного представления о специальности, которую они собираются освоить. В процессе обучения студенты постепенно становятся все более самостоятельными. Но базовые математические дисциплины изучаются на младших курсах. Поэтому здесь следует учитывать их предпочтения, а также особенности их восприятия.

Восприятие математики гуманитариями отличается от восприятия технарями. Студенты-технари спокойно относятся к сложным понятиям или к тому, что они что-то не поняли сразу, им представляется естественным разобраться с этим вне аудитории, в процессе самостоятельной работы. Для студентов-гуманитариев это недопустимо. Если первые, как правило, с удовольствием решают головоломки и популярные задачи и смело берутся за решение нестандартных задач, то вторые боятся задач, которые не понятно как решать. Они теряются, если метод решения задачи им не известен, такие задачи вызывают у них дискомфорт и отторжение. В то же время, они с удовольствием применяют понятные для них методы к решению несложных задач. Следует подчеркнуть, что это относится к студентам, которые занимаются математикой довольно много (студенты более «чистых» гуманитарных направлений нередко испытывают трудности в том, чтобы «подставить цифры вместо букв» в готовых формулах, потому что эти действия в принципе вызывают у них неприятие). Это же относится и к программированию. Если студенты–технари предпочитают придумать свою реализацию чего-либо, то студенты-гуманитарии должны, прежде всего, понять готовые методы решения. Поэтому для студентов гуманитарных направлений необходимо использовать большее количество примеров, чем для студентов технических направлений. Кроме этого, следует учитывать содержательную часть примеров и упражнений. Если для среднего студента-технаря написание программы, которая находит ранг матрицы небольшого размера, не является проблемой, то для студента-гуманитария, изучающего программирование, подобные задачи ставить нецелесообразно. Итак, необходимо различать будущего программиста-технаря и будущего программиста-гуманитария.

Различие в предпочтениях будущих специалистов в области информационных технологий требует использования различных подходов к изложению в учебной литературе. Отметим, что имеется довольно большое количество учебников и учебных пособий по математике для студентов, изучающих программирование (хотя и не такое большое, как для студентов, специализирующихся в области экономики и управления). Но явно недостаточно учебной литературы, в которой учитывалась бы специфика подготовки специалиста в области информационных технологий в гуманитарном университете. Проблема заключается в том, какой должна быть эта литература.

На наш взгляд, литература для будущих программистов-гуманитариев не должна отличаться более поверхностным изложением от литературы для программистов-технарей. Основное отличие должно заключаться в выборе тем и примеров. Следует также отметить, что имеющиеся аудиторные часы не позволяют использовать большое количество примеров непосредственно на занятиях. Поэтому у студента должна быть возможность изучить вопрос с помощью подходящей литературы.

Необходимость введения сложных понятий требует специального подбора таких примеров, которые были бы доступны и интересны, а также полезны в практике программирования. Для повышения уровня математической культуры студентов-гуманитариев хорошим подспорьем являются головоломки и популярные задачи. Для иллюстрации математических понятий следует выбирать, по возможности, наиболее простые занимательные задачи, такие, которые студенты смогли бы легко решить. При использовании более трудной задачи стоит привести ее решение студентам сразу или почти сразу, иначе они могут перестать воспринимать информацию. Занимательных задач не должно быть много в одном курсе из-за ограниченного числа часов.

Ниже приведены примеры занимательных задач, которые полезны как для иллюстрации математических понятий, так и для практики программирования.

1. Задача о переливаниях.

Имеется два кувшина объемом восемь и пять литров и неограниченный источник воды. Необходимо отмерить четыре литра воды.

Исходная задача легко решается. Далее она обобщается на случай кувшинов, объемы которых равны m и n литров, где $m > n$. Требуется отмерить k литров воды за наименьшее количество переливаний. Здесь m, n и k — целые неотрицательные числа. Если потребовать, чтобы нужное количество литров воды оказалось в большем кувшине, а меньший кувшин был пустым, то оптимальное решение единственно. Для каких значений m, n и k задача разрешима? Как доказать, что оптимальное решение единственно? Как по значениям m, n и k найти количество шагов в оптимальном решении, не находя самого решения?

Практика программирования. Написать программу, которая находит оптимальный алгоритм переливания. *Дополнительный вопрос*: привести примеры таких значений m, n и k, чтобы оптимальное решение содержало не менее миллиона шагов.

Если студенты математических направлений должны уметь сами найти ответы на перечисленные выше вопросы, то для будущих программистов-гуманитариев эти вопросы могут послужить только для привлечения внимания к теме делимости целых чисел. Для них следует привести подробные ответы на все вопросы или предоставить им возможность прочитать об этом.

В практике программирования задача полезна тем, что знание ответов на эти вопросы существенно упрощает написание программы для таких данных, в которых требуется сделать большое количество переливаний.

2. Задача о рыцарях и оруженосцах и задача о миссионерах и каннибалах.

Первая задача. Три рыцаря, каждый со своим оруженосцем, должны переправиться с левого берега реки на правый берег с помощью двухместной лодки. Ни один оруженосец не может находиться, где бы то ни было, без своего рыцаря в присутствии чужого рыцаря. Как организовать переправу?

Вторая задача. Три миссионера и три каннибала хотят переправиться с левого берега реки на правый берег с помощью двухместной лодки. Количество каннибалов, ни на берегу, ни в лодке, не может превышать количество миссионеров. Как организовать переправу?

Обе задачи легко решаются. Они обобщаются на случай n пар рыцарей и оруженосцев в первой задаче, и n миссионеров и такого же количества каннибалов во второй задаче. Лодка должна быть k-местной. В обеих задачах требуется найти оптимальный алгоритм переправы. Какова должна быть наименьшая вместимость лодки (для каждого n следует найти наименьшее значение k), чтобы переправа была возможной? Как по решению одной из этих задач найти решение другой задачи? Как по множеству решений одной из этих задач найти множество решений другой задачи? Чему равно количество оптимальных решений для значений n, не превосходящих трех?

Практика программирования. Написать программу, которая находит оптимальный алгоритм переправы.

Иллюстрируемые понятия: действие группы на множество (действие симметрической группы на множество состояний), понятие категории [1].

3. Игра крестики-нолики 3×3.

Всем известная детская игра. Почему правильная игра всегда закончится вничью? Сколько всего возможно позиций?

Практика программирования. Написать программу, в которой пользователь играет с компьютером. Написать программу, которая находит все возможные позиции, без учета и с учетом симметрии. Написать программу, которая генерирует все партии, и найти количество этих партий, а также количество партий, которые выиграл первой игрок, второй игрок и количество партий, закончившихся вничью. Написать программу, которая находит все партии с точностью до симметрии. Проще всего такие программы пишутся на языке логического программирования.

Иллюстрируемые понятия: действие группы на множество (действие группы симметрий квадрата на множество позиций).

В практике программирования было бы полезно написать самообучающую программу игры в крестики-нолики, в которой из орбиты позиции хранится только некоторая каноническая позиция.

Список можно продолжить. Существует довольно много известных занимательных задач, которые могли бы послужить иллюстрациями для применения математических понятий. Обычно каждый преподаватель, обучающий студентов нематематических направлений, имеет свой набор интересных примеров. Но сборники занимательных задач обычно предназначены детям или любителям математики, а не студентам с гуманитарными предпочтениями, для которых литературы существенно меньше.

Исследованиями в области робототехники на отделении интеллектуальных систем РГГУ руководит В.Е. Павловский. В Институте прикладной математики РАН под его руководством был создан робот-манипулятор ManGo, предназначенный для игры в настольные игры (рис. 1). Управление этим манипулятором отрабатывается на игре «Гомоку», которая в России обычно называется «Крестики-нолики» или «Пять в ряд» [2]. В игре «Гомоку» вместо крестиков и ноликов используются камни черного и белого цвета.

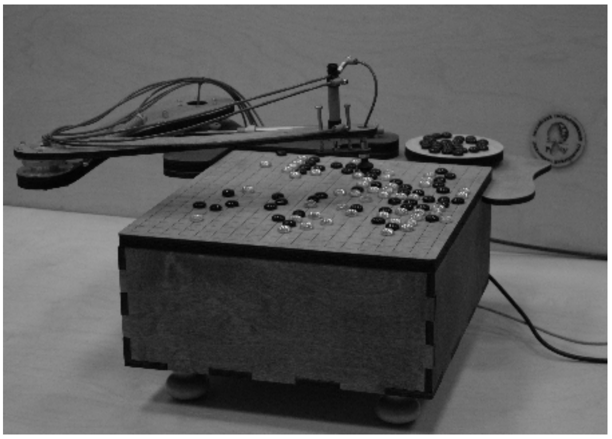


Рис. 1. Робот-манипулятор ManGo

Написание программ для роботов-манипуляторов может помочь студентам в освоении идей симметрии и планирования. Кроме этого, большое поле для творчества предоставляет андроидный робот Aldebaran NAO.

Таким образом, специалистов в области информационных технологий, работающих с приложениями в гуманитарных областях, необходимо готовить в гуманитарных университетах, в силу специфики предметной области и методов исследования. При обучении студентов с гуманитарными предпочтениями, которым приходится заниматься математикой и программированием, помощь могут оказать занимательные задачи, которые полезны не только для иллюстрации математических понятий, но и для практики программирования. Специфика обучения математике таких студентов должна учитываться в учебной литературе.

Литература

1. Ефимова Е.А. Обучение студентов-гуманитариев алгебраическим методам //Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования : тез. докладов Четвертой Междунар. конф. посвящ. 90-летию со дня рожд. чл.-корр. РАН, акад. Европ. акад. наук Л.Д. Кудрявцева, Москва, РУДН, 25-29 марта 2013 г. - Москва: РУДН, 2013. - С. 530-531.

2. Павловский В.Е., Ефимова Е.А., Алисейчик А.П., Орлов И.А., Елагина Е.Д. Интеллектуальные технологии для манипуляционных задач//Труды XIV Национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием (КИИ-2014), Казань, 24-27 сент. 2014 г. Т.2. - Казань: КФУ, 2014. - С.186-194.

СОЦИАЛЬНАЯ РОЛЬ МАТЕМАТИКИ

О.В. Зимина[1], А.И. Кириллов[2]

[1]*Национальный исследовательский университет МЭИ, кафедра высшей математики, Москва, Россия*
[2]*Российский фонд фундаментальных исследований, Москва, Россия*

e-mail: AcademiaXXI@mail.ru

Аннотация: Перечислены и обсуждены социальные роли математики. Понимание этих ролей важно для заинтересованности граждан в изучении математики. Без нее нельзя организовать надлежащее преподавание математики, и, в частности, реализовать Концепцию математического образования в РФ.

Ключевые слова: социальная роль математики, мотивация к изучению математики, реализация Концепцию математического образования в РФ.

SOCIAL ROLE OF MATHEMATICS

Abstract: The social roles of mathematics are enumerated and discussed. The understanding of these roles is important for interest of the citizens in study of mathematics. Without it it is impossible to organize suitable teaching of mathematics, and, in particular, to realize the Concept of mathematical formation in Russian Federation.

Keywords: social role of mathematics, motivation to study the mathematics, realization the Conception of mathematical education in Russian Federation.

Введение

В современном мире социальная роль фундаментальной науки возрастает, и в этом процессе математике принадлежит центральное место. В работе [1] перечислены и исследованы социальные роли фундаментальной науки, в том числе те, в которых со времен античности математика играет ведущую роль. Занятия математикой воспитывают навыки строгого мышления, уважение и привычку к умственному труду, умение отличать истинное от ложного, развивают абстрактное мышление, способствуют освобождению от предрассудков и мифов и т.п.

В Европе вопрос о социальной роли математики возник в XVII в., при переходе к Новому времени, когда потребовалось массовое школьное образование для достижения более высокого качества населения, чем это было в средневековой Европе.

В России значение математики в развитии страны было осознано Петром I, о чем свидетельствуют принятые им решения, начиная с создания в 1701 г. Школы математических и навигацких наук до учреждения в 1724 г. Петербургской академии наук, университета и гимназии. Благодаря усилиям Петра в Академии были собраны ученые из лучших университетов Европы, в том числе математики Николай и Даниил Бернулли, Якоб Герман, а с 1727 г. — Леонард Эйлер.

О важной роли науки в развитии страны и общества и связанной с этим необходимости популяризации научных достижений высказывались многие выдающиеся деятели российской науки и культуры. Так, Чернышевский, считавший науку основной силой прогресса, утверждал, что ее открытия приносят действительную пользу только тогда, когда разливаются в массе публики (цит. по [2, с. 80]). О необходимости популяризации научных знаний писал Герцен: "...по несчастию, великие истины, великие открытия... не переходят в общий поток кругообращающихся истин [3, с. 143]. Тимирязев, который был не только блестящим популяризатором, но также историком и теоретиком популяризации науки, писал о том, что процветание науки находятся в прямой зависимости от уровня образованности и просвещенности населения: "Безнадежно состояние науки, когда она находится в положении искусственно насажденного оазиса среди безграничной пустыни всеобщего равнодушия. Безнадежно положение ученого, сознающего, что окружающая среда его терпит и только. Популяризация науки, являясь верным орудием народного просвещения, явится и залогом свободы самой науки" (цит. по [4]). Прибавим к этому, что столь же безнадежным является и состояние образования, и положение преподавателей.

Цель статьи — сформулировать те конкретные задачи, которые необходимо решить для исправления ситуации. Мы также намечаем пути решения этих задач.

I. Роль математики как одной из наук об окружающем мире

В современном российском обществе социальная роль математики как науки, формирующей знания о числах, фигурах, зависимостях, ничтожно мала, поскольку эти знания у наших граждан находятся на крайне низком уровне, хотя все изучали математику, по крайней мере, в школе.

Общепризнан высокий уровень нашей научной математической школы и замечательные традиции элитарного математического образования (от математических кружков и специализированных школ для одаренных детей до математических факультетов и аспирантуры в лучших университетах страны). Но это бесценное национальное достояние не может скрыть тот факт, что мы не умеем учить той математике, которая должна применяться всеми гражданами в самых распространенных жизненных ситуациях. Программа математики для средней школы формирует о ней совершенно неправильное представление.

В начале 1860-х гг. Д.И. Писарев в работе "Школа и жизнь" писал: "Общество наше плохо знает математику и вовсе не желает с ней знакомиться, потому что питает к ней глубокое, хотя и почтительное отвращение" [5, т. 4, с. 557]. Если исключить слово "почтительное", то эти слова с полным основанием можно применить к современному обществу. В ближайшие годы положение будет только усугубляться в связи с узаконенной "профилизацией" общего среднего образования, сокращением и упрощением математических курсов в технических вузах, а также исчезновением курса математики на гуманитарных факультетах университетов. Отметим, что в "Концепции развития математического образования в Российской Федерации", утвержденной Правительством 24.12.2013 г., о курсе математики для "гуманитариев" нет ни слова.

Мы видим большую опасность в том, что представители гуманитарных профессий (журналисты, политологи, артисты и др.), чье влияние на отдельных людей и на общество в целом особенно велико, не стесняясь высказывают пренебрежительное отношение к математике и даже бравируют отсутствием элементарных математических знаний и умений. Поэтому начинать повышать математическую культуру нужно с гуманитариев.

Есть несколько задач, решать которые каждому разумному существу приходится чуть ли ни ежедневно. И только математика дает методы их решения. Это задачи выбора; прогноза; выявления и установления зависимостей, а также их анализа; формирования гипотез и их проверки; анализа факторов; принятия решений.

Игнорируя математику, наши сограждане постоянно ошибаются в решениях таких задач. Последствия этого часто бывают катастрофическими.

На наш взгляд, одним из эффективным способов улучшить ситуацию, является тотальный анализ содержания и методики преподавания математики в средней и высшей школе с целью переноса акцента в триаде "что–как–зачем" с "как" на "что" и особенно "зачем" (сейчас происходит ровно наоборот). Такой перенос соответствует дидактическому принципу сознательности (или осмысленности) изучения математики на всех уровнях подготовки.

Другим способом повышения социальной роли математики как науки является просветительская деятельность ученых и педагогов, включая педагогическую переработку и популяризацию достижений в различных областях математики и их приложений в обыденной жизни и жизни общества, а также в естественных и гуманитарных науках, в технике, технологии и искусстве. Вместе с тем, очень важно, чтобы всем были известны основные знания о мире, которые несет математика.

Иными словами, математика призвана играть важную социальную роль как наука и как методология. В следующем разделе пойдет речь о том, какую роль призвана играть математика как средство воспитания.

II. Роль математики в формировании менталитета личности и общества

О воспитательном значении математического и естественнонаучного знания Писарев писал так: "Эти науки сообщают человеку, посвятившему себя их изучению, такую трезвость и неподкупность мышления, такую требовательность в отношении к своим и чужим идеям, такую силу критики, которая сопровождает этого человека за пределы выбранных им наук, которая не оставляет его в действительной жизни и кладет свою печать на все его рассуждения и поступки" [5, т. 3, с. 110].

Сейчас воспитательное значение изучения математики ничтожно, и это обстоятельство имеет ряд негативных последствий. Перечислим лишь некоторые из них.

1. Неправильно сформированные дефиниции приводит к взаимному непониманию, сужению словарного запаса и т.п., тем самым затрудняя взаимодействие как индивидуумов, так и различных профессиональных, политических, гражданских и иных объединений (подробно об этом шла речь в нашей работе [6]).

2. Неверные представления о том, что такое аксиома, гипотеза и другие термины, приводит к тому, что в обществе нет консенсуса даже в отношении базовых понятий.

3. Отсутствие навыка анализа условий, при которых справедливо данное утверждение, приводит к тому, что в обыденной жизни отдельные люди и общество в целом становятся легкой добычей всякого рода демагогов и шарлатанов, рискуют потерпеть фиаско в профессиональной деятельности и т.д. Так, игнорирование принятия Государственной Думой новых законов, (в частности, Закона об образовании 2012 г.) лишает педагогическое сообщество возможности (и права) конструктивно обсуждать важнейшие проблемы существующей системы образования и пути ее реформирования. Навык анализа условий (необходимых и достаточных) справедливости того или иного утверждения вырабатывается в процессе изучения математики, поскольку игнорирование изменившихся условий строго наказывается, например, посредством контрпримеров.

В современном демократическом обществе одна из главных задач воспитания человека — научить его принимать обоснованные решения, предвидеть последствия своего выбора и нести за него ответственность. Сформировались новые области научных исследований и соответствующие учебные дисциплины в вузах: многокритериальная оптимизация, теория принятия решений. Определенные достижения в этих областях могут стать предметом педагогических исследований и использоваться в практике инновационного обучения.

Впервые учащийся встречается с задачами выбора на уроках математики при изучении множеств. Он должен усвоить, что для того, чтобы сделать выбор, необходимо упорядочить множество, т.е. определить для его элементов отношения эквивалентности и порядка, выделить классы эквивалентности и упорядочить их. Для выбора должно быть не менее трех вариантов, иначе нельзя проверить что выбор обладает свойством транзитивности. Отсюда следует, что выбор из двух вариантов (например, одного из двух кандидатов на руководящий пост) не может быть обоснован в надлежащей мере.

При решении важных задач о выборе часто приходится оценивать последствия того или иного варианта. А для этого нужно уметь прогнозировать развитие ситуации. Хотя математика предлагает много методов прогноза, практическое использование получили только линейные методы, причем без коррекции. Что же тогда удивляться низкой точности прогнозов?

В обыденной жизни мы часто встречаемся с зависимостями, установленными не природой, а чиновниками. Например, от чего зависит зарплата? Пенсия? Плата за коммунальные услуги? Финансирование поликлиники или учебного заведения? О таких примерах функций при изучении математики ничего не говорится. И это — к радости нерадивых чиновников, потому что анализ устанавливаемых ими зависимостей показал бы их неприемлемо низкую квалификацию. Но готовы ли наши граждане воспринимать результаты такого анализа? Думается, что нет.

Мы видим, что основные задачи управления (выбор решения и установление зависимостей) решаются без контроля со стороны общества или с контролем по негодным параметрам. Значит, управление происходит без надлежащей обратной связи, а это — не управление. Только математика может разъяснить суть этого и аналогичных тезисов. В этом ее важнейшая социальная роль, исполняемая через воспитание граждан.

Наука вообще (и математика в частности) играет социальную роль при условии ее доступности для всех, а не только для особо одаренных, и при условии, что ею в надлежащей степени овладевают все. В наше время доступность научных знаний обеспечивается, во-первых, обязательным средним общим образованием, и во-вторых, просветительской деятельностью ученых и педагогов, включающей педагогическую переработку и популяризацию достижений в различных областях математики и особенно их приложений в самых обыденных областях интеллектуальной деятельности.

III. О Концепции математического образования

В этом разделе мы обсудим некоторые положения Концепции математического образования с точки зрения того, как их реализация способствует повышению социальной роли математики.

В первом разделе Концепции "Значение математики в современном мире и в России" утверждается: "Успех нашей страны в XXI веке, эффективность использования природных ресурсов, развитие экономики, обороноспособность, создание современных технологий зависят от уровня математической науки, математического образования и математической грамотности всего населения..." Это утверждение развивается далее.

Так, в разделе III “Цели и задачи Концепции” в качестве одной из задач фигурирует “модернизация содержания учебных программ математического образования на всех уровнях..., исходя из потребностей обучающихся и потребностей общества во всеобщей математической грамотности...” Отметим, что в Концепции не сформулировано определение всеобщей математической грамотности — ученым и педагогам еще предстоит это сделать.

По нашему мнению, математическая грамотность в современном понимании означает, что каждый получивший среднее общее образование, имеет ясные представления и свободно ориентируется в мире

1. чисел;
2. фигур (пространственных и плоских);
3. отношений (эквивалентности, порядка, функциональными);
4. зависимостей в широком смысле (функции, регрессии, корреляции и др.);
5. математической статистики;
6. логики;
7. истории математики.

При этом каждый гражданин должен сознавать роль математики жизни и развитии общества, а также ее место в человеческой культуре.

В разделе II “Проблемы развития математического образования” все проблемы разделены на три основные группы. В первую группу объединены проблемы мотивационного характера. В ряду причин низкой учебной мотивации школьников и студентов названы:

1) “общественная недооценка значимости математического образования”;
2) “устаревшее содержание”;

На первый взгляд, математики не могут пожаловаться на “недооценку значимости”. Ведь в течение 11 лет все школьники ежедневно изучают математику, все сдают математику в рамках ГИА и ЕГЭ, наибольшее количество контрольных и диагностических мероприятий предусмотрено именно по математике. Однако, преподавание организовано с принуждением. Из-за этого у значительной части учащихся формируются мотивации негативного рода (“не вникать”, “спихнуть”, ...) и соответствующий стиль поведения (зубрежка, списывание, обман и т.п.).

В результате первая задача преподавателя — изменить этот стиль поведения, а для этого придется изменить существующую мотивацию (не получишь зачет, не сдашь экзамен, выгонят, заберут в армию) на другую, основанную на понимании того, как стиль изучения науки влияет на все стороны жизни (личную, профессиональную, общественную). Математика как учебная дисциплина предоставляет для этого наибольшие возможности, поскольку она учит

– прогнозировать результат и проверять правильность полученных ответов (в том числе, промежуточных);

– выдвигать гипотезы и обосновывать их или отбрасывать;

– делать обоснованный и ответственный выбор, понимать, каковы критерии выбора, и оценивать последствия их изменения;

– отличать необходимые условия от достаточных;

– ответственно подходить к изменению условий задачи и оценивать последствия тех или иных изменений;

– использовать множественность представлений об одном и том же объекте и, соответственно, новые методы исследования для расширения возможностей познания.

Этот список можно продолжать. Отметим только, что "воспитание математикой" происходит, если преподаватель (желательно, вместе с учащимися) будет регулярно (но ненавязчиво) проводить параллели с реальной жизнью индивидуума и социума.

В этой связи нужно обсудить старую, но ставшую популярной с распространением Интернет, концепцию обучения, основанную на том, что знания не так важны, и главная цель обучения — учить думать. При этом практически не обсуждается вопросы о том, что значит "уметь думать", как формировать и как оценивать это умение.

На наш взгляд, противопоставлять обучение знаниям и обучение умению думать недопустимо. В этой связи уместно вспомнить, что академик И.П. Павлов писал: "Думать — это упорно исследовать предмет, иметь его в виду и ныне, и завтра, писать, говорить, спорить о нем, подходить к нему с одной и другой стороны, собрать все доводы в пользу того или другого мнения о нем, устранить все возражения, признать пробелы там, где они есть, короче — испытать и радость, и горе серьезного умственного напряжения, умственного труда" [7, с. 31].

Мы видим, что нельзя начинать думать о предмете, пока он не предстал перед нашим умственным взором в достаточной определенности, со достаточным набором свойств. Следовательно, нельзя думать о том, о чем нет достаточных знаний. Более того, по Павлову составляющей мышления о предмете является его многостороннее исследование. А что будет результатом мышления? Конечно, знания.

Противопоставление таких черт личности, как эрудиция и умение думать отражает стремление сформировать общество невежд. Ведь только им с высоких трибун и по каналам СМИ можно внушать сколь угодно нелепые представления о прошлом, настоящем и будущем.

Редко какие предметы исследования бывают даны с такой определенностью, как математические. Поэтому занятия математикой наилучшим образом подходят для того, чтобы учиться думать. Но именно на этих занятиях со всей отчетливостью видно, что нет мышления без конкретных знаний.

В качестве еще одной причины низкой мотивации авторы Концепции указывают "устаревшее содержание образовательных программ" и выделяют отдельную группу проблем под названием "Проблемы содержательного характера". Цитируем: "Выбор содержания математического образования на всех уровнях... продолжает устаревать и остается формальным и оторванным от жизни... Потребности будущих специалистов в математических знаниях и методах учитываются недостаточно..."

Естественно возникает вопрос: а как насчет потребностей граждан? Они вообще хоть как-то учитываются? На наш взгляд, приведенная цитата противоречит провозглашенным Концепцией задачам: усиление мотивации к изучению математики, достижение всеобщей математической грамотности, повышение общественной значимости и социальной роли математики.

Одним из важнейших способов решения этих задач является приведение содержания математического образования на каждом уровне обучения в соответствие с представлением о всеобщей математической грамотности, с полной системой дидактических принципов (убедительности, научности, сознательности и др.) и с уровнем развития науки, техники, технологии и общественного сознания в XXI веке.

Новое содержание потребует новых методик преподавания математики. Следствием всех этих изменений будет обострение кадровых проблем в средней и высшей школе, которые нельзя разрешить без реформы классического и педагогического университетского образования.

Заключение

Сформулируем наши основные тезисы.

1. Математике (как и другим фундаментальным наукам) отведена большая социальная роль.

2. Математика (как и другим фундаментальным наукам) эту роль не исполняет.

3. Причина — низкий уровень математической культуры граждан и общества в целом.

4. Из-за такого низкого уровня культуры у преподавателей нет возможности преподавать математику, а у учащихся нет желания ее изучать. Поэтому их культура и культура общества в целом не повышается. Как разорвать этот порочный круг?

Мы предлагаем изменить содержание математических дисциплин так, чтобы основное время в них уделялось математическим знаниям об окружающем мире и умению решать основные интеллектуальные задачи, возникающие в обыденной жизни. Соответствующие разделы естественно назвать “Общая математика”, т.е. математика для всех. Это значит, что никто не сможет сказать, что то, что преподают, ему не нужно, поскольку возражение преподавателя будет известным: без этого ты не только не будешь таким гражданином, каким надлежит быть в XXI веке, но даже и разумным существом.

Литература

1. Кириллов А.И. Роль фундаментальной науки в развитии общества // Вестник Московского университета. Серия 20 “Педагогическое образование”. № 1, 2012. С. 6–36.

2. Болховитинов В.Н. Столетов. М.: Изд-во Молодая гвардия, 1965.

3. Герцен А.И. Собр. соч. в 30-ти томах. Т. 2. М.: Наука, 1954–1965.

4. Платонов Г.В. Мировоззрение К.А. Тимирязева. М.: Изд-во АН СССР, 1952.

5. Писарев Д.И. Полное собр. сочинений. Издание Ф. Павленкова. С.-Петербург, 1894.

6. Зимина О.В., Кириллов А.И. Профильное образование и диалог культур // Материалы XIX Межд. конф. “Математика. Образование”. Чебоксары, 27 мая – 2 июня 2013. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2013. С. 88–97.

7. Сапарина Е.В. Последняя тайна жизни: Павлов. Этюды о творчестве. М.: Изд-во Молодая гвардия, 1983.

НЕКОТОРЫЕ ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЦЕЛЕВОЙ ЗНАЧИМОСТИ МОТИВАЦИИ В УЧЕБНОЙ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ СРЕДНЕЙ И ВЫСШЕЙ ШКОЛ

В.С. Карапетян[1], С.А. Розанова[2]

[1]*Армянский государственный педагогическтй университет им.Х.Абовяна, Ереван, Армения,*

[2]*Московский институт радиотехники, электроники и автоматики(т/у), Москва, Россия*

e-mail: [1]vskarapetyan@mail.ru, [2]srozanova@mail.ru

Аннотация: В статье обсуждаются теоретические аспекты различного вида мотивации студентов будущих преподавателей математики, и приводятся некоторые данные экспериментального характера. Выясняется, что обучающиеся с более высоким уровнем развития мотивируются за счет персонализации, а с более низким – за счет самореализации.

Ключевые слова: учебная деятельность, мотивация, мотивы обучения и учения, мотивационно-ценностная система.

SOME PSYCHOLOGY AND PEDAGOGICAL ASPECTS OF THE TARGET IMPORTANCE OF MOTIVATION IN EDUCATIONAL AND PROFESSIONAL ACTIVITY OF PUPILS OF AVERAGE AND HIGHEST SCHOOLS

Abstract: In article theoretical aspects of various type of motivation of students of future teachers of mathematics are discussed, and some data of experimental character are provided. It becomes clear that trained with higher level of development are based due to personalisation, and with lower – due to self-realization.

Keywords: educational activity, motivation, motives of training and doctrine, motivational and valuable system.

Изучение мотивационно-ценностной системы учащихся как в системе общего, так и в сфере высшего профессионального образования, особенно педагогического, продолжает оставаться актуальным[1;2;3;5;6;8;12;15], поскольку эффективность становления будущих педагогов (например, математики) обусловлена соответствием учебных мотивов и адекватных им академических ценностей [4;9].

При рассмотрении связи обучения и развития в совместной учебной деятельности школьников или в системе профессионального образования необходимо выделять некоторые основные понятия, позволяющие разрабатывать стратегические планы развития образовательных субъектов. Имеются ввиду: а) профессиональные и личностные развития в системе математического образования, б) саморазвитие в профессиональной деятельности, в) рефлексия, глубокое понимание сущности и значения своего образования, своих учебных действий и т.д.[11;12;13]. Изучению проблемы развития и саморазвития отводится важное место в системе образования. Саморазвитие - есть сложное и инволюционно-эволюционное поступательное движение, в ходе которого происходят прогрессивные и регрессивные интеллектуальные, личностные, поведенческие и деятельностные изменения в самом субъекте. Развитие, особенно личностное, продолжается до момента прекращения самой жизни, меняясь только по направлению интенсивности, характеру и качеству. Так как психика, т.е. внутренний мир, формируется и развивается в активной деятельности человека, то это означает, что, в частности, в познавательной деятельности есть реальные ресурсы для формирования соответствующих компетенций.

С. Л. Рубинштейн понятие деятельности формулирует следующим образом: «Под деятельностью понимают активность субъекта, направленную на изменение мира, на производство или порождение определенного объективного продукта материальной и духовной культуры»[14]. Основоположник теории деятельности А. Н. Леонтьев в структуре деятельности выделяет три звена: а) мотивационно-ориентировочное, б) исполнительно-операционное, в) контрольно-оценочное. Учебная деятельность включает в себя разнообразные компоненты. Среди них только компонент мотивации показывает и определяет отношение субъекта к своей деятельности, отношение к миру, людям, к разным вопросам жизни.

Во всех случаях разнообразные интересы учащегося, склонности, самопознание и самооценка могут формироваться в учебной деятельности, стать условием исполнения данной деятельности. Первым элементом структуры учебной деятельности является учебно-познавательные мотивы. Мотив – это то, что побуждает человека к деятельности и связано с удовлетворением определенной потребности. Многие авторы (А.К.Маркова, Л.М.Фридман и др.) своими исследованиями подтверждают, что изучение основного вопроса мотивации пока неудовлетворительно для целостного воссоздания картины учебной деятельности, для понимания взаимосвязи составных частей. По мнению А.К.Марковой и Л.М.Фридмана главной психологической причиной неудовлетворительного изучения мотивации является не только отсутствие целостного исследования составных частей вместе с их возможными связями и отношениями, но и неудовлетворительная система, характеризующая учебную деятельность, несистематизированность структуры деятельности, невыделенность возрастных особенностей. А.К.Маркова отмечает: «Насколько взрослее ребенок, настолько устойчивее его мотивационная сфера, но даже у зрелого человека мотивация продолжает оставаться динамичным образованием. Для успеха всего учебно-воспитательного процесса необходимо учесть сложную структуру мотивационной сферы» [11, с.32] . В психолого-педагогической литературе указываются разные причины понижения учебной мотивации. Одна из них: если учебная деятельность рассматривается как процесс и результат взаимовлияния обучающих и обучающихся, то причина понижения уровня мотивации целиком зависит от взаимовлияющих субъектов.

Среди причин, понижающих мотивацию обучаемых, отмечаются : а) неумение организовывать продуктивную работу с источниками информации (книги, карты и т.д.), б) неумение самостоятельно организовывать свою сознательную деятельность, в) неполнота процесса формирования учебной деятельности [7;8], г) отсутствие связи между приобретенными личностью знаниями и реальным миром.

Исходя из необходимости формулировки эмпирических целей исследования, из существующих в настоящее время в науке многочисленных определений мотивации и мотивационной системы, мы выбрали подходы А.Реана и Я.Коломинского [13], В.С.Карапетяна [9, с.33-39]. Поскольку учебная мотивация относится к мотивационной сфере личности, а последняя воспринимается как «совокупность стойких мотивов, имеющих определенную иерархию и выражающих направленность личности», то мотив как внутреннее побуждение личности к деятельности, коммуникации и определенному поведению, направлен на удовлетворение конкретных потребностей [5, с.56].

Авторы считают, что в качестве мотивов могут выступать идеалы, интересы, убеждения, социальные установки, ценности.

Российскими и армянскими исполнителями проекта была разработана с учетом [12], откорректирована и апробирована в Армянском государственном педагогическом университете имени Х. Абовяна методика «Мотивация учения студентов педагогических вузов».

Анализ данных, полученный в результате применения этой методики показал, что средние арифметические показатели мотивов учения студентов 1-го курса естественнонаучного потока свидетельствуют о том, что превалируют внешние мотивы поступления в вуз по сравнению с реально действующими мотивами учения и профессиональными мотивами (см. табл.1) (соответственно показатели 29,4; 25,4; 24,9.).

Таблица 1. Средние арифметические показатели динамики мотивов учения студентов 1-4-х курсов естественнонаучного потока

Мотивы, курсы	**Внутр. поступл. вуза**	**Внутр. реальные действ. мотивы учения**	**Внутр. професс.**	**Внешн. поступл. в вуз**	**Внешн. реальные действ. мотивы учения**	**Внешн. професс.**
Ественно-науч. 1 курс	23	21.6	18	29.4	25.4	24.9
Ественно-науч. 2 курс	21	24.9	22.8	24.5	24.5	27.8
Ественно-науч. 3 курс	17.9	22.5	20.8	25	25	28.2
Ественно-науч. 4 курс	18.4	22.5	21.4	24.3	24.3	25.8

Фактически мотивы Внешнего блока доминируют над мотивами внутреннего блока, что свидетельствует о том, что учебный процесс на первом курсе обусловлен главным образом узко социальными, позиционными мотивами. В отличие от внешних мотивов, внутренние мотивы имеют показатели средней выраженности, что позволяет предположить слабую заинтересованность первокурсников учебным процессом как таковым и профессией педагога. Примечательно, что и во внешнем, и во внутреннем блоке мотивов доминируют мотивы поступления в вуз. Исходя из полученных средних данных, становится ясно, что на протяжении всей учебы внешние мотивы превалируют над внутренними. Фактически, внешние мотивы поступления в вуз на первом курсе предопределили направленность учебных мотивов на последующих курсах, т.е. учебный процесс учащихся главным образом был обусловлен внешними мотивами, такими как статус студента, студенческая жизнь, общение.

Это закономерно для студентов первого курса и объясняется тем, что среди обучающихся наиболее актуален факт поступления в вуз. Среди первокурсников слабо выраженные мотивы не выявлены. В результате корреляционного анализа мотивов учения и образовательных ценностей первокурсников естественнонаучного потока были выявлены следующие связи: положительная связь умеренной тесноты обнаружена между внутренними профессиональными мотивами ($r = 0{,}43$), внутренними реально действующими мотивами учения ($r = 0{,}44$) и переменной «третья личность как ценность», а также между внутренними профессиональными мотивами и переменной «ответственность как ценность» ($r = 0{,}45$). Наличие таких связей нам кажется закономерным, поскольку подразумевается, что для человека, выбравшего профессию педагога, отношения «человек-человек» должны быть значимы. Корреляционная связь существует как между внешними мотивами поступлении в вуз($r= 0{,}48$), внешними реально действующими мотивами учения ($r = 0{,}31$) и переменным «общественно-полезный труд как ценность»,так и между внешними реально действующими мотивами учения и переменной «третья личность как ценность »($r = 0{,}49$).

Исполнительно-операционное звено осуществляется в форме действий или цепи действий. Действие, имея определенную цель, осуществляется разными способами в зависимости от условий, в которых это действие совершается. Эти способы осуществления действий называют операциями.

Учебная деятельность имеет свои специфические особенности.

Во-первых, учебная деятельность учащихся направленная на усвоение и применение знаний, должна завершаться не становлением умственных действий, а реализаций этого действия в практической деятельности.

Во-вторых, в жизни деятельность побуждается фактически не одним мотивом, а несколькими и представляет собой цепь каких-то действий.

В-третьих, формирование у учащихся основных действий строится в процессе обучения как движение по спирали. Согласно этому положению, действие в учебном процессе может стать деятельностью на следующем этапе обучения.

Сложившаяся практика предметного обучения в педагогических учебных заведениях отражает объективную необходимость дифференциации социально-педагогического знания, способствует углублению профессиональной подготовки педагогов[2].

Включая обучающихся в процесс персонализации и самореализации, педагог побуждает их к непроизвольной, но активной мыслительной деятельности. Исследования Д.Б. Элъконина и В.В. Давыдова показали, что если в группу социального взаимодействия входят обучающиеся с разным уровнем развития, но так, чтобы эти уровни не отличались больше чем на один шаг друг от друга, то это способствует их развитию. При этом обучающиеся с более высоким уровнем развития мотивируются за счет персонализации, а с более низким – за счет самореализации.

Рассмотренные психолого-педагогические аспекты целевой значимости мотивации в учебной и профессиональной деятельности учащихся и анализ данных эксперимента, проведенного по определенной методике в Армянском педагогическом университете, наглядно выявили необходимость поиска путей повышения :

- внутренней мотивации учащихся к учебной деятельности в целом и к изучению математики в частности;

- внешней мотивации при использовании всех возможных ресурсов общества (государство, СМИ, бизнес, семья), способствующих развитию интереса учащихся к получению среднего и высшего образования и к значимости математического образования на всех уровнях обучения.

Некоторые пути повышения мотивации к изучению математики в современном обществе намечены в работе [6].

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 14-26-20004.

Литература

1. Асеев В.Г. Мотивация и формирование личности. - М: Мысль, 392 с

2. Розанова С.А., Санина Е.И. Мотивация как целевая ориентация повышения интереса к математике в современном обществе, Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014г., «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования», Москва, РУДН, с. 368-372.

3. Выготский Л. С., Педагогическая психология.– М., 1991.- 480 с.

4. Гусев В. А., Психолого-педагогические основы обучения математике.– М., 2003

5. Давыдов В. В., Теория развивающего обучения.– М., 1996.- 544с.

6. Розанова С.А. Проблема развития мотивации к изучению математики в современном обществе и некоторые пути ее решения. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 г. «Бесконечномерный анализ, стохастика ,математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования»,Москва.РУДН,с.353-363.

7. Карапетян В.С., Мотивация в структуре учебной деятельности, пути ее формирования, Труды международной научной конференции, 24-29 марта 2014г, Цахкадзор - 2014, с.152-156

8. Карапетян В.С, Келоян М.А., Соотношение учебной мотивации и образовательных ценностей в естественнонаучных потоках высшего педагогического образования //Universum: Психология и образование: электрон. научн. журн. 2014, №5-6(6). URL: http://7universum.com/ru/psy/archive/item/1378

9. Карапетян В.С., Психологические проблемы овладения знаково-символической деятельностью, Тбилиси: Мецниереба, 2001. – 91 с.

10. Ковалев В. И., Мотивы поведения и деятельности. – М.: Наука, 1988. – 192 с.

11. Маркова А. К., Матис Т. А., Орлов А.Б. Формирование мотивации учения. - М., Педагогика, 1983.-64 с.

12. Пакулина С.А., Кетько С.М. Методика диагностики мотивации учения студентов педагогического вуза// Психологическая наука и образование. – 2010. – № 1. Электронный журнал «Психологическая наука и образование» www.psyedu.ru / ISSN: 2074-5885

13. Реан А.А., Коломинский Я.Л. Социальная педагогическая психология. – СПБ.: Питер Ком, 1999. – 416 с.

14. Рубинштейн С. Л., Основы общей психологии: Питер, 2009, 592 с.

15. Щукина Г.И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе, Учеб. пособие. - М.: Просвещение, 1979. - 160 с.

О ПРОГРАММЕ И НОВЫХ ФОРМАХ ОРГАНИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА, НАПРАВЛЕННЫХ НА РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ

М.А. Мкртчян[1], Т.А. Кузнецова[2]

[1]*Министерство образования и науки РА, Ереван, Армения*
[2]*МГТУ МИРЭА, Москва, Россия*

e-mail: [1]acf2004@yandex.ru, [2]kuzta@yandex.ru

Аннотация: Предлагается концепция организации математического кружка с разновозрастным составом учащихся и с учётом их индивидуальных особенностей. Концепция включает в себя программу и форму организации ученого процесса.

Ключевые слова: развитие способностей, индивидуальные особенности, разновозрастный состав.

ABOUT THE PROGRAM AND NEW FORMS OF ORGANIZATIONS OF MATHEMATICAL CIRCLE, DIRECTED ON THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL CHARACTERISTICS OF THE STUDENTS

Abstract: Concept of organizations of mathematical circle with a compound of students of various ages and individual characteristics is offered. The concept includes program and form of the organization of the scientific process.

Keywords: development of abilities, individual characteristics, compound of various ages.

Вопросами развития математических способностей детей занимались многие учёные – теоретики и практики. Ознакомиться с такими работами можно, например, по книгам [1-4] и др.

Данная образовательная программа кружка «Занимательная математика. Творческое развитие», разработанная совместно российскими и армянскими исполнителями проекта РГНФ № 14-26-20004, относится к естественнонаучной направленности и ориентирована на формирование в системе дополнительного образования детей интереса к математике. Программа реализует одно из основных концептуальных положений - развитие творческого мышления с помощью математики с раннего возраста [5,6].

Предлагается новая форма организации занятий кружка с разновозрастным составом учащихся. Кружок функционирует непрерывно. Те ученики, которые выполнили программу, выходят из состава кружка. Новые ученики могут подключиться к работе кружка в любое время учебного года.

Цель.

Способствовать развитию интереса к математике, развитию мотивации к изучению математики, развитию математических способностей с помощью системы нестандартных занимательных задач.

Задачи программы.

- Попытаться сделать занятия математикой интересными и познавательными.
- Учить понимать условия задач (что известно в задаче и что требуется определить), в частности, задач с яркими и оригинальными сюжетами.
- Учить навыкам самостоятельного поиска решений математических задач.
- Показать разнообразие подходов к решению математических задач.
- Формировать трудолюбие и упорство при решении математических задач.
- Развивать аккуратность и ответственность за конечный результат при решении любых задач.
- Формировать навыки коллективной работы и дух соперничества, состязательности.

Виды задач.

Обучающие:

- знакомство с историей возникновения математических задач;
- знакомство с исторической терминологией;

- обучение навыкам и умениям использования условий задачи, открытых и замаскированных;
- овладение умением работать с различными видами информации, в том числе графической, текстовой.

Развивающие:

- расширение кругозора на истории развития математики и на биографических данных математиков;
- расширение представлений у обучающихся о постановке задач;
- развитие межпредметных связей, развитие пространственного воображения, логического и визуального мышления;
- развитие мелкой моторики рук (узлы в математике);
- развитие речевого аппарата, знаний о профессиях;
- формирование устойчивого интереса к познавательному творчеству;
- развитие творческой инициативы обучающихся: самостоятельный выбор методов решения, средств и способов представления результатов;
- развитие чувства прекрасного в математике.

Воспитательные:

- содействие в будущем профессиональному самоопределению обучающихся;
- раскрытие воспитательных возможностей математического творчества;
- воспитание информационной потребности;
- развитие культуры общения;
- развитие творчески активной личности;
- формирование гражданственности и патриотизма;
- формирование активной жизненной позиции.

Отличительной особенностью программы «Занимательная математика. Творческое развитие» является её универсальная направленность:

- развить математические способности;
- приобщить обучающихся к использованию компьютерных технологий;
- привить умения осваивать новый материал;
- формировать честность и хороший эстетический вкус;
- формировать и развить устойчивый интерес к самообразованию;
- выявить личностный творческий потенциал.

Данная программа рассчитана на работу с детьми от 8 до 14 лет.

Содержание программы

1. Логика и забавные логические задачи. (10 ч.)

Задачи, при решении которых определяющим фактором является обнаружение связей между данными задачи и их анализ, при этом, результатом является формулирование последовательных суждений, а любые вычисления и построения играют вспомогательную роль или совсем отсутствуют.

2. Занимательные задачи и развитие математических способностей. (10 ч.)

Занимательные задачи полезны тем, что ими можно увлечь и заинтересовать детей на длительный период. Размышления могут продолжаться дома с родителями, по пути в школу или на специальном конкурсе, на школьном празднике. Важно то, что возможны некоторые намёки, маленькие подсказки и даже указания.

3. Математика без вычислений. Рассуждения, таблицы, графы. (8 ч.)

Затейные задачи вызывают интерес, любопытство, создают затруднения. Но часто их решения находятся без вычислений, с помощью рассуждений, таблиц и графов.

4. Развитие математических способностей учащихся на задачах геометрии (24ч.):

а. геометрическое зрение,

б. задачи на разрезание фигур,

в. аналитико-синтетические методы при решении задач со спичками. корабля или самолёта и т. п.).

5. Развитие мотивации к изучению курса геометрии (24 ч.).

На специально подобранном геометрическом материале, интересных задачах формируется стремление понять важнейшие положения (определения, аксиомы, правила, постулаты), формируется понимание необходимости доказательств. Что отличает математику от многих других предметов.

а. задачи по теме «точки и прямые»,

б. комплексные творческие задачи,

в. распределение деревьев, цветов, монет.

6. Проблемные задания: «трёхточечники», «четырёхточечники», игры с шашками (10 ч.).

Программой предусматриваются постановка проблемных геометрических заданий. Это предполагает такую организацию учебных занятий, которая создаёт под руководством педагога ситуацию активной самостоятельной деятельности учащихся по поиску решения, в результате чего и происходит творческое овладение знаниями, умениями, навыками.

7. Задачи на пространственное воображение. Разбиение плоскости и пространства. Стратегии поиска решений исследовательских задач. (10 ч.)

Исследовательские задачи в программе нацелены на добывание знаний через учебную деятельность и развитие мышления. Планируются такие задачи, где возникает проблемная ситуация, где наличных знаний недостаточно и надо их либо переосмыслить, либо найти новые и применить в сложившейся ситуации.

8. Задачи с оригинальным содержанием. Задачи, сформулированные в олимпиадном стиле. (16 ч.)

Программой планируется постановка и решение олимпиадных задач. Как правило, такие задачи не требует знаний, выходящих за рамки школьной программы. Но они обычно сформулированы так, что не принадлежат ни к одному из стандартных типов задач школьного математического курса. Поэтому решение каждой такой задачи требует особого подхода, наличие творческости, нестандартности мышления. Программа предусматривает формирование интереса к математике постановкой и решением практически значимых для школьника задач (вычислить площадь участка сложной формы, найти расстояние между домами, объём зданий и т.д.)

9. Математика и поэзия. Математика и шахматы. Математика и социальные проекты (14 ч.)

Язык математики - язык рассуждений и доказательств. Но означает ли это, что в математике не найдется места лирике? На программных занятиях приводятся интересные контрпримеры. Математический фестиваль. Социальный проект: «Здоровье в твоих руках. О вреде курения».

Технология учебного процесса по математике по данной программе, апробированная в творческом кружке в России (Москва), изложена в [6].

Технология учебного процесса, апробированная в Армении (Ереван), основана на использовании коллективной формы занятий (об организации коллективных занятий в группе с разновозрастным составом учащихся (см. [5] и рис. 1).Занятия проходят – 2 раза в неделю по 2 часа. Численность обучающихся в группе до 40 человек. Члены кружка временно распределяются по разным подгруппам, в зависимости от образовательных задач. Эти подгруппы являются временными кооперациями учащихся. В ходе занятий действуют несколько временных коопераций, отличающихся как осваиваемыми темами, так и методами работы, и численностью состава. Переход участников учебного процесса из одной временной кооперации в другую координируется пультом управления. Пульт – это специально отведённое место, где решаются организационно управленческие задачи. Каждый член учебной группы реализирует свои учебные цели и задачи с помощью других членов группы. Каждый есть и обучаемый, и обучающий, и организатор учебного процесса. Учебная группа по способу организации работы является учительско-ученическим самообеспечивающимся и самоуправляющимся коллективом.

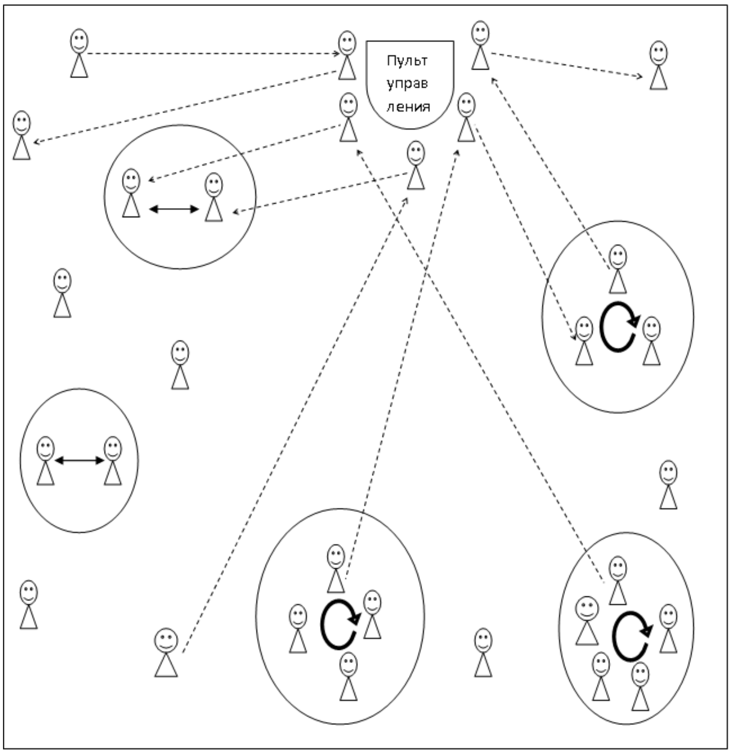


Рис. 1. Общая схема коллективных учебных занятий

Ожидаемые результаты

Программа для каждого ученика рассчитана на один год обучения.

К концу обучения учащийся:

- будет иметь представление о стандартных задачах, нестандартных задачах, олимпиадных задачах;
- сможет понять и изложить доступно условия нестандартных задач;
- предлагать варианты решений.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 14-26-20004.

Литература

1. Гусев В.А., Психолого-педагогические основы обучения математике. Изд. Академия (Academia), 2004 г

2. Лазарев В.А. Педагогическое сопровождение одарённых старшеклассников. Изд.Яр. ПГУ.2005 г.

3. Левитас Г.Г., Нестандартные задачи по математике. Изд. Илекса, 2014г

4. Муштари Д.Х, Подготовка к математическим олимпиадам. Изд. Каз.МО.2000 г.

5. Мкртчян М. А., Лебединцевым В. Б. Разновозрастный учебный коллектив: учительско-ученическое самоуправление // "Народное образование", 2009 г., N 2, стр. 218 – 227.

6. Лазарев В.А., Кузнецова Т.А. О программе дополнительного образования, направленного на развитие математических способностей обучающихся, Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014г., «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования», Москва, РУДН, с. 329-335.

РАЗВИТИЕ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ РЕФОРМИРОВАНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ: ШКОЛЫ, ВУЗЫ, ОБЩЕСТВО

С.А. Розанова

Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники (МИРЭА-МГУПИ), Москва, Россия

e-mail: srozanova@mail.ru

Аннотация: Проект рассматривает глобальную проблему - развитие мотивации к изучению математики в современном мире (школы, вузы, государство, СМИ, бизнес, семья, общество России и Армении и других стран). В результате получено: 15 концептуальных положений развития мотивации к изучению математики, методы использования информационных технологий как эффективного механизма повышении мотивации в школах и университетах, проект монографии «Развитие мотивации к изучению математики в современном мире».

Ключевые слова: Концептуальные положения, развитие мотивации, школы, университеты, государство, бизнес, общество, эффективный механизм, методы и технология, проект монографии.

DEVELOPMENT OF MOTIVATION TO STUDI MATHEMATICS IN EDUCATION REFORM: SHOOLS, UNIVERSITIES AND SOCIETY

Abstract: The project considers a global problem: - the development of motivation to study mathematics in the modern world (schools, universities, state, media, business, family, society of Russia, Armenia and society of other countries). As a result we have: 15 conceptual provisions of the motivation for the study of mathematics, methods of using information technology as an effective mechanism for increasing motivation in schools and universities, project of monograph “The development of the motivation for the study of mathematics in the modern world”

Keywords: Conceptual provisions, development of motivation, schools, universities, state, business, society, effective mechanism, methods and technology, project of monograph.

В статье изложены результаты исследований, выполненных по международному проекту «Развитие мотивации к изучению математики в условиях реформирования образования: школы, вузы, общество» в течение 2014 года учеными из России, членами НМС по математике Министерства образования и науки РФ, (руководитель Розанова С.А.) и Армении (руководитель Карапетян В.С.). В России проект поддержан РГНФ (грант № 14-26-20004), в Армении – Государственным Комитетом по науке Министерства образования Республики Армения. Рассмотрены перспективы исследования на 2015 год.

Развитие мотивации обучающихся к изучению математики является одной из важнейших проблем развития математического образования не только в нашей стране, но и других странах. В «Концепции развития математического образования в РФ», утвержденной 24 декабря 2013 года, среди обозначенных в ней проблем на первом месте стоит проблема мотивационного характера: «Низкая учебная мотивация школьников и студентов связана с общественной недооценкой значимости математического образования...» [1]. Действительно, среди ряда разнообразных причин возникновения этой проблемы, в дополнение к [1], можно отметить следующие:

1. Сложность математики как учебного предмета и трудность ее усвоения массовым школьником и студентом. Красиво подчеркнул это качество математики Б. Рассел: «Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой холодной и суровой, подобной красоте скульптуры, возвышенно чистая, способная к такому строгому совершенству, которое доступно только величайшему искусству»;

2. Не всегда удовлетворительное качество преподавания математики в школах и вузах;

3. Предметное содержание учебного материала бывает неадекватно сложившимся социальным реалиям;

4. Качество подготовки учителей и преподавателей нуждается в совершенствовании;

5. Отсутствие систематической популяризации роли математики в современном мире.

Необходимость исследования вызвана сложившимся в последнее время негативным отношением к математике в нашем современном обществе (в выступлениях некоторых ученых, педагогов, писателей в СМИ, в том числе и на канале «Культура»).

Проблема уменьшения негативного отношения к математике является важной не только для России, но и для других стран. Так, например, школьники г. Кракова обратились к члену государственного совета с просьбой посодействовать отмене преподавания в школах математики, поскольку, по их мнению, она ни для чего не нужна.

Возникает дилемма:

- либо уступить негативным требованиям общества и сократить число часов на математику или вообще ее отменить;

- либо «поступить так, как учит природа, которая разбрасывает тысячи зерен, хотя лишь несколько из них упадут на плодородную почву. И из этих нескольких зерен позже вырастут Паскаль, Гаусс и Больяи...» (Г. Штейнгауз из книги» Математика - посредник между духом и материей»).

Все это вызывает острую необходимость решения обозначенной проблемы.

Актуальность проблемы обусловлена: возрастанием роли математики в естествознании, компьютерных и гуманитарных науках; падением интереса к получению математических знаний в молодежной среде России, Армении, Польше и др. странах. **Уровень фундаментальности** обусловлен тем, что эта проблема, как и сама математика, является важнейшим приоритетом существования и процветания государства и общества, а также научно-технического прогресса.

Научная новизна определяется предлагаемым комплексным подходом к решению поставленной задачи:

- формулирование концептуальных положений развития мотивации к изучению математики и создание методик их реализации, направленных на приоритетное отношение общества и государства к математике;
- рассмотрение развития мотивации к изучению математики школьников и студентов вузов различных профилей;
- рассмотрение проблемы для общества в целом (государственные структуры, средства массовой информации, бизнес, семья и пр.).

Практическая значимость: полученные результаты могут быть использованы школами, вузами и обществом в целом (государство, СМИ, бизнес, семья).

Изучение мировых рейтингов образовательных систем и анализ состояния образования, в том числе математического, в ряде стран (Армения, Россия, Япония, Китай, Сингапур, США, Германия, Финляндия и др.), проведенный совместно с соискателями проекта из Армении, позволяют отметить следующее:

1) Рост интереса к математике как к учебному предмету наблюдается в системах образования, в которых максимально снижены или полностью преодолены учебные трудности. Переход от одной темы к другой считается недопустимым, пока предыдущий материал не усвоен на соответствующем уровне.

2) Постановка предмета «Математика», образовательные условия, созданные в странах – лидерах образовательных систем (Южная Корея, Япония, Сингапур, Китай, Финляндия, Великобритания и др.), предъявляемые требования, теоретико-методологические и психологические подходы преподавателей (используемые методы, средства и формы представления информации, психолого-педагогические условия) достойны более глубокого изучения.

3) Во всех странах для повышения мотивации к изучению математики кроме обязательного достойного финансирования, важна еще *«культура образования»*, стимулирующая желание учиться, *вера общества* в важность образования и его высокую моральную ценность.

4) Для повышения мотивации к изучению математики в обществах России и Армении необходимо:

4.1 обеспечение систематической популяризации роли математики в современном мире, выделение тех базовых идей и методов в математике, овладеть которыми необходимо каждому образованному человеку (концептуальные положения), создание соответствующих примерных программ; создание инновационных пособий по математике, обеспечивающих наглядность математических идей и их приложений, содержащих исторические факты, задачи практического характера, занимательные задачи;

4.2 создание концепции развития мотивации и методики ее реализации (а также необходимый план реализации).

Некоторые пути решения проблемы:

1. Поддержка решения проблемы на государственном уровне.

В ряде развитых стран за последние годы значительно увеличился интерес к изучению математики, благодаря определенной, часто жесткой, политике государств, понимающих важность развития фундаментальных наук для своих стран. Например, в Европейском союзе, который является одним из богатых регионов в мире, поддержка науки и образования, в том числе и математического, осуществляется через важнейшие инструменты региональной политики – структурные фонды (Европейский фонд регионального развития, Европейский социальный фонд и др.). Европейский социальный фонд разработал оперативную программу «Человеческий капитал». В этой программе выделены 9 приоритетов, из которых важное место занимают высокое качество системы образования, высшее образование и наука.

В США еще при Буше-младшем по результатам работы экспертной комиссии принята программа приоритетных направлений, в которой важнейшее место занимает повышение качества математического образования. Такие меры на государственном уровне дают мощный импульс для развития научных и психолого-педагогических исследований.

Другим примером может служить выставка Гете-Института «Ощути математику», которая проходила в феврале 2013 г. в Политехническом музее Москвы под девизом «Делай сам и думай сам» [2].

Президент России В.В. Путин 7 мая 2012 года подписал указ «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки», в котором поручает Правительству РФ разработать и утвердить в декабре 2013 г. «Концепцию математического образования в Российской Федерации на основе аналитических данных о состоянии математического образования на различных уровнях образования». Эта концепция и план ее реализации были разработаны и вступили в силу [1], [3].

В 2012 г. начальник Московского Департамента образования И.И. Калина провел совещание о проблемах математического образования, в работе которого приняли участие представители Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки РФ (НМС) и директора ряда физико-математических школ. В результате 2-х часовой беседы и обмена мнениями участники совещания пришли к выводу о необходимости разработки ряда предложений и мер по повышению мотивации к изучению математики в современном обществе.

Большой вклад в решение обозначенной проблемы будет внесен при выполнении плана реализации концепции математического образования [3].

Весь мир ищет пути, формы и методы развития мотивации к изучению математики в быстро меняющихся условиях существования человечества.

2. Роль государственно-общественной организации «Научно-методический совет по математике Министерства образования и науки» (НМС) в решении проблемы.

НМС ставит перед собой **цель** по разработке и внедрению научно-учебно-методического комплекса, организационных и научно-практических мероприятий, обеспечивающих повышение качества математического образования учащихся средней школы, НПО, СПО и студентов ВПО нематематических специальностей.

НМС сформулировал предварительный план и некоторые направления работ по повышению мотивации к изучению математики учащимися и студентами.

1) Создание научно-учебно-методического комплекса по математике (НУМКМ), направленного на повышение мотивации к изучению математики, базовым в этом комплексе является сборник программ по математике для всех образовательных направлений [4].

Обобщение опыта преподавания курса «Математика и информатика» студентам гуманитарных специальностей и экспертиза существующих ГОС последнего поколения и на этой основе

- выделение тех базовых идей и методов математики, овладеть которыми необходимо всем (концептуальные положения);
- создание соответствующих примерных программ;
- создание инновационных пособий по математике, в том числе и электронных, обеспечивающих наглядность математических идей и их приложений, содержащих исторические факты, задачи практического содержания, занимательные задачи и т.п. и повышающих мотивацию;
- разработка методических материалов для повышения научного уровня учебников, учебных пособий и методических рекомендаций учителям математики [5].

2) Разработка и апробация организационных и научно-практических мероприятий по внедрению НУМКМ:

- проведение творческих семинаров для преподавателей средних школ, НПО, СПО и ВПО на базе НМС (МИРЭА и РУДН);
- создание лектория для родителей, школьников и студентов для формирования правильных представлений о сути математики, её роли в обычной жизни, её значения при выборе будущей профессии; использование СМИ для популяризации роли математики, в том числе и телепрограмму «Академия» на канале «Культура», привлекая членов НМС для достижения этой цели;
- привлечение преподавателей математики и талантливых учеников физико-математических школ (и, возможно, других школ) к участию в школах молодых учёных, российских и международных конференциях, ежегодно проводимых НМС, с публикацией научных и научно-методических результатов;
- приглашение ведущих учителей математики школ к участию в работе секции средних школ, секции средних технических учебных заведений, секции компьютерной поддержки математического образования;
- проведение соревновательных мероприятий по математике для массового участия школьников и студентов с целью воспитания их успешности (пилотный проект на инновационных площадках НМС);
- создание программ с включением мотивационной составляющей и организация курсов повышения квалификации педагогов высших школ[6].

3. Необходимость объединения усилий научно-педагогической общественности на мировом уровне для проведения психолого-педагогических исследований по проблеме «Развитие мотивации к изучению математики в условиях реформирования образования: школы, вузы, общество».

Все это требует комплексного подхода к решению поставленной актуальной проблемы. Для этого необходимо рассмотреть следующий алгоритм ее решения, для ответа на поставленные вопросы:

1. Что такое мотивация и ее развитие?
2. Особенности математики как науки и учебного предмета.

3. Модернизация образования: плюсы и минусы.

4. Мотивационная сфера учеников, обучающихся в современной школе.

5. Мотивационная сфера студентов, обучающихся в современных вузах различного профиля.

6. Методология развития мотивационной сферы обучаемых в школе и вузе: общие и отличительные компоненты.

7. Информационные технологии как эффективный механизм повышения мотивации к изучению математики.

8. Формирование концептуальных положений, направленных на изменение отношения к математическому образованию в обществе (государство, СМИ, бизнес, семья).

9.Пути реализации концептуальных положений как в рамках реализации плана Концепции [3], так и в дополнение к нему.

10. Методики реализации.

В 2014 году исполнителями проекта №14-26-20004 была выполнена следующая работа:

1. Проведен сравнительный анализ состояния развития мотивации к изучению математики в школе, вузах (педагогических, технических, экономических), в обществе России и Армении, а также в некоторых странах ближнего и дальнего зарубежья. Выявлены слабые и сильные стороны использующихся в настоящее время методов педагогики и психологии.

2. Разработаны концептуальные положения развития мотивации к изучению математики и проведена их классификация на универсальные и специфические:

1) Концептуальные положения – общие (универсальные) для средней и высшей школ. Главная методологическая идея универсальных положений для средней и высшей школ - оптимальное развитие мотивационной сферы личности обучаемого должно включать в себя интегративное взаимодействие триады компонентов внешней и внутренней мотиваций (мотивации достижения, самоопределения и интеллектуального напряжения в изучении математики на основе дифференциации и сложности взаимодействия когнитивных и личностных подсистем).

2) Основная общая методологическая идея для высшей профессиональной школы -развитие профессиональной мотивации с использованием математических методов и моделей.

3) Одно из главных специфических положений для высшей профессиональной школы – учет профилей вузов, направлений и специальностей при составлении математических моделей и использовании математических методов.

4) Одно из важнейших концептуальных положений для средней школы – развитие творческого мышления с помощью математики с раннего возраста.

5) Концептуальные положения, направленные на изменение отношения к математическому образованию в социуме (государство, СМИ, бизнес).

5.1. Поддержка общества, государства, СМИ, бизнеса (политическая, организационная и материальная) - основа развития мотивации к изучению математики в современном обществе и осуществление плана реализации концепции математического образования в нашей стране.

5.2. Ответственность исполнителей за принятые решения на всех уровнях от министерских работников до преподавателя и обучаемого.

5.3. Популяризация математики через СМИ, издательства, лектории и семинары для родителей, для школьников – кружки и факультативы, для студентов – спецкурсы, лекции в рамках курса «Введение в специальность» и исследования в рамках УИРС и НИРС.

Универсальные концептуальные положения для общества в целом: [13]

1. Социально значимый уровень понимания обществом в целом (государство, СМИ, семья, бизнес) роли математики и математического образования в современном мире - залог развития мотивации к изучению математики в образовательных структурах.

2. Необходимость владения специалистами любого профиля математической культурой (на разных уровнях) – ответ на вызов современного состояния общества в его синергетических и технологических проявлениях.

3. Развитие мотивации к изучению математики с раннего детства на основе развертывания фундирующих иерархических структур обобщенных математических знаний и актуализации личностных предпочтений.

4. Непрерывность и преемственность развития математической культуры и мотивации к изучению математики в школе и в вузе в неразрывной взаимосвязи с развитием эмоционально-волевой сферы и творческой самостоятельности обучающихся.

5. Интегративный рост компонентов триады внешней и внутренней мотивации к изучению математики – одно из основных условий оптимального развития мотивационной сферы личности.

6. Актуализация выраженности индивидуального стиля как ответ на изменчивость, вариативность и открытость образовательных ситуаций, необходимость использования «мягких» моделей образования и развития мотивационной сферы изучения математики.

7. Повышение требований к профессиональным стандартам педагогической деятельности (школы, СПО, высшей школы) на основе системогенеза психологической системы деятельности, профессиональной идентичности требованиям профессии и высокой степени актуализации профессиональной мотивации.

8. Использование информационно-коммуникационных технологий и дистанционного обучения как эффективный механизм повышения мотивации к изучению математики и роста информационной культуры педагога и ученика на основе коммуникаций.

9. Адаптация современных достижений математики и ее приложений к экономике, науке, технике и производственной сфере к содержанию и инструментализации математического образования на различных уровнях.

10. Проектирование и реализация исследовательского поведения школьников (студентов) в условиях актуализации наглядного моделирования в развертывании фундирующих конструктов математического знания, инсайтов и рефлексии при активном взаимодействии учебных предметов и интеграции математических, информационных, гуманитарных или естественнонаучных знаний создает атмосферу повышения мотивации к изучению учебного материала;

11. Развитие технологии внедрения *оснащенных спиралей фундирования математических знаний* в процесс обучения математике студентов гуманитарных (естественнонаучных) направлений и специальностей университетов; эта технология на основе обоснованного отбора обобщенных математических конструктов и дидактического анализа выполнимости и адекватности технологических новшеств в акту-

альном поле гуманитарного (естественнонаучного) знания ведет к активизация мотивационных и когнитивных структур в процессе изучения математики способствовала положительным изменениям в личностном развитии и успешности освоения математической деятельности студентов.

12. Формирование и развитие *интегративных конструктов интеллектуальных операций* (моделирование, понимание, планирование, прогнозирование, принятие решения) как механизмов развития практического мышления; эти конструкты на основе диагностики и развертывания фундирующих процедур практико-ориентированного характера, направленных на решение частных, конкретных задач эффективно реализуются в ходе ресурсного взаимодействия математических, информационных, гуманитарных (естественнонаучных) знаний, повышения самостоятельности, ответственности за принимаемые решения (включая волевой и нравственный аспекты) в переходе от размышления к действиям.

13. Разработка требований, критериев, параметров и показателей оценки учебно-методических материалов нового поколения для обеспечения мотивирующего изучения математики на основе процессов интеграции профессионально важных знаний и наглядного моделирования учебных элементов. Разработка экспертных таблиц и оценочных показателей требований к учебно-методическим материалам нового поколения.

14. Приоритет в создании насыщенной информационной среды: диалог культур, полифункциональная деятельность, интеграция предметных, информационных, гуманитарных и естественнонаучных знаний, экспериментальная и поисковая активность с реальными предметами, использование информационно-коммуникационных технологий.

15. Поддержка и развитие доминантной модальности восприятия (диагностика модальностей восприятия, построение индивидуальных образовательных траекторий, вариативность и технологическая поддержка средствами обучения, оптимизация функционирования других модальностей (знаково-символической, вербальной, образно-геометрической и конкретно - деятельностной) за счет диалога культур и работы в малых группах, переход процессов развития в процессы саморазвития).

В разработке этих положений значительное участие кроме автора статьи принял профессор ЯрГПУ Е.И. Смирнов.

Некоторые специфические концептуальные положения были разработаны исполнителями проекта:

Для педагогических вузов - профессором Е.И. Смирновым и доцентом В.В.Богуном [5; 7], для экономических вузов – профессорами П.С. Геворкяном и С.А.Розановой [8]; для технических вузов – доцентом Т.А.Кузнецовой и профессором С.А.Розановой [4; 9]; для средних школ – профессором В.А.Гусевым , доцентом Т.А. Кузнецовой и д.п.н. В.А.Лазаревым [10].

С.А.Розанова и В.А.Лазарев выделили следующие важные положения для изменения отношения к математическому образованию в обществе [11]:

1. Ответственность всех исполнителей за принятые решения на всех уровнях. От правительственного чиновника до учителя и учащегося. Четкое исполнение принятых документов, поручений, обязательств.

2. Обеспечение необходимого финансирования для успешной реализации мероприятий, направленных на развитие математического образования.

3. Активизация средств массовой информации, издательств, лекций и семинаров для родителей, популярных лекций о роли математики в современном мире

для студентов в рамках курса « Введение в специальность», привлечение студентов к работе в УИРС и НИРС - все это важнейший механизм популяризации математики и обеспечения устойчивого интереса к ее изучению.

3. Информационные технологии рассмотрены как эффективный механизм повышения мотивации к изучению математики в школе и вузах различного профиля. Разработаны методики их использования в средних школах [12].

4. Подготовлены и проведены две Международные конференции:

«Образование, наука и экономика в школах и вузах» 24-29 марта 2014 года в Армении и

«Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования», 15-18 декабря 2014 года РУДН. Параллельно проведены вместе с исполнителями из Армении два семинара соответственно в Армении и России, посвященные ходу выполнения совместного проекта.

Проведение этих конференций и семинаров, дискуссии, анализ докладов, сделанных (в Армении - на секциях 5, 6,9,10,11, 12, в России, РУДН – на секциях 8, 9, 10) способствовали:

- в значительной степени сравнительному анализу состояния проблемы в обществах России и Армении, а также в некоторых странах ближнего и дальнего зарубежья;

- выявлению направлений исследований по данной проблеме в регионах России, в Армении и других странах;

- обмену опытом и методиками преподавания математики в школах и вузах различных профилей России, Армении , на постсоветском пространстве и других стран;

- объединению усилий педагогической общественности для решения поставленной актуальной проблемы.

5. Подготовлены совместно соисполнителями из России и Армении рабочие материалы и план монографии « Развитие мотивации к изучению математики в современном мире».

Написано и опубликовано 26 статей, из них 2 статьи совместно с российской и армянской сторонами.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 14-26-20004.

Литература

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. Распоряжение Правительства РФ от 24 декабря 2013г. №2506-р, Москва.

2. С.А. Розанова О проблеме повышения мотивации к изучению математики в современном обществе, Труды Международной конференции, Армения, Цахкадзор, март 2014г. С. 50-54.

3. Об утверждении плана мероприятий Министерства образования и науки РФ по реализации Концепции развития математического образования в РФ, Приказ Министерства образования и науки РФ №265 от 3 апреля 2014г.

4. С.А. Розанова, Т.А. Кузнецова и др. Сборник примерных программ математических дисциплин цикла МиЕН Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования третьего поколения. Москва, РУДН, 2009. С. 1-166.

5. Е.И. Смирнов Единство математики в задачах на основе фундирования опыта наглядного моделирования будущего педагога. Proceedings of Global International Scientific Analytical Project " Subject and object of cognition in a projection of educational technologies and psychological concepts", 2014, London. P. 34-41

6. С.А. Розанова, Т.А. Кузнецова Проект программы повышения квалификации преподавателей математики высшей технической школы. Труды Международной конференции, Армения, Цахкадзор, март 2014г. С. 554-561.

7. В.С. Абатурова, Е.И. Смирнов, В.В. Богун Формирование и развитие практико-ориентированного мышления как результат выраженности индивидуального стиля деятельности педагога. Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований (раздел « Педагогические науки», РАЕ, Москва,2014,5 С. 95-100.

8. П.С. Геворкян, С.А. Розанова Создание комплекса учебников и учебных пособий по математике для вузов экономического профиля как важнейшее направление реализации принципа профессионально – прикладной направленности учебного процесса по математике. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 г. « Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Москва, РУДН, 2014. С.289-291.

9. С.А.Розанова, Т.А. Кузнецова О повышении мотивации к изучению математики студентами технических вузов. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 г. « Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Москва, РУДН, 2014. С.364-368.

10. В.А Лазарев, Т.А. Кузнецова О программе дополнительного образования, направленного на развитие математических способностей обучающихся. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 г. « Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Москва, РУДН, 2014. С.326-329.

11 В.А. Лазарев, С.А. Розанова К вопросу об изменении отношения к математическому образованию в обществе. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 г. « Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Москва, РУДН, 2014. С. 329-335

12. В.В. Богун Разработка методик использования информационных технологий как эффективного механизма повышения мотивации в средних и высших учебных заведениях. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 г. « Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Москва, РУДН, 2014. С.276-278

13. С.А. Розанова Проблема развития мотивации к изучению математики в современном обществе и некоторые пути ее решения. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 г. « Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Москва, РУДН, 2014. С. 353-363.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ МОТИВАЦИИ К УГЛУБЛЕННОМУ ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ В СОВРЕМЕННЫХ УСЛОВИЯХ

Т.Ю. Рябова

МОУ СОШ №1 с углубленным изучением отдельных предметов г.Фрязино Московской области, Московская область, Россия

e-mail: tamarik@inbox.ru

Аннотация: В данной статье рассматриваются некоторые проблемы развития мотивации школьников, которые возникают в профильных классах современной средней школы при углубленном изучении математики и намечаются пути их решения. Автор – учитель математики, работающий в таких классах более 25 лет, хорошо знаком с реальными проблемами современного школьного образования.

Ключевые слова: углубленное изучение математики, развитие мотивации, профильные классы, современные педагогические технологии, начала математического анализа.

SOME PROBLEMS OF DEVELOPMENT PUPILS‘ MOTIVATION TO DEPTH MATHEMATICS STUDYING IN SPECIALIZED CLASSES IN MODERN SECONDARY SCHOOL

Abstract: This article discusses problems of development pupils‘ motivation which arise in specialized classes of modern secondary school the in-depth studying of Maths and ways of their solution. The author is the Maths‘ teacher, who has been working in such classes more than 25 years and who is familiar with the problems of modern school education.

Keywords: depth study, development of motivation, specialized classes, modern pedagogical technologies, the beginnings of the mathematical analysis.

Современное школьное образование – сложная нелинейная система взаимодействия педагогов, учеников и их родителей. Одна из важных характеристик этой системы – успешность обучения, которая зависит от множества факторов, среди которых мотивация к обучению. Мотивация к обучению – это некоторое внешнее воздействие, которое по тем или иным причинам превращается во внутреннее действие субъекта обучения, приводящее к желаемому результату.

В педагогике мотивация – общее название для процессов, методов и средств побуждения учащихся к продуктивной познавательной деятельности, активному освоению содержания образования. При этом учебная мотивация – это проявляемая учащимися мотивированная активность при достижении целей учения. Необходимо отметить, что особенность учебной мотивации состоит в том, что в процессе деятельности по ее осуществлению ученик усваивает знания и формируется как личность. При этом мотивация – одно из главных условий успешного обучения в школе. Н.Ю.Скороходова считает, что «технология развития мотивации учения в современной школе строится на развитии мотива достижения учеников. Эта технология включает как создание особой учебной программы с большим количеством фиксируемых градаций по сложности задач, времени усвоения и т.п., так и особый стиль взаимодействия учителя и ученика на уроке»[1].

На самом деле, практика сегодняшней школы показывает, что мотив достижения часто является весьма незначимым для учащихся, что еще более повышает значение эффективной мотивации и эффективного мотивирования при изучении того или иного предмета, в частности, математики.

Использование современных образовательных технологий на уроках помогает создать благоприятную эмоциональную обстановку, повышает мотивацию обучающихся к изучению предмета, углубляет реальные знания, способствует развитию психологических процессов, происходящих в личности ученика, что в конечном итоге, повышает качество знаний обучающихся. Заметно повышает мотивацию учащихся благоприятный и продуктивный микроклимат на уроке. Его поддержанию на уроке способствуют вовлечение в деятельность всех учащихся класса; создание нестандартных ситуаций; демонстрация достижений каждого учащегося на каждом уроке; умение хвалить любого ученика на каждом уроке даже за малые достижения и успехи, артистические способности учителя.

На наш взгляд, учитель в своей работе не должен забывать о таком понятии, как активная мотивация. Активная мотивация предполагает, что 1) никакие результаты нельзя признать хорошими, как бы высоки они ни были, если ученик мог бы достигнуть более высоких результатов; 2)никакие результаты, как бы они не были малы, нельзя признать плохими, если они соответствуют максимальным возможностям ученика.

Учитывая особенности современного общества, мы находимся в ситуации, когда потребность в непрерывном образовании должна быть сформирована как можно раньше. Важную роль в формировании такой потребности играет деятельность учителя по развитию мотивационной сферы ученика средней школы. Алгоритм преодоления кризиса, успешный и положительный выход из кризисного состояния как результат применения эффективных технологий разного рода – одно из направлений современного мотивированного образования на всех уровнях

Справедливо предположить, что в профильных классах и классах с углубленным изучением математики собрались учащиеся, более мотивированные к изучению предмета, чем в классах других профилей. Мотивы их обучения весьма различны: от внутренних, обоснованных внутренними личными позывами к развитию, до абсолютно внешних, навязанных родителями без учета конкретных личностных особенностей. Многолетний опыт нашей работы в МОУ СОШ №1 СУИОП г.Фрязино Московской области говорит о том, что проблемы в мотивационной сфере присущи и нашим ученикам. Если проанализировать причины, по которым ученики выбирают для обучения в старших классах физико - математический профиль, то на первом месте окажется желание родителей дать своему ребенку качественное образование, на втором месте окажется желание ученика в будущем получить высшее образование, связанное с применением в профессиональной деятельности математики и физики. Среди выпускников физико-математических классов нашей школы - ученые- математики, физики, инженеры, врачи, художники, поэты, государственные и муниципальные служащие, учителя, так как физико-математическое образование всегда способствовало общему развитию, помогало успешно осваивать самые различные отрасли человеческой деятельности. Следует отметить, что в 2013 и 2014 годах в независимом рейтинге РИАН «Новости» и Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО) наша школа занимала место в ТОП-500 лучших школ России и входила в двадцать лучших образовательных учреждений Московской области. При этом в школе, где в среднем постоянно 1240 учеников, невозможно создать и отслеживать подробную Программу по работе с одаренными детьми. Несмотря на это, мотивация наших учащихся к качественному образованию по пятибалльной шкале может быть оценена на 4. В частности, диагностика мотивации учащихся физико-математических классов 8-11 классов, проведенная нами по методике изучения мотивации учения старшеклассников Окуневой О.Ю., показала высокий уровень мотивации учения, причем внутренние и внешние мотивы были выражены примерно в одинаковой степени

Учитывая объективную сложность школьной математики и тот факт, что выпускной экзамен по математике обязателен для всех учащихся, становится понятным, насколько непроста была всегда эта задача: обучить математике хотя бы на базовом уровне. При этом учитель математики обязан развивать интерес к математике и для этого он может использовать технологии и методы, опирающиеся на неожиданность, парадоксальность, занимательность, создание ситуаций новизны, создание успеха, метод проблемных ситуаций и так далее.

К сожалению, в современной школе существует ряд межпредметных противоречий, которые не могут быть устранены только по желанию учителя математики. Так сложилось, что чаще всего математический профиль образования интегрирован с физическим. Однако на настоящий момент отсутствует полное согласование программ и учебно-методических комплектов, которое могло бы не только повысить качество обучения, но и стимулировать мотивацию к изучению двух таких сложных дисциплин как физика и математика. Речь идет об использовании при углубленном (профильном) изучении физики векторов, квадратичной функции, производной, интеграла гораздо раньше, чем это заложено в программе изучения математики. Но и изучение математики не может быть подстроено только под изучение физики, а должно учитывать и логику развития математической науки. На наш взгляд, если бы возможно было учесть все такие противоречия на уровне средней школы, не только ученик смог бы более полно раскрыть для себя личностный смысл изучаемого материала.

Как считает один из ведущих идеологов сегодняшней педагогики Марк Поташник [2], одним из наиболее эффективных средств формирования устойчивой мотивации познания является личный пример учителя. Другими словами, требования к учителю, работающему в классе с углубленным изучением математики, многократно возрастают. До сих пор в педагогической среде существует мнение, что работать в профильных классах проще, чем в непрофильных, именно потому, что в них собрались заинтересованные ученики, то есть более мотивированные. Однако попробуем не согласиться с таким подходом. Ученики в таких классах проявляют более высокие способности к изучению не только математики, но и других предметов, о чем свидетельствуют результаты участия учащихся этих классов в предметных олимпиадах и творческих конкурсах различных уровней. Значит, учитель математики, работающий в таких классах, должен обладать не только глубокими специальными знаниями по предмету, но и иметь широкий кругозор, быть готовым ответить на любой вопрос учеников, владеть артистическими приемами ведения урока. Учитель должен знать не только психологию современных подростков, но и их родителей, так как часто главным внешним мотивом к обучению выступает не желание и возможности ученика, а желание родителей, которые видят в своих способных детях возможность реализации своих личностных интересов и нереализованных потребностей. В классах с углубленным изучением математики задача учителя - не только свободно владеть программным материалом на углубленном уровне, но и уметь преподнести его учащимся так, чтобы им было важно понять и освоить основные понятия и алгоритмы.. Воспитание волевых качеств личности через изучение математики, на наш взгляд, один из главных путей стимулирования и мотивации ученика.

В настоящее время многие педагоги уделяют время исследовательской деятельности учащихся. В классах с углубленным изучением математики такая деятельность должна быть связана с основным профилем. В настоящее время в Московской области организовано большое количество математических конкурсов, в которых может принимать участие любой школьник. Одним из наиболее интересных, на наш взгляд, является Международный конкурс «Математика и проектирование», который вот уже несколько лет проводится Академией социального управления Московской области и Болгарской Академией наук. Участие в этом конкурсе с каждым годом требует все большего профессионализма учителя, курирующего деятельность ученика. Учитель должен сам хорошо представлять себе, как устроен исследовательский процесс, какие структурные элементы необходимо освоить ученику. А это значит, что он должен быть включен в научно-исследовательскую деятельность, хотя бы на начальном уровне. Современная педагогика требует, чтобы учитель профильного класса владел практически всеми существующими сегодня педагогическими технологиями от проверенных годами (например, дифференцированного обучения) до современных компьютерных (информационно–коммуникационных), что также способствует развитию учебной мотивации.

Современные информационно – коммуникационные технологии используются в образовательных учреждениях в трех направлениях:

1. Для повышения наглядности при изучении программного материала (например, электронные образовательные ресурсы (ЭОР), презентации уроков)

2. Для осуществления процесса обучения (выполнение упражнений, осуществления оперативного контроля («Математический конструктор» 6.0, «Динамическая геометрия», система «VERDICT»));

3. Для осуществления управленческих функций (электронные журналы, дневники)

Учитывая тот факт, что в педагогике результат не является прямым следствием использования тех или иных технологий, на уроке опытный учитель применяет интегрированные, нелинейные технологии, которые подчас невозможно четко дифференцировать и оторвать одну от другой. Именно поэтому вопрос освоения техники педагогической деятельности молодыми учителями – один из самых актуальных при решении проблемы стимулирования и мотивации учащихся к изучению математики на углубленном уровне.

Обучаясь в старшей школе, большинство учащихся уже имеет некоторое представление о своем будущем профессиональном выборе. Думаем, что не ошибемся, если отметим, что массовый выбор учащихся – не в пользу тех профессий, которые требуют глубокой математической подготовки. Наукоемкие и трудоемкие сферы, к которым относится и математика, все меньше интересуют школьников в той степени, чтобы превратиться в их профессию. Поэтому необходимо задействовать и такой побудительный мотив, как чувство тревоги и ответственности перед будущим.

Другой основой для развития мотивации в классах с углубленным изучением математики является раскрытие самоценности знаний самих по себе с целью получения удовольствия от процесса познания, от открытия новых знаний, от того, что ученик просто узнал что-то новое для себя. Большую роль здесь играет такой раздел школьной математики, как «Начала математического анализа». Содержание этого раздела в школьных учебниках не меняется вот уже много лет, что можно отнести к положительным явлениям. Можно спорить, в какой период обучения включать данный раздел в программу изучения: в начале 10 класса, после изучения раздела «Тригонометрия», до изучения раздела «Степени и логарифмы» и так далее. Существующие сегодня учебно-методические комплекты позволяют решать этот вопрос по-разному. В нашей школе мы много лет используем УМК С.М.Никольского, подтверждая эффективность этого пособия.

Говоря о мотивации учащихся профильных классов, необходимо подчеркнуть, что именно «Начала математического анализа» являются пропедевтическим этапом изучения математического анализа в высшей школе на более высоком научном уровне. Однако уже в средней школе, сталкиваясь с реальными задачами на нахождение наибольших или наименьших значений, задачами, требующих исследования функций, построением графиков, ученик начинает получать представление о реальной роли математики в окружающем мире, ее реальных возможностях. Если школьная математика до 9 класса воспринимается учениками больше как некая увлекательная игра, то изучение начал математического анализа, особенно при поддержке этого аппарата на других уроках (физике, химии, биологии, экономике), позволяет осознать исследовательскую роль математики. Если при этом использовать и возможности информационно-коммуникационных технологий, например, при изучении темы «Построение графиков с помощью производной», можно повысить наглядность и эффективность урока, пробудить осознанный интерес у учащихся. Конечно, учитывая реальный уровень интеллектуальной зрелости школьников, учитель не может требовать от них абсолютно точного воспроизведения определений, доказательства теорем математического анализа, но и недооценивать роль этого раздела нельзя. Ученики, планирующие связать свою профессиональную деятельность с математикой, получают хорошее представление о способах решения задач. У остальных учеников складывается представление о математике, как о мощной и современной науке. Большего эффекта мотивирования можно добиться, если при изучении простейших дифференциальных уравнений как можно шире разнообразить тематику задач, используя не только задачи о размножении биомассы, радиоактивного распада, но и, например, судебной медицины, экономики. Необходимо расширять типы задач, используемые на этих уроках. Большую роль в мотивации учащихся профильных классов играют правильно организованные уроки геометрии, в частности затрагивающие вопросы аналитической геометрии и векторной алгебры. В программе для профильных классов на изучение этой темы отводится до 20 часов. Значит, учитель может показать универсальные методы работы с задачами, подготовить учащихся к изучению математики на более высоком уровне.

Кроме уроков большую роль в развитии мотивации школьника к углубленному изучению математики играет внеурочная деятельность по математике, к которой могут быть отнесены: Всероссийская олимпиада школьников, предметные олимпиады, конкурсы, фестивали (в частности, Фестиваль науки), Международная математическая игра-конкурс «Кенгуру», посещение ведущих Университетов, заочные школы, дистанционные курсы для учащихся и другие мероприятия. Чем больше учащихся будет участвовать в такой деятельности, тем выше вероятность того, что больше молодых и талантливых молодых людей выберут свой профессией математику или связанные с ней дисциплины. Значит, цель деятельности учителя по развитию мотивации к изучению математики будет достигнута.

Литература

1. Скороходова Н.Ю. «Технология ведения урока», Санкт-Петербург : Речь, 2002. – 148 с.

2. Поташник М.М. «Требования к современному уроку», Москва, Центр педагогического образования, 2011 – 272с.

ОПЫТ И ПЕРСПЕКТИВЫ ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСОВ ПО СОСТАВЛЕНИЮ И РЕШЕНИЮ КРАЕВЕДЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А.Е. Томилова

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия

e-mail: a.tomilova@narfu.ru

Аннотация: В статье описан опыт организации и проведения двух конкурсов по составлению и решению краеведческих математических задач. Первый конкурс ориентирован на учащихся общеобразовательных школ, второй адресован студентам. Конкурсы имеют целью повышение интереса учащихся к традициям, культуре и истории родного края, популяризацию математического образования и математических знаний.

Ключевые слова: математические краеведческие задачи, конкурс, составление задач, популяризация математических знаний.

EXPERIENCE AND PROSPECTS OF PREPARING COMPETITIONS ON FORMULATION AND SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS OF LOCAL LORE

Abstract: The article describes the experience of organizing and conducting two competitions on the formulation and solving the mathematical problems of local history. The first competition is aimed to secondary school pupils, the second is addressed to students. These contests are designed to increase students' interest in the traditions, culture and history of his native land, and the popularization of mathematics education and mathematics.

Keywords: mathematical problems of local lore, contest, formulation the tasks, popularization of mathematical knowledge.

Одной из задач современной школы, определенных Федеральным государственным образовательным стандартом среднего (полного) общего образования является развитие личностных характеристик выпускника, любящего свой край и свою Родину, уважающего свой народ, его культуру и духовные традиции [1].

Для ее решения необходим поиск дополнительных средств, стимулирующих развитие общей активности, самостоятельности, личной инициативы и творчества учащихся. Таким средством для учащихся может стать изучение на уроках математики родного края, которое осуществляется через задачи, содержащие краеведческий материал. Задачи, составленные на основе краеведческого материала, Н.И. Мерлина называет краеведческими.[2]

Мы будем называть краеведческими текстовые задачи, фабула которых содержит материал, освещающий исторические, культурологические, природно-климатические, географические, социально-экономические особенности региона.

Решая подобные задачи на уроках математики, учащиеся сталкиваются с новыми, неизвестными, поражающими их воображение удивительными фактами, о крае, в котором они живут. Однако в школьных учебниках математики краеведческие задачи представлены недостаточно.

Поэтому в целях повышения интереса учащихся к математике, традициям, культуре и истории родного края, популяризации математических знаний, начиная с 2013 года в Институте математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова проводится конкурс по составлению и решению краеведческих математических задач «Архангельская область в математических задачах». Особенность этого конкурса состоит в том, что в нем могут принимать участие даже учащиеся, не обладающие высоким уровнем математической подготовки. Руководителями работ учащихся являются не только учителя математики, но и учителя истории и географии, родители учеников.

Сюжеты для задач авторы берут из семейных архивов, летних путешествий по родному краю, памятных исторических событий, составляют задачи по мотивам тематик уроков истории, географии, литературы, экскурсий в музеи и на предприятия области. Такие задачи являются наиболее интересными.

Приведем примеры краеведческих задач, составленных учащимися 3-7 классов.

Задача 1. «Растительность Кенозерского национального парка». (Овчинников Семен, 5 класс)

Общая площадь Кенозерского национального парка примерно равна 140 тыс. га, леса занимают 74,2% от всей территории. Преобладающими являются хвойные насаждения, которые занимают 81,7% лесопокрытой площади, из них сосновые – 50,3%. Среди лиственных лесов доминируют березняки – 94,8%. Сколько гектаров земли в парке занимают сосновые насаждения? Сколько гектаров земли занимают березняки? Результат округлить до десятых. Задача составлена автором экскурсии в Кенозерский национальный парк.

Задача 2. «Орнитофауна Кенозерского национального парка» (Михнов Михаил, 3 класс).

В Кенозерском национальном парке обитает 263 вида птиц. Одна из них – чёрный стриж. Известно, что один стриж съедает около 40 тыс. насекомых за сутки. Сколько насекомых съедят 5 стрижей за 10 дней? Автор задачи учится в школе, находящейся на территории Кенозерского национального парка.

Задача 3. «История села Ошевенское». (Третьяков Владислав, 7 класс).

В марте 1881 года в Ошевенском погосте состоялся Григорьевский торжок. Главная торговля производилась суровским, бакалейным и колониальным товаром. Обороты простирались по привозу до 12015 рублей. Привезли некоторое количество поморской рыбы. Хлеба, соли и льняного семени привезли на 198 рублей больше, чем поморской рыбы, а глиняной и деревянной посуды на 250 рублей больше, чем хлеба, соли и льняного семени. Тележных ящиков и колёс на 336 рублей меньше, чем посуды, а стоимость привезенных лошадей была на 39 рублей больше стоимости посуды. Привоз кожи на 425 рублей меньше всех перечисленных товаров. Кроме того прочего товара выставили на продажу на сумму 8820 рублей. На какую сумму привезли каждого товара? (Задача составлена на основе заметки, опубликованной в Олонецких губернских ведомостях за 1881 год).

Конкурс проводится в два этапа. На первом этапе (заочном) отбираются лучшие работы. Второй (очный) этап проводится во время проведения региональной научно-практической конференции «Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и информатики».

В 2013 году на конкурс представлялись презентации, включающие:

- формулировку краеведческой задачи, составленной самими учащимися, либо найденной ими в архивных материалах, либо записанной со слов жителей Архангельской области;
- решение задачи (желательно несколькими способами);
- информацию, раскрывающую источники и содержание краеведческого материала, включенного в сюжет задачи, а также описание вклада учащегося в постановку задачи.

Лучшими были признаны задачи: «Расчет водопроводной сети: к 110-летию Архангельского водопровода», «Новодвинская крепость», «Соловецкое сидение», «Архангельские деньги». Кроме того, участники конкурса получили награды в отдельных номинациях:

- «Математические истории в лицах»;
- «Культурное наследие русского Севера»;
- «Бережное отношение к духовному наследию»;
- «Научная значимость и перспективность темы исследования»;
- «Наибольшее количество предложенных способов решения задачи»;
- «Историческая достоверность и математическая верность»;
- «Математический калейдоскоп»;
- «Оригинальность творческого замысла».

Таким образом, наибольшее предпочтение учащиеся уделили составлению задач, отражающих исторические и духовно-культурные, а также природно-географические особенности региона.

Поэтому в 2014 году в качестве номинаций конкурса были выбраны:

- «Задачи о Кенозерском национальном парке»;
- «Задачи о храмах и монастырях Северной земли»;
- «Музей Малые Корелы в математических задачах»;
- «Задачи о Великих Поморах»;
- «Задачи о тайнах и красотах Северной земли»;
- «Математические секреты народных ремесел Поморья».

Опыт проведения в 2013 году первого конкурса также показал, что для оценки достоверности составленных учащимися задач необходимо включение в экспертное жюри не только преподавателей математики, но и специалистов в области краеведения.

В 2014 году в качестве членов жюри были приглашены представители ФГБУ «Национальный парк «Кенозерский», музея «Малые Корелы»; отдела религиозного образования и катехизации Архангельской и Холмогорской Епархии, туристической компании ООО «А Турс».

По итогам первого конкурса были уточнены требования к краеведческим задачам. На конкурс принимались сюжетные математические задачи, составленные учащимися и удовлетворяющие следующим требованиям:

- задача должна обладать краеведческой ценностью (представленный в задаче краеведческий материал должен быть оригинальным, он должен быть достаточно полно представлен как в сюжете задачи, так и предварительном описании мотивов ее постановки; требование задачи должно быть практически значимым);

- задача должна обладать математической ценностью (задача должна быть корректно поставленной, по возможности допускать оригинальное решение или несколько способов решения, соответствовать программе школьного курса математики);

- презентация задачи должна обладать этической и эстетической ценностью (в презентации должен быть выдержан единый стиль в представлении информации, качественно и правильно использован аудио-визуальный материал, в презентации должны быть корректные ссылки на источники и способы получения информации).

Эти требования были положены в основу критериев экспертной оценки конкурсных работ учащихся.

Задачи победителей конкурса, победителей и призеров в каждой номинации конкурса были опубликованы в сборнике материалов региональной научно-практической конференции школьников. [3]

Одной из ключевых компетенций, входящих в программу подготовки студентов практически всех направлений и уровней подготовки, согласно требованиям ФГОС ВПО является готовность к культурно-просветительской деятельности. Участие студентов в культурно-просветительском движении в области краеведения и математики позволит студентам внести посильный вклад в решение важной государственной задачи – популяризации математических знаний и математического образования, формирования неравнодушного отношения к родному краю, его проблемам и достижениям. Доказательством государственной важности задачи популяризации математического образования является Концепция развития математического образования Российской Федерации, утвержденная распоряжением правительства РФ 24 декабря 2013 года. В Концепции отмечается, что одна из ее задач – «популяризация математических знаний и математического образования». [4]

На ее решение и был нацелен конкурс «Реши задачу – узнай об Архангельском крае». Он впервые был проведен в 2014 году в рамках студенческого проекта «Инициатива». Работы финалистов и участников конкурса «Архангельская область в математических задачах» составили содержательную основу студенческого конкурса по решению математических краеведческих задач «Реши задачу – узнай об Архангельском крае». В основном это были сюжетные математические задачи, содержащие сведения об исторических и духовно-культурных, природно-географических особенностях региона, а также об известных людях Поморья. Через решение задач, составленных школьниками, студенты могли познакомиться с достопримечательностями тех мест, где им предстоит учиться и работать, узнать о проблемах и задачах развития региона.

Участникам конкурса предлагалось решить 19 математических краеведческих задач. Приведем примеры задач учащихся.

Задача 1. «Великие люди Поморья» (Ким Валерия, 6 класс).

Архангельская земля, кроме М. В. Ломоносова, дала миру многих известных людей. В 1746 г. родился Баранов Александр Андреевич (русский купец, первый Главный правитель русских поселений в Америке). Он прожил 73 года. После его смерти пройдёт $1/10$ века, когда на свет появится Иоанн Кронштадтский (священник Православной Российской церкви, настоятель и проповедник), который прожил 79 лет. Андрей Михайлович Курочкин (судовых дел мастер, строитель первых кораблей в Архангельске) родился, когда купцу было 24 года, и умер через 18/25 века. Шубин Федот Иванович (великий русский скульптор и художник), на 30 лет старше А.М. Курочкина, прожил 65 лет. В каком веке умер скульптор? Укажите годы жизни этих известных людей?

Задача 2. «500-летие Свято-Троицкого Антониево–Сийского монастыря» (Лашутина Елизавета, Мальцева Анастасия, 6 класс)

В каком году будет отмечаться 500-летие Свято-Троицкого Антониево-Сийского мужского монастыря, если до закрытия советской властью он существовал 400 лет? Спустя 72 года после закрытия началось восстановление монастыря архимандритом Трифоном (Плотниковым). В 2012 году отмечалось 20-летие со дня восстановления монастыря.

Задача 3. История монастыря. (Выдрина Анна, 10 класс)

В каком году царем Михаилом Федоровичем был подарен Николо-Корельскому монастырю набатный колокол Спасских ворот Московского Кремля, если число года равно квадрату суммы значения производной функции $y = (2x+1)^5$ в точке $x_0 = -1$, увеличенной в 4 раза, и значения тангенса угла между касательной к графику функции $h(x) = \sqrt{\mathrm{tg}\,(x)}$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$ и положительно направленной осью x?

В конкурсе приняли участие студенты различных институтов САФУ имени М. В. Ломоносова.

Мы надеемся, что студенты будут в дальнейшем участвовать не только в решении задач, составленных школьниками, но и составят свои задачи. Для таких студентов мы планируем расширить возрастные рамки конкурса «Архангельская область в математических задачах». Кроме того, планируем расширить географию конкурса «Архангельская область в математических задачах» и привлечь к участию учащихся всех районов области.

В 2015 году пройдет третий конкурс «Архангельская область в математических задачах», основной номинацией которого будет номинация «Архангельская область в годы Великой Отечественной войны».

Литература

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. – http://www.edu.ru/db/mo/Data/d_12/m413.pdf

2. Мерлина Н.Н. Фольклорные и краеведческие математические задачи народов России /Н.И. Мерлина, А.В. Мерлин, С.А. Карташова и др. / под общ. ред. Н.И. Мерлиной. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2012. 290 с.

3. Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и информатики: материалы Шестой региональной научно-практической конференции / сост. С.Н.Котова; отв. Ред. М.В. Шабанова; Сев. (Аркт.) федер. ун-т им. М.В.Ломоносова. – Архангельск: ИПЦ САФУ, 2014. 143 с.

4. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Текст] /URL:http://www.vestnik.edu.ru/2014/03/kontseptsiya-razvitiya-matematicheskogo-obrazovaniya-v-rossiyskoy-federatsii/

ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ У СТУДЕНТОВ-ЭКОНОМИСТОВ НА ОСНОВЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Е.Н. Трофимец[1], В.Я. Трофимец[2]

[1] *Санкт-Петербургский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, Санкт-Петербург, Россия*
[2] *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия*

e-mail: [1]`ezemifort@inbox.ru`, [2]`zemifort@inbox.ru`

Аннотация: В статье рассматривается основной принцип, лежащий в основе изучения дисциплин математического цикла, который состоит в повышении уровня мотивации у студентов-экономистов за счет внедрения профессионально-ориентированных экономических задач в процессе обучения.

Ключевые слова: мотивация, профессионально-ориентированные экономические задачи, информационные и коммуникационные технологии.

WAYS TO IMPROVE MOTIVATION TO LEARN MATHEMATICS WITH ECONOMICS STUDENTS BASED ON PROFESSIONALLY-ORIENTED ECONOMIC TASKS

Abstract: The article discusses the basic principle underlying the study of mathematical disciplines cycle, which is to increase the level of motivation among students of economics by introducing professionally-oriented economic problems in the learning process.

Keywords: motivation professionally-oriented economic tasks, information and communication technology.

Мотивация достижения в изучении ряда учебных дисциплин математического цикла (в частности, таких дисциплин, как «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Эконометрика», «Теория игр», «Статистика», «Методы оптимальных решений», «Исследование операций», «Основы финансовых вычислений») студентами-экономистами может быть повышена путем внедрения в образовательный процесс инновационных методов обучения, отличных от традиционных форм обучения, которые, в основном, направлены на механическое запоминание информации. Традиционные формы обучения должны дополняться новыми инновационными технологиями, разработанными в соответствии с интерактивными формами обучения, что позволит повысить мотивацию, а тем самым и качественный уровень подготовки студентов, поддерживая и направляя их интеллектуальный потенциал. Одной из таких технологий, на наш взгляд, является технология компьютерного моделирования, которая позволяет органично синтезировать знания по экономике, математике, информационным технологиям и обладает значительным дидактическим потенциалом в формировании информационно-аналитической компетентности студентов экономических вузов.

Особенность информационно-аналитических технологий обучения состоит в том, что наряду с информационной составляющей в них доминирующую роль играет математическая составляющая, которая является ключевой компонентой инструментальных методов решения сложных аналитических задач экономического характера.

Проектирование информационно-аналитических технологий обучения студентов-экономистов подчиняется общим принципам проектирования компьютерных систем учебного назначения, основополагающими из которых являются: принцип целостности; принцип воспроизводимости; принцип нелинейности педагогических структур; принцип адаптации процесса обучения к личности обучаемого; принцип потенциальной избыточности информации.

Наряду с общими принципами проектирования компьютерных систем учебного назначения, процессу дидактического проектирования информационно-аналитических технологий присущи специфические черты, среди которых можно выделить следующие:

- априорная дидактическая система информационно-аналитической подготовки специалистов экономического профиля должна ориентироваться на концептуальную модель научно-методического аппарата решения профессионально-ориентированных экономических задач;

- элементы реальной дидактической системы информационно-аналитической подготовки специалистов экономического профиля должны соответствовать способам, методам и моделям обработки экономической информации, доминирующим в профессиональной деятельности;

- процесс построения и анализа однотипных моделей экономических систем должен основываться на общих методологических подходах и принципах;

- используемое учебно-методическое программное обеспечение должно быть ориентировано на обучаемых, не имеющих специальной математической подготовки, главной задачей которых является понимание только основополагающих идей и принципов, реализованных в изучаемых экономико-математических моделях и методах.

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования по направлению подготовки Экономика (квалификация (степень) "бакалавр") процесс изучения дисциплин математического цикла направлен на формирование следующих основных (из ФГОС с указанием номера/индекса) компетенций:

– способен собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1);

– способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4);

- способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);

– способен на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6).

Для овладения студентами-экономистами указанных компетенций математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки студента и элементом общей культуры.

Основной принцип, лежащий в основе изучения дисциплин математического цикла, состоит в повышении уровня мотивации у студентов-экономистов за счет внерения профессионально-ориентированных экономических задач (ПОЭЗ) в процессе обучения.

Первым формальным признаком, характеризующим ПОЭЗ, является степень их неопределенности, которая проявляется не только в неточности (или неполноте) информации об исходных данных, но также и в неопределенности между принятым на основе ПОЭЗ решением и его исходом. По этому признаку (в теории принятия решений он получил название "определенность-риск-неопределенность") профессионально-ориентированные экономические задачи можно разделить на три больших класса:

1. *ПОЭЗ в условиях определенности* (или *детерминированные ПОЭЗ*). Они характеризуются однозначной, детерминированной связью между решением задачи и его исходом, т. е. оперирующей стороне относительно каждой стратегии заранее, до проведения операции, известно, что она неизменно приводит к определенному конкретному результату.

2. *ПОЭЗ в условиях риска* (или *стохастические ПОЭЗ*). Они характеризуются вероятностной связью между принятым решением и его исходом. В этом случае каждая стратегия оперирующей стороны может привести к одному из множества возможных исходов, причем каждый исход имеет определенную вероятность появления. Предполагается, что экономисту-аналитику эти вероятности заранее, до принятия решения, полностью известны (или могут быть определены с любой требуемой для целей исследования степенью точности).

3. *ПОЭЗ в условиях неопределенности.* Они характеризуются тем, что любое принятое решение может привести к одному из множества возможных исходов, вероятности появления которых неизвестны.

Фокус внимания сместим на ПОЭЗ, связанные с финансово-экономическими расчетами. И рассмотрим технологию работы с финансовыми функциями в Microsoft Excel, которые приходят на помощь в решении по математическим моделям профессионально-ориентированных экономических задач.

В Microsoft Excel есть ряд функций, которые принадлежат категории "финансовые что, безусловно, с точки зрения будущей профессиональной деятельности представляет определенный интерес.

По умолчанию в MS Excel реализованы 15 финансовых функций. При подключении программной надстройки "Пакет анализа" в категорию "Финансовые" добавляется ещё 37 функций, таким образом, данная категория расширяется до 52 функций [1].

Сфера приложения финансовых функций связана с осуществлением финансово-экономических расчетов. По типу решаемых задач все финансовые функции MS Excel можно разделить на следующие 4 условные группы:

- функции для анализа потоков платежей (например, функции БЗ, ПЗ и др.);
- функции для анализа инвестиционных проектов (например, функции НПЗ, ВНДОХ и др.);
- функции для анализа ценных бумаг (например, функции ДОХОД, ЦЕНА и др.);
- функции для расчета амортизационных отчислений (например, АМР, АМГД и др.).

Информацию о назначении интересующей функции, используемых ею аргументах, а также демонстрационный пример работы с функцией можно найти в соответствующем разделе справочной системы Microsoft Excel.

Более подробно мы остановимся на рассмотрении финансовых функций, используемых для анализа потоков платежей [2].

Разработка планов погашения кредитов – одна из важнейших и часто встречающихся на практике задач. Как правило, кредит погашается одинаковыми платежами, равномерно распределенными во времени. Такой метод часто называют амортизацией долга. Возникающие при этом денежные потоки представляют собой уже хорошо знакомый нам простой аннуитет.

Основная задача планирования поступлений (выплат) по кредитам сводится к исчислению составных элементов платежей и распределению их во времени. Для этих целей в MS Excel реализована специальная группа функций, среди которых рассматриваются функция ПЛПРОЦ ("платеж процентный) и функция ОСНПЛАТ ("основной платеж"). Указанные функции используют аргумент период – номер периода выплаты.

Финансовая сущность функций ПЛПРОЦ и ОСНПЛАТ в том, что периодический платеж (например, по кредиту) состоит из 2-ух основных частей – основной части (направлена на погашение основного долга) и процентной части (процентные выплаты по кредиту). Такое деление платежа, как для банка, так и для заемщика представляет большой интерес. Для банка процентная часть платежа составляет доход от операции, а для заемщика – сумму, вычитаемую из налогооблагаемой базы. При этом соотношение между основной и процентной частями платежа во времени меняется, но неизменной остается их сумма [3]:

$$CF_t^{\text{проц}} + CF_t^{\text{осн}} = CF_t,$$

или в "терминологии" функций MS Excel:

$$\text{ПЛПРОЦ}() + \text{ОСНПЛАТ}() = \text{ППЛАТ}().$$

Таким образом, функция ПЛПРОЦ рассчитывает процентную часть платежа, а функция ОСНПЛАТ – основную часть.

При использовании ПОЭЗ в изучении дисциплин математического цикла требуется проектирование и конструирование универсальных механизмов интеграции профессионально значимых знаний, приемов и видов познавательной деятельности, основанных на установлении преемственных связей между блоками знаний, актуализации основополагающих концепций, идей и структурообразующих линий генезиса базовых учебных элементов [4].

Дидактические требования к профессиональной подготовке будущих экономистов должны быть направлены на развитие мотивационной сферы учения.

Литература

1. Экономическая информатика // под ред. П. В. Конюховского и Д. Н. Колесова. – Санкт-Петербург: Питер, 2001. – 560 с.

2. Трофимец Е.Н., Трофимец В.Я., Батьковский А.М. Развитие методического аппарата рейтинговой оценки финансово-экономического состояния предприятий оборонно-промышленного комплекса // Финансы и кредит, №48, декабрь, 2014г., С. 34-45

3. Ковалев В. В. Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 512 с.

4. Трофимец Е.Н., Трофимец В.Я., Смирнов Е.И. Мотивация достижения в изучении математики студентами-экономистами на основе анализа Фурье экономических временных рядов // Ярославский педагогический вестник № 3, том 2 - 2014, серия «Психолого-педагогические науки», ЯГПУ. С. 79-85.

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В.Е. Щербатых

Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина, Елец, Россия

e-mail: wega18@mail.ru

Аннотация: В статье обосновывается связь между поступательным движением общества и необходимостью развития в частности математических наук. Анализируются некоторые черты школьного математического образования, обосновывается один из вариантов дальнейшего движения.

Ключевые слова: математика, школа, экзамен, ЕГЭ, программа, оценка знаний.

ABOUT SOME ASPECTS OF SCHOOL MATHEMATICAL EDUCATION

Abstract: In the article connection is grounded between forward motion of society and necessity of development in particular of mathematical sciences. Some lines of school mathematical education are analysed, one of variants of further motion is grounded.

Keywords: mathematics, school, examination, program, estimation of knowledge.

Как известно, развитые страны мира признают необходимость приоритетного и опережающего обеспечения фундаментальных естественнонаучных исследований, как гаранта роста страны в области научно-технических инновациях. Считается, что для достижения высокого качества экономического роста, требуется решить задачу постоянного и непрерывного воспроизводства интеллектуального капитала страны, а положительные результаты фундаментальных и прикладных исследований в области естествознания позволяют сделать открытия и во многих других сферах деятельности человека.

В связи с этим, повышение уровня математического образования для многих государств, стало приоритетным направлением. Не случайно в США была создана Национальная комиссия по преподаванию математики и естественных наук в 21-ом веке. Задача этой комиссии сводится к исследованию качества преподавания, в частности математики, и нахождению путей улучшения подбора кадров, подготовки, сохранения и профессионального роста преподавателей математики и естественных наук в масштабе всей страны. Вот лишь несколько выдержек из доклада : «...математика и естественные науки — это первичный источник непрерывного знания и прогресса нашей цивилизации...», «...американские учащиеся должны повысить уровень знаний в математике и естественных науках, если им предстоит добиться успехов в сегодняшнем мире...», «...поскольку наши дети идут к тому времени, когда их решения будут формировать новую Америку, встаёт вопрос: будут ли они обладать необходимыми математическими и естественнонаучными инструментами, чтобы встретить новые проблемы и извлечь выгоду из новых возможностей?» [1].

Совсем недавно образование в России считалось одним из лучших в мире. Выпускник получал обширный багаж знаний, изучая в полном объеме и гуманитарные и естественные дисциплины. В итоге был разносторонне развитым и хорошо подготовленным к получению высшего или среднего специального образования, причем, мог поступить почти в любой ВУЗ без дополнительной подготовки с репетиторами, даже на факультеты с математическим уклоном.

К сожалению, эти позиции давно потеряны и по-прежнему продолжается процесс снижения уровня школьного образования вообще, и математического образования, в частности. Казалось бы, что в этих условиях отношение в современном обществе к математике (математическому образованию) должно быть бережным, без резких, непродуманных решений. Но не получается.

Профессор МГУ, математик и педагог-просветитель И.Ф. Шарыгин так говорил о математическом образовании: «Мы вправе рассматривать наше математическое образование, как весьма мощный стратегический ресурс России. При этом в качестве стратегического ресурса математика и математическое образование могут выступать и внутри России и на внешнем рынке. Но в таком случае вопрос о том, какими должны быть стандарты математического образования, выходит далеко за узкопредметные рамки и становится важнейшим общественно-политическим вопросом», «...Прежде всего, целью математического образования является развитие учащихся, причем развитие самых разных видов: ... культурное развитие-... , духовное развитие-...,... эстетическое развитие-..., нравственное развитие (воспитание) -...,творческое развитие-..., ... интеллектуальное развитие-...» [2].

Сегодня в школе можно увидеть следующие непростые ситуации. Разные по профилю подготовки классы обучают школьников математике соответственно по разным программам (которые, как правило, выбирают родители). На выходе получаем: одно и то же качество знаний по математике может иметь совершенно разные оценки: «отлично» в гуманитарном классе и «удовлетворительно» в математическом. При определенных условиях вопрос поступления в ВУЗ может решаться величиной среднего балла аттестата, поэтому при прочих одинаковых оценках, имеем необоснованное преимущество гуманитария. Еще более неприятный момент возникает, когда, например, школьник-гуманитарий в конце 11-го класса вдруг осознает, что ближе ему естественные науки, а времени наверстать упущенное, уже нет.

Возьмем ЕГЭ. Кто только не бросал камни в это «великое изобретение»! Бесспорно, из года в год этот процесс сдачи экзаменов усовершенствуется. Но некоторые отрицательные моменты всегда будут оставаться. Сам факт нахождения ученика в чужом здании школы, где, сидя за партой, он может получить от обслуживающего ЕГЭ персонала угрозы и обещание «выгнать с экзамена» за не тот поворот головы, приводит последнего в ступор, лишает уверенности в своих силах. Имеются многочисленные факты того, что прилежные, хорошо успевающие за все время обучения в школе ребята-отличники, писали ЕГЭ по математике на уровне 40 баллов.

Посмотрим на задание С3 – систему двух неравенств (стоит сказать, что неравенства попадаются в различных вариантах разной степени сложности, чего не должно быть). Ученик решает оба неравенства, вообще говоря, правильно, но в ответах записывает вместо, например, интервалов – полуинтервалы или отрезки. В этом случае за задачу он получает ноль баллов. На наш взгляд это несправедливо и называется «без права на ошибку». Но они же все еще дети и не сдают экзамен на сапера.

По поводу ежегодного обновления материалов экзамена ЕГЭ можно сказать следующее.

1) Школьники покупают каждый год выходящие солидными тиражами известных авторов учебно-методические материалы (10 вариантов ЕГЭ, 20 реальных вариантов ЕГЭ,30 настоящих вариантов ЕГЭ и т.д.) и начинают и в школе, и дома решать все это. Вроде получается, значит подготовились. Но когда на экзамене попадается подобная задача с незначительными изменениями в формулировке (особенно это касается задач группы С), школьник теряется и не может решить. Это происходит оттого, что при подготовке к экзамену не решались примеры и задачи более широкого спектра, не изучалась более глубоко теория. А зачем, если имеются «реальные варианты»?

Таким образом, содержание вариантов методичек ЕГЭ определяет содержательность (значит и качество) математического образования в старших классах школы: т.е. ученики не изучают математику в полном смысле этого слова, а готовятся по определенным лекалам к сдаче экзамена. Т.е. на сегодняшний день в основном математические знания выпускников школ фрагментарны.

2) В материалах ЕГЭ нет заданий на доказательство каких-либо теорем. А раз так, то в большинстве случаев имеем соответствующее отношение учителей к изучению теоретических основ школьной программы. И как тут не вспомнить слова академика В.И. Арнольда: «Тот, кто не научился искусству доказательства в школе, не способен отличить правильное рассуждение от неправильного. Такими людьми могут легко манипулировать. . . » [3].

3) Часто можно услышать вопрос: «Действительно ли можно объективно оценить уровень знаний школьников по результатам ЕГЭ?». Ответ дало министерство образования и науки РФ, когда разрешило некоторым ВУЗам проводить дополнительные вступительные экзамены по математике.

4) Еще вопрос: если на факультет нужно набрать n абитуриентов, а подано $n + k$ заявлений с одинаковыми результатами ЕГЭ и отличными аттестатами. Как отобрать лучших?

Как уже было отмечено, качество математического образования является стратегическим вопросом для ведущих стран мира. В последнее время стало очевидным, что многие математические методы превратились в универсальные методы исследования, т.е. стали общенаучными инструментами. Это явление связано с тем, что математические методы обладают, в частности, такими свойствами, как четкость в постановке задач, регулируемая точность получаемых оценок, непоколебимая логика рассуждений. Кроме того, изучение математики, использование математических методов в своей работе, формирует особый стиль мышления: абстрактный, логический, нацеленный на поиск закономерностей. Специалиста, грамотно применяющего математические методы, сегодня можно увидеть едва ли не во всех сферах деятельности человека.

Поэтому постепенно общество приходит к осознанию того факта, что без математических методов исследования не будет обходиться ни одна сфера деятельности человека, и математику придется изучать и в школе и в ВУЗе на высоком уровне всем без исключения. И в этом нет ничего необычного, т.к. еще академик Л.Д.Кудрявцев говорил: «. . . каждый нормальный человек может овладеть любым родом умственной деятельности, в том числе и правильным использованием математических методов, на таком уровне, что он будет нужным, полезным и надежным специалистом. . . »[4].

Может уже сегодня стоит подумать о единой школьной программе обучения математике, о новых формах выпускного (и, или вступительного) экзамена и о новых требованиях к качественной подготовке кадров – школьных учителей?

Литература

1) http://www.mccme.ru/edu/index.php?ikey=glenn_ne_pozdno

2) И.Ф. Шарыгин Цели, задачи и стандарты математического образования. -Вопросы тестирования в образовании, 2003, №6, стр. 187-194.

3) В.И. Арнольд Антинаучная революция и математика.- Вестник РАН, Т.69, №6, с.553-558, 1999г.

4) Л.Д.Кудрявцев Мысли о современной математике и ее преподавании, избранные труды, Т.3, Физматлит, 2008, стр. 28.

Секция 9. Развитие математики и математического естествознания

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В XIX - XX СТОЛЕТИЯХ: ДИАЛЕКТИКА КОНЦЕПТУАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ

С.С. Демидов

Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН, Москва, Россия

e-mail: serd42@mail.ru

Аннотация: На протяжении 19 века теория дифференциальных уравнений с частными производными развивалась в двух основных направлениях - как общая геометрическая теория таких уравнений и как теория краевых задач для уравнений математической физики. Однако, уже в последней трети 19 века исследования по геометрической теории становятся до известной степени маргинальными и под общей теорией начинают понимать теорию краевых задач для различных типов уравнений - эллиптических, параболических и гиперболических. Положение стало меняться в последней трети XX века, когда исследования по геометрической теории вновь оказались в центре внимания исследователей, став частью современной теории дифференцируемых многообразий.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с частными производными, уравнения математической физики, краевые задачи, дифференцируемые многообразия.

THE GENERAL THEORY OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE XIX$^{\mathbf{th}}$ - XX$^{\mathbf{th}}$ CENTURIES: THE DIALECTICS OF ITS CONCEPTUAL DEVELOPMENT.

Abstract: During the 19$^{\text{th}}$ century the theory of partial differential equations developed in two main directions: as the general geometric theory of these equations and as the theory of boundary problems for the equations of mathematical physics. In the last third of the XIX$^{\text{th}}$ century however the research on the geometric theory became to a certain extent marginal and the point of view on the general theory of partial differential equations as on the theory of boundary problems for different types of equations - elliptic, parabolic and hyperbolic equations - was accepted. The situation with the general geometric theory began to change in the last third of the XX$^{\text{th}}$ century, when the studies on this theory were in the spotlight of the mathematicians as the part of the modern theory of differentiable manifolds.

Keywords: partial differential equations, equations of mathematical physics, boundary problems, differentiable manifolds.

Введение. Рождение теории дифференциальных уравнений с частными производными связано с работами Ж. Даламбера и Л. Эйлера, положивших начало её развитию в обстановке острой взаимной конкуренции (см. [1]) Итоги этих исследований были подведены в «Исследованиях по интегральному исчислению» Даламбера[2] и в соответствующих разделах третьего тома эйлеровского «Интегрального исчисления» [3]. Уже в их исследованиях наметились две основные линии исследований в этой области - построение общей теории таких уравнений и разработка теории краевых задач уравнений математической физики. Если основной задачей в первой было нахождение общего решения уравнения, в выражение которого входят произвольные функции, и является необходимым определить как степень произвольности наиболее общего решения, так и, по возможности, само это решение, то основной задачей второго направления стало нахождение решения определённой физической проблемы, удовлетворяющее некоторым начальным и граничным условиям.

Очень скоро, прежде всего благодаря исследованиям Г. Монжа (его «Приложению анализа к геометрии» [4] и др. работам), первое направление приобрело геометрический характер и общая (теперь уже) геометрическая теория дифференциальных уравнений с частными производными образовала единое целое с дифференциальной геометрией. В рамках этого направления получила замечательное развитие теория уравнений первого порядка (Г. Монж - Ж. Лагранж). Эта теория получила известное завершение в 70-е годы XIX столетия в работах С. Ли (см. [5]). Теория уравнений математической физики достигла замечательных результатов уже к концу первого десятилетия XIX века - в теории колебаний (Даламбер, Эйлер и др.), в механике жидкости (Даламбер, Эйлер и др.), теории потенциала (Ж. Лагранж, П.С. Лаплас, А.М. Лежандр и др.), наконец, в теории теплопроводности (Ж. Фурье и др.) - и продолжала активное последующее развитие.

Выделение этих двух направлений сохранялось до конца XIX века. Так Д.Ф. Егоров во введении к своей магистерской диссертации «Уравнения с частными производными 2-го порядка по двум независимым переменным. Общая теория интегралов, характеристики» [6], защищённой в 1899 году и посвящённой общей теории уравнений, писал [6, с. II]: «Аналитическая теория уравнений с частными производными 2-го порядка отделилась от математической физики, благодаря принципиальной разнице в самой постановке вопроса при изыскании интеграла данного уравнения, в зависимости от того, рассматривается ли оно самостоятельно или же как уравнение определённой задачи физики.»

Действительно, всякая физическая задача приводит к определению функции, удовлетворяющей не только уравнению с частными производными, но ещё некоторым начальным и предельным условиям, в силу которых задача является вполне определённой; искомая функция может быть найдена тем или другим приёмом (разложением в ряд, при помощи определённых интегралов), причём в выражение её не входит никаких произвольных величин. Между тем, если задачей нашей является определение функции, удовлетворяющей только данному уравнению с частными производными, то в выражение этой функции необходимо должны входить произвольные величины, и является желательным определить как степень произвола самого общего решения, так по возможности и само решение». Этим двум направлениям посвящены отдельные статьи - Э. фон Вебера «Дифференциальные уравнения с частными производными» [7] и А. Зоммерфельда «Граничные задачи в теории дифференциальных уравнений с частными производными»[8] - в немецкой энциклопедии математических наук.

Общая теория в XIX веке. Начало нового важного этапа в развитии общей теория дифференциальных уравнений с частными производными положили идеи

С. Ли, первое изложение которых содержат его работы 1870-ых годов [5, 9]. Свои исследования Ли начал с теории уравнений 1-го порядка. Следуя идее Ю. Плюккера «обобщённого элемента пространства», он предложил рассматривать уравнение

$$f(x,\, y,\, z,\, p,\, q) = 0 \quad (p = \frac{\partial z}{\partial x},\, q = \frac{\partial z}{\partial y}) \tag{1}$$

не как обычно - в связи с трёхмерным координатным пространством R^3, но в связи с пятимерным пространством R^5, рассматривая набор $(x,\, y,\, z,\, p,\, q)$, как точку этого пространства. В этом случае уравнение (1) задаёт многообразие M_4 размерности 4 в пространстве R^5. Проинтегрировать такое уравнение по С. Ли означает найти все многообразия M_k $(k \leq 2)$, $x = x(t_1,\, t_2, \ldots,\, t_k)$, $y = y(t_1,\, t_2, \ldots,\, t_k)$, $z = z(t_1,\, t_2, \ldots,\, t_k)$, $p = p(t_1,\, t_2, \ldots,\, t_k)$, $q = q(t_1,\, t_2, \ldots,\, t_k)$, координаты точек которого удовлетворяют уравнению (1) и условию $dz - pdx - qdy = 0$. Можно показать, что проблема интегрирования сводится к нахождению всех интегральных многообразий M_2 двух измерений.

В таким образом интерпретированной теории получает обобщение и понятие уравнения, и понятие его решения. Так оказывается возможным рассматривать как уравнение с частными производными первого порядка выражение $z = 0$, а двумерное многообразие $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $p = t_1$, $q = t_2$ (которое в R^3 может быть интерпретировано как множество плоскостей, проходящих через начало координат) как его решение.

В R^5 Ли выделил класс преобразований вида $x' = x'(x,\, y,\, z,\, p,\, q)$, $y' = y'(x,\, y,\, z,\, p,\, q)$, $z' = z'(x,\, y,\, z,\, p,\, q)$, $p' = p'(x,\, y,\, z,\, p,\, q)$, $q' = q'(x,\, y,\, z,\, p,\, q)$, при которых тождественно удовлетворяется соотношение $dz' - p'dx' - q'dy' = \rho(x,\, y,\, z,\, p,\, q)(dz - pdx - qdy)$, где $\rho(x,\, y,\, z,\, p,\, q)$ - функция отличная от нуля и зависящая от преобразования. Инвариантным свойством таких преобразований, получивших наименование контактных, является касание. Классические преобразования Лежандра и Ампера представляли собой примеры таких преобразований. В 1872 году С. Ли доказал, что всегда существует контактное преобразование преобразующее любое уравнение в любое наперёд заданное, в частности, в уравнение $z = 0$. Таким образом, из этого простейшего уравнения можно вычитать всю теорию уравнений первого порядка! Описание интегральных многообразий уравнения $z = 0$ (см. [9, с. 115]) даёт изящное изложение «лагранжевой теории» уравнений первого порядка.

(Необходимо отметить, что предложенное Ли решение проблемы эквивалентности с современной точки зрения выглядит неудовлетворительным. Во-первых, не отмечен локальный характер полученного результата - следует говорить о возможности установления изоморфизма посредством контактного преобразования некоторой окрестности точки многообразия $f(x,\, y,\, z,\, p,\, q) = 0$ и некоторой окрестности точки многообразия $f_1(x',\, y',\, z',\, p',\, q') = 0$. Во-вторых, не указано то обстоятельство, что такое преобразование невозможно в окрестности нерегулярных точек (необходимое условие нерегулярности $p^2 + q^2 = 0$) Что касается первого замечания, то не может быть никакого сомнения в том, что Ли был ясен локальный характер его результата, чего он ни здесь, ни в других подобных случаях не считал нужным оговаривать. Второе замечание следует отнести скорее к общей для математиков XIX века манере формулировать результаты, верные в «общем случае», игнорируя их невыполнение в некоторых отдельных особых случаях. Так и здесь, как можно показать, нерегулярные точки составляют на многообразии $f(x,\, y,\, z,\, p,\, q) = 0$ замкнутое подмножество меньшего числа измерений, и результат Ли оказывается верным «почти всегда», то есть в «общем случае». Точные формулировки и строгие доказательства стали нормой лишь через добрую сотню лет - в 70-ые годы XX столетия - см. [5, 9].)

На этом пути С. Ли начал исследование проблемы интегрирования уравнений более высоких порядков. Эти исследования продолжили Э. Картан, Д.Ф. Егоров (его диссертацию [6] мы цитировали выше), Э. Вессио, Ж. Драш и др. Однако, прогресс в развитии теории для нелинейных уравнений порядков больше единицы оказался более чем скромный.

Смена идеологии на рубеже XIX - XX столетий. В последней трети XIX идеология, господствовавшая в теории дифференциальных уравнений с частными производными, начала меняться. Стало ясно (С. Ли, А. Пуанкаре), что интегрируемые уравнения представляют собой скорее исключение, чем правило. Ещё в 1864 году в книге [10] П. Дюбуа Реймон высказал такую точку зрения: «Если под общим интегралом понимать аналитическое выражение, содержащее все частные интегралы, то такого, на мой взгляд, вообще говоря, не существует ... Напротив, дифференциальные уравнения с частными производными приходится рассматривать совместно с граничными значениями как целое и нельзя разрывать их при исследовании» [10, с. VII - VIII]. И к концу века исследования граничных задач для уравнений с частными производными становятся всё более систематическими. Становится всё более распространённой точка зрения, согласно которой, если и можно говорить об общей теории дифференциальных уравнений с частными производными, то это должная быть теория граничных задач для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов согласно классификации, предложенной Дюбуа Реймоном в 1889 году [11]. Именно так начинает излагаться теория дифференциальных уравнений в получающих широко распространение курсах анализа Э. Пикара и Э. Гурса. Новый взгляд на общую теорию распространяется не без известного сопротивления. Так С.Н. Бернштейн в своей речи в Харькове в 1913 году на защите докторской диссертации вспоминал: «Аналитическое направление в теории дифференциальных уравнений утвердилось недавно; и ещё семь лет тому назад покойный А.Н. Коркин в беседе со мной пренебрежительно отзывался о «декадентских» исследованиях А. Пуанкаре. Но ввиду блестящих ежедневных успехов новых идей, плодотворность и жизненность их не подлежит уже никакому сомнению, и теперь никто не станет серьёзно возражать против того, что теория конечного интегрирования потеряла самостоятельное значение и является только частью быстро развивающейся общей или аналитической теории дифференциальных уравнений» [12, с. 211]. .

Новая точка зрения была принята и оставалась господствующей на протяжении двух третей века. И третья глава книги Р. Куранта «Уравнения с частными производными» (1962) начинается с рассуждения о том, что «вопросы, связанные с дифференциальными уравнениями в частных производных порядка выше первого, настолько разнообразны, что построение единой общей теории (как в главе II) (а в главе второй речь шла об уравнениях первого порядка - С.Д.) не представляется возможным. Существенное различие имеется между несколькими типами дифференциальных уравнений, называемых «эллиптическими», «гиперболическими» и «параболическими»; уравнения каждого из названных типов обладают совершенно разными чертами в вопросах, касающихся построения решений и их свойств» [13, с. 159].

Новое как хорошо забытое старое. В 60-е годы могло казаться, что общая геометрическая теория в итоге уступила свои позиции и выродилась в раздел оказавшийся на обочине главного направления развития теории дифференциальных уравнений с частными производными, представленном теорией граничных задач для основных типов таких уравнений. Однако, в 70-е годы ситуация начала меняться и эти изменения носили кардинальный характер. Важно заметить, что импульс к переменам исходил не из чистой математики, но из теоретической и математической физики. Именно специалистам в этих областях открылась важность вполне интегрируемых уравнений. Хотя такие уравнения и представляют собой большую редкость, но, как выяснилось в последней трети XX века, они играют большую роль в физике. Замечательный пример таких уравнений - уравнение Кортевега-де Фриза $\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$, описывающее движение волн на мелкой воде, акустические волны в кристаллах, передачу электрических сигналов по нерву. Это уравнение оказывается вполне интегрируемым.

Таким образом, естествознание выдвинуло интегрируемые уравнения на переднюю линию современных исследований и вновь сделало актуальной общую геометрическую теорию дифференциальных уравнений с частными производными. Математики вернулись к казалось забытым результатам по интегрируемым системам С. Ли, А. Бэклунда, Г. Дарбу. Вновь оказались в центре внимания современных специалистов (см., например, [14, 15]) работы по дифференциальным уравнениям Д.Ф. Егорова ([6], [16] и др.).

В итоге общая геометрическая теория, по казалось бы совершенно объективным причинам вытесненная на обочину основного потока исследований по теории уравнений с частными производными, на новом витке развития математике вновь оказалась в центре событий.

Замечательно то, что к 70-ым годам XX века был уже выстроен математический аппарат, с помощью которого оказалось возможным начать строить эффективную теорию нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными порядка выше первого - теорию, которую невозможно было построить математическими средствами Ли - Егорова.

Новые исследования по общей геометрической теории уравнений с частными производными усилиями Г. Гольдшмидта, С. Стернберга и др. стали частью современной теории дифференцируемых многообразий. В результате синтеза этой теории, коммутативной и гомологической алгебры, алгебраической топологии, алгебраической и дифференциальной геометрии и стали возможны достижения в этой области. Геометрическим аналогом для нелинейных уравнений оказались очень сложные зачастую бесконечномерные геометрические объекты с различными структурами (характеристические конусы, L-лучи и т.д.). Для их изучения А.М. Виноградовым и его учениками было сконструировано так называемое вторичное дифференциальное исчисление, которое и стало эффективным средством построения геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений [17, 18].

Так казавшаяся бесперспективной и потому, казалось бы, прочно забытая тематика общей геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными вновь оказалась на передней линии современной математики. Такова диалектика её концептуального развития.

Литература

1. Демидов С.С. Возникновение теории дифференциальных уравнений с частными производными // Историко-математические исследования. Вып. 20. 1975. С. 204 - 221.

2. d'Alembert J. Recherches de Calcul integral // Opuscules mathématique. V. 4. Paris. 1768. P. 225 - 282.

3. Euler L. Institutiones calculi integralis. T. 3. Petropoli. 1770.

4. Monge G. Application de l'analyse à la géométrie. Paris: Bernard. 1807.

5. Демидов С.С. К истории теории С. Ли дифференциальных уравнений с частными производными // Историко-математические исследования. Вып. 23. 1978. С. 87 - 117.

6. Егоров Д.Ф. Уравнения с частными производными 2-го порядка по двум независимым переменным. Общая теория интегралов, характеристики // Учёные записки Императорского Московского университета. 1899. Вып. 15.

7. von Weber E. Partielle Differentialgleichungen / Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. II_1, H. 2 - 3. Leipzig. 1900.

8. Sommerfeld A. Randwertaufgaben in der Theorie der Differentialgleichungen / Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. II_1, H. 4. Leipzig. 1900.

9. Демидов С.С. К истории теории С. Ли дифференциальных уравнений с частными производными // Историко-математические исследования. Вып. 23. 1978. С. 87 - 117.

10. Du Bois Reymond P. Beiträge zur Interpretation der partiellen Differetialgleichungen mit drei Variabeln. H. 1. Leipzig. 1864.

11. Du Bois Reymond P. Ueber lineare Differetialgleichungen zweiter Ordnung // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. 1889. Bd. 104. S. 241 - 301.

12. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений. Т. 1. Москва. 1952.

13. Курант Р. Уравнения с частными производными. Перевод с англ. Т.Д. Вентцель под редакцией О.А. Олейник. М.: Мир. 1964.

14. Царёв С.П. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщённый метод годографа // Известия АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 1048 - 1068.

15. Дубровин Б.А. К дифференциальной геометрии сильно интегрируемых систем гидродинамического типа // Функциональный анализ и его приложения. Т. 24. № 4. 1990. С. 5 - 30.

16. Егоров Д.Ф. Работы по дифференциальной геометрии. М.: Наука. 1970.

17. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1986.

18. Vinogradov A.M. Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus / Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society. 2001. V. 204.

НАУЧНО-МИРОВОЗЗРЕНЧЕСКАЯ РЕВОЛЮЦИЯ 16-17 ВЕКА И ИЗМЕНЕНИЕ РОЛИ МАТЕМАТИКИ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

С.Н. Колесников

Механико-математический факультет МГУ им М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: `wiseacre@inbox.ru`

Аннотация: В статье рассмотрен новый подход к историко-научному материалу периода «научно-технической революции 16-17 веков», который позволил выявить во многом совершенно неожиданные аспекты произошедших в это время изменений в науке и мировоззрении и некоторые аспекты их влияния на современную науку.

Ключевые слова: история науки, философия науки, история механики, история экономических учений, И.Ньютон, Н.Коперник, Дж.М.Кейнс, качественная теория динамических систем, теория бифуркаций.

SCIENTIFIC REVOLUTION OF 16-17 CENTURY AND CHANGING ROLE OF MATHEMATICS IN NATURAL SCIENCE

Abstract: The article describes a new approach to the scientific materials related to the period of "scientific and technological revolution of 16-17 centuries which revealed a largely unexpected aspects have occurred at this time of changes in science and philosophy and some aspects of their influence on modern science.

Keywords: history of science, philosophy of science, history of mechanics, economic history, Copernicus, Newton. J.M. Keynes, the qualitative theory of dynamical systems, bifurcation theory.

В истории мировой науки хорошо известен произошедший в течение 16-17 веков кардинальный перелом в философии, науке и технике, получивший название «научно-мировоззренческой революции». Однако традиционные взгляды на этот период оставляют слишком много вопросов, и прежде всего не дают ответа на главный из них: «почему?». Более того, детальный историко-экономический анализ происходивших в то время исторических процессов [1-2] не дает ответа на вопрос о том, собственно какими причинами были обусловлены кардинальные изменения в экономической, и если так можно сказать, «научной» географии Европы тех времен, а они несомненны и крайне значительны.

В настоящем статье делается попытка пролить свет на эти события и ответить на вопрос, что же собственно, произошло в научном мировоззрении, по-новому взглянув на роль в них основных научно-исторических персонажей – Коперника, Галилея, Декарта, Ньютона. В частности, совершенно по-иному представляется роль Коперника и его открытия, которые на поверку оказываются совсем не теми, о которых обычно рассказывается в литературе. Гипотеза о вращении Земли не была новинкой к моменту появления знаменитой книги Коперника [4], более того, сам автор называет на первых страницах своих предшественников, хотя и не всех: «Я принял на себя труд перечитать книги всех философов, которые только мог достать, желая найти, не высказывал ли когда кто-нибудь мнения, что у мировых сфер существуют движения, отличные от тех, которые предполагают преподающие в математических школах. Сначала я нашел у Цицерона, что Никет высказывал мнение о движении Земли, затем я встретил у Плутарха, что этого взгляда держались и некоторые другие». Наиболее же интересна не сама гипотеза о вращении Земли, а аргументация Коперника и в связи с этим - его общий взгляд на основания научной аргументации, который остается крайне важным, если не сказать – основным, и до настоящего времени. Причем, с этой же точки зрения принципиальным оказывается и текст предисловия, написанного неизвестным автором, но вошедшим в оригинальные издания Коперника. Удивительным оказывается то, что в дальнейшем развитии науки прослеживаются обе линии научной аргументации – как самого Коперника, так и достоверно неизвестного «комментатора», причем постепенно побеждает именно линия «комментатора», что возможно и является причиной потери связи этой линии с книгой. А сделанные Коперником важнейшие открытия в механике совершенно забыты и обычно приписываются другим историческим персонажам.

Также совершенно иной, по сравнению с традиционными представлениями оказывается роль И.Ньютона в лице его «трех законов природы» [5], и его взаимоотношения с Декартом [6], последователем которого, а не оппонентом, он оказывается. Причем это, конечно совершенно не отрицает спор о природе дистанционных взаимодействий. В современных курсах механики обычно «законы Ньютона» излагаются в совершенно неверной интерпретации, не дающей возможности оценить их первоначальный замысел. Прочтение оригинального материала как методологии построения математических моделей, по сути снимает все широко известные возражения против якобы ошибок Ньютона в определении времени, массы и понятия системы координат. Приведем оригинальные формулировки трех законов Ньютона в переводе Крылова [5]:

1. *«Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не пону-ждается приложенными силами изменять это состояние.*

2. *Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

3. *Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.»*

Первый закон дает, по сути, функциональное определение силы (в отличие от ранее данного концептуального, на данный момент почти совершенно забытого), второй закон – численную оценку силы, и, наконец, третий – способ сведения неизвестных сил к механическим, или по-другому – способ изучения неизвестных сил с помощью известных механических в ходе эксперимента, натурного или мысленного.

Оригинальные формулировки законов дают несколько связанных алгоритмов построения математических моделей движения, далее успешно продемонстрированных в последуюзих главах «Начал» самим Ньютоном, на актуальных для того времени примерах:

1. На основании имеющегося известного движения определяем силу, которая действует на тело

2. На основании известной силы, определяем движение, которое она произведет, будучи приложена к известному телу

3. И, наконец, впервые появившийся по-видимому, именно у Ньютона, алгоритм изучения того, что теперь называют «связями». У Ньютона отчетливо рассмотрен специальный случай таких силсвязей, а именно – центростремительные силы, с попытками обобщить данное понятие. По сути – изучая движение планет, Ньютон как раз изучает связи, удерживающие планеты на орбите и их взаимное влияние.

В связи с последним крайне важно то, что Ньютон весьма определенно призывал оперировать именно математическими моделями, а не реальными физическими объектами, что было характерно для его предшественников, и составляло серьезное затруднение, так как природа почти всех естественных сил в то время еще была неизвестна. Приведем цитату [5]: «Для краткости эти величины сил можно называть силами движущими, ускоряющими и абсолютными, и для отличия — относить их к самим притягиваемым к центру телам, к месту тел и к центру сил, а именно: движущую силу — к телу, как стремление всего тела к центру, причем это полное стремление составляется из стремлений отдельных частиц тела; силу ускорительную — к месту тела в пространстве, как некоторую способность, распространенную центром на все места окружающего пространства и заставляющую приходить в движение тела, в этих местах находящиеся, абсолютную же силу — к самому центру, как заключающуюся в нем причину, без которой движущие силы не распространялись бы в окружающем пространстве; сказанною причиною может служить или какое-либо центральное тело (как, напр., магнит в центре сил магнитных или Земля в центре сил тяжести), или что бы то ни было иное, хотя бы и ни чем не обнаруживаемое. **Эти понятия должно рассматривать как математические, ибо я еще не обсуждаю физических причин и места нахождения сил**». В этом контексте возникает желание процитировать Декарта[6]: «64. Чтобы иметь возможность обосновать посредством доказательства все, что я буду выводить, я не принимаю в физике никаких начал, которые не были бы также началами математики; и этих начал достаточно, тем более что посредством их могут быть объяснены все явления природы»

Для математической аудитории, конечно же, наиболее интересным является рассказ о том, как изменилась роль математики в науке в течение указанного периода и как это соотносится с дальнейшим прогрессом наук. В частности, прогрессом самой механики, роль которой в процессах модификации научного мировоззрения оказывается сильно недооцененной. Хорошо известное понятие «механицизма», оказывается не просто сильно упрощенным, но скорее даже утрированным в современных описаниях, по крайней мере, в отечественной литературе. Утратив связь с источником, которым являются законы Ньютона в их изначальной формулировке, оно оказалось интерпретируемым крайне упрощенно и даже неверно. Конечно, нельзя отрицать формалистические попытки применения механических идей иногда даже к совершенно неподходящим для этого отраслям знания, но это вряд ли можно считать главным достижением «механистического» подхода. В реальности же механицизм – это применение метода Ньютона в целом ряде естественных и даже социальных наук, вполне успешное и давшее серьёзные результаты. И неудивительно, что именно книга Ньютона до настоящего времени считается чуть ли не основой всего современного естествознания [7], а автор входит в число самых значительных мыслителей всех времен и народов по версии BBC [8], занимая в этом крайне представительном списке 3 место. Таким образом, после появления книги Ньютона именно математика, часто в образе своего наиболее развитого приложения – механики, становится основным способом познания мира, во многом сохраняя такое свое значение до настоящего времени. Методологической основой этого процесса является метаматематический формализм Ньютона, сформулированный им в начальных разделах «Математических начал натуральной философии», и впервые успешно примененный им же в последующих главах.

Рассматривая влияние механики и Ньютона на развитие науки, можно упомянуть о необычайно большом влиянии механики на экономическую науку, которое собственно продолжается до настоящего времени, оставаясь при этом в самых ранних пределах преимущественно статического восприятия экономических процессов. Удивительно, что несмотря на прогресс и в математике и механике, и вроде бы ясное понимание того, что экономические процессы нестационарны, в экономике продолжаются рассуждения о «рыночном равновесии», устойчивости рынков и т.п.. По-видимому экономисты до сих пор руководствуются весьма примечательной методой Альфреда Маршалла, основателя так называемого неоклассического направления в экономике [10]:

«[У меня] в последние годы работы над этим предметом росло ощущение весьма малой вероятности того, что хорошая математическая теорема, имеющая дело с экономическими гипотезами, кажется хорошей экономикой. И я все больше и больше склонялся к следующим правилам:

1. Используй математику как язык для стенографии, а не исследовательский механизм.

2. Придерживайся математики, пока не закончил дело.

3. Переведи на английский.

4. Проиллюстрируй примерами, важными в реальной жизни.

5. Сожги математику.

6. Если не достиг успеха в (4), сожги (3). Особенно часто я пользовался именно последним приемом»

При таком подходе исходная модельная информация, использованная при построении экономических теорий, оказывается утерянной. И это притом, что влияние кризисов резко и определенно ставит вопрос о рассмотрении динамических, бифуркационных и стохастических процессов в экономике. Особенно удивительно это видеть в конкретной микроэкономике, когда, например, компания оказывается убыточной или ошибочно закрывает «убыточное» якобы направление деятельности в результате неверного расчета себестоимости, причиной которого является категорическое непонимание математической модели, положенной в основу этого расчета и параметрических ограничений, ей присущих. В некотором смысле, последний глобальный экономический кризис является следствием такой же проблемы.

Проблема учета динамики в экономических процессах, хотя и была поставлена Кейнсом [3] еще в 1936 году, до настоящего времени не нашла своего решения, скорее всего в связи с тем, что математический аппарат, необходимый для такого решения, сформировался в относительно недавнее время, и еще не успел найти свои приложения в экономике. С другой стороны, в экономике выявлено серьезное влияние психологических и иных субъективных факторов в поведении потребителей, учет которых в классических математических моделях представляется проблематичным, однако вероятно, возможен в более современных. Возможно именно поэтому только недавно исследованные работы Исаака Ньютона, вызывают такой интерес с точки зрения их применения в новых направлениях экономических исследований [9].

Резюмируя, можно сказать, что в исследовании периода научно-мировоззренческой революции 16-17 веков есть еще очень много вопросов, влияние которых на современное состояние науки крайне интересно и подлежит дальнейшему изучению.

Литература

1. Бродель Ф. Материальная цивилизация, экономика и капитализм. XV-XVIII вв. В 3-х тт. М., 1986-1992.

2. Валлерстайн И. Анализ мировых систем и ситуация в современном мире. Пер. с англ. П.М. Кудюкина / Под общ. ред. Б.Ю. Кагарлицкого. СПб., 2001.

3. Кейнс Дж. М. Общая теория занятости, процента и денег. Антология экономической классики. Эконов – М., 1993 г.

4. Коперник Николай. О вращении небесных сфер. Малый комментарий и др. соч.: Пер. И. Н. Веселовского.- М.: Наука, 1964 г.

5. Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского и примечания А. Н. Крылова. М.: Наука, 1989 г.

6. Декарт Р. Сочинения : в 2 т. Т. 1 : пер с лат. и фр. / сост., ред. и примеч. В.В. Соколова. - М.: Мысль, 1994.

7. “The Economist”, Aug 21st 2003, 11:43, http://www.economist.com/node/2003425

8. http://news.bbc.co.uk/hi/english/static/events/millennium/sep/winner.stm

9. http://gtresearchnews.gatech.edu/newsrelease/newton.htm

10. Brue S. L. The Evolution of Economic Thought. 5th ed. — Fort Worth: Harcourt College Publishers, 1993. — P. 294.//перевод на русский в публикации Канторович Леонид Витальевич (1912–1986): Биобиблиографический указатель / Ред. С. С. Кутателадзе. — 2-е изд., перераб. и доп. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2012. — 204 с.

АЛГЕБРА ОТНОШЕНИЙ А. ДЕ МОРГАНА

З.А. Кузичева

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: zakuzicheva@mail.ru

Аннотация: Статья посвящена раннему периоду истории становления теории отношений, - важного раздела современной математической логики. Главное внимание уделено вкладу А. Де Моргана, в трудах которого содержится первый в истории вариант алгебры отношений. Отмечены некоторые предшествующие результаты и этапы дальнейшего развития.

Ключевые слова: булева алгебра, алгебра отношений, предложение, суждение, заключение, силлогизм, термин, универсум.

A. DE MORGAN’S RELATION ALGEBRA

Abstract: The article is dedicated to the early period in the history of the theory of relations, which is an important branch of modern mathematical logic. We mainly focus on A. De Morgan’s contribution, whose works contain the first version of a relation algebra. Some preceding results are also mentioned along with the stages of further development.

Keywords: Boolean algebra, relation algebra, proposition, inference, conclusion, syllogism, term, universe.

Август Де Морган (1806 – 1871) — британский математик и логик. Профессор математики Лондонского университетского Колледжа (1828 – 1831; 1836 – 1866). Первый президент Лондонского Математического общества (1865).

В 1847 году вышел его трактат "Формальная логика" [1], отражающий результаты, полученные автором к тому времени и, что для него важнее, цели дальнейших исследований. Он полагал, что основная задача логики состоит в исследовании способов вывода следствий из посылок, а также общих принципов и правил построения доказательств. Высоко оценивая силлогистику Аристотеля, одной из своих задач, если не основной задачей, Де Морган считал усовершенствование теории силлогизмов. Об этом свидетельствуют и названия последующих его работ по основаниям логики, они начинаются словами "*On the syllogism*" и нумеруются римскими цифрами (от I до VI), подчеркивая тем самым, что составляют единый цикл. В XX в. статьи этого цикла и некоторые другие его работы, относящиеся к логике, собраны в одном томе [2].

В трактате [1] содержатся важнейшие результаты, многие из которых сам автор, к сожалению, не оценил должным образом, не говоря уж о современниках и последователях. Центральные главы трактата посвящены силлогистике, но они предваряются интересными исследованиями и находками в логике. В 1839 году работе [3] Де Морган вводит понятие универсума, следовательно, трактует понятия с точки зрения их объема, представляя как классы, составляющие универсум (речи). Классы и их дополнения равноправны по отношению к универсуму, поэтому зависит от нашего выбора, представляет некоторый класс положительное или отрицательное понятие. Понятия, в конкретном случае рассматриваемые как положительные, Де Морган обозначает прописными буквами, соответствующие им отрицательные - строчными буквами: X, Y, Z,...; соответственно x, y, z,... Универсум он обозначает через U, пустой класс — через u. Таким образом, Де Морган не нуждается в явно заданном знаке операции отрицания. Но хотя прописные и строчные буквы равноправны в употреблении, они визуально различимы. Принятые здесь обозначения используются им в дальнейших работах без изменений.

Первые главы трактата, предваряющие исследование силлогистических выводов, посвящены изучению и формализации объектов, понятий, (идей и имен, по Де Моргану), предложений. В третьей главе, озаглавленной "Об абстрактной форме предложений", рассматриваются классические суждения (предложения, по Де Моргану). Их традиционные обозначения A, E, I, O, он снабжает нижними индексами и вводит следующие символические обозначения. Общее утвердительное предложение (A_1) обозначается через $X)Y$, общеотрицательное (E_1) — через $X.Y$, частное утвердительное (I_1) — XY, а частное отрицательное — посредством $X : Y$. Затем в каждом из предложений (и, главное, в их символических представлениях) он, пользуясь равноправием положительных и отрицательных понятий, заменяет все прописные буквы строчными, полученным предложениям соотносит соответствующие буквы с верхними индексами: A', E', I', O', эти обозначения он фиксирует, используя в дальнейшем без разъяснений. Эти восемь обобщений традиционных предложений (суждений) он называет простыми (simple).

Комбинируя прописные и строчные буквы, Де Морган получает разнообразные эквивалентности, которые впоследствии использует без оговорок, например, для A_1 он получает $X)Y = X.y = y)x$; для A': $x)y = x.Y = Y)X$, и так далее, для всех восьми случаев. [1, p. 61] Связанные знаком равенства выражения взаимозаменяемы, что открывает простор для получения, по сути, разнообразных следствий.

Посредством оперирования с простыми предложениями, Де Морган получает предложения, которые называет составными (complex): $A_1 + A^1 = D$: "Каждый X есть Y, и каждый x есть y" (здесь + конъюнкция), т.е. X и Y — один и тот же класс, $X = Y$; $D_1 = A_1 + O^1$, что дает, в наших обозначениях, $X \subset Y.D^1 = A^1 + O_1$, т.е. $X \supset Y$; $C = E_1 + E^1$ означает, что $X = y$; $C_1 = E_1 + I^1 : X \subset y$; $C^1 = E^1 + I_1 : X \supset y$; $P = I_1 + I^1 + O_1 + O^1$. P означает, что ни один из классов, $X \cap Y$, $X \cap y$, $x \cap y$, $x \cap Y$, не пуст.

Одним из результатов этих новшеств Де Морган считает устранение неопределенности традиционных суждений. Так, общеутвердительное A: "Все A суть B", может означать как совпадение классов A и B, так и включение класса в класс , в то время как составные предложения D и D_1, явно разделяют эти два случая.

Главы 5 – 8 трактата [1] посвящены силлогизмам. По аналогии с тем, как в предыдущих главах Де Морган рассматривает сначала простые, затем составные предложения и их свойства, здесь, после силлогизмов, в которых фигурируют так называемые простые (т.е. обычные) понятия, он определяет сложные понятия, путем задания на множестве понятий (классов) операций объединения и пересечения. Поскольку отрицание (дополнение), универсум и пустое множество введены им в предшествующих главах, в совокупности у него получена булева алгебра. Затем он приступает к изучению силлогизмов, терминами которых являются сложные понятия.

Де Морган неоднократно указывал, что субъектно-предикатная структура предложения скрывает подлинную взаимосвязь субъекта и предиката. Одним из способов уточнения того, что скрывается за связками *is* и *is not* явился рассмотренный нами анализ традиционных суждений. Этот анализ выявил, что для уточнения способов получения выводов, в том числе силлогистических, необходимо исследовать свойства реальных отношений. В [1] исследуются свойства связок *is* и *is not*, выявляются некоторые свойства отношений, но еще не вводятся операций над отношениями.

Последний параграф работы [3], в котором продолжается начатое в [1] исследование свойств некоторых отношений. Для обозначения абстрактных отношений Де Морган использует черту: $X - Y$, если X и Y , говоря современным языком, не сравнимы в данном отношении, то пишется $X -\ y$. Затем выделяются свойства отношений, такие как *симметричность* (convertibility) и *транзитивность* (transitiveness). Например, отношения "X старше Y", "X предок Y" — транзитивны; отношение "X равен Y" — симметрично и транзитивно, а отношение "X в ссоре с Y" — симметрично, но не транзитивно.

Способ обозначения отношений, который использовался в работе [3], Де Морган изменил в работе 1860 года [4]. Абстрактные отношения вместо черты, он стал обозначать буквами. Например, "$X..LY$" означает: X находится в отношении L к Y; X — субъект, Y — предикат, L — отношение. "$X.LY$" означает: X не находится в отношении L к Y. На множестве абстрактных отношений Де Морган определяет операции конверсии, объединения, пересечения дополнения и композиции, по возможности сохраняя знаки для операций над отношениями, которые он использовал для операций над понятиями (классами).

Конверсию отношения L он обозначает посредством $L^{-1}(X..L^{-1}Y$ тогда и только тогда, когда $Y..LX)$.

Объединение отношений M и L обозначается через $M, L(X..M, LY$ тогда и только тогда, когда $X..MY$ или $X..LY)$.

Пересечение отношений, обозначается как $ML'(X..ML'Y$ тогда и только тогда, когда $X..MY$ и $X..LY)$.

Дополнение отношения L обозначается через $l(X..lY$ тогда и только тогда, когда $X.LY)$.

Интересно что, Де Морган определяет операцию отрицания отношения двумя способами: $X..lY$ и $X.LY$. По определению дополнения, они эквивалентны, однако имеют разное логическое значение: первое из них положительное, а второе — отрицательное (Это им не подчеркивается).

Композиция отношений L и M обозначается через $X..LMY$, на примерах разъясняется ее смысл, но четкой формулировки этой операции Де Морган не дает.

Таким образом, операции над классами, введенные Де Морганом в "Формальной логике" распространяются на бинарные отношения. Затем следуют многочисленные, но безуспешные попытки формализации теории силлогизмов, в том числе и с использованием алгебры отношений. Де Моргану не удалось формализовать силлогистику, это и невозможно было осуществить доступными ему средствами. Исследование силлогистики средствами логики XX века было предпринято Я. Лукасевичем с целью ее пополнения и уточнения в его книге "Аристотелевская силлогистика с точки зрения формальной логики" [7].

Как уже отмечено выше, современники не слишком внимательно читали сочинения Де Моргана, не заметили они алгебру отношений, как не заметили и алгебру логики. По существу дела на эту алгебру обратили внимание лишь в 20 веке. К этому вопросу мы еще вернемся, теперь же рассмотрим примеры предшествующих попыток формализации отношений в процессе развития логики.

"Отношение" — одна из категорий Аристотеля. В рамках его теории силлогизмов развивается отношение, которое в теоретико-множественной трактовке можно назвать отношением включения, например, одного множества в другое. Отношения интенсивно изучаются в философии и логике после Аристотеля. Из более ранних примеров остановимся совсем кратко трактовке отношений у Лейбница и Ламберта.

Лейбниц (1646 – 1716) понимал анализ произвольных отношений как сведение их к одноместным отношениям, например, рассматривая многоместные отношения как конъюнкции одноместных отношений вида $A\ est\ B$, которые он называл элементарными. Лейбниц пытался выделить исходные отношения и, отправляясь от них, строить общую теорию. В одном из вариантов формализации геометрии, он в качестве исходных, принимает отношения тождества, равенства, неравенства, конгруэнции, подобия, включения, целого и части, а также трехместное отношение "лежать между". [См., например, 6, p., 545 – 560].

Ламберт (1728 – 1777) в теории отношений различает отношения простые (Ratio) и составные (Relatio). Простое отношение есть признак, посредством которого одно из понятий выражается через другое. Составное отношение служит для выражения данного понятия через несколько других понятий. Два понятия он называет равнозначными, если все их признаки одинаковы. Отношения подобны, если у них совпадают некоторые признаки; родственны, если одно из понятий является признаком другого; понятия противоположны, если противоположны их признаки. Кроме того, все отношения Ламберт подразделяет на отношения логические и метафизические. Первые характеризуют объекты количественно, вторые описывают свойства, можно сказать, качественно. Перечисленные отношения — логические. Пусть, например, N означает причину, A — огонь, B — тепло, тогда суждение "Огонь есть причина тепла" символически запишется в виде $A = N :: B$, где знак $::$ указывает на метафизическое отношение. Пусть имеем метафизическое отношение $A = F :: B$. Если окажется, что $B = F :: C$, а $C = F :: D$, то можно записать $A = F :: F :: C = F :: F :: F :: D$. Ламберт обозначает $F :: F$ в виде F^2 , а $F :: F :: F$ — в виде F^3 , и т.д., т.е. получает на множестве отношений операцию возведения в степень - аналог суперпозиции функций. Деление на множестве отношений Ламберт осуществляет, буквально разделив обе части равенства на одну из букв из правой его части. Полученное в результате такого деления выражение требуется истолковывать логически, что представляет трудности, сравнимые с непосредственным словесным анализом отношения, если не превосходящие их [7]. Теперь, хотя бы кратко, коснемся дальнейшего развития алгебры отношений. Обратимся, прежде всего, к теории отношений Ч. Пирса (1839 – 1914).

Первая работа Пирса по логике отношений, озаглавленная "Описание системы обозначений логики отношений, являющейся обобщением концепций логического исчисления Буля", опубликована в 1870 г. [9]. Теория отношений Пирса строится как полуформальное алгебраическое исчисление, операции вводятся таким образом, что алгебра классов у него является частным случаем алгебры отношений. Рассматриваются отношения включения, строгого включения, равенства, определяемого как конъюнкция отношений "x предшествует y" и "y предшествует x". Отношения Пирс трактует как классы, 0 — пустое, 1 — тождественное отношения. На множестве отношений вводятся операции: объединение произвольных объектов, объединение непересекающихся объектов, пересечение, композицию отношений, возведение в степень, x^y означает класс тех объектов, которые находятся в отношении x ко всем объектам класса y. В дальнейшем Пирс продолжает углубление рассматриваемой темы. Алгебра классов него, с одной стороны, выступает как частный случай алгебры отношений, а с другой, может трактоваться как исчисление предложений, в этом случае он вводит представление об истинности и ложности предложений и использует так называемые матрицы (истинности и ложности), в современной терминологии — таблицы истинности (и ложности) высказываний. Отметим еще одно важное обстоятельство. Пирс рассматривает отношения не только по содержанию, но и как множества пар (бинарные отношения), троек (тернарные отношения), т.е. с объемной точки зрения.

Алгебра логики, а также теория отношений получили дальнейшее развитие в трудах Э.Шрёдера (1841 – 1902). Он высоко оценил вклад Де Моргана и Ч. Пирса в создание и развитие теории отношений, отмечая при этом, что не следует забывать и значительных результатов Р. Дедекинда, полученных в работах, относящихся к уточнению понятия действительного числа и к алгебре. В центре внимания Шрёдера отношения порядка. Дальнейшее развитие этого направления приводит, например, к созданию теории решеток.

Развитие теории отношений в направлении, намеченном Кантором, происходит уже в XX веке. Прежде всего, в арифметике отношений Рассела [11], затем в [12]. Он отмечает позднее, что арифметика отношений его собственный вклад в "Principia...". Объекты арифметики отношений Рассел называет числами отношений (relation-numbers). Число отношения P определяется как класс отношений Q , подобных отношению P. Под подобием (likeness) отношений, иначе называемым ординальным сходством (ordinal similarity), Рассел понимает изоморфизм отношений. Арифметика чисел отношений строится путем задания операций и исследования их свойств.

Обобщениями в этом направлении занимались А. Тарский (1901 – 1981) и его ученики в 40 – 50-е годы XX века. Обобщение, можно сказать, до естественных пределов, осуществил А. Тарский в двух своих монографиях, посвященных ординальной и кардинальной алгебрам соответственно.

В 1917 г. русский философ и логик С.И. Поварнин опубликовал небольшую работу о логике отношений, в которой по достоинству оценил исследования Де Моргана в развитии логики и теории отношений, в частности, он пишет: "Первый сделал вполне отчетливую попытку положить подобное учение о суждении в основу теории умозаключений и построить настоящую "логику отношений" (и первый дал ей это название) известный английский логик и математик Морган. Исходным пунктом послужило учение о связке, которую он отождествляет с основным отношением". [13, с. 56].

Литература

1. Morgan A. De. Formal logic or the calculus of inference, necessary and probable. London, 1847.

2. On the syllogism and other Logical Writings by Augustus De Morgan. London, 1966.

3. Morgan A. De. First Notions of Logic (preparatory to the study of Geometry). London,1839

4. Morgan A. De. On the syllogism: II. On the symbols of Logic. In: [2], p. 22 – 68

5. Morgan A. De. . On the syllogism: IV, and the Logic of Relations. In: [2], p. 208 – 246.

6. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения формальной логики. М. - Л.: ИЛ, 1959. 313 с.

7. Leibniz G.W. Opusqules et fragments inedits de Leibniz. L. Couturat (ed.), Paris, 1903.

8. Lambert J. Logische und philosophische Abhandlungen, Bd. 1 – 2, J. Bernoulli (Ed.), Berlin, 1782 – 1788.

9. Peirce C. Description of a notation for the logic of relatives, resulting from amplification of the conception of Boole's calculus of logic// Amer. J. Arts and Sciences. 1870. V. 5.

10. Schröder E. Vorlesungen über die Algebra der Logik, Bd. 1 – 3, 1895 –1905.

11. Russell B. The principles of mathematics. London, 1903.

12. Whitehead N., Russell B. Principia Mathematica. V. 1 – 3, 1903 –1910.

13. Поварнин С.И. Логика отношений. Ее сущность и значение. Петербург, 1917.

О КАБИНЕТАХ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ В РОССИЙСКИХ ИМПЕРАТОРСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ

Г.А. Кутеева

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: gkut@rambler.ru

Аннотация: В статье на основе исторических материалов обсуждается становление и развитие учебно-вспомогательных кабинетов, содержащих учебные пособия по математике и механике, в Российских Императорских университетах (в основном, на примере Санкт-Петербургского университета). Историческими источниками являются четыре устава Российских Императорских университетов и штаты к ним (1804 г., 1835 г., 1863 г, 1884 г.), исторические записки, сделанные ректором Санкт-Петербургского университета П. Плетневым и профессором В. В. Григорьевым, а также инвентарная книга кабинета практической механики, которая хранится на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ. Также мы приводим информацию о математических и механических коллекциях девятнадцатого века разных стран мира (в основном, из интернет-сайтов высших учебных заведений мира).

Ключевые слова: учебные пособия по математике и механике, математические коллекции, коллекции механизмов, история математики и механики.

ABOUT CABINETS FOR MATHEMATICS AND MECHANICS IN RUSSIAN IMPERIAL UNIVERSITIES

Abstract: In the paper the formation and development of training and auxiliary cabinets, containing a collection of teaching models in mathematics and mechanics in Russian Imperial Universities are discussed. Basically, we consider the facts from the life of St. Petersburg State University of the nineteenth century, as we have access to the historical materials of our university. We added the introduction where some information about the collections of different countries around the world is given (according to websites of Universities around the world).

Keywords: historical collections, mathematical models, mechanisms collections, history of mathematics and mechanics.

Введение

Среди современных научных описаний и исследований по истории математики и механики выделяются исследования, касающиеся учебных вспомогательных кабинетов и учебных пособий, принадлежащих старейшим институтам и университетам мира. Существуют интернет-сайты, посвященные геометрическим моделям, например, коллекция геометрических моделей кафедры геометрии механико-математического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина [1]. Здесь описываются некоторые факты из жизни *золотого века* математических моделей, т.е. начиная с конца восемнадцатого, весь девятнадцатый век и начало двадцатого века. В это время, используя различные материалы (гипс, картон, металл, нити и т.п.), математики создавали реальные модели тех объектов, которые они исследовали. На этом же сайте отмечается, что похожие ресурсы с коллекциями имеются также в других старейших институтах и университетах мира, например, в Соединенных Штатах Америки [2],[3], в Германии [4],[5]. Более детальный список, включая институты и университеты США, Голландии, Германии, Израиля, Франции, Великобритании, Португалии, Италии, Японии, дан в [1]. Эти коллекции собирались как учебные пособия по математике и механике в девятнадцатом веке, в начале двадцатого века. Сейчас эти пособия выставлены в интернет сайтах как исторические модели с фотографиями, исторической справкой, ссылками на литературу, иногда с математическим описанием и с компьютерным моделированием.

Существуют книги и статьи, посвященные чисто механическим коллекциям, например, коллекция Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (сокращенно: МГТУ им. Баумана) [6]. О применении коллекции механизмов МГТУ им. Баумана (в том числе, и механизмов девятнадцатого века) в преподавании машиноведения указывается в [7]. Применение механизмов исторической части коллекции Санкт-Петербургского университета в преподавании теоретической механики обсуждается в [8]. Создание виртуального музея Российских технических университетов на базе коллекции МГТУ им. Баумана, Политехнического музея Москвы обсуждается в [9]. Некоторые фотографии учебных моделей как памятников науки и техники в собраниях музеев России даны на портале единой коллекции цифровых образовательных ресурсов и на сайте Ассоциации научно-технических музеев Российского комитета Международного совета музеев (ICOM), например, в [10] и [11]. Современные российские преподаватели механики используют и виртуальные модели механизмов, как описано, например, в [12].

Коллекция механизмов кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского университета

С некоторой информацией о сохранившейся части коллекции можно ознакомиться в работах автора [8],[13]. Здесь отметим, что на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (сокращенно, на кафедре механики СПбГУ) в кабинете заведующего хранится инвентарная книга с надписью "Кабинет практической механики. Инвентарь". Рядом с кабинетом заведующего есть несколько аудиторий, где располагаются шкафы с коллекциями механизмов. На этих механизмах есть метки, с помощью которых можно сопоставить надпись в инвентарной книге и сами механизмы. Записи инвентарной книги даются следующим образом: "Время приобретения или источник. Наименование. N по каталогу 1876 г. N инвентарной книги. Стоимость". По этим записям сообщаем, что первые приобретения кабинета практической механики были из бывшего технологического кабинета. В этой статье мы представим наше исследование о том, как технологический кабинет и кабинет практической механики Санкт-Петербургского университета отражены в уставах Императорских университетов, что было предшественником технологического кабинета. Также упоминаем и кабинеты других Императорских университетов, на которые распространялись эти уставы.

Уставы Российских Императорских Университетов 19 века. Становление и развитие учебно-вспомогательных кабинетов по математике и механике

Этот параграф начнем цитатой из автореферата диссертации на соискание ученой степени кандидата юридических наук (Попова Л.А.,2005 г.) [14]. "В XIX веке сложился уникальный законодательный опыт регламентации системы высшего образования, заключавшийся в создании университетских Уставов. Оставаясь основными правовыми актами, регулировавшими деятельность высшей школы, университетские уставы 1804 г., 1835 г., 1864 г., 1884 г. сыграли огромную роль в развитии отношений в сфере высшего образования. В начале XX в. роль уставов снизилась, и эта сфера общественных отношений стала регулироваться Временными правилами и многочисленными подзаконными актами Министерства Народного Просвещения." В нашей работе укажем как отражены в уставах Императорских университетов 19 века учебные пособия и учебно-вспомогательные кабинеты по математике и механике.

В уставе 1804 г. [15] есть глава VIII, которая носит название "Об учебных пособиях и Институтах". Согласно параграфу 84 этой главы должно было существовать *собрание машин и моделей, которое находилось под ведением Профессора Математики.*

В уставе 1835 г. [16] в главе IX "Учебные и вспомогательные пособия и заведения" приводятся 22 пункта *разных учебных пособий, заведений и собраний*, среди них есть *технологический кабинет и собрание машин и моделей для Прикладной Математики.* В исторической записке, читанной ректором Университета П. Плетневым на публичном торжественном акте 8 февраля 1844 года, читаем [17]: "В собрании моделей для прикладной Математики есть геодезические приборы и модели элементарных машин, служащих для передачи и преобразования различных движений одного в другое, числом 55. Геодезические приборы, в 1827 году, куплены в военно-типографическом депо, а модели элементарных машин, в 1833 году, изготовлены, по заказу Университета, в артиллерийской Технической школе. Цена тех и других восходит до 1,200 р. сер." В книге, составленной профессором В. В. Григорьевым в

1870 году, указывается уже большее число предметов технологического кабинета [18]: "На устройство Технологического Кабинета и собрания машин и моделей по Прикладной Математике назначалось уставом 1835 года 1200 руб. асс. ежегодно. Но устроился Технологический Кабинет не ранее как в 1848 году: тогда, со включением элементарных машин и приводов, находилось уже в нем 529 предметов. "

По уставу университетов 1863 г. [19] технологического кабинета уже не было. Преемником его будем считать кабинет практической механики, т.к. в инвентарной книге кабинета практической механики для нескольких первых предметов указывается место приобретения - из бывшего технологического кабинета. Отметим также, что проект устава 1863 г. был разослан для предварительного рассмотрения во все университетские советы и некоторым университетским профессорам, мнение которых представлялось интересным для Министерства народного просвещения [20]. Сохранились замечания , сделаные профессором Санкт-Петербургского университета, академиком П. Л. Чебышевым [21], некоторые из которых были учтены Ученым комитетом Министерства народного просвещения при окончательном редактировании проекта университетского устава 1863 г.

По штатам к уставу 1884 г. [22] при Санкт-Петербургском университете (СПбУ) существовал уже механический кабинет. Тогда как, в Московском, Харьковском, Казанском университетах, в университете Св. Владимира (Киев), в Новороссийском университете (Одесса) должны были быть кабинеты практической механики. Механический кабинет СПбУ знаменит тем, что в нем находились и механизмы, созданные собственноручно или по чертежам академика П. Л. Чебышева. Их можно увидеть на фотографии из альбома Б.Н. Меншуткина (сделанной в 1899 г.) под номером 32, например, на сайте [23] (а также в проекте "Механизмы Чебышева" [24]).

Заключение

К концу 19 в. во всех Российских Императорских университетах существовали кабинеты практической механики. Санкт-Петербургский университет обладал богатой коллекцией учебных пособий: деревянные и металлические модели механизмов (кинематические и статические модели), математические модели, приборы, чертежи, книги. Ведущие высшие учебные заведения Италии, Германии, Франции, Швейцарии также имели подобные кабинеты [25]. В *объяснительной записке к плану преподавания на физико-математическом факультете Императорского Санкт-Петербургского университета* (1908 г.) указывается, что "В часы практических занятий руководитель может, в случае надобности, демонстрировать и изучать со слушателями математические приборы и модели (особенно в аналитической геометрии и приложении анализа к геометрии). Рассмотрение таких моделей может в значительной степени содействовать уяснению и лучшему пониманию предмета. Коллекция таких простейших моделей имеется в механическом кабинете университета и может быть предоставлена, в случае надобности, в пользование руководителям практических занятий." Так пожелаем и современным преподавателям с успехом использовать учебные пособия, а может быть и создавать свои.

Литература

1. Коллекция геометрических моделей кафедры геометрии механико-математического факультета Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина, http://geometry.karazin.ua/ru/geometric-models-collection.html

2. University of Illinois at Urbana-Champaign, Department of Mathematics (USA) http://www.mathmodels.illinois.edu/cgi-bin/cview?SITEID=4&ID=342

3. http://mail.lesley.edu/faculty/ftvierli/models/locations.html,

4. Göttinger Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente http://modellsammlung.uni-goettingen.de/

5. Mathematische Modelle. Sammlung der Technischen Universitat Dresden. http://www.math.tu-dresden.de/modellsammlung/

6. Golovin A., Tarabarin V., Russian Models from the Mechanisms Collection of Bauman University, Springer Science, 2008.

7. Тарабарин В.Б., Карбоне Джузеппе. Применение коллекций моделей в преподавании машиноведения. Электронный журнал: Наука и образование. 6.2009. http://technomag.bmstu.ru/doc/127492.html

8. Кутеева Г.А. О кабинете практической механики в Санкт-Петербургском государственном университете // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып.7. Гомель, 2013. с.177-185

9. Тарабарин В.Б., Тарабарина З.И., Токарев Р.В., Ткаченко В.В. Виртуальный музей по истории "Теории машин и механизмов". Электронный журнал: Наука и образование. 4.2008. http://technomag.bmstu.ru/doc/91753.html

10. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов. Памятники науки и техники в собраниях музеев России. school-collection.edu.ru/catalog/rubr/c8f06176-11bd-4c47-b4b5-9d8cb906d9b9/91861/

11. Ассоциация научно-технических музеев Российского комитета Международного совета музеев (ICOM) http://www.museum.ru/R1078

12. Дубинин В. В., Пашков А. В. Опыт создания и использования виртуальных моделей механизмов в курсе теоретической механики. Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 12. http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/1132.html

13. Кутеева Г.А. О коллекции демонстрационных приборов и механизмов кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ // Материалы докладов. Международная конференция "Восьмые Окуневские чтения". СПб, 2013. С. 202 – 204

14. Попова Л.А. Становление и развитие законодательства о высшей школе в Российском государстве: историко-правовой аспект: автореф. дисс. на соиск. учен. степ. к.ю.н. Краснодар. 2005. 27 с.

15. Параллельный свод общих уставов Императорских Росссийских университетов 1863, 1835 и 1804 годов, Дерптского 1865 года. С.-Петербург, Типография В.С.Балашева. 1880. 209 с.

16. Общий устав Императорских Российских университетов. Штаты Императорских Российских университетов Санкт-Петербургского, Московского, Харьковского и Казанского. Типография Императорского Казанского Университета. 1835. 85 с.

17. Первое двадцатипятилетие Императорского Санкт-Петербургского университета. Санкт-Петербург. В типографии Военно-учебных заведений. 1844. 227 с.

18. Императорский С.Петербургский университет в-течение первых пятидесяти лет его существования. Историческая записка, составленная В. В. Григорьевым. С. Петербург. 1870. 432 с.

19. Университетский устав 1863 года. Санкт-Петербург. В типографии Иосафата Огризко. 1863. 128 с.

20. Прудников В. Е., П. Л. Чебышев: ученый и педагог. Изд. Просвещение, М. 1964 г. 271 с.

21. Полное собрание сочинений П.Л. Чебышева. Т. V. Прочие сочинения. Биографические материалы. Изд. АН СССР. М.-Л. 1951. 474 с.

22. Общий устав Императорских Российских университетов. Временный штат Императорских российских университетов, управляемых по общему о них уставу // Собрание узаконений и распоряжений правительства, издаваемое при правительствующем Сенате 29 августа. N 92. 1884. с. 1687 – 1732

23. Виртуальная прогулка по Императорскому Санкт-Петербургскому университету конца XIX века, http://virtualtrip.museums.spbu.ru/

24. Механизмы П.Л. Чебышева, http://www.tcheb.ru (2009-2015), CD, первое издание: 2009-2011, второе издание: 2009-2013.

25. Мещерский И.В. Преподавание механики и механические коллекции в некоторых высших учебных заведениях Италии, Франции, Швейцарии и Германии. СПб, 1895. с. 72

ИЗ ИСТОРИИ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ В КОНЦЕ XIX – ПЕРВОЙ ТРЕТИ XX ВЕКА

С.С. Петрова

Механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: serd42@mail.ru

Аннотация: Рассматривается эволюция курса математического анализа в Московском университете в начале XX столетия: от лекций Н.В. Бугаева (1837 – 1903) до курсов, читавшихся после его смерти Л.К. Лахтиным (1863 – 1927), которые в конце 10-ых – в начале 20-ых годов стали выглядеть архаичными в сравнении с курсами, читавшимися по специальным разделам анализа (вариационному исчислению, теории дифференциальных уравнений, теории функций действительного переменного) более молодыми профессорами – Б.К. Млодзеевским и Д.Ф. Егоровым.

Ключевые слова: дифференциальное и интегральное исчисление, введение в анализ, философско-математические воззрения Н.В. Бугаева, теория функций.

FROM THE HISTORY OF THE COURSE OF THE MATHEMATICAL ANALYSIS AT THE MOSCOW UNIVERSITY AT THE END OF XIX – THE FIRST THIRD OF THE XX CENTURY

Abstract: We consider the evolution of the teaching of mathematical analysis in Moscow University in the end of nineteenth – in the early twentieth century: from N.V. Bugaev's lectures to L.K. Lakhtin's course after his death in 1903. Lakhtin's lectures in the late end of 10th – in the beginning of the 20s looked archaic in comparison with courses on special branches of analysis (the calculus of variations, the theory of differential equations, the theory of functions of a real variable) of the younger professors – B.K. Mlodzeevskii and D.F. Egorov.

Keywords: differential and integral calculus, introduction to the analysis, Bugaev's world view, theory of functions.

Характер преподавания математических наук в Московском университете в конце XIX – в самом начале XX века определялся наиболее влиятельным московским математиком той поры Н.В. Бугаевым (1837 – 1903) [1] и преподавание это, по образному выражению П.С. Александрова [2, с. 11], «не было лишено черт провинциализма». Программа преподавания для студентов математического отделения (а именно о преподавании на математическом отделении будет идти речь в настоящей статье) была разработана им [3, с. 312 – 313] в соответствии с его философско-математическими воззрениями (см. [4]). Та её часть, которую мы относим сегодня к математическому анализу (современное его понимание несколько отлично от того, как понимал его Бугаев: для него анализ – «теория непрерывных функций» и он включает в него и алгебру), содержит ряды, дифференциальное и интегральное исчисление, вариационное исчисление и теорию функций. Чтение этих дисциплин предварял курс «Введения в анализ», одной из целей которого было преодоление у студентов трудности перехода от школьной математики к тому материалу, который было принято называть тогда «высшей математикой» (термин этот стал исчезать из употребления лишь во второй половине XX века). Этот курс (до 1888 год он носил название «Введение в исчисление бесконечно малых»), начиная с 1885 года и до самой смерти, читал сам Бугаев. Сам он читал и курсы дифференциального и интегрального исчисления, а также вариационное исчисление. В своих лекциях он применял собственную терминологию, впоследствии не привившуюся, допускал некорректные (иногда просто ошибочные) рассуждения (критику курсов Бугаева см., например, в [5]). Однако, его всегдашнее стремление придать излагаемому материалу философское звучание, увидеть за математическими понятиями и фактами скрытый мировоззренческий смысл увлекали и привлекали слушателей. Так одним из восторженных его поклонников и учеников стал П.А. Флоренский. Известный математический «провинциализм» лекций Бугаева до некоторой степени компенсировался курсами (в том числе специальными курсами) математиков следующего поколения, проникнутых новыми математическими идеями и излагавших материал на самом современном уровне. В качестве примера назовём здесь курсы Б.К. Млодзеевского по теории функции действительного переменного и Д.Ф. Егорова по теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Преемником Бугаева в чтении курса анализа стал его ученик Леонид Кузьмич Лахтин (1863 – 1927). Окончив математическое отделение физико-математического факультета Московского университета в 1885 году, он был оставлен на факультете «для подготовки к профессорскому званию». Вся его последующая жизнь (за исключением периода с декабря 1892 до лета 1896 года, когда он работал в Юрьевском университете) оказалась связанной с Московским университетом, где он прослужил до самой смерти, начав приват-доцентом и пройдя ступени административной лестницы от секретаря факультета до ректора [6,7]. Преподавательскую деятельность на физико-математическом факультете он начал ещё в 1888 года. Однако фигурой, определяющей содержание и направленность преподавания основ математического образования (в том числе курса математического анализа) студентам математического отделения, он стал лишь в 1903 г. – после смерти Бугаева. В эту роль он входил постепенно, ставши по возвращению на факультет после службы профессором Юрьевского университета в 1892 – 96 гг. основным его помощником. Следуя бугаевской программе для математического отделения [1, 3], он прочитал почти все входящие в неё курсы: введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисление, исчисление конечных разностей, теорию функций комплексного переменного, теорию эллиптических функций, интегрирование дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, высшую алгебру, теорию чисел, теорию вероятностей. Основной курс анализа – введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисление – он продолжал читать ещё в середине 20-ых гг. Одним из его слушателей в 1923/24 учебном году стал А.П.Юшкевич [8].

Разумеется, составить представление об эволюции курса Лахтина по сохранившимся немногим материалам довольно трудно. Литографированных курсов дошло до нас немного. Это курс 1898/1899 учебного года «Интегральное исчисление», «Введение в анализ. По лекциям Л.К. Лахтина и профессора Н.В. Бугаева. Составил и издал студент И.М. Самойлов» (Могилёв: Типолит. Я.Н. Подземского. 1909), «Дифференциальное исчисление. По лекциям профессора Л.К. Лахтина. Составил и издал студент И.М. Самойлов» (Могилёв: Типолит. Я.Н. Подземского. 1909), «Интегральное исчисление. По лекциям профессора Л.К. Лахтина и К.А. Поссе с приложением формул встречающихся в курсе и 61 задачи с решениями. Составил и издал студент И.М. Самойлов» (Могилёв. 1910), «Дифференциальное исчисление: конспект лекций профессора Лахтина, профессора Шапошникова и др.» (Москва: Скоропеч. «Техник», 1911). Кроме этих курсов в 1925 г. им было издано уже типографски «Введение в анализ. (Энциклопедия математики. Ч. 1. Введение в анализ)» (Москва: Госиздат. 1925).

Недавно в библиотеке МГТУ им. Н.Э. Баумана мы нашли литографированный машинописный текст на 259 стр.: «Анализ. Записки по лекциям Л.К. Лахтина» Москва, 1899. Судя по всему, эти лекции в части, касающейся дифференциального исчисления, были прочитаны осенью 1899, а в части, касающейся интегрального исчисления, весной и осенью того же года . Изложение дифференциального исчисления близко к бугаевскому, интегральное же ближе к курсам П.А. Некрасова и Поссе.

Судить по этим публикациям об эволюции курса Лахтина довольно затруднительно – отделить в изложения Самойлова фрагменты, восходящие к Лахтину, от текстов, имеющих источником курсы Бугаева или Шапошникова, задача практически не решаема.

Однако, сохранились источники, позволяющие дать некоторое представление об изменениях в содержании его курса. Во-первых, это *Обозрения преподавания наук в Императорском московском университете*, которые регулярно выходили в предреволюционные годы (вплоть до 1917/1918). Из них мы узнаём, что свои курсы Лахтин постоянно модернизировал, на что указывают изменения в списке рекомендуемой литературы, включая в него новейшие издания. Так уже в 1904/1905 учебном году он рекомендовал опубликованный в 1903 году «Курс дифференциального и интегрального исчисления» К.А. Поссе, а в 1905/1906, наряду с курсом Поссе, недавно появившийся во Франции «Cours d'analyse mathématique» Э. Гурса. Когда первый том этой книги появился в 1912 году в Москве в русском переводе, осуществлённом А.И. Некрасовым под редакцией Млодзеевского, то именно этот курс стал основным, на который было ориентировано преподавание анализа в Москве вплоть до 30-ых годов. Начиная с 1911 года Лахтин стал включать в списки рекомендованной литературы также особо полюбившееся ему «Introduction à la théorie des fonctions d'une variable» Ж. Таннери, вышедшее в Париже в 1904 году.

Во-вторых, до нас дошли воспоминания выдающихся современников Лахтина, в которых они делятся своими впечатлениями о его преподавании. Так в марте 1980 г. в беседе с Юшкевичем выдающийся русский математик Д.Е. Меньшов вспоминал [9, с. 315 – 316]: «На первом курсе (шёл 1912 год – С.П.) анализ читал профессор Л.К. Лахтин … Лахтин читал очень чётко, ясно, но материала давал немного, во всяком случае меньше, чем я уже знал. В общем, его изложение было довольно близко по содержанию к учебнику Поссе». Вопрос Юшкевича: «Каков был уровень строгости курса Л.К. Лахтина ? Когда я слушал введение в анализ у того же Л.К. Лахтина в 1923 г., изложение было довольно упрощённое, быть может, применительно к уровню подготовки многих тогдашних студентов». Меньшов отвечал так: «Нет, в мои студенческие годы Лахтин читал лекции достаточно строго, конечно, по тем временам. В них не доказывались многие теоремы, которые считались очевидными и которые теперь доказываются на первом же курсе (например, существование максимума и минимума у функции, непрерывной на отрезке; обращение непрерывной функции, имеющей на концах отрезка разные знаки, внутри отрезка в нуль и т.п.). По содержанию курс Л.К. Лахтина был даже более сжатый в сравнении с учебником [К.А.] Поссе, и я узнал из него мало нового. Всё же я с удовольствием всё прослушал по второму разу. Помню, что определение предела Лахтин давал с ε и δ, чего у Поссе не было». (Отмеченная Юшкевичем упрощённость изложения в лекциях Лахтина 1923 года, действительно, как это объяснил Меньшов, объяснялась низким средним уровнем «пролетарского студенчества» той поры.)

Таким образом с течением времени курс Лахтина модернизировался и уже к 1912 году приобрёл тот характер, который удовлетворил даже столь взыскательного слушателя каким был тогдашний студент будущий классик теории тригонометрических рядов Д.Е. Меньшов. Этот курс оказался «вратами математической учёности» для нескольких поколений математиков, ставших гордостью советской математической науки – это и В.В. Голубев, и В.В. Степанов, и Д.Е. Меньшов, и М.Я. Суслин, и А.Я. Хинчин, и П.С. Александров, и Л.А. Люстерник, и М.А. Лаврентьев, и И.Г. Петровский, и А.Н. Колмогоров, и Л.Г. Шнирельман, и А.О. Гельфонд, и А.Н. Тихонов. Многие из них, как и Меньшов, сохранили добрую память о лекциях своего учителя. Постановка же курса анализа на современные рельсы стала уже их делом, к систематической реализации которого они приступили в 30-е годы.

Литература

1. Петрова С.С. Из истории преподавания математики в Московском университете с 60-ых годов – до начала XX века // Историко-математические исследования. 2-я серия. 2006. Выпуск 11 (46). С. 130 – 147.

2. Александров П.С. Математика в Московском университете в первой половине XX века // Историко-математические исследования. 1955. Выпуск 8. С. 9 – 54.

3. Петрова С.С. О некоторых материалах из архива Н.В. Бугаева // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2006. М. 2006. С. 309 – 313.

4. Демидов С.С. Н.В. Бугаев и возникновение Московской школы теории функций действительного переменного // Историко-математические исследования. 1985. Выпуск 29. С. 113 – 124.

5. Выгодский М.Я. Математика и её деятели в Московском университете во второй половине XIX века // Историко-математические исследования. 1948. Выпуск 1. С. 141 – 183.

6. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года. М.: Наука. 1968. 592 с.

7. Савина О.А., Колягин Ю.М. Математик Л.К. Лахтин и Московский университет. Житие, события, судьба. М.: Изд-во ПСТГУ. 2012. 248 с.

8. Юшкевич А.П. Годы учения. // Историко-математические исследования. 2006. 2-я серия. 2006. Выпуск 11 (46). С. 9 – 48.

9. Меньшов Д.Е. Воспоминания о молодых годах и о возникновении Московской школы теории функций // Историко-математические исследования. 1983. Выпуск 27. С. 312 – 333.

АРХИМЕД: ПИСЬМА К ДОСИФЕЮ И АКСИОМА ПОЛНОТЫ

Г.И. Синкевич

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Аннотация: К концу XIXвека в математическом анализе в работах Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда сформировалась концепция непрерывности. Гильберт добавил в аксиоматику геометрии аксиому Архимеда и аксиому полноты. Позже Колмогоров показал, что аксиома полноты может быть заменена принципом вложенных отрезков вместе с аксиомой Архимеда. В статье рассматривается развитие названных принципов в работах Архимеда.

Ключевые слова: аксиома полноты, аксиома Архимеда, принцип стягивающихся отрезков, непрерывность.

ARCHIMEDES' LETTERS TO DOSITHEUS AND COMPLETENESS AXIOM

Abstract: By the end of the XIX century in mathematical analysis the concept of continuity was formed in the works of Weierstrass, Cantor and Dedekind. Gilbert added the Archimedean axiom and the axiom of completeness to the axiomatic of geometry. Later researches showed that the axiom of completeness can be replaced with the principle of nested intervals and Archimedean axiom jointly. The article discusses the early development of these principles in Archimedes'works.

Keywords: axiom of completeness, Archimedean axiom, nested interval, continuity.

Процесс реформы и арифметизации математического анализа XIX века завершился созданием концепции действительного числа, непрерывности и аксиоматизации арифметики [1]. Было установлено взаимно-однозначное соответствие между областью действительных чисел и геометрической прямой [2]. Появление неевклидовой геометрии привело к необходимости анализа аксиом геометрии, понятия непрерывности и полноты. В 1899 году Гильберт ввёл новую систему аксиом, к которой добавил аксиому Архимеда и аксиому полноты:

«Аксиома измерения или аксиома Архимеда». Пусть A_1 есть произвольная точка на прямой между произвольно данными точками A и B; строим затем точки A_2, A_3, A_4, … так, что точка A_1 лежит между точками A и A_2, A_2 между A_1 и A_3,

A_3 между A_2 и A_4, и сверх того, отрезки AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... равны между собою: тогда в ряду точек A_2, A_3, A_4, ... всегда существует такая точка A_n, что точка B лежит между A и A_n.

Аксиома полноты. Элементы (точки, прямые, плоскости) геометрии образуют систему вещей, которая, при условии сохранения всех указанных выше аксиом, не допускает расширения, то есть к системе точек, прямых, плоскостей невозможно присоединить другую систему так, чтоб в новой расширенной системе были по-прежнему удовлетворены вместе все аксиомы» [3].

Мы хотим показать, как первые теоретические методы работы с геометрическими величинами составили основу современного понимания действительного числа, рассмотрев здесь только тот аспект, который касается непрерывности области действительных чисел и его обоснования с помощью последовательности стягивающихся сегментов. Эта конструкция зародилось в античных методах – в методе исчерпывания Евдокса, принципе Евклида, их развитии в методах Архимеда. Логические схемы, предшествующие возникновению принципа стягивающихся последовательностей, встречаются в работах Ж. Буридана, П. Ферма, Д. Грегори, Ньютона, К. Гаусса, Ж.-Б. Фурье. Сам метод возникает в XIX веке в работах Б. Больцано, О.-Л. Коши, П. Лежена Дирихле, Ш. Мере, Э. Гейне, Г. Кантора, Г. Дарбу. В XX веке принцип вложенных отрезков признан одним из фундаментальных в аксиоматике действительного числа.

V век до н.э,. Пифагор. «Пифагор открыл область иррациональных чисел[1]» [4]. В IV веке теорией иррациональных величин занимался Теэтет Афинский.

В *IV веке до н.э. Евдокс* создал теорию отношений для её применения к геометрическим величинам – длинам, площадям и объёмам. «Евдокс Книдский был немного младше Леонта и был дружен с окружением Платона; он первый увеличил число так называемых общих теорем, прибавил к трем пропорциям еще три и — взяв у Платона основу — разработал множество видов сечения, используя при этом метод анализа» [4]. В III веке до н.э. его теорию отношений изложил Евклид в V книге «Начал», содержащей 18 определений и 25 предложений (теорем). Здесь ratio ещё не число, но может быть сравнимо по величине с другими отношениями: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга» (Начала, Книга V, определение 4) [5, с. 142]. Метод исчерпыванийЕвдокса изложен X и двух последующих Книгах «Начал» Евклида.

«*Немного младше ... – Евклид*, составивший "Начала собравший многое из открытого Евдоксом, улучшивший многое из открытого Теэтетом, а помимо этого сделавший неопровержимыми доказательствами то, что до него доказывалось менее строго. Он жил при Птолемее Первом, потому что и Архимед, живший при Птолемее Первом, упоминает об Евклиде и, в частности, рассказывает, что Птолемей однажды спросил его, есть ли более короткий путь изучения геометрии, нежели "Начала"; а тот ответил, что нет царского пути к геометрии. Таким образом, он моложе платоновского кружка и старше Эратосфена и Архимеда, — они-то жили в одно время, как где-то говорит Эратосфен. Он принадлежит к платоникам и близок их философии [4].

Евклид развивает идеи Евдокса, анализируя несоизмеримые в X Книге: «Соизмеримыми величинами называются измеряемые одной и той же мерой, несоизмеримыми же – для которых никакая общая мера не может быть образована» (Начала,книга X, определение 1) [6, с. 101]. В X книге Евклид доказывает предложение 1:

[1]Величин.

«Для двух заданных неравных величин, если от большей отнимается больше половины, и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей величины» [6, с. 102]. Таким образом, искомая величина «исчерпывалась» последовательностью сумм известных величин, приближаясь к ней *с одной стороны* – либо с недостатком, либо с избытком. Заметим, что именно к X Книге Евклида обращались Штифель, Больцано и Кантор в своих работах, посвящённых концепции числа [2, 7, 8].

III век до н. э. Архимед. Следующим этапом в развитии понимания числа было пять работ Архимеда, изложенных в его письмах к Досифею: «Квадратура параболы», «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах», «О спиралях» и венчающая этот цикл работа «Об измерении круга».

В «Квадратуре параболы» Архимед доказывает, что «всякий сегмент, заключённый между прямой и параболой, составляет четыре трети треугольника, имеющего с сегментом то же самое основание и равную высоту» [9, с. 89]. Для этого он использует две суммы трапеций, площади которых соответственно не достигают и превосходят описанный треугольник. «Я утверждаю, что треугольник $\mathrm{B\Delta\Gamma}$ будет меньше утроенных трапеций KE, $\mathrm{\Lambda Z}$, MH, NI вместе с треугольником $\mathrm{\Sigma I\Gamma}$, но больше утроенных трапеций $\mathrm{Z\Phi}$, $\mathrm{\Pi\Theta}$, $\mathrm{\Pi I}$ с треугольником $\mathrm{IO\Gamma}$» [9, с. 85].

Это *первое* в истории математики применение двух последовательностей вписанных и описанных площадей, приближающихся к искомому с разных сторон. Во второй части своей работы Архимед, следуя Евдоксу, «исчерпывает» искомую площадь сегмента с помощью сумм площадей треугольников, то есть приближаясь к искомому с недостатком.

В работе «О шаре и цилиндре» Архимед показывает, что отношение сумм двух последовательностей всё ближе и ближе к единице. В работах «О спиралях», «О коноидах и сфероидах» Архимед показывает, что разность между этими суммами может быть сделана сколь угодно малой. Эта же идея использована в «Измерении круга», где Архимед получает приближение числа π. В сочинении «О спиралях» Архимед формулирует следствие: «Около упомянутой площади можно описать, как указано, плоскую фигуру так, чтобы описанная фигура была больше этой площади на величину, меньшую всякой наперёд заданной площади и затем вписать так, чтобы упомянутая площадь была больше вписанной фигуры на величину, меньшую всякой наперёд заданной площади». [9, с. 254].

В античности метод исчерпываний мог быть применим лишь к однородным величинам: от отрезка можно было отнимать только отрезок, от площади площадь и так далее. Отношения были возможны лишь между однородными величинами. Длина, площадь, объём выражались не числом, а равновеликой длиной, площадью, объёмом известной элементарной фигуры (квадрат, треугольник, куб, цилиндр). Евклид говорит, что величины могут быть в математическом отношении, если меньшая из них, взятая кратно, может превзойти большую, то есть рассматривает это как свойство, присущее однородным величинам. Архимед заменяет эту формулировку на более сильную: величины могут находиться в отношении, если их *разность*, взятая кратно, может превзойти любую из них. Эта формулировка повторена им для площадей в «Квадратуре параболы»; для линий, поверхностей или тел в сочинении «О шаре и цилиндре», для отрезков в сочинении «О спиралях». Возможно, именно этим Архимед исключает появление неделимых, когда, например, точка может считаться частью линии и так далее. Это принцип был нарушен в Новое время в работах Кавальери и Кеплера, где точка входила как неделимая часть в линию, линия была неделимой частью плоскости и так далее.

В XIX веке к аксиоме Архимеда обратились многие математики, пытавшиеся построить геометрию без неё: Джузеппе Веронезе (1854-1917), который в 1890 году предложил концепцию линейного неархимедова континуума [10], Отто Штольц [11], Давид Гильберт [12]. Как пишет Гильберт, «*Выполнимость аксиомы полноты существенно обусловливается предварительным установлением аксиомы Архимеда*; это значит – аксиома полноты привела бы к противоречию, если бы к аксиомам I-IV не была ещё присоединена аксиома Архимеда» [3, с. 20].

В 1887 году Георг Кантор, обсуждая попытки Веронезе и Штольца ввести в геометрию актуально бесконечные и построить неархимедову геометрию, в письме к Вейерштрассу писал: «Архимед, по-видимому, впервые обратил внимание на то, что применяемая в Евклидовых «Началах» теорема, согласно которой из любого сколь угодно малого ограниченного отрезка можно получить произвольно большие конечные отрезки путём умножения на конечные достаточно большие числа, нуждается в доказательстве, и он считал себя поэтому вправе назвать эту теорему «допущением»$<\ldots>$. Факт существования актуально бесконечно малых чисел не только не является основанием для существования актуально бесконечно малых величин, но, скорее, как раз с помощью первых доказывается невозможность последних». Кантор приводит свою теорему: «Не существует отличных от нуля линейных числовых величин (т.е., короче говоря, таких числовых величин, которые можно представить в образе ограниченных непрерывных прямолинейных отрезков), которые были бы меньше сколь угодно малой конечной числовой величины, т.е. такие величины противоречат понятию линейной числовой величины», и добавляет, что «Потребность в нашей теореме особенно очевидна на фоне новейших попыток О. Штольца и П.Дюбуа-Реймона обосновать актуально бесконечно малые величины с помощью так называемой аксиомы Архимеда. Я думаю также, что этот результат невозможно вполне строго получить иным путём. Ход мыслей цитированных выше авторов (О. Штольц, указ.работы) заключается в том, что если отбросить эту мнимую «аксиому», то мы будем вправе создавать актуально бесконечно малые величины, названные там «моментами». Но из доказанной мною выше теоремы, если применить её к прямолинейным непрерывным отрезкам, непосредственно следует необходимость евклидова постулата. Следовательно, так называемая аксиома Архимеда вовсе не является аксиомой, а есть теорема, вытекающая с логической необходимостью из понятия линейной величины.В первую очередь следует указать на теорию иррациональных числовых величин, обоснование которой невозможно, если не привлечь в какой-нибудь форме а.б. Что это привлечение может совершаться по-разному, я вкратце указал в § 9 «Основ общего учения о многообразиях». Для этого я ещё ранее (Math.An., Bd. 5, S. 123) [I.1] воспользовался особыми актуально бесконечными множествами рациональных чисел, которые я называю фундаментальными последовательностями. Г-н Э. Гейне последовал в этом за мной (Crelles, Bd.74, S. 172).»[13, с. 294-297].

В XX веке исследования Колмогорова показали, что аксиома полноты может быть заменена принципом вложенных отрезков (фундаментальных последовательностей Коши-Кантора) вместе с аксиомой Архимеда[14, 15, 16, 17].

Литература

1. Sinkevich G. Concepts of a Numbers of C. Meray, E.Heine, G. Cantor, R. Dedekind and K. Weierstrass//Technical Transactions. Krakow. – 2014. – 1NP. – p.

211–223.

2. Синкевич Г.И. Эволюция понятия числовой прямой //Труды Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство» 24–29 марта, Цахкадзор, 2014. – т. I. – с. 450-455.

3. Гильберт. Основания геометрии // Перевод А.В. Васильева. СПб. – 1923 г. – с. 20.

4. Прокл. Комментарии к «Началам» Евклида, часть II, глава 8, электронный ресурс: http://centant.spbu.ru/plat/proklos/works/euklid/2_08.htm

5. Евклид. Начала // Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ОГИЗ ТТЛ. – 1948 г. - Т.1. 447 с.

6. Евклид. Начала // Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ОГИЗ ТТЛ. – 1949 г. - Т.2. – 511 с.

7. Синкевич Г.И. Михаэль Штифель (1487-1567) и теоретико-множественные представления XVI века / Г.И. Синкевич // История науки и техники. – 2013. - № 10. – С. 11-16.

8. Синкевич Г.И. Понятие непрерывности у Дедекинда и Кантора. // Труды XI Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Издательство ЯГПУ, 2013. – С. 336-347.

9. Архимед. Сочинения /Перевод И.Н. Веселовского. Москва: ГИФМЛ, 1962. – 640 с.

10. Veronese, G. Fondamenti di geometria a piu dimensioni e a piu specie di unita rettilinee esposti in forma elementare. Padova: Tipografia del Seminario, 1891. – 629 p.

11. Stolz O. B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung//Math. Ann., 1881. – Bd. 18. – s. 255-279.

12. Hilbert D. Grundlagen der geometrie. Leipzig, 1903. – 175 s.

13. Кантор Г. Труды по теории множеств/Перевод Ф.А. Медведева и П.С. Юшкевича. Москва: Наука, 1885 г. – 430 с.

14. А.Н. Колмогоров. К обоснованию теории вещественных чисел. УМН. 1946 №1. С. 217- 219.

15. Русаков А.А., Чубариков В.Н. О двух подходах к обоснованию вещественных чисел//Математика в высшем образовании. 2006, №4. – С. 37- 44.

16. А.В.Гладкий, Ю.Н.Козиоров . Действительные числа как последовательности обыкновенных дробей (Теория действительных чисел по Колмогорову). Математика в высшем образовании. 2009, No7.– С. 21- 38.

17. Тихомиров В.М. Аксиоматический метод и теория действительных чисел в лекциях А.Н. Колмогорова / Математика в высшем образовании. 2014, №12. – С. 149-154.

ТРОЙНАЯ ЗОЛОТАЯ СПИРАЛЬ: РАЗВИТИЕ МОДЕЛИ ПРЕДУСТАНОВЛЕННОЙ ГАРМОНИИ МОСКОВСКОЙ ФИЛОСОФСКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

А.С. Харитонов

Российский государственный социальный университет, Москва, Россия

e-mail: `kharitonov358@yandex.ru`

Аннотация: В работе изложена модель развития физических и социально-экономических систем по тройной золотой спирали на основе теории симметрии хаоса и порядка. Необходимость разработки новой теории, описывающей развитие организаций в природе и обществе к гармонии отношений по золотой пропорции, рассмотрена в трудах Н.А. Умова, Н.В. Бугаева, П.А. Некрасова, А.А.Богданова, Л.А. Шелепина и др.

Ключевые слова: спираль развития, симметрия хаоса и порядка, гармония отношений, золотая пропорция.

TRIPLE GOLDEN SPIRAL: DEVELOPMENT OF THE MODELOF THE PRE-ESTABLISHED OF HARMONY MOSCOW PHILOSOPHICAL AND MATHEMATICAL SCHOOL

Abstract: The paper presents a model of the development of physical and socio-economic systems all over, along triple golden spiral based on the theory of symmetry of chaos and order. The need to develop a new theory describing the development of the organizations in the natural and social harmony relations on the golden ratio, is considered in the works of N.A. Umov, N.V. Bugaev, P.A. Nekrasov, A.A. Bogdanov, L.A. Shelepin and others.

Keywords: spiral of development, the symmetry of chaos and order, harmony of relations, the golden proportion.

Самодвижение биологических и социально-экономических организаций по спирали к гармонии отношений описывается методом Фибоначчи на основе модели равновесия последующих структур по золотой пропорции [1]. Однако этот метод не связан с известными динамическими теориями, которые построены на модели равновесия термодинамических систем поровну или на постулате о равновероятности доступных микросостояний для материальных точек. Классические динамические теории не учитывают изменение структурных параметров, ответственных за жизненный цикл организаций и необратимое становление Бытия, включающее самодвижение и развитие организации в круговороте энергии в природе. Поэтому они противоречат опыту эволюции биологических и социально-экономических систем.

Для исследования процессов совершения работы биологических и социальных систем против второго закона термодинамики Н.А. Умов предложил учесть активное взаимодействие структур и разработать иную модель равновесия вместо модели материальной точки. Модель равновесия задаёт динамические параметры и цель эволюции: для термодинамических систем - к максимальному хаосу, а для структурных параметров - к гармонии отношений. Для учёта структурных взаимодействий Н.В. Бугаев предложил разработать аритмологию - науку о разрывных функциях, которые, по нашему мнению, соответствуют фрактальным взаимодействиям, характеризующим необратимое становление Бытия. Известная же разрывная функция Дирихле оказалась неприемлемой для решения этой проблемы, сформулированной Н.В. Бугаевым. А.А. Богданов предложил разрабатывать тектологию, как науку о всеобщей организации материи. Однако математический принцип разработки тектологии им не был сформулирован. П.А. Некрасов и через сто лет Л.А. Шелепин исследовали статистику (немарковских) процессов с памятью для описания стремления общества к гармонии отношений на основе золотой пропорции.

Дж. Максвелл указал на проблему обоснования модели материальной точки, разработанную Г. Галилеем и И. Ньютоном. Г. Герц предложил свою механику взаимодействия трёх различных сортов частиц.

В 1903 году Л. Больцман писал, что его определение энтропии, равной только мере хаоса, справедливо для материальной точки, а «живое борется ... за рост органического (структурного) многообразия форм материи...». Поэтому он отметил, что надо следить за выбором аксиом, чтобы они соответствовали объекту и цели его исследования.

Из этого мы заключаем, что проблема замены модели материальной точки (идеализации Галилея-Ньютона) для описания физики сложных систем, например, биологических и социальных систем, была выявлена ещё в конце позапрошлого века и широко обсуждалась в Московской философско-математической школе.

Е.С. Вентцель предложила рассматривать теорию вероятностей не только как науку о случайных событиях, но и как новый способ описания физических закономерностей. П.К. Рашевский предложил отказаться от догмата натурального ряда, как линейной зависимости числа от его порядкового номера. Ю.С. Владимиров предложил реляционную физическую теорию без традиционных представлений о пространстве.

Мы же обратили внимание на тот факт [1, 2], что статистическая энтропия S равна мере хаоса, когда вторым слагаемым – мерой порядка - можно пренебречь:

$$S = H + G,$$

где H-мера хаоса или мера неопределённости состояния системы, G-мера определённости или мера порядка. При соблюдении постулата Больцмана мера порядка G равна нулю и разрывами пространств доступных событий можно пренебречь.

Мера хаоса H не учитывает разрывы функций, сглаживая их на множестве рассматриваемых состояний, что позволяет её использовать в математическом анализе. Мера порядка же G, наоборот, учитывает разрывы функций на множестве рассматриваемых состояний.

Мы полагаем, что введение в научный оборот новых математических функций - мер хаоса и порядка - в трёх пространствах событий на аксиомах холизма (целостности природы) позволяет построить фрактальное описание закономерностей природы. Новые функции позволили нам определить процессы рассеяния и концентрации энергии и взаимодействия между ними, как становление Бытия. Эти взаимодействия описывают условия выживания и развития организации в круговороте энергии в природе.

Жизнеспособные части подобны целому и организованы по золотой пропорции – закон Предустановленной гармонии /Г. Лейбниц, 1695г./. Мы дополнили этот закон моделью развития по тройной золотой спирали и установлением двух путей достижения гармонии отношений за счёт упрощения или усложнения структуры организации сложных систем.

Для становления Бытия известны равновесие структур по золотой пропорции, наблюдаемое экспериментально, принцип сохранения энергии, принцип триединства, ряд Фибоначчи, описывающие самодвижение сложных систем по спирали.

Введение новых математических функций - мер хаоса и порядка - позволило нам построить модель взаимодействия процессов рассеяния и концентрации энергии, описать процесс становления Бытия, в котором имеет место фрактальное взаимодействие выживающих организаций по золотой пропорции и закономерность их развития, когда фрактальные части организованы сложнее своего целого.

Модель целого можно определить как единицу, состоящую из суммы мер хаоса и порядка, а равенство мер хаоса и порядка позволило исследовать возможные приращения этих функций, которые описываются золотой пропорцией. Различные алгоритмы действий уже с золотой пропорцией имеют фрактальные свойства самой золотой пропорции, из которых можно выводить натуральный ряд чисел, равновесное распределение и геометрию Евклида, а также новые фрактальные математические и физические закономерности.

В холизме можно строить математическое описание на принципе подобия процессов рассеяния и концентрации энергии в организациях частей и целого, или подобия становления Бытия, про которое в науке уже многое было известно, начиная с принципа Протагора: «Человек – это мера всех вещей...», но не хватало соответствующего математического аппарата для разрывных функций при описании фрактальных взаимодействий.

Согласно предлагаемой нами теории, после внешнего или внутреннего возмущения, сложная система эволюционирует к своему исходному равновесию поровну – для процессов рассеяния и концентрации энергии во внешней системе отсчёта и по золотой пропорции - для последующих структурных параметров во внутренней системе отсчёта двумя разными способами: за счёт упрощения или усложнения своей структуры.

Между организациями с разной структурой могут происходить свои новые, в том числе динамические (силовые) и гармоничные взаимодействия. Это может прояснить причину возникновения сложных форм организаций в природе.

Бесконечное число актов взаимодействия между процессами рассеяния и концентрации энергии позволяет рассматривать различные алгоритмы действия золотой пропорции самой на себя и между своими элементами.

Эти фрактальные свойства позволили вывести как частные случаи натуральный ряд, геометрию Евклида и равновесные функции распределения. Где под фракталом понимается объект, имеющий разветвлённую структуру, части которого в чём-то подобны целому. Выживают в природе те организации, которые подобны организации целого, стремятся к гармонии отношений по золотой пропорции разными способами. При этом организации частей могут быть сложнее целого за счёт увеличения числа резонансных взаимодействий и появления новых структур.

Новым физическим объектом описания в нашей теории является взаимодействие процессов рассеяния и концентрации энергии: по координатам, импульсам и структурным параметрам. Новыми параметрами такого описания являются приращения мер хаоса или порядка и фрактал золотой пропорции. Это взаимодействие для целостных систем находится в балансе и локально неустойчиво, но стремится к минимуму свободной энергии образования, как естественному механизму обратной связи, и генерирует новые события за счёт резонансных взаимодействий осцилляций вблизи золотой пропорции.

Возникла возможность исследовать связь гладких функций с разрывными функциями, связанными с золотым сечением,

В соответствии с таким способом описания развитие организаций происходит по тройной золотой спирали, где две спирали, характеризующие распределение по координатам и импульсам, сжимаются с шагом ряда Фибоначчи, а спираль, характеризующая распределение по структурным параметрам, разворачивается с шагом ряда Люка.

Практическая ценность теории состоит в том, что она содержит «стратегию» для биологических и социально-экономических систем – стремиться выжить путём развития по тройной золотой спирали, в частности, за счёт роста структурного многообразия в измеряемых показателях [3].

Автор выражает благодарность В.К. Руденко за помощь в работе.

Литература

1. Харитонов А.С. «Структурное описание сложных систем». Прикладная физика, 2007, №1. С.5-10.

2. Харитонов А. С.«Математические начала синтеза принципов дуализма и триединства». Метафизика, 2012, №3. С. 147-155.

3. Харитонов А. С. «Математические начала социальной гармонии». Ученые записки РГСУ, 2013, т. 2, № 5. С. 99–105.

АКАДЕМИК В.П. ГОРЯЧКИН – ОСНОВАТЕЛЬ ЗЕМЛЕДЕЛЬЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В.Н. Чиненова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Аннотация: В статье говорится о вкладе в развитие прикладной механики, а именно о создании новой дисциплины – земледельческой механики выпускником Московского университета и Императорского Московского технического училища (ныне МВТУ), учеником Н.Е.Жуковского, академиком Горячкиным В.П. (1868-1935).

Ключевые слова: теория механизмов и машин, теория сельскохозяйственных машин, земледельческая механика.

THE ACADEMICIAN GORYACHKIN V.P. IS THE FOUNDER OF AGRICULTURAL MECHANICS

Abstract: The paper considers the contribution to the development of applied mechanics, namely, the creation of a new discipline, agricultural mechanics, by the Academician V. P. Goryachkin (1868 - 1935), apprentice of N.E.Zhukovskii and graduate of the Moscow University and the Imperor's Moscow Technical College (nowadays, Bauman Moscow Technical University).

Keywords: Theory of Mechanism and Mashines, Agricultural machinery engineering, Agricultural Mechanics.

Выдающийся ученый, теоретик сельскохозяйственной машинной техники, основоположник новой научной дисциплины «Земледельческая механика», почётный член АН СССР, академик ВАСХНИЛ Василий Прохорович Горячкин в 1890 г. окончил с отличием математическое отделение физико-математического факультета Московского университета, а в 1894 г. Императорское Московское техническое училище (ныне МВТУ им. Баумана). Учителем Горячкина и наставником в обоих вузах был Николай Егорович Жуковский.

Рис. 1. Горячкин Василий Прохорович

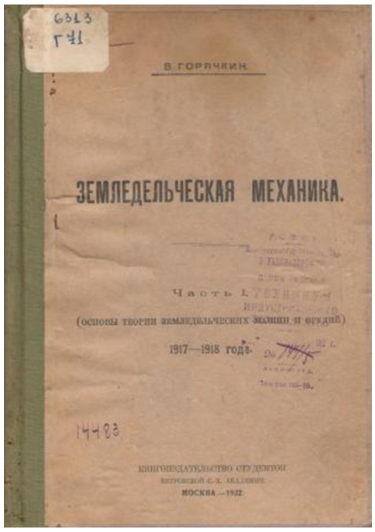


Рис. 2. Земледельческая механика. М. 1919 г.

Имея перспективу вместе с другими учениками Жуковского продолжить работу в области аэродинимики, В.П. Горячкин нашел в себе смелость вступить на совершенно неисследованный, но не менее важный для человечества путь – создание науки о с.-х. машинах, получившей впоследствии название «Земледельческой механики»

В.П. Горячкин сразу приступил к новому для него делу – изучению сельскохозяйственных машин. Министерство земледелия направило его в две длительные научные командировки. Сначала он в течение шести месяцев знакомился с отечественными заводами с.-х. машиностроения, а затем Василий Прохорович полтора года пробыл в Германии и Франции. Заграничная командировка показала ему, что и в передовых странах Запада еще не создана научная основа для проектирования и испытания с.-х . машин и орудий.

Василий Прохорович начал свою научную и учебную работу в 1896 г. в Московском сельскохозяйственном институте.(МСХИ), сразу же по возвращении из командировок, и вел ее непрерывно до 1935 г. (до конца своей жизни).

На разработку и развитие земледельческой механики потребовались многие годы, а курс «Учение о сельскохозяйственных машинах и орудиях» Василий Прохорович, должен был читать с первого же года своей профессорской деятельности. Тем не менее, уже в 1897 г. вышли первые, а в 1898 – все остальные листы (в том числе с чертежами) лекций Горячкина по этому курсу, изданные литографическим способом.

Его первый печатный труд «Отвал» [1, т.3, с. 9-54] увидел свет в 1898 г., но он не утратил своей значимости до сегодняшнего дня. Эта работа привлекла к нему внимание специалистов. В 1911 г. Горячкин уже создал атлас жатвенных машин и опубликовал свою классическую работу «Теория жатвенных машин», сопроводив её техническими обоснованиями и расчётами. Западные промышленники скупили почти половину всего тиража атласа и предложили Горячкину переехать в Америку. Но он решительно отказался, сказав: «Я нужен своей стране».

Московское общество сельского хозяйства в 1896, 1897, 1898, 1903, 1908, 1909 и 1910 гг. устраивало выставки с.-х. машин и орудий на Бутырском хуторе, расположенном неподалеку от Московского сельскохозяйственного института. Начиная с 1897 г., Горячкин принимал деятельное участие в этих выставках и руководил испытаниями представленных на выставку машин, а с 1903 г. был председателем экспертных комиссий на этих выставках. Эти выставки и испытания машин и орудий дали Василию Прохоровичу первоначальный материал для изучения конструкций и выяснения теоретических основ их работы и построения. Организовав испытания на принципиально новой основе, он создал могучий рычаг научного познания, раскрытия взаимодействия среды и механизмов, а также критериев проверки теоретических исследований, создав для этого целый ряд приборов, механизмов и методик.

Вскоре стали выходить в свет его небольшие книжки и брошюры: «Какие бывают плуги», «Плуги», «молотилки» и др. В каждой из работ дано теоретическое освещение устройства и работы машины; в каждой из них автор стремится указать те законы механики, на которых основано действие машины, и требованиям которых должно соответствовать ее устройство.

Часть исследований Горячкина была посвящена общим вопросам: расчету сил инерции, теории колебаний, механическому подобию, теории масс и скоростей с.-х. машин и орудий, теории разрушения материалов при их механической обработке, теории клина, способам обработки результатов опыта.

Изложение курса начинается с введения в историю механики; Горячкин перечисляет основные этапы становления классической механики, связанные с именами Галилея, Ньютона, Декарта. Далее излагаются вводные положения векторного анализа, а в отделе «Движение» рассматриваются детали некоторых с.х. машин с точки зрения поступательного, вращательного и винтового движений. Затем перечисляются базовые сведения из теории плоских и пространственных механизмов, при этом особое внимание уделяется четырехзвенному механизму, приведены примеры его использования в различных с.х. устройствах. Изложение иллюстрируется прекрасно выполненными чертежами. В разделе «Кинематика» приведены основные формулы для компонент ускорений точки; а в главе «Динамика» он вводит такие понятия, как масса, момент инерции твердого тела, момент силы, работа и энергия; даны основные положения динамики материальной системы. После изложения статики следуют главы: «Учение о колебании», «Учение об ударе», строится теория клина (плоского двугранного и трехгранного). Особо выделено движение твердого тела по фрикционной плоскости, так как оно имеет большое значение в земледельческой механике (решето, грохот, колесо). В следующей главе обсуждается общий план опытных исследований движения колес с гладким и рифленым ободом. Изложение курса завершается 246 задачами по механике.

В других своих исследованиях Василий Прохорович рассматривал отдельные виды рабочих органов, предназначенных для подготовки почвы и посева, уборки урожая, последующей его обработки и т.д.

Обе эти большие группы вопросов, общих и специальных, В.П. Горячкин относил к одной науке – земледельческой механике, как бы противопоставляя ее по преимуществу описательному с.-х. машиностроению. Впервые в истории сельскохозяйственные машины и орудия стали предметом глубокого и разностороннего научного изучения, была вскрыта механическая сущность многих процессов и машин и создана научная теория для их проектирования и рационального построения.

Ему удавалось очень кратко и ясно изложить те научные положения, которые были необходимы для правильного решения задач земледельческой механики. Он обычно не пользовался излишне сложными математическими выкладками, если этого не требовало существо вопроса. Тем не менее обилие новых мыслей и возможных подходов к решению каждой группы специальных задач делает изучение работ Василия Прохоровича нелегким делом. Зато нередко несколько строк его текста дают готовое научное обоснование для обширных работ, осуществленных впоследствии, например, в области теории ножей жатвенных машин, теории колес – ведущих и ведомых, теории барабана.

В годовщину своего 50-летия Василий Прохорович закончил работу над «Земледельческой механикой» (1919 г.), ставшей основой методологии при разработке теории, расчета с.-х. машин и научных принципов высшего агроинженерного образования. Горячкин считал, что в будущем земледельческая механика по обилию и разнообразию своих задач будет самой интересной механикой среди многих других своих собратьев. Формулируя ее особенности, он писал [1]: «...земледельческая механика служит посредницей между механикой мертвого и живого тела». В этом особенность механики Горячкина, ее исходных начал и конечных решений. Разрушение почвенного пласта, измельчение и высушивание растений, расселение микроорганизмов и другое он рассматривал не как «стружку, снимаемую с обрабатываемой среды (детали) и направляемую в отвал, а как живые совокупности», сохраняя которые достигается полезность продукта для потребления и преумножаются «качества живого» для последующего воспроизводства. Наряду с этим Василий Прохорович в «живой природе» видел творца. Так, он сформулировал ряд принципов перехода от перемещения живых объектов к перемещению механических движителей. На основе двигательных функций конечностей человека и животных им разработаны схемы механических шагающих и колесных систем, преодолевающих препятствия в различных условиях.

Широкая эрудиция, наблюдательность и умение анализировать помогали молодому инженеру распознавать и вскрывать механические явления и процессы, определяющие действие машины, и уяснять законы, которые управляют ими. Постепенно он создал новую техническую дисциплину, которую назвал земледельческой механикой. Система послужила основой для разработки методов проектирования и расчёта каждой машины. Часть этих методов разработал сам Горячкин.

По воспоминаниям некоторых его слушателей, лекции Василия Прохоровича были насыщены глубоким раскрытием существа рабочих процессов с обязательными выводами, как обеспечить создание машин, которые позволят иметь в стране современные средства механизации сельского хозяйства. Слушатели его лекций четко себе представляли, что эта задача обязательно ляжет на их плечи, и именно лекции Горячкина явятся для них тем инструментом, который окажется в их руках после окончания института. То, что читал Василий Прохорович, невозможно было найти не только в нашей литературе, но и в зарубежной. Именно он заложил основы проектирования практически всех машин, применяемых в то время в сельском хозяйстве [3].

Научные труды Горячкина по сей день являются классическими в области технических наук. В них, наряду с разработкой вопросов теории сельскохозяйственных машин, получили развитие и такие фундаментальные теоретические вопросы, как теория масс и скоростей, теория удара и разрушения материалов, теория клина и резания, теория подобия, общая схема природных явлений и процессов. Для испытания машин им созданы приборы, поражающие и сегодня своей оригинальностью: плотномер почвы, профилографы, динамографы и др. Многие из них стали образцом современного приборостроения. Его научное наследие, развитое в трудах учеников и последователей, обеспечило приоритет отечественной науке в решении проблем механизации сельскохозяйственного производства [3].

Исключительно глубокая концепция В.П. Горячкина о необходимости рассматривать теорию сельскохозяйственных машин в комплексе «человек – машина - среда» получила в наши дни самое широкое признание в современной теории машин. Действительно, именно с учетом всех трех факторов проектируются отдельные машины автоматического действия, системы машин автоматического действия (поточные автоматические системы машин), станки и другие автоматы с программным управлением и, наконец, промышленные роботы и шагающие машины.

«Земледельческая механика» Горячкина была переведена на английский, арабский и болгарский языки.

В1899 г. В.П.Горячким получил звание адъюнкт-профессора, в 1913 г. – профессора. С 1913 г. он заведовал созданной им машиностроительной станцией, которая стала экспериментальной базой его научных работ. В МСХИ Горячкин организовал отделение Инженерного факультета (1915), а в 1928 г. – факультет с.-х. машиностроения. Как выдающийся ученый и общественный деятель В.П. Горячкин был в 1919 г. выбран и назначен ректором Петровской сельскохозяйственной Академии, так стал называться сельскохозяйственный институт. С 1929 г. он – директор Всесоюзного института сельскохозяйственной механики (ВИСХОМ). Им был организован совет при Всесоюзном научно-исследовательском институте механизации сельского хозяйства (ВИМе).

После организации всесоюзной академии сельскохозяйственных наук (ВАСХНИЛ) он стал ее действительным членом, а затем и почетным членом Академии наук СССР. В 1935 г. академик В.П.Горячкин был награжден орденом Трудового Красного знамени. Ему было присуждено звание «Заслуженный деятель науки и техники РСФСР», его именем были названы МГАУ и ВИСХОМ. В 1980 году открыт музей-мемориал им. В. П. Горячкина, который располагается в помещении бывшей машиноиспытательной станции

После смерти Горячкина в 1935 году вышло Собрание сочинений в 7 томах (1937-1949), а к 100-летию со дня рождения, в 1968 г. – Собрание сочинений в трех томах [1]. Почти каждая теоретическая работа, появляющаяся за границей, содержит упоминание имени В.П. Грячкина, как непререкаемого авторитета в области земледельческой механики.

Литература

1. Горячкин В.П. Собрание сочинений в семи томах. Т.III. С. 9-55. М.: Сельхозгиз. 1937.

2. Горячкин В.П. Земледельческая механика. Часть I. (Основы теории земледельческих машин и орудий). М.: Кн. изд. студ. Петр. с.-х. академии. 1919. 200с. // Собрание сочинений в семи томах. Т.II. М.: Сельхозгиз. 1937. 258 с. // Собрание сочинений в 3-х томах. Т.1. М.:Колос. 1968. 282 с.

3. Лучинский Н.Д. Жизнь и деятельность академика В.П. Горячкина. С. 5-10. // Материалы к торжественному заседанию научно-технического совета ВИСХОМа, посвященному 100-летию со дня рождения акад. В.П. Горячкина. М.: Отдел научно-технич. Информации ВИСХОМ. 1968. 52 с.

Секция 10. Проблемы преподавания математики в школе и вузе

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КУРСЫ ДЛЯ МАГИСТРОВ: НОВЫЕ ВЫЗОВЫ ИЛИ ХОРОШО ЗАБЫТОЕ СТАРОЕ

В.И. Антонов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: antonovvi@mail.ru

Аннотация: В статье рассмотрены проблемы, с которыми сталкивается кафедра высшей математики в связи с преподаванием специализированных математических курсов для магистров инженерных направлений подготовки. Приведены примеры курсов и практических задач, которые могут быть востребованы при обучении магистров.

Ключевые слова: специализированные математические курсы, магистры, инженерные направления подготовки.

SPECIAL MATHEMATICAL COURSES FOR MASTERS: NEW CHALLENGES OR WELL FORGOTTEN OLD

Abstract: The problems faced by the Department of Mathematics in connection with the delivering of specialized mathematical courses for graduate engineering training areas is under consideration. Are examples of courses and practical tasks that can be claimed in the training of masters.

Keywords: specialized math courses, masters, engineering training areas.

В связи с переходом на систему бакалавр-магистр перед кафедрами математики инженерных ВУЗов поставлена задача разработки и внедрения специальных математических курсов для магистров. Следует заметить, что практика преподавания таких курсов была широко развита в советское время в системе подготовки специалистов. Такой подход был частью общей концепции подготовки высококлассных специалистов, основным потребителем которых был военно-промышленный комплекс.

В то время к специальным разделам математики относили следующие: математическая физика, методы вычислений, дополнительные главы математического анализа, элементы функционального анализа, интегральные преобразования, методы статистических испытаний. Кроме того, серьезный математический аппарат использовался в курсах теории упругости, гидродинамики, прикладной механики, теплофизики, статистической радиотехнике и ряде других.

Эти курсы базировались на основе достаточно полного курса высшей математики, длительность которого составляла четыре-пять семестров. За это время студенты успевали не только изучить основные разделы математики, но и развить свое абстрактное мышление, понять и осознать место математики в сфере современной науки, научиться решать некоторые проблемы, требующие привлечение развитого математического аппарата. Более подробный анализ проблем математического образования инженеров представлен в работах [1,2].

Традиционный базовый курс высшей математики для инженеров состоял из следующих разделов:

- Матрицы и действия с ними. Определители;
- Системы линейных уравнений и элементы линейной алгебры;
- Векторы;
- Прямая и плоскость. Линии и поверхности второго порядка;
- Теория пределов. Непрерывность;
- Производная и её приложения;
- Интеграл и его приложения;
- Функции многих и комплексных переменных:
- Дифференциальные уравнения;
- Числовые и функциональные ряды; ряды Фурье
- Кратные интегралы и теория поля;
- Теория вероятностей и математическая статистика;

Связь с выпускающими кафедрами, которые являются заказчиками "выпускаемой продукции" в виде математически грамотных студентов, также осуществлялась за счет привлечения сотрудников кафедры математики к выполнению работ по хозяйственным договорам. Эта работа приводила к взаимному обогащению знаниями и лучшему пониманию задач, стоящих перед общими кафедрами. Таким путем формировался класс творческих людей, будущих двигателей научно-технического прогресса. что совпадало с общей концепцией развития страны.

В настоящее время в связи с изменением общей концепции образования, направленной на воспитание "грамотных потребителей уровень математической подготовки школьников и студентов объективно снизился. Также произошло и существенным сокращением числа учебных заведений, осуществляющих подготовку квалифицированных рабочих и среднего технического управленческого звена. Понятно, что для решения несложных производственных задач и выполнения простых организационных мероприятий не требуется слишком глубокое знание основ математики, физики и других "мало нужных" наук. Выступая в качестве заказчиков выпускаемых инженеров, современные работодатели все чаще говорят о том, что им не нужны "всякие ваши интегралы потому что их негде применять. Более важно подготовить грамотное среднее звено.

В связи с изменением целей инженерного образования естественным образом трансформируются и средства для достижения новых целей. Если нет задачи подготовки высококлассных специалистов, то в качестве управляющего воздействия вполне подходит "подушевое финансирование". Ясно, что если не будет ускоренного развития российской промышленности, то не будет и востребованности в большом количестве грамотных и способных к творческому процессу инженеров, конструкторов, технологов и других работников, чей труд во многом определяет технический прогресс.

Конечно, инженерные Вузы не могут стоять в стороне от текущих проблем современного состояния общества. Мы можем и должны взять на себя решение задачи подготовки специалистов среднего звена. Для этого требуется пересмотреть содержание и методы преподавания курсов математики применительно к новым обстоятельствам. Разумным выходом может стать использование современных компьютерных технологий, включая проведение практических занятий в режиме "он-лайн". Следует заметить, что разработка и постановка таких курсов требует существенных затрат времени и средств. Однако в условиях резкого сокращения количества преподавателей и возрастания количества студентов, приходящихся на одного педагога, трудно ожидать, что качество подготовки специалистов может возрасти.

Например, при нагрузке в 20 часов в неделю, с учетом того, что , как правило, в неделю выделяется два часа на группу для проведения практических занятий и группа состоит из 20 человек. на одного преподавателя приходится около двухсот студентов в семестре. Ни о какой индивидуальной работе в такой ситуации не может быть и речи. Также следует заметить, что при такой нагрузке и низкой оплате труда стало практически невозможно привлекать сильных математиков к работе на кафедре. То есть поставленные условия диктуют стратегию привлечения как можно большего числа сотрудников на уровне ассистентов и старших преподавателей.

С другой стороны, наличие магистратуры приводит к необходимости обращения выпускающих кафедр к кафедре математики с предложением преподавания специализированных курсов для магистров. При этом возникает ряд проблем, которые необходимо учитывать при составлении программ новых курсов:

1. Эти курсы должны быть профессионально ориентированными, то есть главным итогом работы должно стать умение применять соответствующие знания, умения и навыки к решению конкретных задач данной специальности.

2. С учетом недостаточных базовых знаний по математике поступивших в магистратуру необходимо вписывать в канву курса повторение разделов, необходимых для восприятия новых методов и подходов, например, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, численных методов, элементов стохастического моделирования и т. д.

3. С точки зрения будущих магистров, которые в основной своей массе работают, их поступление на учебу связано с ожиданием возможностей карьерного роста, повышение своего статуса, прибавки оплаты труда. В этих условиях традиционный метод лекция -практические занятия по задачнику могут вызвать взаимное непонимание цели проводимых занятий.

4. Также необходимо учитывать физическое состояние ребят после напряженного трудового дня.

Все перечисленные и некоторые другие особенности работы с магистрами приводят к выводу, что одним из наиболее эффективных методов проведения занятий является интерактивная форма обучения с привлечением современных компьютерных и дистанционных технологий.

В настоящее время кафедра высшей математики нашего университета предлагает следующие курсы для магистров:

- Математические модели тепловых энергетических процессов;
- Нейронные сети и их применение;
- Фундаментальный курс теории вероятностей;
- Элементы функционального анализа;
- Экстремальные задачи;
- Уравнения с частными производными;
- Асимптотические методы в прикладной математике и механике;
- Численные методы статистического моделирования;
- Математические модели процессов с высокой плотностью энергии;

- Теория и практика принятия инженерных решений.

В качестве примера приведу различие в курсах "Математическое моделирование" для направлений подготовки "Техносферная безопасность" и "Технология и организация строительства".

В первом случае основной упор должен быть сделан на модели, описывающие атмосферные и быстропротекающие процессы с учетом сильных энергетических воздействий. Эти модели нужны для оценки рисков, возникающих при создании внештатных ситуаций. Также следует дать понятия о моделях, позволяющих оценить надежность средств защиты в чрезвычайных ситуациях и вероятности последствий распространения различных эпидемий. В этом случае интерес могут представлять следующие задачи:

1. Вероятность разрушения объекта при однократном воздействии высокой температуры составляет 0,2. Определить допустимое количество воздействий из условия, что вероятность сохранения объекта должна быть не менее 0,5.

2. Медицинский анализ выявляет имеющуюся у пациента болезнь с вероятностью 0,8 и ошибочно указывает на эту болезнь при ее отсутствии с вероятностью 0,05. Известно, что в среднем 75% предварительно обследованных пациентов с данным диагнозом действительно являются больными. Вычислить вероятность того, что у пациента действительно имеется данная болезнь, если на нее указал медицинский анализ.

Во втором случае следует более подробно рассмотреть модели, позволяющие оценивать статические и динамические параметры процессов, связанных с проектированием зданий и сооружений и также вопросы безопасности и надежности строительных конструкций. Также целесообразно привести примеры задач из области экономики и финансов, позволяющие дать предварительную оценку бизнес-плану предстоящих работ.

В этом случае можно рассматривать следующие задачи:

1. Тепловая изоляция труб горячей воды выполнена в виде укутывания поверхности трубы слоем теплоизоляционного материала, имеющего низкую, заранее известную теплопроводность. Определить критическую толщину слоя изоляции. Критическая толщина изоляции определяется как наибольшая ее толщина, с дальнейшим увеличением которой теплообмен с окружающей средой перестает уменьшаться.

2. Определить кривую, которую образует канат цепного моста.

3. Вы решили открыть собственное дело - оборудовать торговую точку. Известно, что аренда земли обойдется вам в 10000 руб. за месяц. Вы рассчитываете, что подготовительные работы займут три месяца, после чего можно будет получать доход. Не имея достаточных собственных средств, вы собираетесь взять кредит в банке на следующих условиях: сумма кредита – 500 000 руб., сроком на 12 месяцев под 5% в месяц без права досрочного погашения.

Спрашивается: каким должен быть минимальный месячный доход, получаемый от торговли, чтобы вовремя расплатиться с кредиторами и избежать штрафных санкций?

В любом случае совершенно необходимо, чтобы обучающиеся поняли границы применимости рассматриваемых математических моделей, а также пути их развития и совершенствования.

Конечно, было бы разумно привлекать магистров к научной работе, в первую очередь для разработки сложных математических моделей и проведения с их помощью исследований в соответствующей предметной области. К сожалению, мой личный опыт подсказывает, что практически никто из них не имеет возможности использовать развитый математический аппарат для решению стоящих перед ними задач. Однако не следует опускать руки. Возможно, мы сами еще не до конца понимаем, какого рода математический аппарат может быть востребован. Кроме того, остается надежда на то, что такие задачи могут возникнуть в связи с курсом на возрождение российской промышленности и внедрения новых современных технологий.

Литература

1. Антонов В.И. Математическое образование в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете//Научно-Технические ведомости СПбГПУ, 2005, №3. С. 104-111.

2. Антонов В.И. Фундаментальное математическое образование в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете//Научно-Технические ведомости СПбГПУ, 2010, т.2-2 (100). С. 216-220.

РАЗВИТИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ КАЗАХСТАНА

Б.Б. Баймуханов, А.У. Даулеткулова

Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Республика Казахстан

e-mail: aiguldu@mail.ru

Аннотация: В статье рассматривается вопросы развитие функциональной грамотности школьников Казахстана. Для развитие функциональной грамотности школьников и достижение ключевых и предметных компетенций, система образования Республики Казахстан в настоящее время принимает ряд действенных мер по обновлению содержания образования, созданию учебных программ, учебников, пересмотру программ повышения квалификации и переподготовки учителей, мониторингу способности учащихся применять полученные знания в жизненных ситуациях.

Ключевые слова: функциональная грамотность, ключевые компетенции, предметные компетенции, читательская, математическая и естественнонаучная грамотность, международные исследование, содержания образования.

DEVELOPMENT OF FUNCTIONAL LITERACY OF SCHOOLCHILDREN OF KAZAKHSTAN

Abstract: The article is considered matters of development of functional literacy of schoolchildren of Kazakhstan. For the development of functional literacy of schoolchildren and achievement of key and subject competencies, the educational system of the Republic of Kazakhstan currently accept a series of effective measures to update the content of education, the creation of educational program, textbooks, revision of the programs of improving qualifications and retraining of teachers, monitoring students' ability to apply their knowledge to life situations.

Keywords: functional literacy, key competencies, subject specific competences, reading hall, mathematical and scientific literacy, international study, content of

education.

Главой государства Казахстана Н.А.Назарбаевым в Послании народу Казахстана от 27 января 2012 года «Социально-экономическая модернизация – главный вектор развития Казахстана» поставлена конкретная задача по развитию функциональной грамотности школьников. В связи с этим Постановлением Правительства Республики Казахстан утвержден Национальный план действий по развитию функциональной грамотности школьников. Настоящий план включает комплекс мероприятий по содержательному, учебно-методическому, материально-техническому обеспечению процесса развития функциональной грамотности школьников. Он призван обеспечить целенаправленность, целостность и системность действий по развитию функциональной грамотности школьников как ключевого ориентира для совершенствования качества образования Республики Казахстан.

Данная задача поставленная Президентом республики актуализируется в процессе вхождения Казахстана в числе 50 наиболее конкурентоспособных стран мира. В условиях решения этой стратегически важной для страны задачи главными функциональными качествами личности являются инициативность, способность творчески мыслить и находить нестандартные решения поставленной проблемы, умения выбирать профессиональный путь, готовность обучаться в течение всей жизни.

Известно, что понятие «функциональная грамотность» впервые появилось в конце 60-х годов прошлого века в документах ЮНЕСКО и позднее вошло в обиход исследователей. Функциональная грамотность в наиболее широком определении выступает как способ социальной ориентации личности, интегрирующий связь образования (в первую очередь общего) с многоплановой человеческой деятельностью. В современном, быстро меняющемся мире, функциональная грамотность становится одним из базовых факторов, способствующих активному участию людей в социальной, культурной, политической и экономической деятельности, а также обучению на протяжении всей жизни.

Передовой опыт казахстанских школ показывает, что на развитие функциональной грамотности учащихся влияют следующие факторы:

- содержание образования (национальные стандарты, учебные программы);
- формы и методы обучения;
- система диагностики и оценки учебных достижений обучающихся;
- программы внешкольного, дополнительного образования;
- модель управления школой (общественно-государственная форма высокий уровень автономии школ в регулировании учебного плана);
- наличие дружелюбной образовательной среды, основанной на принципах партнерства со всеми заинтересованными сторонами;
- активная роль родителей в процессе обучения и воспитания детей.

Результатом развития функциональной грамотности является овладение обучающимися системой ключевых компетенций, позволяющих молодым людям эффективно применять усвоенные знания в жизненной ситуации и успешно использовать в процессе социальной адаптации. Ключевые компетенции – это требование государства к качеству личности выпускника средней школы в виде результатов обучения. В Казахстане выделяются следующие ключевые компетенции выпускника средней школы:

- управленческие (способность к разрешению проблем);

- информационные (способность к самостоятельной познавательной деятельности или умение учиться на протяжении всей жизни);
- коммуникативные (способность к устной, письменной, продуктивной коммуникации на казахском, русском и английском (иностранном) языках);
- социальные (способность к социальному взаимодействию);
- личностные (способность к самоорганизации, самосовершенствованию, жизненному и профессиональному самоопределению, самореализации, быть толерантным);
- гражданские (способность нести ответственность за свою родину на основе казахстанского самосознания и культурной идентичности);
- технологические (способность к использованию технологий, в том числе научных, цифровых на уровне эффективного пользователя).

Кроме ключевых компетенций в рамках отдельных предметных областей выделяются предметные компетенции: освоенные специфические знания, умения, навыки в рамках учебного предмета. Например, по математике от учащихся требуется определять и понимать роль математики в мире, в котором он живет, математизировать предложенную ситуацию: узнать и извлечь из условия математическую часть, заключенную в предложенной информации, и использовать математику для решения проблемы, самостоятельно разработать, проанализировать и интерпретировать созданную математическую модель ситуации, разработать свой способ решения и его математическую аргументацию, включая необходимые доказательства и обобщения.

Ключевые и предметные компетенции как результаты образования должны быть конкретными, измеримыми, достижимыми, реалистичными и определенными по времени.

Для достижение поставленной задачи Президентом республики учебные программы будут с ориентированы на развитие функциональной грамотности школьников и достижение ключевых и предметных компетенций, а также будет обеспечен адекватный уровень автономии школ в регулировании учебного плана за счет определения оптимальной пропорции между инвариантной (обязательной) и вариативной (по выбору школы) частями плана. В дальнейшем учебные планы будут предусматривать выделение необходимого количества учебных часов для обучения чтению, математике и естественнонаучным предметам, чтобы на соответствующем уровне формировать читательскую, математическую, естественнонаучную грамотность (международные исследование PISA).

Обновление форм методов обучения будут обеспечиваться за счет трансляции инновационного опыта передовых учебных заведений в общеобразовательные школы республики и использования современных образовательных технологий, вызывающих у школьников интерес к учебе. Будут внедрены эффективные формы и методы обучения для того, чтобы сформировать основы логического, критического и конструктивного мышления, обеспечивающего успешность достижения образовательных результатов, умение применять полученные знания повседневной жизни.

Процесс развития функциональной грамотности школьников определяет внедрение новой системы оценки, учитывающей результативность всех видов учебной деятельности, процессуальную сторону усвоения учебного материала и проявление индивидуальных и личностных качеств. При этом внешняя оценка будут осуществляться по завершению каждого уровня на соответствие учебных достижений обучающихся заявленным результатам (единое национальное тестирование и др.), а также посредством участия в международных исследованиях (PISA, TIMSS и PIRLS). Участие в международных исследованиях обеспечат оценку динамики развития функциональной грамотности обучающегося, успешности школьников, учителей и школ, а также эффективность мероприятий по обновлению стандартов, учебных программ и учебников.

Международное исследование PISA утверждает, что на уровень функциональной грамотности школьников положительно влияет участие родителей в процессе обучение и развитие детей. Связи с этим в Казахстане разрабатывается методология повышения грамотности родителей, позволяющая им лучше узнать ребенка, увидеть его в разных ситуациях, помочь взрослым в понимании индивидуальных особенностей детей, развитии их способностей, формировании жизненных ценностных ориентиров, преодолении негативных поступков и проявлений в поведении.

Исходя из этого в настоящее время разрабатывается система мероприятий, направленных на активное включение родителей в жизнь школы: создание попечительский советов, ассоциаций родителей, родительских университетов. Данные общественные институты позволяет установить партнерские отношения с семьей каждого обучающегося, создать атмосферу взаимоподержки и общности интересов семьи и школы. При этом будет обеспечен адекватный уровень подотчетности школ и представления полный и открытой информации сообществу об учебных достижениях учащихся и деятельности школы.

В заключение отметим, что система образования Республики Казахстан в настоящее время принимает ряд действенных мер по обновлению содержания образования, созданию учебных программ, учебников, пересмотру программ повышения квалификации и переподготовки учителей, мониторингу способности учащихся применять полученные знания в жизненных ситуациях, а также обеспечить адекватные материально-технические, психолого-педагогические и технологические условия обучения учащихся.

Литература

1. Постановление Правительства Республики Казахстан от25 июня 2012 года №832 об утверждении Национального плана действий по развитию функциональной грамотности школьников на 2012-2016 годы – Астана, 11 июля, КазИнформ.

2. Методическое пособие «Профессиональная компетентность учителя по формированию функциональной грамотности учащихся» / Ж.А.Караев, Б.Баймуханов, Р.Б.Ахмедова – Алматы, 2013-204с.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ УСТРОЙСТВ СВЧ НА АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

И.А. Балыко

АО «НПП "Исток" им. Шокина», Московская область, Россия

e-mail: balyko1985@mail.ru

Аннотация: В статье описан метод проектирования устройств СВЧ на активных элементах (АЭ) со случайными параметрами, основанный на разбиении АЭ на группы и проектировании пассивных схем для каждой из них. Рассмотрен алгоритм решения однопараметрической задачи, основанный на методе динамического программирования.

Ключевые слова: случайные параметры, метод динамического программирования. распределение ограниченного ресурса.

STOCHASTIC TASK DESIGNING MICROWAVE DEVICTYS AKNIVE

Abstract: A method of designing microwave devices on active elements (AE) with random parameters, based on partition of AEs into clusters and design of passive circuits for each of them, is described. The algorithm of one – parameter task solution, based on dynamic programming method has been considered.

Keywords: random parameters, dynamic programming method, distributing restricted resource.

Твердотельное устройство, как правило, можно представить в виде сочленения полупроводникового активного элемента (АЭ) и пассивной электродинамической системы (ПЭДС), при этом каждый из этих узлов описывается ограниченным числом параметров. В процессе производства параметры АЭ изменяются от экземпляра к экземпляру случайным образом. Необходимо найти оптимальные параметры пассивной системы, чтобы при включении в устройство различных экземпляров АЭ разброс выходных характеристик устройства относительно требуемых значений был минимален. Одно из возможных решений этой задачи состоит в разбиении совокупности АЭ на группы и проектирования электродинамических систем для каждой такой группы.

В работе сформулированы принципы оптимального разбиения, приведены алгоритм решения задачи для общего случая и примеры конкретных расчетов.

Известно, что задачи стохастического программирования возникают в том случае, когда в математических моделях устройства (объекта) необходимо учитывать случайные факторы. Под математической моделью объекта обычно понимают конечные множества управляемых переменных (параметров) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и случайных факторов $y = (y^1, y^2, \ldots, y^l)$ вместе с математическими связями между ними и характеристиками устройства

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M)\varphi = \varphi(x, y),\ x \subset X,\ y \subset Y,$$

где X и Y — области возможных значений векторов x и y соответственно.

В подобных моделях функции ограничений $g_1(x, y),\ i = l \ldots M$, эквивалентные математическому описанию заданных требований на характеристики устройства, и критерий оптимизации $Q(x, y)$ — случайные величины, распределения которых при постоянных параметрах x определяются факторами y.

При заданном законе распределения $F(y)$ случайных величин y существует несколько возможных вариантов задач стохастического программирования, наиболее распространенной из них является усредненная задача: найти параметры x обеспечивающие

$$\min \int\limits_Y Q(x, y) dF(y) \tag{1}$$

при условии

$$\int\limits_Y g_i(x, y) dF(y) > 0, \quad \text{либо} \quad g_i(x, < y >) > 0, \quad i = 1 \ldots M; \tag{2}$$

где $< y >= ydF(y)$ — средние значения факторов.

Для ряда практических приложений минимальное значение критерия оптимальности (1) удается уменьшить путем разбиения области возможных значений факторов на парциальные области и определения векторов x для каждой такой области. Разобьем область Y на N попарно непересекающихся парциальных областей Y_k, так что $Y = \cup Y_k$. Для каждой области построим усеченное распределение факторов: $F_k(y) = F(y/y \subset Y_k) = F(y)/P_k$ при $y \subset Y_k$, $F_k(y) = 0$ при $y \not\subseteq Y_k$, где $P_k = \int\limits_{Y_k} dF(y)$ — вероятность присутствия y в области Y_k. Внутри k-той парциальной области определим следующие характеристики:

1) среднее значение

$$< y_k >= \int\limits_{Y_k} ydF_k(y);$$

2) математическое ожидание функций ограничений

$$< g_{k_i}(x_k, Y_k) >= \int\limits_{Y_k} g_i(x_k, y)dF_k(y);$$

3) математическое ожидание характеристик устройства

$$< \varphi_{k_i}(x_k, Y_k) >= \int\limits_{Y_k} \varphi_i(x_k, y)dF_k(y);$$

4) дисперсию характеристик устройства

$$< D_{k_i}(x_k, Y_k) >= \int\limits_{Y_k} [\varphi_i(x_k, y) - < \varphi_{k_i}(x_k, Y_k) >]^2 dF_k(y).$$

Здесь $x_k \subset X$ — вектор переменных, определенный для k-й области;

$$k = 1 \ldots N, \; i = 1 \ldots M.$$

В качестве критерия оптимальности выберем аддитивную функцию

$$Q(x_1, Y_1, \ldots x_N, Y_N) = \sum_{k=1}^{N} B_k Q_k(x_k, Y_k), \tag{3}$$

$Q_k(x_k, Y_k) = \sum\limits_{i=1}^{M} A_i D_{k_i}(x_k, Y_k)$, а B_k и A_i — весовые коэффициенты.

Задача оптимального разбиения области Y на парциальные области состоит в следующем: найти N переменных $x_k \subset X$ и границы l-мерных областей Y_k ($Y = \bigcup\limits_{k=1}^{N} Y_k$), для которых обеспечивается

$$\min Q(x_1, Y_1, \ldots x_N, Y_N) \tag{4}$$

при условии

$$< g_{k_i}(x_k, Y_k) >= 0, \; \text{либо } g_i(x_k, < y_k >) = 0, \; i = 1 \ldots M, \; k = 1 \ldots N. \tag{5}$$

Решение задачи (4), (5) достигается с помощью методов локальной оптимизации. При этом за начальные значения для границ областей Y_k можно выбрать координаты узлов сетки при равномерном разбиении конечной области изменения каждого фактора y^j $(j = 1 \dots I)$, а для начальных значений координат векторов x_k $(k = l \dots N)$ использовать решение задачи стохастического программирования (4), (5).

При решении конкретных задач часто из всей совокупности факторов можно выделить один, наиболее существенный, а остальные считать детерминированными величинами, равными своим средним значениям. В этом случае задача (4), (5) заметно упрощается и для широкого класса функций $\varphi(x, y)$ можно построить алгоритм ее решения, сравнительно простой и удобный при расчетах. Кроме того, в дальнейшем будем рассматривать математическую модель устройства с одной характеристикой $\varphi_1(x, y)$. Это предположение позволяет сделать наглядным построение алгоритма.

Для однофакторной модели устройства ($I = 1$; в дальнейшем индекс 1 у фактора y^1 опустим) разбиение одномерной области $Y = (a, b)$ означает деление отрезка (a, b) на парциальные интервалы $Y_k = (y_{k-1}, y_k)$, $k = 1 \dots N$, удовлетворяющие следующему условию:

$$a = y_0 < y_1 < \dots < y_{N-1} < y_N = b \tag{6}$$

Критерий оптимальности (3) и условия (5) принимают вид:

$$Q = \sum_{k=1}^{N} Q_k = \sum_{k=1}^{N} B_k D_{1k}(x_k, y_k, y_{k-1}),$$

$$D_{1k} = \int\limits_{y^{k-1}}^{y^k} [\varphi_{k_i}(x_k, y) - < \varphi_{k_i}(x_k, y_k, y_{k-1}) >]^2 dF_k(y); \tag{7}$$

$$< g_{k_1}(x_k, y_k, y_{k-1} >= \int\limits_{y^{k-1}}^{y^k} [\varphi_{k_1}(x_k, y) - < \varphi_{k_1} >] dF_k(y) = 0; \tag{8}$$

$$d_1(x_k, < y_k >) = \varphi_1(x_k, < y_k >) - < \varphi_{k_1} >= 0; \tag{9}$$

где $< y_k >= \int\limits_{y^{k-1}}^{y^k} y dF_k(y)$; а φ_{k_1} — требуемые значения характеристики устройства, в общем случае различные для парциальных интервалов; $k = 1 \dots N$.

Введем еще предположения относительно вида характеристик. Будем рассматривать только такие функции $\varphi(x, y)$, которые при произвольных значениях y_{k-1} и y_k допускают единственное решение уравнений (8) относительно переменных x_k, т.е. $x_k = \psi_k(y_k, y_{k-1}, \varphi_{k_1})$.

В этом случае дисперсии D_{k_1} зависят только от граничных точек k-го интервала (y_{k-1}, y_k) и задача (4), (5) сводится к следующей:

$$\sum_{k=1}^{N} Q_k(y_k, y_{k-1}) = \min, \tag{10}$$

где $Q_k = B_k D_{1k}(y_k, y_{k-1})$.

Задачи такого типа представляют собой обобщения задач распределения ограниченных ресурсов. Последние получаются из (10) при условии, что парциальные функции Q_k зависят от разности $\Delta_k = y_k - y_{k-1}$ или частного $d_k = y_k/y_{k-1}$ граничных точек k-го интервала. В первом случае в качестве k-го парциального ресурса α_k выступает длина отрезка $\alpha_k = \Delta_k > 0$, во втором — величина $\alpha_k = \ln(d_k) > 0$. При этом система неравенств (6) сводится к уравнению суммарного ресурса $\sum\limits_{k=1}^{N} = \alpha_{\sum}$, где $\alpha_{\sum} = b - a$ и $\alpha_{\sum} = \ln(b/a)$ для этих случаев. Решение задачи оптимального распределения ресурсов можно построить, используя принципы динамического программирования. С этой целью введем систему функций $h_j(y_j)$:

$$h_1(y_1) = Q_1(y_0, y_1); \quad y_0 = a, \tag{11}$$

$$h_j(y_j) = \min \sum_{k=1}^{N} Q_k(y_k, y_{k-1}), \tag{12}$$

$y_0 < y_1 < \ldots < y_{j-1} < y_j$, причем функция $h_N(y_N)$ является решением задачи (10).

В выражении (12) минимизация проводится по переменным $y_1, y_2, y_3 \ldots$

Поскольку для произвольных минимизируемых функций

$$\min H(y) = \min\{\min H(y)\}, \tag{13}$$

$y_0 < y_1 < \ldots < y_{j-1} < y_j \quad y_{j-2} < y_{j-1} < y_j \quad y_0 < y_1 < \ldots < y_{j-2} < y_{j-1}$ то из формул (12) и (13) получим функциональное уравнение динамического программирования $h_j(y_j) = \min\{h_{j-1}(y_{j-1}) + Q_j(y_{j-1}, y_k)\}. \quad j = 2 \ldots N$

$$y_{j-2} < y_{j-1} < y_j$$

Алгоритм решения сводится к последовательному вычислению функций h_j.

Поскольку из выражения (11) имеем $h_1(y_1) = Q_1(y_0, y_1)$, то решение задачи начинается с определения функции $h_2(y_2) = \min\{Q_1(y_0, y_1) + Q_2(y_1, y_2)\}$.

$$y_0 < y_1 < y_2$$

для всех значений y_2, лежащих внутри отрезка (a, b). Получившаяся при этом зависимость от y_2 оптимальной величины $y_{10}(y_2)$ запоминается.

На следующем этапе ищется функция $h_3(y_3) = \min\{h_2(y_2) + Q_3(y_2, y_3)\}$.

$$y_{10} < y_2 < y_3$$

и запоминается зависимость $y_{20}(y_3)$.

Аналогичная процедура повторяется до $j = N$. На этом последнем шаге получаются решение задачи (10) $h_N(y_N) = \min\{h_{N-1}(y_{N-1}) + Q_N(y_{N-1}, y_N)\}$.

$$y_{N-2,0} < y_{N-1} < y_N$$

и функция $y_{N-1,0}(y_N)$. Из равенства $y_N = b$ находим величину $y_{N-1,0}$, а затем и все предшествующие оптимальные значения границ интервалов вплоть y_1.

Несмотря на универсальный характер рассмотренного выше алгоритма, в ряде частных задач решение можно получить непосредственно.

Пример 1. *В технических приложениях характеристика устройства часто представима в виде $\varphi(x, y) = v(x)u(y)$. Тогда (8) сводится к следующему выражению:*

$$v(x_k) = \varphi_{1k} / \int\limits_{y_{k-1}}^{y_k} u(y) dF_k(y). \tag{14}$$

Подставляя эти соотношения в формулу (7), получаем выражения для парциальных функций

$$Q_k(y_{k-1}, y_k) = B_k(\varphi_{1k})^2 \int\limits_{y_{k-1}}^{y_k} [u(y)/U_k - 1]^2 dF_k(y). \tag{15}$$

$$U_k = \int\limits_{y_{k-1}}^{y_k} u(y) dF_k(y).$$

Для частного случая степенной функции $u(y) = y^p$ и равномерного распределения фактора y

$$f(y) = dF(y)/dy = \{1/(b-a), a < y < b;\ 0, y < a, y > b\}$$

решение задачи может быть найдено аналитически. Действительно, в результате несложных преобразований формулы (15) получаем

$$Q_k = B_k(\varphi_{1k})^2\{(p+1)^2/(2p+1)\,\mathrm{sh}(\alpha_k/2)\,\mathrm{sh}[(2p+1)\alpha_k/2]\,\mathrm{sh}^{-2}[(p+1)\alpha_k/2)] - 1\}, \tag{16}$$

где $\alpha_k = \ln(y_k/y_{k-1})$. Отметим, что выражение для Q_k при $p = 1/2$ и $p = -1$ можно определить из (16) предельным переходом.

Если $B_k = 1/N$ и $\varphi_{1k} = \varphi_0$ $(k = 1 \ldots N)$, то задача (10) с парциальными функциями (16) и условием $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k = \alpha_{\sum} = \ln(b/a)$ представляет собой задачу распределения ресурсов. Нетрудно убедиться, что функции $Q_k(\alpha_k)$ при произвольном $p < 0$ носят монотонный характер, поэтому оптимальным будет равномерное распределение ресурса, т. е. $\alpha_{k_0} = \alpha_{\sum}/N,\ k = 1 \ldots N$. Границы отрезков y_{k0} в этом случае являются членами геометрической прогрессии $y_{k0} = a(b/a)^{k/N}$. Величины параметров x_{k0}, соответствующие этому разбиению, находятся из решения уравнения (14) после предварительного преобразования их правых частей.

Заметим, что поскольку распределение $\alpha_i = \alpha_{\sum}$, $\alpha_k = 0$, $i = 1 \ldots N, k = 1 \ldots N,\ k \neq i$, по существу описывающее случай $N = 1$, не является оптимальным, то можно сделать вывод, что с ростом N минимальная величина критерия Q снижается.

Пример 2. *Рассмотрим следующую характеристику устройства*

$$\varphi(x, y) = [(y + x)/(y - x)]^n, \tag{17}$$

где n — целое, $n > 0$. Для равномерного распределения фактора y и условия $\varphi_{1k} = \varphi_0$, $k = 1 \ldots N$, используя разложение (17) по степеням $2x/(y - x)$, преобразуем выражения (7) и (8) к следующему виду:

$$< g_{k1}(x_k, y_k, y_{k-1}) >= \sum_{i=0}^{n} C_i^n (w_k)^i q_i(r_k) - \varphi_0 = 0, \tag{18}$$

$$D_{1k} = \sum_{i=0}^{2n} C_i^{2n} (w_k)^i q_i(r_k) - \varphi_0^2 = 0. \tag{19}$$

Здесь

$$r_k = \ln[(y_k - x_k)/(y_{k-1}\breve{}x_k)], \tag{20}$$

$$w_k = 2x_k/(y_k\breve{}y_{k-1}),$$

$$q_i(r_k) = 2^i \operatorname{sh}^{i-1}(r_k/2)\operatorname{sh}[r_k(i-1)/2]/(i\breve{}1), \quad q_1 = r_k. \tag{21}$$

Формулы (20) и (21) позволяют получить соотношение

$$k = \ln(y_k/y_{k-1}) = \ln[(w_k+1)\operatorname{sh}(r_k/2) + \operatorname{ch}(r_k/2)] - \ln[(w_k-1)\operatorname{sh}(r_k/2) + \operatorname{ch}(r_k/2)].$$

Фактически мы опять пришли к задаче распределения ресурсов. Действительно, подставляя решение уравнения $w_k = w(r_k)$ в формулу (18) можно в принципе определить зависимость $r_k = r(\alpha_k)$. При этом выражение для дисперсии будет зависеть только от переменной α_k, но $\sum\limits_{k=1}^{N} = \alpha_k = \alpha_{\sum}$.

В частном случае при $n = 1$ решение уравнения (18) имеет вид $w_k = w(r_k) = (\varphi_0\breve{}1)/r_k$, а поскольку при этом $\alpha_k = \alpha(r_k)$ представляет собой монотонную функцию, то имеется единственное решение $r_k = \alpha^{-1}(\alpha_k)$. Кроме того, дисперсия $D_{1k} = (\varphi_0\breve{}1)^2[\operatorname{sh}^2(r_k/2)/(r_k/2)^2\breve{}1]$ также монотонно изменяется с ростом r_k. Все это позволяет сделать вывод, что оптимальное распределение ресурса $\alpha_{\sum}$ будет равномерным, т.е. $\alpha_{k0} = \alpha_{\sum}/N,\ k = 1\ldots N,\ y_{k0} = a(b/a)^{k/N}$. При $B_k = 1/N$ приходим к следующему выражению для оптимальной величины критерия: $Q_0 = (\varphi_0\breve{}1)^2[\operatorname{sh}^2(r_0/2)/(r_0/2)^2\breve{}1]$, где r_0 определяется из решения уравнения

$$\alpha_{\sum}/N = \ln[((\varphi_0\breve{}1)/r_0 + 1)\operatorname{sh}(r_0/2) + \operatorname{ch}(r_0/2)]\breve{}\ln[((\varphi_0\breve{}1)/r_0 - 1)\operatorname{sh}(r_0/2) + \operatorname{ch}(r_0/2)].$$

Сформулирован принцип оптимального разбиения элементов при решении задач стохастического программирования. Рассмотрен алгоритм решения однофакторной задачи с помощью метода динамического программирования. Показано, что для ряда примеров задача сводится к проблеме распределения ограниченных ресурсов.

ОБЛАЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В РАБОТЕ СОВРЕМЕННОГО ПЕДАГОГА

О.Б. Голубев

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

e-mail: oleg_golubev@mail.ru

Аннотация: В данной статье описываются перспективы использования облачных технологий в учебном процессе, приводится описание учебного курса «Облачные технологии», направленного на знакомство с широким спектром «web-сервисов».

Ключевые слова: облачные технологии, веб-сервисы, дистанционные образовательные технологии, электронное обучение.

CLOUD TECHNOLOGIES IN THE MODERN TEACHER

Abstract: This article describes the prospects for the use of cloud technologies in the learning process, a description of the course «cloud technology» aimed to explore the wide range of «web-services».

Keywords: cloud computing, web services, distance education technologies, e-learning.

Современные педагогические потребности диктуют актуальность применения информационных технологий в системе образования. Сегодня требуется у учащихся сформировать навыки самостоятельной учебной деятельности, творческого и исследовательского подхода в обучении, сформировать критическое мышление. В век информации знания сами по себе перестают быть самоцелью, они становятся условием для успешной реализации личности, ее профессиональной деятельности.

В новом законе «Об образовании» сказано, что «при реализации образовательных программ используются различные образовательные технологии, в том числе дистанционные образовательные технологии и электронное обучение»[1].

Также в законе разъясняются понятия: дистанционные образовательные технологии и электронное обучение. «Под электронным обучением понимается организация образовательной деятельности с применением содержащихся в базах данных и используемой при реализации образовательных программ информации и обеспечивающих ее обработку информационных технологий, технических средств, а также информационно-телекомуникационных сетей, обеспечивающих по линиям связи указанной информации, взаимодействие учащихся и педагогических работников».

Дистанционные образовательные технологии - это «образовательные технологии, реализуемые в основном с применением информационно-телекомуникационных сетей на расстоянии взаимодействия учащихся и педагогических работников».

Электронное обучение может проходить исключительно в школе и не иметь никакого отношения к дистанционным технологиям. Отличительной чертой дистанционных образовательных технологий является удаленность ученика от школы и наличие связи с использованием информационно-телекоммуникационных сетей.

При реализации дистанционного обучения нельзя не вспомнить об облачных технологиях, которым еще только предстоит сыграть свою роль в отечественной системе образования.

Зачатки теории облачных вычислений были сформулированы в 1950-х годах американским ученым в области вычислительной техники Гербертом Грошем, начавшим карьеру в 1935 году. Также облачные вычисления связаны с именами выдающихся американских информатиков Джона Маккарти и Джозефа Ликлайдера. Джон Маккарти – основоположник теории искусственного интеллекта, разработчик языка Лисп, основатель функционального программирования. Джозеф Ликлайдер – один из основоположников сети Интернет.

Термин cloud computing (облачные вычисления) стал широко использоваться в начале 21 века, впервые он прозвучал в 2006 году в выступлении главы Google Эрика Шмидта. После этого термин стали часто использовать в средствам массовой информации и научных публикациях. Также популярность термину принесла компания Amazon после запуска проекта Elastic Compute Cloud.

Только в начале 21 века теория облачных вычислений нашла практическое воплощение и более того имеет хорошие перспективы в будущем. Облачные сервисы – это сервисы будущего, они постепенно избавляют от необходимости использовать жесткий диск. Возможность редактирования файлов из любого места, где есть доступ к сети Интернет, существенно пошатнет важность стационарных хранилищ. Стирание границ между разными компьютерными устройствами станет в ближайшее время главной задачей IT-индустрии.

Под облачными технологиями будем понимать такую форму обработки данных, при которой компьютерные ресурсы (область на жестком диске, программное обеспечение) предоставляются пользователю как Интернет-сервис. Преимущества использования облачных технологий очевидны: снижение затрат связанных с приобретением программного обеспечения (фактически мы загружаем программное обеспечение из сети Интернет), экономия дискового пространства за счет размещения данных на удаленных серверах, снижение требований к мощности ПК, повышение мобильности работы (мы можем редактировать файлы в удобном месте в удобное для нас время, главное, чтобы был доступ к сети Интернет) [2]. Конечно, появляются некоторые проблемы связанные с зависимостью сохранности пользовательских данных от компаний, которые предоставляют услуги cloud computing. Появляются вопросы: достаточно ли надежно защищены данные в облаке? Нет ли вероятности того, что сам владелец Интернет-сервиса решит воспользоваться нашими данными? Конечно, в эпоху сети Интернет многие вопросы, связанные с информационной безопасностью стоят очень остро и справедливо.

Сегодня с облачными технологиями пользователи сети Интернет работают практически каждый день. «Облака» используют либо для хранения данных, либо при работе с онлайн-приложениями.

Использование облачных технологий в обучении математике вызывается следующими причинами:

1. Возможностью проведения непрерывного мониторинга качества полученных знаний.

2. Повышением мотивации обучающихся при использовании облачных сервисов.

3. Возможностью создания информационной образовательной среды для формирования самостоятельной познавательной деятельности обучаемых.

4. Мобильными возможностями облачных технологий.

Пилотный курс «Облачные технологии» был реализован преподавателями кафедры информационных технологий и методики преподавания информатики Вологодского государственного университета на профильной смене «Интернешка» в детском оздоровительном лагере «Лесная сказка» Вологодской области.

Курс направлен на знакомство с широким спектром «web-сервисов». Сегодня у взрослого человека есть возможность пользоваться большим количеством веб-сервисов – это услуги, предоставляемые порталами электронного правительства; услуги электронных банков; покупка авио- и железнодорожных билетов; передача сведений через сеть Интернет о коммунальных услугах и др. Не всегда хватает опыта и знаний пользоваться этими web-сервисами, поэтому подготовительную работу необходимо вести еще со школы.

Курс «Облачные технологии» - один из характеристических элементов проекта Профильная смена «Интернешка» (таблица 1).

Главной целью было показать детям, что Интернет это не только игры, почта и социальные сервисы, но и мощный вычислительный ресурс, который способен полноценно заменить почти любое настольное и нативное приложение. В рамках курса «Облачные технологии» мы учили детей пользовать глобальной сетью Интернет правильно, эффективно и безопасно [3].

Таблица 1. Учебно-тематическое планирование курса «Облачные технологии»

№ п.п.	Тема	Объем, ч.	Лк., ч.	Пр., ч.
1.	Введение в облачные технологии. Основные понятия, области применения. Классификация.	1	1	0
2.	Обработка графики с помощью облачных приложений: фото-фильтры, редакторы растровой графики, редакторы векторной графики, нестандартные подходы к обработке графической информации.	3	0	3
3.	Создание нелинейных презентаций с помощью интернет-приложений.	3	1	2
4.	Децентрализованное управление контентом через сервисы коллективного гипертекста.	2	0	2
5.	Сервисы для организации групповой работы (виртуальные доски, виртуальные рабочие столы, органайзеры, информеры, планировщики, интеллектуальны карты)	2	0	2
6.	Дополнительные облачные сервисы (скринкасты, тесты, опросники, карты, ленты времени и т.д.).	1	0	1
7.	Облачные сервисы для изучения основ алгоритмизации и программирования	2	0	2
Всего:		14	2	12

Благодаря «облачным» сервисам ученик получает богатую палитру современных инновационных высокопроизводительных программных инструментов для обработки текста, графики, звука, видео, для организации коллективной работы над исследовательскими проектами, для подготовки и участия в творческих конкурсах и т.д.

Для реализации курса можно использовать компьютеры (ноутбуки) под управлением операционных систем семейства Windows/Linux/Mac OS, браузер (рекомендуемым является Google Chrome) с актуальной версией Flash Player. Предварительно для каждого ученика должен быть создан почтовый ящик в сервисе gmail.com.

Использование облачных технологий повышает доступность и практическую направленность образовательного процесса. Для многих платных приложений уже сегодня существуют бесплатные и полнофункциональные облачные аналоги. Дополнительный плюс их использования в учебном процессе является возможность хранения исходных, промежуточных и конечных материалов в облаке, что значительно повышает мобильность участников учебного процесса.

Литература

1. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.edu.ru/abitur/act.34/index.php (дата обращения 20.02.2015).

2. Голубев О.Б., Никифоров О.Ю. Использование облачных сервисов при обучении информатике. В сборнике: «Системные стратегии: наука, образование, информационные технологии». - Вологодский государственный педагогический университет. Вологда, 2013. - С. 44-47.

3. Голубев О.Б., Никифоров О.Ю., Павлова Т.А. Профильная смена «Интернешка» // Народное образование.- 2014.- №2.- С. 195-199.

ПРИНУДИТЕЛЬНОСТЬ ДИДАКТИКИ СИСТЕМНО-ИНФОРМАЦИОННОЙ КУЛЬТУРЫ: ЕДИНСТВО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО И УНИВЕРСАЛЬНОГО ОБУЧЕНИЙ

В.И. Громыко[1], А.Б. Будак[2], Н.С. Васильев[3], В.П. Казарян[4], А.Г. Симакин[5], С.С. Аносов[6]

[1]*МГУ им. М.В. Ломоносова, фак. ВМиК, каф. АЯ, Москва, Россия*
[2]*МГУ им. М.В. Ломоносова, фак. ВМиК, каф. ОМ, Москва, Россия*
[3]*МГТУ им. Н.Э. Баумана, фак. фундамент. наук, каф. ФН1, Москва, Россия*
[4]*МГУ им. М.В Ломоносова, фак.философский, каф. ФЕФ, Москва, Россия*
[5]*РУДН, фак. гуманитарных и социальных наук, каф. ОТП, Москва, Россия*
[6]*Банк «Возрождение»*

e-mail: [1]gromyko.vladimir@gmail.com, [2]abbudak@cs.msu.ru, [3]nik8519@yandex.ru, [4]kazaryanvp@mail.ru, [5]modus-as@mail.ru, [6]SAnosov@cs.msu.su

Аннотация: В результате проведенного анализа инфосферы выяснено, что прежнее гуманитарное воззрение субъекта требует системного естественнонаучного предвидения с опорой на математику. В эпоху системно-информационной культуры традиционное обучение должно быть дополнено универсальной подготовкой учащихся, выявляющей объективные смыслы знаний. Образование должно поддержать когногенез с помощью использования новой рациональной модели обучения и свойственной ей дидактики открытия. Предложена технология формирования у субъекта личностной смысловой среды самоорганизации сознания, наследующей целостность образовательного пространства третьего мира. Поставлена основная задача обучения – развитие второго, естественнонаучного сознания у учащегося. Стратегией самопознания является освоение системного аксиоматического метода и научного языка категорий. Приведены примеры системной работы с учебным материалом.

Ключевые слова: ОБРАЗОВАНИЕ: образовательная модель; ПОЗНАНИЕ: аксиоматический метод; УЧАЩИЙСЯ: системно-информационная культура, межпредметная деятельность, универсальное обучение, сознание; ДИДАКТИКА: привыкания, открытия смысла; ЗНАНИЕ: третий мир, образовательное пространство; ТЕХНОЛОГИЯ: общая алгебра, алгебраические системы, метаматематика, язык категорий, база данных, база знаний, абстрактный тип данных, объектно-ориентрованное программирование; РЕАЛИЗАЦИЯ: интеллектуальное компьютерное место учащегося, интеллектуальная обучающая система, онтологическая база знаний.

COMPULSORY DIDACTIC OF SYSTEM INFORMATIONAL CULTURE: UNITY OF PROFESSIONAL AND UNIVERSAL TUTORING

Abstract: System informational culture analysis shows that education system needs new forms and methods of learning to use. Volume and sophistication of scientific knowledge are constantly growing. Subjects of the culture are busy with inter discipline activity so that they feel the need of super discipline system knowledge. Traditional tutoring which is professional one can't cope with challenge of the time. It must be supplemented by universal tutoring aimed at the student's consciousness broadening up to the natural science one. Universal education model based on universal tutoring is proposed. The whole third world becomes student's educational space. New tutoring didactic is theory sense discovery one. Student's natural science consciousness self organization occurs through self discovery in respect of category language. It is mean of the sense scientific objectivization used by system axiomatic method. Consciousness intelligence technology is worked out. On the base of many discipline electronic library student's personal intelligence environment is formed. Super computer intellectual tutoring system helps student adaptively to overcome his difficulties. It must be done during every learning seance. Universal tutoring approach is incarnated in intellectual reality of abstract types of data, data bases, object oriented programming, knowledge bases. In the surroundings system informational culture's continuous tutoring launches out. There are examples of mathematical system work.

Keywords: EDUCATION: educational model, rational education; COGNITION: system axiomatic method; STUDENT: system informational culture, traditional tutoring, universal tutoring, consciousness; KNOWLEDGE: third world, educational space, cognogenes; DIDACTIC: used to, sense discovery; TECHNOLOGY: algebraic systems, category language, abstract type of data, object oriented programming, knowledge base; REALIZATION: intellectual tutoring system, ontological knowledge bases, many discipline electronic library.

Без ... помощи мы склонны скатываться к ... инстинктивным понятийным схемам... Цель образования (на удивление неуловимый принцип...) – компенсировать недостатки наших инстинктивных способов мыслить о...мире. С. Пинкер.

ВВЕДЕНИЕ. В нобелевской лекции Б. Рассел отметил, что «...главное, в чем нуждается мир, мечтающий о счастье, так это в интеллекте. А это, в итоге, оптимистический вывод, ... интеллект может обогащаться ...». В статье разъясняется технология формирования естественнонаучного сознания учащегося, необходимая для обучения в эпоху системно-информационной культуры. Каждый субъект «живет» в чрезвычайно сложном третьем мире знаний, являющемся итогом познания рода, «доступном» для изучения в среде Интернета. Это образовательное пространство нуждается в осмыслении, возможном лишь при наличии универсальной подготовки на базе математической деятельности. Традиционное преподавание не справляется с запросом времени и поэтому нуждается в реформе. Востребованы общие пропедевтические курсы, поддерживающие процесс непрерывного образования за счет повышения уровня концептуальности знаний, служащей прояснению смыслов теорий. Ввиду необходимости развития учащегося (из-за сложности научного математического знания) универсальное образование в полной мере становится возможным лишь при условии, что в процессе преподавания будет применяться суперкомпьютерная интеллектуальная обучающая система (ИОС). В столь сложной работе только ИОС под силу оперативно оказывать адаптивную помощь учащемуся. Инструментальные системы позволят сформировать и поддерживать личностное пространство смыслов субъекта в форме персональной онтологической базы знаний, взаимодействующей с междисциплинарной электронной библиотекой.

Возникшая системно-информационная культура бросает вызов системе образования – обеспечить свободу развития всех субъектов культуры. Действующая традиционная гуманитарная модель обучения (см. рис. 1) не ставит задачи развития личности, а ограничивается лишь профессиональной подготовкой учащегося. Поэтому она не состоятельна для общества знания. Это вынуждает проводить исследования, целью которых является разработка новых моделей и технологий обучения. Так, например, в проекте [1] предпринята модификация ныне действующей гуманитарной модели обучения (рис. 1) применительно к новым условиям.

По мнению авторов статьи, системно-информационная культура нуждается в новой рациональной универсальной модели обучения (рис. 2), нацеленной на развитие мышления учащегося. Так как опознание смыслов культуры происходит посредством «интеллектуального прорыва», то новой дидактикой обучения становится дидактика открытия [2], а не прежняя дидактика «привыкания к знанию». Предлагаемый подход и технология развития сознания у учащегося соответствует повседневной практике использования системных инструментов. Универсальное обучение поддержано двойственной технологией – объектно-ориентированным программированием, абстрактными типами данных и базами знаний. Предлагаемая инновация [2] может быть озаглавлена как «Дидактика открытия: через формы к точно выразимым смыслам».

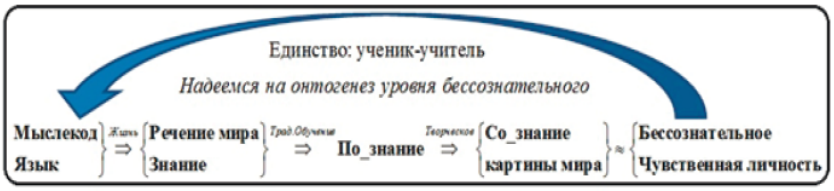


Рис. 1. Гуманитарная модель обучения (ГМО)

Универсальная модель обучения (УМО). Настало время, когда при системной работе уже нельзя ограничиваться лишь общим восприятием смыслов культуры (подход [1]), а требуется их точно представлять на языке категорий, используя системный аксиоматический метод (подход авторов [2]).

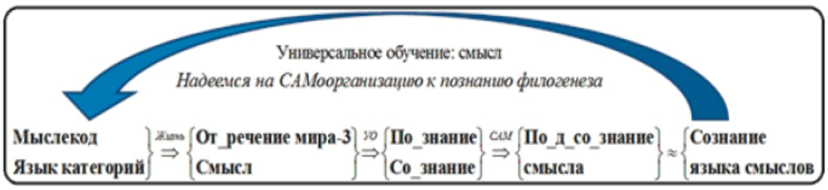


Рис. 2. Универсальная модель обучения (УМО)

Задачей первостепенной важности является развитие естественнонаучного сознания учащегося. Доступ к знаниям третьего мира с помощью «умных» машин и Интернета породил системно-информационную культуру. Социум откликнулся запросом на ***специалиста***, способного к экспансии в ***междисциплинарные области*** через ***деятельность со знанием*** в инструментальных системах. Проблема получения ***надпредметного знания*** требует разрешения в связи с растущим объемом и сложностью образовательного пространства субъекта культуры. Традиционное обучение нуждается в расширении – добавлении универсальной подготовки. Опознание смыслов становится важнее восприятия знаний. Когда обучение становится непрерывным, а учебный материал – межпредметным, образование должно обеспечить универсальную адаптивность учащегося. Требуется такая реформа, в которой следует проявить и явно обеспечить предвосхищение учащегося – переход от общекультурного воззрения к ***естественнонаучному мировоззрению***. Общекультурная роль обучения кончилась. Учащемуся приходится ***жить в науке***. Обучение должно стимулировать ***самопознание*** и самоорганизацию сознания учащегося. Поэтому универсальная модель обучения (рис.2) содержит **Модель учащегося** (рис.3). Авторами предложена технология обучения [2], которая учитывает пребывание учащегося в реалиях мира системной деятельности (рис.3). Субъекта культуры следует приобщить к точному протоколу смыслов для личностного познания на уровне поиска-открытия смысла знания (см. рис.2,3), а не на уровне знания-использования результата, как это происходит при традиционном обучении (см. рис.1).

1 РАЦИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ. Гуманитарное знание организовано рационально в теориях языка, мифа, религии, искусства, науки [3]. Гуманитарная модель обучения реализует право на культурное воззрение и профессиональную пригодность. Системно-информационная культура перманентно внедряет рациональное мировоззрение, системную деятельность, существование в междисциплинарной среде, синтез предметов в инструментальных системах. Универсальное образование (рис.2) вводит работающих со знанием субъектов в рациональный мир. Модель универсального обучения – это генезис объективизации рода, расширяемой за счет рационального развития индивида ряда.

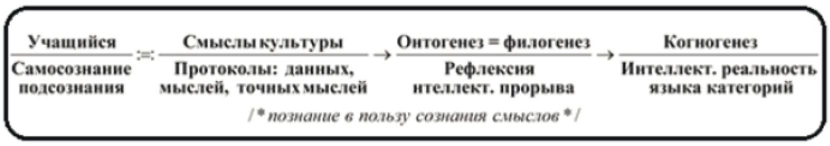


Рис. 3. Модель учащегося системно-информационной культуры

Например, в МГУ им. М.В. Ломоносова осуществляется интеграция образовательного пространства межфакультетскими учебными курсами. На факультете ВМК действует программа техносфера, нацеленная на изучение современных инструментальных систем компьютера. Забота о синтезе знаний уже проявляется повсюду. Студенты-математики изучают общую алгебру и дискретный анализ. В гуманитарном университете РГГУ преподается курс «Алгебраические методы в информатике» [4]. В техническом университете МГТУ им. Н.Э. Баумана изучают системный анализ, а лабораторными практикумами объединяют работу студентов разных курсов. Информатика взята в качестве базового курса высшей школы [5] для того, чтобы «сделать каждого настолько осведомленным в дискретных операциях, насколько знакомы с непрерывными операциями все, изучающие анализ». В курс [5] следовало бы добавить языки спецификаций, необходимые для рациональной объективизации системно-информационной культуры.

2 ТРАДИЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ является предметным и происходит в соответствии с гуманитарной моделью (рис.1). Оно сложилось при взаимодействии с наукой. Сначала, с помощью анализа, профессиональные исследования «добывали» объективное содержание предметов, а затем полученные результаты использовались для быстрого освоения рациональных дисциплин. Поэтому в учебных курсах преобладают алгоритмическое и алгебраическое представления материала, способствующие его освоению, а определяющими чертами традиционного обучения являются предметность и узкая профессиональная направленность. Традиционное образование основано на дидактике «привыкания» по Успенскому: понять – значит привыкнуть. Отсюда «повторение – мать учения» и учащийся не должен ошибаться. Упрощенный подход к обучению удобен социуму: «не можешь – научим, не хочешь – заставим». Не случайно, что в традиционной гуманитарной модели обучения (см. рис.1) используется понятие «творчества», означающего наличие у учащегося сформированных синтезирующих связей с третьим миром знаний, которые в конкретных предметах проявляются на уровне общего бессознательного восприятия.

Имеется весьма слабая надежда на понимание наукоёмких дисциплин лишь за счет творческого начала человека. Без помощи со стороны либо преподавателя, либо компьютерной ИОС не обойтись. Кроме того, в эпоху системно-информационной культуры мировоззренческое значение образования также не должно оставаться на втором плане. В этом проявляется неэффективность традиционного обучения. Учащийся не приобретает представлений о смыслах, не предвидит и не опознает их, не развивает свое мышление. Это в XIX веке отмечал ещё великий ирландский математик У. Гамильтон. В итоге, социум сталкивается с неизбежным: специалист либо очень хорош, либо очень плох и даже «опасен». С другой стороны, традиционная дидактика обучения (привыкнуть к предмету) гуманна. В ней признается беспомощность учащегося в отношении фундаментальных синтезирующих смыслов. Уже хорошо, если он отличает истину ото лжи, знаемое от незнаемого, понимаемое от непонимаемого.

3 УНИВЕРСАЛЬНОЕ ОБУЧЕНИЕ отвечает за формирование системного сознания в соответствии с рациональной моделью УМО (см. рис.2). Универсальная модель УМО сразу предлагает вносить ясность представлений. При опознании смыслов следует опираться на системный аксиоматический метод, а не надеяться на творческое «озарение». Специальность познается в границах гуманитарного восприятия жизни. Для успешной междисциплинарной деятельности посредством универсального обучения должно происходить дополнительное надпредметное опознание смыслов. Универсальное обучение – следствие ***бифуркации*** образования в новой эпохе, завершившей общекультурную роль обучения. Бифуркация характеризуется деятельностью в динамике системно-информационной культуры и имеет социальные проявления – непрерывность образования и новое бытие индивида – ***жизнь в науке***.

С помощью Интернета сложившаяся объективизация культуры позволяет строить опознание учащегося на уровне метасмысла – ***второго сознания***, т.е. знания о познании. Естественнонаучная объективизация вынуждает к саморазвитию субъекта на базе познанного родом. Позитивная дидактика смысла по Колмогорову опередила время, оповестив о достигнутом состоянии математического знания, при котором стало возможным постижение предельных системных абстракций. Речь идет об аксиоматизации теорий, метаматематике, универсальной алгебре. Прояснение смысла равносильно открытию. Поэтому универсальной модели обучения отвечает дидактика открытия и сопутствующее развитие мышления у учащегося посредством интеллектуального прорыва. Смыслы открывают моделированием предметных областей с помощью системного аксиоматического метода и сравнением результатов на языке категорий. Поэтому каждый субъект культуры вынужден освоить системный аксиоматический метод и его главный инструмент – язык категорий [6-8].

Информатика распространяет на всех субъектов системно-информационной культуры конструктивное дело моделирования. Языки программирования и спецификаций, абстрактные типы данных, объектно-ориентированное программирование, базы данных, базы знаний добавляют символическую реальность предельных идеализаций к абстрактной математической реальности. Объективизация мысли нуждается в развитии ***познавательной естественнонаучной функции*** [3] на основе языка категорий [6-8].

4 СИСТЕМНО-ИНФОРМАЦИОННАЯ КУЛЬТУРА достигла впечатляющего единства знаний, предъявленных третьим миром документов [9]. Наблюдается постоянный рост объективного научного знания [10]. Базы знаний включают историю идей – проблемы, предположения и опровержения, содержат концептуальную упаковку теорий. Традиционная научная и учебная литература продолжила своё существование в системной форме междисциплинарных электронных библиотек. Однако мышление субъектов остается несостоятельным для познавательной деятельности в третьем мире. Гуманитарные языки уже исчерпали свою продуктивность и не дают символической формы теорий, выраженных научными математическими языками сравнений.

Проблема объективизации мысли достигла предела – онтология уже верифицирует эпистемологию. Анализ познания рода по Канту-Кассиреру свелся к формированию системного сознания ряда инфосферы. Проверка состоятельности культуры происходит при когногенезе – состоянии-процессе эволюционирующего человека, который наблюдается в наступившей эпохе знания. Персональный рост научного знания содействует экспансии мышления на основе волевой деятельности, цели поведения, критического сознания для системной самоорганизации. Субъекту системно-информационной культуры следует перейти от самопознания к построению подсознания. Его мыслекод нуждается в языке смыслов (см. рис.2). Дидактика открытия нацелена на приобщение учащегося к смыслам, познанным родом. Саморазвитие и метаорганизация сознания сохранят «живое чувство целого» по Гёте и «единство духа» – энтелехию по Аристотелю.

Для эффективности когногенеза традиционные учебные материалы должны быть преобразованы в личностное надпредметное образовательное пространство, допускающее их адаптивное использование. В рамках традиционной модели обучения этому способствуют пропедевтические материалы, которые уже входят в практику преподавания [11]. Кроме того, подготовлена системная форма познанного родом – междисциплинарная электронная библиотека.

5 ЯЗЫК КАТЕГОРИЙ выделен в качестве цели и средства технологии обучения, развивающей естественнонаучное сознание учащегося. На этом пути решается проблема приобретения системной грамотности для деятельности в эпоху системно-информационной культуры.

Во-первых, в языке категорий зафиксирована зрелость рациональных средств описания и сравнения теорий. Язык категорий занимает верхнюю позицию в иерархии средств математической дескрипции: геометрия – алгебра – метаматематика – общая алгебра – алгебраические системы – универсальная алгебра. Он позволяет развить аксиоматический метод до системного уровня.

Во-вторых, язык категорий даёт вторую грамотность, вынуждающую учащегося соответствовать рациональным средствам объективизации: ЦЕЛОСТНОСТЬ представлений определяет базовые СМЫСЛЫ. Как средству развития системного аксиоматического метода языку категорий надлежит стать субстанцией мыслекода для деятельности со смыслами (см. рис.2,3). Поэтому языку категорий отводится роль метауровня обучения, на котором происходит объективизация сознания субъекта, формирующая его подсознание.

В-третьих, в двойственном мире практических инструментов системная математическая дескрипция уже нашла конструктивное воплощение. Это – языки программирования и спецификаций, абстрактные типы данных, объектно-ориентированное программирование, базы данных и знаний. Вынужденный действовать надпредметно, субъект «обречен» говорить на языке категорий. В системно-информационной культуре возникло единство «слова и дела» как новая субстанция интеллектуальной реальности. С помощью естественного (гуманитарного) языка субъект приобщается к объективному содержанию мысли. Язык категорий делает доступной объективность смысла. Настало время перехода от гуманитарного воззрения к научному опознанию предметных областей.

В-четвертых, трансцендентность проблемы «единства духа» обрела реальность инварианта, который надлежит поддержать в процессе самоорганизации учащегося в процессе самопознания своих ограничений (осознания невежества). Обучению следует копировать способ освоения естественного языка, открытого родом как необходимого продуктивного средства мышления. Изучая язык, субъект преследует «идеал еще необретенного знания» (Сократ). Итак, объективизация сознания субъекта достигается за счет системной грамотности подсознания. Языку категорий надлежит стать субстанцией мыслекода для естественнонаучной деятельности со смыслами. Главный мотив учащегося века инноваций – «будь рационалистом, добивайся невозможного – возможного соответствия САМ».

В-пятых, формированию интеллектуальной реальности языка категорий способствуют произошедшие переходы в рациональном знании. Развитие математики происходилопо следующим направлениям: от числа – к символу и языкам программирования; от алгебраизации – к аксиоматизации, языкам спецификаций и абстрактным типам данных; от идеализации – к конструктивной формализации и объектно-ориентированному программированию, включающему механизмы наследования свойств и методов, базам данных и знаний, инструментальным системам. В этой возможности предвидения состоят значение дидактики смысла и возможность открытия.

По мере развития математических теорий совершенствовался аксиоматический метод, прежде всего, за счет уточнения средств описания смыслов. Эволюции аксиоматического метода сопутствует возрастающая строгость теорий, представленных «рациональными протоколами». Выделим три уровня аксиоматического метода, применяющиеся по мере «взросления» теорий. Это – наивный, современный и системный аксиоматический методы.

Наивный аксиоматический метод (НАМ) связывает научные понятия с реалиями окружающего физического мира, обосновывает результаты только исследуемой теории. Этим методом Евклид провел аксиоматизацию геометрии. ***Современный*** аксиоматический метод (АМ) добавляет строгость описания отношений между объектами, предоставляет точные средства вывода теорем, служит анализу открытой системы аксиом. Реальностью АМ являются математические абстракции. Примером подобной деятельности служат «Основания геометрии» Д. Гильберта. В этой монографии исследованы вопросы непротиворечивости и независимости системы аксиом, построены различные виды геометрий, в том числе, неархимедовы.

Аксиоматическим методом получен ряд фундаментальных идей: канторовский диагональный процесс, гёделизация и карризация алгоритмов, разрешимые множества и т.д. Эти средства оказали большое влияние на математическое мышление. В ***системном*** аксиоматическом методе (САМ) аксиомы предметных областей выражаются на языке категорий, предназначенном для сравнения теорий. САМ затрагивает уровень онтогенеза познания, придаёт научную строгость объективизации и «обнажает» смыслы.

Приведем примеры системной работы в соответствии с универсальной моделью обучения и дидактикой открытия. Сравним точность представления математического знания в зависимости от уровня аксиоматического метода.

Пример 1. В алгебре натуральных чисел $N = \langle\{0,1,...\}|0,+,\times,\uparrow\rangle$ справедливы следующие **факты**: (1) $(2+3)=5$; (2) $2^n > n$; (3) основная теорема арифметики.

Объективизация понятия вполне упорядоченности множества натуральных чисел N была проведена Лейбницем, Пуанкаре и Генкиным. Сравним их подходы.

Факт 1. *Доказать справедливость равенства* $(2+3)=5$ (Пуанкаре [13]).

Доказательство Лейбница относится к технологии приобщения учащегося к объективному знанию, не выходя за границы изучаемого предмета. Оно сводится к проверке *результата*. Изложение этого подхода проведем на современном языке.

Определяется свободная алгебра $N = \langle\{0,1,...\}|0,s\rangle$, причём по определению $1 = 0s, 2 = 1s, 3 = 2s, \ldots, "n+1" = ns, \ldots$. Затем сигнатура алгебры расширяется операцией сложения элементов, объективизирующей сдвиги на произвольную «величину» m всех элементов n:

$$N = \langle\{0,1,...\}|0,s,+\rangle; \quad \begin{cases} n+ms = ns+m, \\ n+0 = n = 0+n. \end{cases}$$

Симметричность равенств в определении операции сложения обеспечивает конверсию – редукцию суммы в обе стороны, приводящую к решению обсуждаемой задачи одним из следующих способов:

$$(2+3) \to 3+2 \to 4+1 \to 5+0 \to 5;$$

$$5 \leftarrow 0+5 \leftarrow 1+4 \leftarrow (2+3).$$

Для обоснования равенства (1) Лейбниц воспользовался наивным аксиоматическим методом, для которого характерно решение конкретной арифметической задачи. При аксиоматизации арифметики Лейбницем была введена символическая запись, а в рассуждениях использована построенная алгебра. Профессиональная ориентированность этой «технологии» ограничивает возможность обобщения получаемого результата и приводит к «тирании» предмета. Если бы Лейбницу потребовалось определить операцию умножения, то ему пришлось бы искать надлежащую аксиоматическую «настройку» на очередную арифметическую реальность: величину m взять n раз. По пути алгебраизации пошло традиционное обучение, при котором объяснение результатов доминирует над выявлением онтогенетического значения теории. Это лишает учащегося мировоззренческой оценки предмета.

В доказательстве Пуанкаре используется строение алгебры N. Сложение определяется индуктивно (или сверху-вниз – рекурсивно) в свободной алгебре $N = \langle \{0, 0s, ...\} | 0, s \rangle$:

$$\begin{cases} n + ms = ns + m, \\ n + 0 = n = 0 + n, \end{cases} \qquad \text{где} \quad n = 0s^n, \ x = 0s^x.$$

В частности, для факта (1) получаем $(2+3) = 2s + 2 = 2s^2 + 1 = 2s^3 + 0 = 2s^3 = 5$. Проведенное рассуждение следует рассматривать как развитие НАМ в направлении АМ. В своих рассуждениях Пуанкаре не акцентирует внимание читателя на том, что проблема смысла сведена к вопросу строения модели арифметики Пеано.

В полной мере применение аксиоматического метода возможно из-за категоричности теории, тогда возможно выделить единственную модель. Для точного описания этих характеризующих аксиом используем язык прикладного исчисления предикатов. Формирование теоретико-множественных моделей уже стало онтогенетически естественным. «Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор»(Д.Гильберт). Последовательно строим нужную модель.

(i) $0 \in \mathfrak{M}$;

(ii) $(xs \neq ys) \Rightarrow x \neq y)$;

(iii) $(0 \neq xs)$;

(iv) $(x \neq y) \Rightarrow (xs \neq ys)$;

(v) $\mathfrak{M}$ состоит только из элементов, порожденных 0.

Согласно приведенным аксиомам имеем: $N \subseteq \mathfrak{M}$, операция следования $s : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M} \backslash \{0\}$ является инъективной функцией. Приведем примеры алгебр с одной операцией s, в которых не выполняются те или иные аксиомы. В модели $M1$ отображениями $[2 \to 3 \to \ldots, 0 \to 0, 1 \to 0]$ определим функцию s. Тогда не выполнена аксиома (iii). В модели $M2$, $s : [2 \to 3 \to \ldots, 0 \to a, 1 \to a, a \to a]$, аксиома (iii) справедлива, но не имеет место аксиома (iv). В модели $M3$ выберем носитель алгебры $N' = N \cup \{a\}$ и положим $as = a$, где дополнительный элемент $a \notin N$. Тогда не выполнена лишь аксиома индукции (v).

Рекурсивные определения позволяют в алгебре $N = \langle \{0, 0s, ...\} | 0, s, + \rangle$ вводить производные операции, в иерархии которых умножение определяется посредством сложения:

$$\begin{cases} n \times xs = n \times x + n, \\ n \times 0 = 0, \end{cases} \qquad \text{где} \quad n = 0s^n, \ x = 0s^x.$$

Таким образом, умножению придали объективный смысл:

$$(2 \times 3) = \begin{pmatrix} s & s \\ s & s \\ s & s \end{pmatrix}; \quad (3 \times 2) = \begin{pmatrix} s & s & s \\ s & s & s \end{pmatrix}.$$

Несомненна сложность предъявления свободной алгебры $N = \langle\{0, 0s, ...\}|0, s\rangle$. Она выделяется из однотипных алгебр через выписывание характеристических свойств. Но интеллектуальная реальность находит опору в символьной реальности конструирования свободной алгебры. Из-за сложности аксиомы индукции вынужденно привлекается естественный язык. Для ее записи требуется язык исчисления предикатов второго порядка. При существовании в надпредметности точные языки логики необходимы, но и сложны для восприятия. Например, приведенная ниже аксиома, «просеивающая» модели до единственной пеановской, служит серьезным тестом в отношении понимания АМ и языка исчисления предикатов:

(v) $(\forall P)[P(0) \wedge (\forall x)(P(x) \to P(xs)) \Rightarrow (\forall y)P(y)]$.

Заметим, что подходы Лейбница и Пуанкаре далеки в отношении «увидеть» факт 2. Оба подхода далеки от использования современного аксиоматического метода, применяемого Генкиным [14].

Факт 2. *Доказать справедливость неравенства* $2^n > n$.

Неравенство может естественно наблюдаться после анализа индуктивного описания посредством АМ. «Взросление» учащегося состоит в толковании операции как наследника отображения, а отображения – как средства сравнения. Тогда достигается анализ симметрий вполне упорядоченного множества N, которые обусловливают фундаментальное значение натуральных чисел.

Рассмотрим свободную алгебру Пеано $N = \langle\{0, 1, ...\}|0, s\rangle$, фиксирующую вполне упорядоченность. Построим алгебру-наследник $N = \langle\{0, 1, ...\}|0, s, +, \times, \uparrow, \upuparrows, \ldots\rangle$. Двуместные операции $\langle +, \times, \uparrow, \upuparrows, \ldots\rangle$ представляются множеством одноместных операций с параметром $\langle {}_n{+} = (\lambda x)nx+,\ {}_n{\times} = (\lambda x)nx\times,\ {}_n{\uparrow} = (\lambda x)nx\uparrow,\ {}_n{\upuparrows} = (\lambda x)nx\upuparrows, \ldots\rangle$. Одноместная операция это отображение (эндоморфизм), отражающее свойство симметрии. Диаграммы позволяют естественно «наблюдать» эти операции.

1) морфизм ${}_n{+}$: $\langle 0, s\rangle \to \langle 0_n, s\rangle$, $0_n = 0s^n$ выявляет симметрию сдвига сначала на шаг n, затем на шаг 1. В диаграмме $\left({}_n{+}\colon\ \bullet \begin{array}{cccc} \xrightarrow{0} & N & \xrightarrow{s} & N \\ & \downarrow & & \downarrow \\ \xrightarrow{0_n} & N & \xrightarrow{s} & N \end{array} \right)$ «наблюдаются» действия $0s^x({}_n{+}) = 0({}_n{+})s^x = 0s^n s^x$. Примеры: $0 \to n, \ldots, n \to n \times 2$. Сложение отражает законы сдвигов: $(n + m) = (m + n)$, $(n + m) + p = n + (m + p)$.

2) морфизм ${}_n{\times}$: $\langle 0, s\rangle \to \langle 0, {}_n{+}\rangle$ «упаковывает» сложение, используя значения с шагом n. В диаграмме $\left({}_n{\times}\colon\ \bullet \begin{array}{cccc} \xrightarrow{0} & N & \xrightarrow{s} & N \\ & \downarrow & & \downarrow \\ \xrightarrow{0} & N & \xrightarrow{n+} & N \end{array} \right)$ «наблюдаются» действия $0s^x({}_n{\times}) = 0({}_n{\times})({}_n{+})^x = 0({}_n{+})^x = 0s^n({}_n{+})^{(x-1)} = 0s^n s^n({}_n{+})^{(x-2)} = \ldots = 0s^{n\times x}$. Примеры: $0 \to 0, 1 \to n, 2 \to n \times 2, \ldots, n \to n \times n = n^2, \ldots, n^2 \to n^3$. Умножение отражает законы сдвигов: $(n \times m) = (m \times n)$, $(n \times m) \times p = n \times (m \times p)$.

3) морфизм ${}_n{\uparrow}$: $\langle 0, s\rangle \to \langle 1, {}_n{\times}\rangle$ «упаковывает» умножение, используя значения с шагом $n^k(n-1)$. В диаграмме $\left({}_n{\uparrow}\colon\ \bullet \begin{array}{cccc} \xrightarrow{0} & N & \xrightarrow{s} & N \\ & \downarrow & & \downarrow \\ \xrightarrow{1} & N & \xrightarrow{n\times} & N \end{array} \right)$ «наблюдаются» действия $0s^x({}_n{\uparrow}) = 0({}_n{\upuparrows})({}_n{\times})^x = 1({}_n{\times})^x = 0s^n({}_n{\times})^{(x-1)} = 0s^{n\times n}({}_n{\times})^{(x-2)} = \ldots = 0s^{(n^x)}$. Примеры: $0 \to 1, 1 \to n, 2 \to n^2, \ldots, n \to n^n, \ldots, n^n \to n^{(n^n)}$.

4) морфизм ${}_n\upuparrows = (\lambda x)nx\upuparrows$ «упаковывает» степень и т.д. Формируется башня функций, упорядоченная по их возрастанию.

В условиях анализа свойства симметрии и наблюдения за возрастанием функций, факт $2^n > n$ становится типа «вижу». Это похоже на платоновское «смотри», применяемое при работе с геометрическими рисунками. Если понадобится доказательство, то учащийся может вскрыть суть различия в росте заданных функций.

$$\begin{cases} 2^n = (1+1)\dots(1+1) = \begin{cases} (1+x_1)\dots(1+x_n) > \sum x_i + a = (n+a) > n, \\ x_i = 1. \end{cases} \\ n \geq 1. \end{cases}$$

Это обоснование естественней доказательства, использующего бином Ньютона:

$$(1+1)^n = [1 + \frac{n}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} + \dots] > n$$

.

Башня операций усложняет следующую операцию, упаковывая предыдущую посредством суперпозиции. Возникает опознание, предвидение близости этих понятий к фундаментальному вопросу теории алгоритмов – что можно вычислить. В действительности, необходимо увеличить мерность рекурсии от 1 до 2. Тогда сможем определить универсальную функцию Аккермана $A(k,x)$ для башни операций (морфизмов) $\langle {}_n+,\ {}_n\times,\ {}_n\uparrow,\ {}_n\upuparrows, \dots \rangle$ при значении параметра $n = 2$. Итак,

$$\begin{cases} A(0,x) = xs^2, \\ A(ns,0) = \operatorname{sign} n, \\ A(ns,xs) = A(n, A(ns,x)). \end{cases}$$

Канторовским процессом получаем диагональную функцию Аккермана $A(x,x)$, растущую быстрее любой примитивно рекурсивной. Заметим, что изучение факта 2 сразу вывело на «исторический» путь становления теории рекурсивных функций.

Обсуждение факта 2 в полной мере не достигло уровня САМ, т.к. построенные морфизмы не применяются для сравнения алгебр или алгебраических систем. Сделаем это. Отметим системное характеристическое свойство алгебры Пеано – свободная алгебра с единственным гомоморфизмом $N \to A$, где A – любая однотипная (с той же сигнатурой) алгебра.

Аксиоматический метод формирует средства исследования ЦЕЛОГО объекта, а не только его частей, продвигая учащегося от изучения результатов теории к процессу построения всей теории. Достижения АМ убеждают в том, что:

- учащийся, как пользователь инструментальных систем, нуждается в точном выражении базовых рациональных СМЫСЛов;

- математика предоставила фундаментальные средства объективизации мира;

- сложные для онтогенеза *плодотворные* понятия стали *ясными* за счет фундаментальности представления о целом объекте.

Эти тезисы созвучны мыслям: А. Пуанкаре о том, что «на многое способен разум, преодолевший тиранию внешнего мира» [13]; и Д. Гильберта «...для математического ума не поставлены никакие границы...он в состоянии проследить законы собственного мышления...мы всегда можем ответить на вопросы, имеющие смысл».

Выводы для обучения. Настало время заменить простоту восприятия научного знания принуждением к аксиоматическому методу. Мыслекоду субъекта предоставляются новые мировоззренческие возможности, связанные с экспансией в межпредметную деятельность. Позиция авторов допускает парафразу: в системно-информационной культуре стало возможным продвижение субъекта к смысловой ясности и к гармонии бытия.

6 ДИДАКТИКА ОТКРЫТИЯ не свойственна традиционному обучению: гуманитарная модель образования занята формированием личности для профессиональной деятельности. «Творческое» восприятие ограничивает перспективу развития учащегося: достаточно соответствовать изучаемой теории. Универсальная модель обучения нацелена на формирование смыслов, т.к. жизнь в системном мире строится на основе рациональной объективизации. Это соответствует метафизическому представлению о динамике развития человека – переходу от homo sapiens к homo faber sapiens – к умелому творцу культуры. Культурная инкарнация субъекта обеспечивается распространением на него продвинутых форм объективизации знания рода на базе личностного роста научного знания ряда. Рациональное образование невозможно без стимулирования процесса самоорганизации за счет исследования собственных возможностей. Смыслы проявляются в мире моделирования, превращаясь в интеллектуальную реальность.

Это отвечает следующим положениям марбургского неокантианства. Во-первых, едина собственная природа человека, в которой созерцание и понятие, форма и содержание предмета, идеальное и реальное изначально одно и то же. Во-вторых, теоретические формы математики и математического естествознания совпадают с «категориями естественного восприятия мира» (Кант, [3]). Поэтому модель УМО занята приобщением учащегося к открытию смысла того, «что делается» при решении задач. Ввиду сложности концептуального взросления субъекта, она исходит из необходимости и естественности интеллектуальных прорывов сознания к абстракциям, ставшими объективными реальностями. Поэтому нужно позаботиться об устойчивости сознания учащегося в условиях его несоответствия естественнонаучному знанию.

Структура естественнонаучного знания третьего мира и дидактика открытия подготовили познавательную среду метаоткрытия, в которой открытому родом языку отводится определяющая мировоззренческая роль:

- язык (конотат) – инстинктивная и продуктивная способность субъекта, предназначенная для формирования смысла;
- мыслекод учащегося оснащается языком категорий – средством дескрипции смысла для движения к предельным математическим абстракциям;
- самосознание субъекта расширяет его подсознание за счет научного знания.

В продолжение примера 1 обсудим процесс самоорганизации сознания учащегося.

Факт 3. *Основная теорема арифметики.*

В курсах алгебры [17, 18] изложены фундаментальные математические структуры, в частности, гауссовы, евклидовы и дедекиндовы кольца. Предъявление фактов 1 и 2 стимулируют учащегося разобраться с фактом 3, естественно воспринимая целостность арифметики. Рассмотрим подходы.

1) В алгебре Пеано должно обнаружить выполнение аксиомы Архимеда и доказать свойство деления $n = mq + r,\ 0 \leq r < m$. Обучая традиционно, с помощью наибольшего общего делитель (n, m), не сообщают об аксиоме Архимеда. Например, это так в учебнике «Основы теории чисел» И.М. Виноградова.

2) Пользуясь вложением алгебры N в алгебру рациональных чисел Q и используя неравенство $(\forall n, m)(\exists q)|\frac{n}{m} - q| < 1$, можно проверить свойство деления целых чисел с остатком. Так поступает Л.А. Калужнин в цикле популярных лекций по математике в работе «Основная теорема арифметики».

3) Для объяснения факта 3 представляется более важным обнаружить кольцо, не обладающее единственностью разложения на простые множители. Например, кольцо четных чисел – $60 = 2 \times (2 \times 3 \times 5) = (2 \times 3) \times (2 \times 5)$, или кольцо комплексных чисел вида $(n, m\sqrt{5})$, где n, m-целые, – $6 = 2 \times 3 = (1, \sqrt{5}) \times (1, -\sqrt{5})$.

Заметна профессиональная ориентированность книг, упомянутых в подходах 1), 2). Следуя второму из этих курсов, удается полностью исключить аксиому Архимеда из поля зрения учащегося!

Пример 2. Имеющимися средства описания сравним с языком категорий, чтобы подчеркнуть его эффективность для восприятия учащимся.

2.1 *Описание отношения эквивалентности* ρ.

(i) $a\rho a,\ (a\rho b) \Rightarrow (b\rho a),\ (a\rho b) \wedge (b\rho c) \Rightarrow (a\rho c)$ /**аксиоматизация**/;

(ii) $\tau \subseteq \rho,\ \rho^{-1} \subseteq \rho,\ \rho^2 \subseteq \rho$; равносильное описание $\tau \subseteq \rho,\ \rho^{-1} = \rho,\ \rho^2 = \rho$ /**вложение в алгебру отношений**/;

(iii) $a\rho b$ равнообразны при **отображении** $A \xrightarrow{\varphi} B$ /**вложение в категорию**/.

Проанализируем уровни применяемого аксиоматического метода:

(i) дано необходимое описание разбиения на классы, отвечающее НАМ; предложено достаточное (характеристическое) описание уровня АМ;

(ii) построена алгебраическая модель уровня АМ; дело «строительства» особенно заметно, если исследовать равносильность двух описаний;

(iii) сделано продвижение к уровню САМ; для этого следует рассмотреть категорию множеств с морфизмом-отображением; тогда разбиения на классы воспринимаются с точностью до покрытия.

2.2 *Описание отношения порядка* $\leq$.

(i) $a \leq a,\ (a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow (a = b),\ (a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$ /**аксиоматизация**/;

(ii) $\tau \subseteq (\leq),\ (\leq \cap \leq^{-1}) \subseteq \tau,\ (\leq^2) \subseteq (\leq)$; равносильное описание $\tau \subseteq (\leq),\ (\leq \cap \leq^{-1}) = \tau,\ (\leq^2) = (\leq)$ /**вложение в алгебру отношений**/;

(iii) порядок – это скелетальная **категория предпорядка** (имеется не более одной стрелки отображения между объектами) /**вложение в категорию*/.

Аксиома антисимметричности в пункте (i) не описывает равенство, а использует его. В языке категорий равенство является частным случаем изоморфизма. Определяется наследник категории предпорядка (рефлексивное и транзитивное свойства). Скелетальность означает, что изоморфные объекты имеют единственное представление. Например, предпорядок трех элементов при требовании скелетальности «отбраковывается» в пользу конструкции частичного порядка двух элементов.

R – поле упорядоченное полное
(*но не как вещественно алгебраически замкнутое по Артину*):
+ *расширение на* **аналитическую геометрию**,
для которой можем привлекать **линейную алгебру**;
+**анализ** – *поле* (метрическое, *не топологическое*) *со сходимостью*;
+**функциональный анализ**(*гильбертово и нормированное пространство*);
+дискретный анализ (**конкретная математика** *по Кнуту*) *и*:
+ вычисление в программировании;
+ конструирование в инструментальных системах.

Рис. 4. Базовый курс математики

7 ТЕХНОЛОГИЯ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО СОЗНАНИЯ.

Системно-информационная культура обязывает делать ставку на интеллект ряда, развивая ***познавательную функцию на базе языка категорий***. Это обеспечит рациональную деятельность в мире знаний и сложных систем. Поэтому универсальное обучение рассматривается как **ТЕХНОЛОГИЯ СОЗНАНИЯ** [2]. На факультете ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова проводятся исследования в рамках соответствующего проекта «Интеллектуальное компьютерное место учащегося» (ИКМУ) [12]. Цель проекта – организовать эффективное обучение студентов за счет синтеза традиционного и универсального обучения. Для этого требуется сформировать надпредметное образовательное пространство смыслов (НОП), охватывающее весь цикл обучения учащегося. НОП строится в виде онтологической базы знаний, доступной для адаптивного использования с помощью интеллектуальной обучающей системы.

Пространство смыслов учащегося готовится на базе традиционного материала. Тогда базовый курс математики становится представленным с концептуальной точки зрения (рис.4,5). На рис.4 изображена традиционная предметная область. Для освоения межпредметной деятельности необходимо расширение базового курса (рис.5). Приобщение учащегося к САМ и языку категорий, как интеллектуальной реальности, происходит посредством НОП, в котором уже зафиксированы все этапы «взросления» рационального знания [19]. На рис.6 представлено НОП из примера 1.

С помощью языка категорий и аксиоматического метода возможно предъявление НОП с учетом произошедших изменений в рациональном знании. АМ формирует в сознании у учащегося главенствующую роль дела – конструирования модели. Аксиоматическое описание представляет собой индуктивное или концептуальное исчисление. Понять СМЫСЛ – дело учащегося, связанное с его приобщением к объективизации третьего мира. Смысл для учащегося, как формирующегося субъекта культуры, – это:

- личностная объективизация **<u>познания</u>** рода как *единства индуктивного и концептуального*, естественно и принудительно сформированных в филогенезе;

- деятельность по *самоорганизации мышления* для *преодоления* онтогенетического несоответствия познаниям рода; формирование **сознания** *интеллектуальным прорывом* к очевидности и филогенетической естественности познания;
- приобщение к языку категорий для жизни в науке; формирование **подсознания** нп базе САМ.

R – поле упорядоченное полное (*классическое*);
– поле упорядоченное архимедово (*по Гильберту*);
– поле вещественно алгебраически замкнутое (*по Артину*);
– локально компактное связное топологическое тело (*по Понтрягину*).
Линейные алгебры и алгебры.
Анализ –(*по Ньютону*);
– нестандартный (*по Лейбницу*);
– элементарный (*по Тарскому*);
– дискретный (*по Скотту*).
От числа к символу:
– универсальные алгебры и примитивные классы.
От алгебраизации к аксиоматизации;
– основные понятия алгебры;
– структуры;
– алгебраические системы.
От идеальных абстракций (*что*) *к* **реальности функции и отношения** (*как*)
– язык категорий.
Вычислимость.
Абстрактный тип данных и инструменты геометрии.

Рис. 5. Базовый курс математики эпохи систем

Алгебра Пеано. $\mathfrak{A} = \{\langle o, s\rangle | (a1)\ o \neq xs;\ (a2)\ (x \neq y) \Rightarrow (xs \neq ys);\ (a3)\ !!!\}$.
(a3.i) те и только те; / * *смысл конструктивистов* * /
(a3.ii) единственная подалгебра; / * *смысл алгебраический* * /
(a3.iii) $(\forall P)\,(oP \wedge (\forall x)\, xP \Rightarrow xsP) \Rightarrow (\forall x) xP$; / * *смысл традиционный* * /
(a3.iv) индукционная алгебра; / * *смысл аксиоматический, морфизм* * /
(a3.v) свободная алгебра : *единственный гомоморфизм на однотипную*; / * *смысл системный* * /
(a3.vi) натурально-числовой объект (НЧО, NNO). (a1 – a3) / * *смысл категорный* * /
Натуральные числа как кольцо *среди обобщений* : *гауссово, евклидово, дедекиндово кольца.*
Теоремы выразимости *Биркгофа, Мальцева, Геделя.* / * *смысл описания* * /
Формальная арифметика. / * *смысл метаматематический* * /

Рис. 6. Пространство смыслов алгебры Пеано

На учащегося может быть распространен филогенетический путь объективизации: знание-познание-сознание-подсознание. Этому пути соответствует развитие аксиоматического метода математики от НАМ к АМ-САМ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Образовательное пространство учащегося становится смысловым с помощью языка категорий и системного аксиоматического метода. Интеллектуальная реальность СМЫСЛов достижима. Традиционное обучение филогенетически предъявляет идеальные конструкции. Универсальное обучение онтогенетически превращает их в реальные образы. Трансцендентные факты заменяются трансцендентальными представлениями на основе инварианта обучения, связанного с опознанием смыслов. Это делается на «царском» пути приобщения к аксиоматическому методу. Мыслекод действует на уровне подсознания. Способности к мышлению развиваются с помощью необходимой свободы самоорганизации. Создавая среду саморазвития учащегося, рациональное обучение ведет к гуманизации образования.

«Взаимодействие индивида и культуры рассматривается преимущественно с точки зрения индивида ... безнадежная "трагедия культуры" превращается во вполне оптимистическую драму» [15]. Рациональная модель обучения (рис.2,3) решает проблему универсального развития человека и дает:

- ***представление смысла жизни*** человека, существующего в условиях синтеза гуманитарного переживания и рационального восприятия сложности системно-информационной культуры;
- эволюцию социума от инфосферы к ***ноосфере***, используя знания рода;
- ***включение деятельного разума*** человека ***в информационную сеть жизни*** на основе **когногенеза**.

Универсальное обучение является наследником проверенного веками традиционного обучения. Проведенное авторами исследование относится к приоритетному направлению «Стратегические информационные технологии при производстве кадров XXI века», выделенном ректором МГУ В.А. Садовничего в докладе «Современная университетская идея и будущее Московского университета».

Литература

1. Афанасьев Ю.Н. Через формы к смыслам. О новой университетской образовательной модели. М.: РГГУ, 2006, 228с.

2. Громыко В.И., Казарян В.П., Васильев Н.С., Симакин А.Г., Аносов С.С. Рациональное образование как технология сознания. // Сложные системы.Междисциплинарный научный журнал. М.: Приятная Компания, № 3(8). 2013. С. 87-108.

3. Кассирер Э. Философия символических форм. Феноменология познания. // М., Спб.: Университетская книга. 2002. Т. 1-3.

4. Бениаминов Е.М., Ефимова Е.А. Основы алгебры. Элементы универсальной алгебры и ее приложений в информатике. М.: РГГУ, 2001, 92с.

5. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир, 1998, 704с.

6. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир, 1983, 488с.

7. Плоткин Б.И. Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. М.: Наука, 1991, 448с.

8. Маклейн С. Категории для работающего математика. М.: Физ.-мат. лит, 2004, 352с.

9. Поппер К.Р. Объективное знание. Эволюционный подход. // М.: УРСС. 2002, 381с.

10. Кэмпбелл Д.Т. Эволюционная эпистемология. // Сб. Эволюционная эпистемология и логика социальных наук. М.: УРСС. 2000. С. 92-146.

11. Босс В. Лекции по математике. Т.1-15. М.: УРСС, 2003-2011.

12. Громыко В.И., Аносов С.С., Ельцин А.В., Леонов М.И. Обучение в системно-информационной культуре – на пути реализации. // Программные системы и инструменты. Тематический сборник, выпуск 11. М.: МГУ ВМК, 2010.

13. Пуанкаре А. О науке. Наука и гипотеза. М.: Наука, 1983, 560с.

14. Генкин Л. О математической индукции. М.: Физ.-мат. лит., 1962, 36с.

15. Кравченко А.А. Логика гуманитарных наук Э. Кассирера. Кассирер и Гёте. М.: Диалог-МГУ, 1999, 336с.

16. Пинкер С. Субстанция мышления. Язык как окно в человеческую природу. М.: УРСС: Книжный дом «Либроком», 2013, 560с.

17. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1976, 648с.

18. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Физ.-мат. лит., 1962, 396с.

19. Громыко В.И., Казарян В.П., Васильев Н.С., Симакин А.Г., Аносов С.С. Задача обучения в системной культуре – формирование сред (инструментов) существования учащегося для становления сознания на смыслах образовательного пространства. Труды XV Международной научной конференции «Цивилизация знаний». М.: РосНОУ, 2014, т.1, с.106-115.

ДИСТАНЦИОННЫЙ КОМПОНЕНТ В МАТЕМАТИКО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ МАГИСТЕРСКИХ ПРОГРАММАХ

С.П. Грушевский[1], Н.В. Андрафанова[2], Н.Ю. Добровольская[3]

Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

e-mail: [1]spg@kubsu.ru, [2]nat_drofa@mail.ru, [3]dnu10@mail.ru

Аннотация: В статье рассматривается вопрос об использовании дистанционного компонента в математико-педагогических магистерских программах с целью эффективной организации учебного процесса и формирования профессиональных компетенций магистра.

Ключевые слова: дистанционное обучение, подготовка магистров математики.

DISTANCE COMPONENT IN MATHEMATICAL AND PEDAGOGICAL MASTER'S PROGRAMS

Abstract: The article discusses the use of distance component in mathematical and pedagogical master's programs for the effective organization of the educational process and the formation of professional competences of the master.

Keywords: distance learning, master of mathematics.

Реализация математико-педагогических магистерских программ в рамках направлений “Математика” и ”Математика и компьютерные науки” предполагает широкое использование в учебном процессе современных компьютерных технологий, в том числе и дистанционных. Возможность использования ИКТ в магистерских программах объясняется тем, что в ходе предыдущего обучения студенты приобрели навыки, необходимые для организации эффективной аудиторной работы. Целесообразность внедрения дистанционного компонента в магистерскую программу определяется наличием большого объема часов самостоятельной работы, отводимых для дисциплин специализации, исследовательских проектов и производственной практики.

Актуальность использования дистанционных технологий обуславливается также и тем обстоятельством, что большинство магистрантов совмещают обучение в магистратуре с работой, а, следовательно, необходимы дополнительные возможности для организации самостоятельной работы: индивидуальных консультаций по изучаемым дисциплинам, индивидуального темпа обучения.

Использование дистанционного компонента в подготовке магистров позволяет.

1. Возможность выбора индивидуальной траектории обучения, так как учебно-методические комплексы дисциплин доступны магистранту в любое время.

2. Возможность выбора индивидуального темпа изучения учебно-методических материалов без отрыва от производства, на территории, наиболее подходящей магистранту. Здесь существует только одно ограничение – возможность доступа к среде передачи информации.

3. Разнообразие средств и способов дистанционного обучения. При дистанционном обучении благодаря применению информационно-коммуникационных технологий у магистранта появляется возможность самостоятельно выбрать форму и способ представления изучаемых учебных материалов (текст, презентация, видеозанятие и др.).

4. Получение дополнительных знаний о современных информационных технологиях. Магистрантам, использующим в обучении дистанционный компонент, приходится иметь дело с новейшими технологиями представления и обработки информации. Поэтому им необходимо осваивать эти технологии, получая дополнительные навыки и умения, которые значительно повышают общеобразовательный и технологический уровень магистранта.

Использование дистанционных технологий в математико-педагогических магистерских программах имеет особое значение в связи с тем, что магистранты получают возможность освоения методов разработки и приобретение практических навыков применения дистанционных технологий в учебном процессе, освоения современных технологий обучения математики и информатики и т.д. [1]

Программа подготовки магистров математики любого направления базируется на компетенциях, приобретенных студентами в процессе обучения по бакалаврской программе. К таким компетенциям относится ряд IT-компетенций, позволяющих подготовить квалифицированных пользователей программного, в том числе и математического, обеспечения [2, 3]. Умение быстро находить, анализировать и грамотно обрабатывать научно-техническую и естественнонаучную информацию, владение методами математического и алгоритмического моделирования, знание базовых информационно-коммуникационных технологий и умение применять их на практике позволяет магистрантам эффективно использовать дистанционный компонент в процессе обучения.

Учебно-методический комплекс для реализации дистанционной технологии обучения в математико-педагогических магистерских программах должен иметь следующую структуру.

Блок теоретического материала. Этот блок включает в себя программу дисциплины (учебного курса), методические указания по изучению дисциплины (учебного курса), учебное пособие, разнообразные компьютерные формы представления материалов лекций, семинаров, перечень вопросов для подготовки к экзаменам, список научной и учебной литературы.

Блок практических и лабораторных заданий. Этот блок представлен заданиями для практических и лабораторных занятий, методическими указаниями по их проведению.

Блок тестирования. Включает тесты различного уровня, позволяющие оценивать знания магистрантов.

Для реализации дистанционного компонента кроме наличия современного учебно-методического комплекса по дисциплине необходимо наличие коммуникационного обеспечения и качественная подготовка кадрового педагогического персонала, реализующего магистерскую программу.

Рассматривая цикл дисциплин подготовки магистров по направлению 010100 «Математика» и 010200 “Математика и компьютерные науки” можно отметить, что и дисциплины общенаучного цикла, и дисциплины профессионального цикла могут включать в себя дистанционный компонент. В набор учебных материалов любой дисциплины профессионального цикла входят задания, которые следует выполнять с помощью информационно-коммуникационных технологий. Сюда относятся расчетные задания, выполняемые в математических пакетах и пакетах статистической обработки данных (MathCAD, MatLab, Maple, Mathematica, Statistica, Excel); программирование web-ресурсов образовательного назначения (HTML, PHP); задания, связанные с проектированием и наполнением компьютерных учебно-информационных комплексов; изучение технологий защиты информации; ознакомление с методами информатизации управления образованием; технологии конструирования учебных ресурсов с использованием мультимедийных комплексов. Подобные учебно-методические материалы предоставляются как непосредственно на лекционных и лабораторных занятиях, так и трансформируются в дистанционную форму.

Одной из дисциплин магистерской программы является дисциплина «Теория и практика дистанционного обучения». В рамках этого учебного курса выполняются задания по конструированию дистанционных модулей, содержащих разнообразные учебные материалы, в том числе и других дисциплин. Тем самым магистранты формируют необходимые профессиональные компетенции в области технологии дистанционного обучения, а база учебно-методических материалов дистанционного компонента пополняется новыми модулями.

Таким образом, использование дистанционного компонента при реализации математико-педагогических магистерских программ обусловлена не только важностью использования современных компьютерных технологий для эффективной организации учебного процесса, но и необходимостью формирования профессиональных компетенций магистра в области теории и практики использования информационных технологий, в том числе и дистанционных, в математическом и педагогическим образовании.

Литература

1. Грушевский С.П., Андрафанова Н.В. О математико-педагогических магистерских программах. Известия Алтайского государственного университета, 2-2(78), 2013.

2. Грушевский С.П., Добровольская Н.Ю. Проектирование профессионально-педагогической подготовки студентов математических направлений на основе технологий формирования их IT-компетенций. Известия Алтайского государственного университета, 2-2(78), 2013.

3. Грушевский С.П., Добровольская Н.Ю. Курс "Информационные технологии в науке и образовании" в процессе формирования профессионально-педагогических компетенций магистрантов математических направлений. // Труды международной научной конференции. ."Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство Цахкадзор, 2014.

НОВЫЕ ПОДХОДЫ В ПОДГОТОВКЕ ИНЖЕНЕРНЫХ КАДРОВ ДЛЯ ИННОВАЦИОННОЙ ЭКОНОМИКИ

А.А. Евдокимов, В.В. Кузнецов, Т.А. Жаринова, В.И. Захарова

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики МГТУ МИРЭА, Москва, Россия.

e-mail: evdokimov@mirea.ru

Аннотация: В статье разработана и обоснована реализация модели взаимодействия общего и дополнительного образования, послевузовской подготовки для учащихся школ, студентов и инженеров в области инновационных технологий.

Ключевые слова: инновационные технологии, дополнительное образование

NEW APPROACHES IN THE TRAINING OF ENGINEERING PERSONNEL FOR THE INNOVATION ECONOMY

Abstract: The article is developed and substantiated implementation of the model of interaction between the General and additional education and postgraduate training for pupils, students and engineers in the field of innovative technologies.

Keywords: innovative technologies, additional education

Инновационные технологии развиваются на стыках научных направлений. Образование в этой области требует междисциплинарную (МД) профессионализацию, которая позволит выпускникам вузов легко адаптироваться на современном рынке труда и в бизнес-среде.[1-3]

Это требует и довузовского ознакомления с инновационными технологиями, поиска новых возможностей обеспечения преемственности образования, усиления творческой, практической и социальных составляющих содержания общего образования в условиях взаимодействия общего, дополнительного и профессионального образования. Реализация этого позволит создать новые условия для выбора индивидуальных образовательных маршрутов обучающихся.

Разработка и реализация модели взаимодействия общего и дополнительного образования в области инновационных технологий для учащихся школ и студентов ВУЗов

Обоснование необходимости проведения такой работы:

- тенденция уменьшения числа часов обязательного изучения основных технических дисциплин (физики, химии, математики, биологии) в довузовской системе образования;
- тенденция увеличения доли часов на самостоятельную подготовку студентов в высшей школе (ГОС-3);
- низкая познавательная активность и откровенное равнодушие большинства студентов и школьников России к инновационным технологиям.

Дополнительное образование проходит через: систему мероприятий, направленных на выявление и поддержку технически увлеченной молодежи; клубную деятельность; организацию проектно-исследовательской деятельности учащихся под руководством студентов с широким привлечением научно-технического потенциала базовых кафедр университета; использование дистанционных образовательных технологий. МГТУ МИРЭА, например, организует дополнительное образование в области нанотехнологий, инновационной энергетики, фотоники, наноэлектроники, робототехники («университетские субботы»)[4-6].

ВУЗ берет на себя обязательство по разработке:

1. комплекса учебно-методических материалов для системы непрерывного обучения школа-ВУЗ.

2. организацию ЭСНЛ – экспериментальных студенческих научных лабораторий с привлечением старшеклассников подшефных школ МГТУ МИРЭА.

3. организацию фестивалей, олимпиад, научно-практических конференций, выездных семинаров с мастер-классами, экскурсий в научные Центры;

4. создание аппаратно-программных комплексов удаленного доступа к лабораториям коллективного пользования

Предусматривается: проведение регулярных мероприятий:

- научно-практические конференции, олимпиады в школах,

- международные (с участием стран СНГ) конкурсы молодых учёных по разработкам в сфере инновационных технологий;

- телемосты Москва – Санкт-Петербург – Минск – Сочи – Нальчик, посвященные Дню Водородной энергетики.

В дни школьных каникул зимой и летом наиболее одаренные и увлеченные школьники отдыхают, слушают лекции, выступают со своими проектами в специализированных сменах детских лагерей, например, «Орленок» под Туапсе, организуемых федеральным агентством по делам молодёжи (Росмолодёжь).

Междисциплинарный подход к получению знаний в школьных водородно-экологических и наноклубах позволил бывшим школьникам специализироваться в МИРЭА по следующим направлениям: «информатизация журналистики», «лазерные технологические комплексы», «нанотехнологии на транспорте», «нанотехнологии в медицине» и даже… «наноэкономика» и «нанотехнологии в создании искусственного интеллекта».

Все вышеизложенные формы работ позволяют за достаточно короткое время:

1. сформировать у учащихся необходимый образовательный уровень для облегчения профессиональной ориентации в дальнейшей жизни;

2. обеспечить непрерывное образование молодежи, начиная со школьной скамьи до поступления её в ВУЗ;

3. сменить один тип дискурса - «оградительное детство» (детей нужно всячески ограждать от мира взрослых) другим, культивируемым в современном мире,- «компетентное детство» (дети способны на все более ранних этапах развития становиться самостоятельными в области определения собственного стиля жизни, принимать решения собственной стратегии образования и т.д.)

Послевузовская подготовка

Заметный вклад в модернизацию отечественной экономики могут внести только технологии соответствующие и превосходящие мировой уровень. Одной из таких отраслей является волоконное лазеростроение, мировым лидером которой является созданная физиком Гапонцевым В.П. международная научно-производственная корпорация «IPG», предприятия которой расположены в Германии, в США, в России и других странах и обеспечивают более 75 % мирового выпуска волоконных лазеров (ВЛ).

Формы обучения: подготовка учебно-методических материалов и их апробацию среди:

- магистрантов.

Опережающая переподготовка кадров среди:

- сотрудников НТО «ИРЭ-Полюс»,
- работников организаций, приобретающих лазерные технологические комплексы (ЛТК) на основе ВЛ.

Опережающая переподготовка кадров

Соисполнители: преподаватели НИЯУ МИФИ, МГТУ им. Баумана.

Структура программы:

Программа разработана для 5 направлений (специализаций). Объем программы – по каждому направлению до 600 час., и состоит из 5-7 модулей.

Первый модуль переподготовки (100 час.), для всех одинаковый

Направления подготовки (место подготовки):

- Инженер – разработчик технологий и средств автоматизации технологических процессов производства электронных компонентов ВЛ и телекоммуникационной аппаратуры ВОЛС(МГТУ им. Н.Э. Баумана).
- Инженер – разработчик гибридных твердотельных лазеров (НИЯУ «МИФИ»).
- Инженер – разработчик лазерных технологических комплексов и технологий обработки материалов ВЛ. (МГТУ им. Н.Э. Баумана).
- Инженер – разработчик телекоммуникационной аппаратуры и ВОЛС (МГТУ МИРЭА).
- Инженер – схемотехник лазерной и телекоммуникационной аппаратуры. (МГТУ МИРЭА).

Подготовка кадров для организаций – потребителей ЛТК

В 2013-2014 гг. были реализованы проекты по организации лазерных центров в Казани, Екатеринбурге, Владивостоке, монтаж, запуск и обслуживание ЛТК на ОАО «КАМАЗ».

Компании нуждаются в образовательной программе подготовки комплексных бригад по монтажу, наладке и сдаче в опытную эксплуатацию ЛТК. НТО «ИРЭ-Полюс» уже поставляет предприятиям свои ЛТК вместе с обученными комплексными бригадами (120 часов обучения). Кроме того, базовые знания получает и руководящий состав предприятий: главные конструкторы, главные технологи, ТОП-менеджмент (апробация программы прошла в ОАО «КАМАЗ») (18 часов обучения).

Магистратура

Направление подготовки: 200400.68 «Оптотехника»

Профиль подготовки: «Волоконные лазеры и волоконно-оптические системы»

Подготовка магистрантов по представленному учебному плану проводилась по двум специализациям:

- ТФ-1: исследование, разработка и конструирование компонентной базы, узлов и аппаратуры цифровых и аналоговых волоконно-оптических систем (группа ЭОМ 1-12).
- ТФ-2: проектирование и эксплуатация лазерных систем обработки материалов (группа ЭОМ 2-12).

Кроме плановых аудиторных занятий предусмотрены:

- лекции ведущих ученых и производственников, включая иностранцев;

- стажировки на предприятиях концерна «IPG», самостоятельная работа слушателей по изданным учебным пособиям.

Литература

1. Сигов А.С., Евдокимов А.А. Междисциллинарная подготовка специалистов в области водородной энергетики и нанотехнологий. Материалы Международной конференции «Водородная энергетика как альтернативный источник энергии». МИТХТ им. М.В Ломоносова, М.2009, с.13-14

2. Мировая экономика: прогноз до 2020 года / Под ред. акад, А.А. Дынкина / ИМЭМО РАН. – М.: Магистр, 2009. 376 с.

3. Евдокимов А.А., Сигов А.С., Шинкаренко В.В. Энергоэкологическое образование в России.: Журн.Энергия, т.4.2009, 59-65.

4. Макаров ВЛ., Варшавский А.Е. Наука и высокие технологии в России на рубеже третьего тысячелетия. Социально-экономические аспекты развития. М.: Наука, 2010 636 с.

5. Евдокимов А.А. Из опыта преподавания основ водородной энергетики в курсе химии // Ж. «Водородный всеобуч» 2007, N2 7(10), с.76-78.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ И ПОСТРОЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ ОБУЧЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В.А. Карасев

Национальный Исследовательский Технологический Университет (МИСиС), Москва, Россия

e-mail: karasev-v-a@yandex.ru

Аннотация: Использование интернет-системы для подачи учебного материала и контроля знаний позволяет стимулировать самостоятельную работу студентов и повышает объективность оценок. По результатам контрольных мероприятий и систематичности выполнения учебного плана рассчитывается рейтинг студента, который учитывается в итоговой оценке по предмету. Существенной частью процесса обучения является современное учебное пособие.

Ключевые слова: информационные технологии, информационно-образовательная среда, изучение математики, технический университет.

USE OF INFORMATION TECHNOLOGIES FOR ORGANIZATION OF INFORMATIVELY-EDUCATIONAL ENVIRONMENT AND CONSTRUCTION OF TRAJECTORY OF EDUCATING AT STUDY OF MATHEMATICS IN TECHNICAL UNIVERSITY

Abstract: The use of Internet systems for the delivery of educational material and the control of knowledge allows to stimulate independent work of students and increases the objectivity of assessments. By results of control actions, characteristics of the systematic implementation of the training plan is calculated student rating, which is taken into account in the final assessment on the subject. Substantial part of process of educating is modern train aid.

Keywords: information technologies, informatively-educational environment, study of mathematics, technical university.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – “подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности; удовлетворение потребностей личности в получении соответствующего образования”.

Одним из важнейших аспектов высшего технического образования является развитие компетентностного подхода в математическом образовании. В рамках этого подхода ставится цель:

- сформировать у студентов убеждение в важности математических методов для решения профессиональных задач;
- поднять уровень использования математического аппарата при изучении общетехнических и профессиональных дисциплин;
- развить стремление к самостоятельной работе и обучению, умение находить и принимать оптимальное решение различных профессиональных задач.

Однако в последнее время мы всё чаще слышим разговоры о том, что уровень подготовки наших выпускников недостаточно высок. Как правило, причиной этого служит не только слабые способности или низкая подготовка, а неорганизованность студентов – за учёбу они берутся только в конце семестра. Во многих случаях преподаватели вынуждены “закрывать глаза” на явное отсутствие знаний. В связи с этим необходимо приложить усилия, чтобы стимулировать и контролировать работу студентов с самого начала семестра.

Студенты много времени проводят в Интернете в бесполезных занятиях. Необходимо попытаться направить эти стремления в полезное русло. Широкое использование Интернет-системы для подачи учебного материала и контроля знаний позволило бы не только облегчить студентам поиск нужных учебных материалов, но стимулировало бы их самостоятельную работу и повысило бы объективность оценок.

Решение этих задач предусматривает повышение роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиление ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание их творческой активности и инициативы.

Важным фактором для достижения этих целей является разработанная в НИТУ МИСиС в Институте экономики и управления промышленными предприятиями программа (Internet-приложение) для обучения студентов с применением глобальной компьютерной сети Internet. Компьютерная оболочка создана в среде Microsoft Visual Studio 2010 на языке C# с использованием новейшей архитектуры (.NET), технологий объектного Web-программирования, базы данных Microsoft SQL Server Database. Это позволяет использовать её в учебном процессе как внутри университета, так и при обучении удалённых учащихся по сети Internet. В качестве клиентского приложения используется обычный браузер - Internet Explorer.

В статье излагается опыт преподавания курса математики на кафедре высшей математики в Национальном Исследовательском Технологическом Университете (МИСиС) с использованием информационных технологий, то есть в использовании различных способов подачи информации, обеспечения с помощью интернета эффективной обратной связи между студентом и преподавателем в процессе обучения.

Схема изучения курса с использованием информационных технологий сводится к следующему:

1. Знакомство с теоретическим материалом на лекциях. Использование демонстрационных элементов на лекциях позволяет существенно усилить наглядность изучаемого материала, помогает студенту глубже понять сущность математических методов, заинтересовать студента.

2. Изучение методов или алгоритмов решения задач на практических занятиях на учебных примерах из стандартных задачников, не требующих больших затрат времени и громоздких вычислений.

3. Организация и контроль самостоятельной работы студента во внеучебное время по выполнению индивидуальных тестов и заданий (типовых расчетов) с контролем выполнения и организаций обратной связи в сети Интернет. Для организации учебного процесса, стимулирования систематической самостоятельной работы студентов используется оболочка дистанционного обучения "Dist" на сайте НИТУ МИСиС **econom.misis.ru**. Основное назначение системы:

- обеспечение учебными материалами;
– автоматическое формирование и выдача тестов и заданий;
– организация и контроль самостоятельной работы студентов;
– контроль знаний;
– определение рейтинга студента;
– получение оперативной информации о состоянии учебного процесса.

Разработанная система отражает как традиционную структуру обучения в высших учебных заведениях с использованием групп студентов, специальностей и учебных планов, так и современные тенденции перехода к дистанционному обучению, т.е. возможность обучаться в любое время и в любом месте, по индивидуальным планам и графикам.

Указанная выше программа фактически реализует систему дистанционного обучения с целью стимулирования внутри семестровой самостоятельной работы студентов. Каждый студент, попав на свою страницу на сайте, получает комплект учебных материалов по каждой учебной дисциплине, а также ссылки на дополнительную литературу и справочные материалы, что избавляет его от необходимости их поиска. Но главное - студент обязан пройти изучение учебной дисциплины по траектории. Он последовательно получает порции учебного материала и тесты для проверки усвоения. При неудовлетворительной сдаче теста компьютер возвращает его к повторному изучению соответствующих разделов. В траекторию также включены другие контрольные мероприятия, в частности выполнение индивидуальных типовых расчетов с проверкой промежуточных и окончательных результатов в той же программе, а затем предоставление преподавателю выполненного задания.

Программой контролируются сроки выполнения тестов и заданий, затраченное время. В результате накапливается информация о степени усвоения материала (оценки и баллы). Штрафные баллы за несвоевременное выполнение работ и использование дополнительных попыток стимулируют регулярность работы и внимательное изучение материала.

В соответствии с требованиями траектории предусматривалось не менее одного тестирования в месяц, но предпочтительным являлась еженедельная подача учебного материала и проверка усвоения с помощью теста. Предусматривались также подтверждающие (аудиторные) тестирования. Если в аудитории студент не подтверждает выполнение тестов данной темы, результаты его тестирования по данной теме аннулируются и он должен пройти эту часть траектории заново.

При тестировании используются вопросы различных типов, в том числе, наряду с простыми вопросами типа "да/нет выбором правильного ответа, последовательности, даются задачи с ответом в виде одного или нескольких чисел. Студенты получают различные тесты и типовые расчеты, что достигается случайным выбором вопросов и задач из соответствующего заложенного банка задач и случайным выбором значений параметров из заданного диапазона их изменений.

Преподаватель в наглядной форме в графическом виде в любой момент может видеть продвижение каждого студента группы по траектории. Может получить информацию об усвоении материала по каждой теме, а также вопросы, на которые студент не смог дать правильный ответ для собеседования, что фактически позволяет исключить пробелы в знаниях.

Наличие протоколов тестирований с данными и правильными ответами уменьшает опасность возникновения конфликтных ситуаций.

Оценки, выставляемые преподавателями на практических и семинарских занятиях, за контрольные работы, домашние задания вводятся преподавателями в компьютер. Наряду с этим осуществляется компьютерный контроль самостоятельной работы студентов (обучение по траектории, тесты), результаты которого автоматически фиксируются в журнале преподавателя и не могут быть изменены.

Все результаты тестирований, контрольных мероприятий, оценки в аудитории, характеристики систематичности выполнения учебного плана и др. собираются в одной базе данных и рассчитывается рейтинг студента.

Текущий рейтинг рассчитывается компьютером непосредственно перед выдачей информации на экран на основании данных о работе всех студентов группы и может измениться при следующем запросе.

Рейтинг определяется как сумма произведений баллов на весовой коэффициент для каждого вида контрольных мероприятий (практические занятия, контрольные работы, тесты самостоятельные, тесты подтверждающие, типовые расчеты, посещаемость лекций и практических занятий, ритмичность).

Для каждого контрольного мероприятия (кроме практических занятий) в расчёт принимается только последняя попытка с понижающим коэффициентом 0.95 за каждую попытку.

Балл за посещаемость (отрицательный) пропорционален числу пропущенных занятий. Максимальный отрицательный балл, заданный в весовых коэффициентах, получают студенты, пропустившие все занятия. Расчёт посещаемости лекций и практических занятий производится отдельно.

Преподаватель перед экзаменом и зачётом получает в дирекции ведомость с рейтингом. Полученный в течении семестра рейтинг учитывается при проставлении экзаменационной оценки.

Существенной частью процесса обучения должно быть современное учебное пособие, которое совмещает учебник, охватывающий весь предусмотренный программой материал, с пособием по практической части курса высшей математики, содержащего руководство к решению типовых задач и примеров по всем разделам учебного курса. В нем должны быть строго и наглядно изложены все необходимые математические понятия, доказаны практически все теоремы. Но при этом следует избегать излишней детализации. Особое внимание должно быть уделено прикладным задачам излагаемого курса. Далее для закрепления навыков решения задач читателю следует предложить контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения с ответами. Таким образом, учебное пособие должно совмещать традиционный учебник, решебник и задачник. При этом оно должно быть достаточно компактным.

Основываясь на изложенных принципах, коллективом авторов подготовлено учебное пособие по математическому анализу, состоящее из двух частей: «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление», изданное в издательстве Илекса в 2011 году в серии «Библиотека бакалавра» [1], [2].

Пособие имеют гриф «Рекомендовано Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по техническим и экономическим направлениям».

Пособие является лауреатом 1-й степени Первого Всероссийского конкурса Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки Российской Федерации «Лучшее учебное пособие по математике» в номинации: «Математика в технических вузах», проводившегося в 2010 году.

Многие преподаватели, использующие данную систему на практике, отмечают более серьёзное отношение студентов к учёбе и улучшение знаний.

Литература

1. Карасев В.А., Лёвшина Г.Д. Математический анализ. Часть 1. Дифференциальное исчисление: Учеб. пособие. М.: Илекса, 2011. 296с.

2. Карасев В.А., Карасева В.В., Лёвшина Г.Д. Математический анализ. Часть 2. Интегральное исчисление: Учеб. пособие. М.: Илекса, 2011. 283с.

ВОЗМОЖНОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЯ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

С.В. Костин

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики, Москва, Россия

e-mail: kostinsv77@mail.ru

Аннотация: Отмечается, что при преподавании математики необходимо обращать внимание школьников и студентов не только на сильные, но и на слабые стороны изучаемых методов и приемов. Обсуждаются возможности и ограничения метода математической индукции при решении задач о делимости целых чисел.

Ключевые слова: преподавание математики, метод математической индукции, делимость целых чисел, многочлены от одной и нескольких переменных.

POSSIBILITIES AND RESTRICTIONS OF THE METHOD OF MATHEMATICAL INDUCTION

Abstract: It is noted that in mathematical education it is necessary to discuss with schoolchildren and students not only positive but also negative aspects of various mathematical methods and techniques. Possibilities and restrictions of the method of mathematical induction when solving problems of divisibility of integers are discussed.

Keywords: teaching of mathematics, mathematical induction, divisibility of integers, polynomials of one and several variables.

Как специалисты в области методики преподавания математики, так и педагоги-практики неоднократно отмечали тот факт, что в процессе обучения школьников и студентов математике значительно полезнее решить одну задачу несколькими разными способами, чем решить одним способом несколько однотипных задач. Тщательный разбор и анализ нескольких, иногда принципиально различных, решений одной и той же задачи расширяет кругозор учащихся, показывает им красоту и внутреннее единство математики, помогает глубже понять возможности различных математических методов и подходов и точнее представить себе тот круг задач, при решении которых, как можно ожидать, именно данный метод окажется более эффективным, чем все остальные методы.

Одним из чрезвычайно эффективных инструментов решения самых разнообразных математических задач и доказательства самых разнообразных математических утверждений является метод математической индукции. Этот метод хорошо зарекомендовал себя и успешно применяется для доказательства тождеств (скажем, для доказательства хорошо известной формулы для суммы квадратов всех натуральных чисел от 1 до n), для доказательства неравенств (скажем, для доказательства очень важного и часто используемого в математике неравенства Бернулли), для доказательства формулы общего члена рекуррентно заданной последовательности (скажем, для доказательства формулы Бине для общего члена последовательности Фибоначчи) и т. д.

Одной из важных сфер применения метода математической индукции являются разнообразные задачи на доказательство делимости целых чисел. Приведем здесь в качестве примера несколько типичных задач (если относительно n ничего не сказано, то это означает, что $n \in \mathbb{N}$; если написано $n \geqslant n_0$, то это означает, что утверждение надо доказать при $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant n_0$).

Задача 1. Доказать, что при всех n число $x_n = 12^{2n-1} + 11^{n+1}$ делится нацело на число $a = 133$.

Задача 2. Доказать, что при всех n число $x_n = (a+1)^{2n-1} + a^{n+1}$ делится нацело на число $b = a^2 + a + 1$ (здесь a — произвольное целое число).

Задача 3. Доказать, что при всех n число $x_n = 11^n + 4^{2n} + 50n$ заканчивается на группу цифр $\ldots 77$.

Задача 4. Доказать, что при всех $n \geqslant 0$ число $x_n = 2^{3^n} + 1$ делится нацело на число $y_n = 3^{n+1}$.

Задача 5. Доказать, что при всех $n \geqslant 0$ число $x_n = 54\,\underbrace{22\ldots2}_{n \text{ раз}}\,9$ делится нацело на число $a = 61$.

Все эти пять задач достаточно легко могут быть решены с помощью метода математической индукции.

Задача 1 относится, по нашим наблюдениям, к числу наиболее популярных задач у авторов книг и пособий по математике. Она приводится если не во всех, то во всяком случае в очень многих книгах, в которых речь идет о методе математической индукции. Однако важно понимать, что задача 1 является частным случаем (при $a = 11$) значительно более общей задачи 2. При других значениях параметра a из задачи 2 можно получить другие, также достаточно интересные задачи. Например, при $a = 8$ из задачи 2 получается следующая задача:

Задача 1′. Доказать, что при всех n число $x_n = 9^{2n-1} + 8^{n+1}$ делится нацело на число 73.

Задача 3 была составлена автором специально для данной статьи. Ее можно переформулировать следующим образом:

3′. Доказать, что при всех n число $x_n = 11^n + 4^{2n} + 50n - 77$ делится нацело на число 100.

Задача 3′ является достаточно типичной задачей на делимость и может быть решена с помощью метода математической индукции.

Задачи 4 и 5 также несложно решить с помощью метода математической индукции. База индукции (то есть справедливость утверждений при $n = 0$) проверяется непосредственно, а шаг индукции основан на следующих выкладках:

$$x_{n+1} = 2^{3^{n+1}} + 1 = 2^{3^n \cdot 3} + 1 = (2^{3^n})^3 + 1 = (2^{3^n} + 1)\Big[(2^{3^n})^2 - 2^{3^n} + 1\Big] = x_n\Big[x_n^2 - 3 \cdot 2^{3^n}\Big]$$

(отсюда следует, что если $x_n \,\vdots\, 3^{n+1}$, то $x_{n+1} \,\vdots\, 3^{n+2}$) и

$$x_{n+1} = 54\underbrace{22\ldots2}_{n+1\text{ раз}}9 = 54\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ раз}}29 = 54\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ раз}}90 - 61 = 10x_n - 61$$

(отсюда следует, что если $x_n \,\vdots\, 61$, то $x_{n+1} \,\vdots\, 61$).

Человеку, прорешавшему с помощью метода математической индукции много однотипных задач на делимость (а в некоторых задачниках, к сожалению, приводятся подборки именно однотипных, похожих одна на другую как две капли воды, задач), может показаться, что метод математической индукции всегда является высокоэффективным и всегда быстро приводит к желаемому результату. Однако это не так. Возможности метода математической индукции, к сожалению, далеко не безграничны, и этот факт, по нашему мнению, не надо утаивать от учащихся, а наоборот, надо вместе с ними рассмотреть также задачи, при решении которых метод математической индукции оказывается малоэффективным или совершенно неэффективным. Хорошим примером, по нашему мнению, здесь может служить следующая задача.

Задача. Доказать, что при всех $n \in \mathbb{N}$ число $x_n = (a+b+c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1}$ делится нацело на число $y = (a+b)(a+c)(b+c)$ (здесь a, b, c — произвольные целые числа, сумма любых двух из которых не равна нулю).

Наиболее естественное для математика решение этой задачи получается, если считать известными определенные сведения из области теории многочленов от нескольких переменных, а именно, если считать известными следующие три утверждения (для простоты мы формулируем утверждения для многочленов от трех переменных):

Утверждение 1. *Если многочлен $P(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ обращается в нуль в каждой точке пространства $\mathbb{Q}^3$, в которой обращается в нуль* *линейный многочлен* $Q(X_1,\ X_2,\ X_3) = r_1X_1 + r_2X_2 + r_3X_3 + s$ *(здесь* $r_1,\ r_2,\ r_3,\ s \in \mathbb{Q}$, $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 > 0$*), то многочлен* $P(X_1,\ X_2,\ X_3)$ *делится на многочлен* $Q(X_1,\ X_2,\ X_3)$ *в кольце* $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$.

Утверждение 2. *Если многочлен* $P(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ *делится в кольце* $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ *на попарно взаимно простые многочлены* $Q_1(X_1,\ X_2,\ X_3)$, $Q_2(X_1,\ X_2,\ X_3),\ \ldots,\ Q_s(X_1,\ X_2,\ X_3)$*, то многочлен* $P(X_1,\ X_2,\ X_3)$ *делится в кольце* $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ *на произведение*

$$Q(X_1,\ X_2,\ X_3) = Q_1(X_1,\ X_2,\ X_3)\,Q_2(X_1,\ X_2,\ X_3)\ \ldots\ Q_s(X_1,\ X_2,\ X_3)$$

этих многочленов.

Утверждение 3. *Если многочлен* $P(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Z}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ *делится в кольце* $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ *на примитивный многочлен* $Q(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Z}[X_1,\ X_2,\ X_3]$*, то частное* $S(X_1,\ X_2,\ X_3)$ *лежит в* $\mathbb{Z}[X_1,\ X_2,\ X_3]$*. (Многочлен* $Q(X_1,\ X_2,\ X_3) \in \mathbb{Z}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ *называется примитивным, если его коэффициенты в совокупности взаимно просты.)*

Утверждение 1 доказано, например, в книге [1] (см. лемму 2 на стр. 401). Утверждение 2 является следствием того, что кольцо $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ факториально (см., например, [1], следствие на стр. 401). Утверждение 3 может быть доказано с помощью так называемой леммы Гаусса (см., например, [1], лемма 1 на стр. 400).

Считая утверждения 1, 2, 3 известными, переходим непосредственно к решению задачи.

Решение 1. Рассмотрим следующие многочлены в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$:

$$P(X_1,\ X_2,\ X_3) = (X_1 + X_2 + X_3)^{2n-1} - X_1^{2n-1} - X_2^{2n-1} - X_3^{2n-1},$$

$$Q_1(X_1,\ X_2,\ X_3) = X_1 + X_2,$$

$$Q_2(X_1,\ X_2,\ X_3) = X_1 + X_3,$$

$$Q_3(X_1,\ X_2,\ X_3) = X_2 + X_3.$$

Линейный многочлен Q_1 обращается в нуль в точках $\langle \alpha,\ -\alpha,\ \beta \rangle \in \mathbb{Q}^3$ ($\alpha,\ \beta \in \mathbb{Q}$). В этих точках, как легко видеть, обращается в нуль и многочлен P. Следовательно, согласно утверждению 1, многочлен P делится на многочлен Q_1 в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$. Аналогично доказывается, что многочлен P делится на многочлены Q_2 и Q_3 в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$.

Линейные многочлены Q_1, Q_2, Q_3 являются попарно взаимно простыми. Поскольку многочлен P делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на каждый из многочленов Q_1, Q_2, Q_3, то, согласно утверждению 2, он делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на произведение этих многочленов, то есть на многочлен

$$Q(X_1,\ X_2,\ X_3) = Q_1Q_2Q_3 = (X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3) =$$

$$= X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2^2X_1 + X_2^2X_3 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + 2X_1X_2X_3.$$

Многочлен P делится в кольце $\mathbb{Q}[X_1,\ X_2,\ X_3]$ на многочлен Q. Поскольку многочлен P — это многочлен с целыми коэффициентами, а многочлен Q — это примитивный многочлен с целыми коэффициентами, то из утверждения 3 следует, что частное S — это многочлен с целыми коэффициентами.

Заменим в равенстве $P(X_1,\ X_2,\ X_3) = Q(X_1,\ X_2,\ X_3)\,S(X_1,\ X_2,\ X_3)$ переменную X_1 на целое число a, переменную X_2 на целое число b, а переменную X_3 на целое число c. В результате мы получим равенство

$$(a+b+c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1} = (a+b)(a+c)(b+c)S(a,\ b,\ c).$$

Поскольку S — многочлен с целыми коэффициентами, то число $S(a,\ b,\ c)$ является целым числом. Следовательно, число $x_n = (a+b+c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1}$ делится нацело на число $y = (a+b)(a+c)(b+c)$.

Утверждение задачи доказано.

Как мы уже сказали выше, приведенное решение является, по-видимому, наиболее естественным для профессионального математика. Единственный недостаток этого решения заключается в том, что в нем существенно используются факты и утверждения из общей теории многочленов от нескольких переменных, а также факты и утверждения из общей теории колец, которые достаточно далеко выходят не только за рамки школьного курса математики, но и за рамки курса математики стандартного технического вуза.

Можно ли решить данную задачу, оставаясь в рамках известной из школы теории многочленов от одной переменной и используя лишь хорошо известное для таких многочленов следствие из теоремы Безу, а также тот факт, что при делении многочлена с целыми коэффициентами на двучлен со старшим коэффициентом, равным единице, в частном снова получается многочлен с целыми коэффициентами?

Да, можно. Соответствующее решение весьма поучительно и заслуживает, по нашему мнению, очень тщательного разбора на занятии с учащимися. Приведем это решение (его можно найти также, например, в книге [2], см. решение задачи 2.30 на стр. 129–131).

В этом решении нам понадобятся следующие два хорошо известных учащимся (как школьникам, так и студентам) утверждения.

Утверждение 4. *Для любых $p,\ q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, имеют место равенства:*
(а) $p^k - q^k = (p-q)(p^{k-1} + p^{k-2}q + p^{k-3}q^2 + \ldots + q^{k-1})$;
(б) $p^{2k-1} + q^{2k-1} = (p+q)(p^{2k-2} - p^{2k-3}q + p^{2k-4}q^2 - \ldots + q^{2k-2})$.

Утверждение 5. *Если $R(X)$ — многочлен с целыми коэффициентами и целое число x_0 является корнем многочлена $R(X)$, то существует многочлен с целыми коэффициентами $R_1(X)$ такой, что $R(X) = (X - x_0)R_1(X)$.*

После этого краткого напоминания приступаем непосредственно к решению задачи.

Решение 2.

Если $n = 1$, то $x_1 = 0$ и делимость $x_1 \,\vdots\, y$ имеет место.

Далее рассматриваем случай $n \geqslant 2$.

Необходимо по-отдельности рассмотреть два случая: случай, когда все три целых числа a, b, c равны друг другу и случай, когда хотя бы два из этих чисел различны.

Случай 1. Все три числа a, b, c равны друг другу: $a = b = c \neq 0$.

Имеем:

$$x_n = (a+a+a)^{2n-1} - a^{2n-1} - a^{2n-1} - a^{2n-1} = (3a)^{2n-1} - 3a^{2n-1} =$$
$$= 3a^{2n-1}(3^{2n-2} - 1) = 3a^{2n-1}[(3^2)^{n-1} - 1] = 3a^{2n-1}[9^{n-1} - 1^{n-1}];$$

$$y = (a+a)(a+a)(a+a) = (2a)^3 = 8a^3.$$

Разность $9^{n-1} - 1^{n-1}$ делится на $9 - 1 = 8$ (это вытекает из утверждения 4а), а число a^{2n-1} делится на a^3. Поэтому число x_n делится на y.

Случай 2. Хотя бы два из чисел a, b, c различны. Не ограничивая общности, можно считать, что $b \neq c$.

Рассмотрим следующий многочлен от одной переменной X:

$$P(X) = (X+b+c)^{2n-1} - X^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1}.$$

Применим утверждение 4а к разности $(X+b+c)^{2n-1} - X^{2n-1}$, а утверждение 4б к сумме $b^{2n-1} + c^{2n-1}$. В результате получим, что $(X+b+c)^{2n-1} - X^{2n-1} = (b+c)Q(X)$, где $Q(X)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами, а $b^{2n-1} + c^{2n-1} = (b+c)A$, где A — некоторое целое число. Итак,

$$P(X) = (b+c)Q(X) - (b+c)A = (b+c)G(X),$$

где $G(X) = Q(X) - A$.

Число $x = -b$ является корнем многочлена $P(X)$, а значит, и корнем многочлена $G(X)$. Следовательно, согласно утверждению 5, $G(X) = (X+b)G_1(X)$, где $G_1(X)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Итак,

$$P(X) = (b+c)(X+b)G_1(X).$$

Число $x = -c$ является корнем многочлена $P(X)$, а значит, и корнем многочлена $G_1(X)$. Следовательно, согласно утверждению 5, $G_1(X) = (X+c)G_2(X)$, где $G_2(X)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Итак,

$$P(X) = (b+c)(X+b)(X+c)G_2(X).$$

Заменим в этом равенстве переменную X на число a. В результате мы получим равенство

$$(a+b+c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1} = (a+b)(a+c)(b+c)G_2(a).$$

Поскольку G_2 — многочлен с целыми коэффициентами, то число $G_2(a)$ является целым числом. Следовательно, число $x_n = (a+b+c)^{2n-1} - a^{2n-1} - b^{2n-1} - c^{2n-1}$ делится нацело на число $y = (a+b)(a+c)(b+c)$.

На этом рассмотрение случая 2 закончено.

Утверждение задачи доказано.

Мы привели два решения задачи. И первое, и второе решение основывалось на различных свойствах многочленов (в первом решении — многочленов от нескольких переменных, во втором решении — многочленов от одной переменной).

А что же метод математической индукции — можно ли его тоже каким-либо образом применить для решения рассматриваемой задачи?

Автор статьи долго размышлял над этим вопросом, прежде чем ему удалось наконец найти решение рассматриваемой задачи, основанное на методе математической индукции.

Сразу оговоримся, что это решение оказалось достаточно громоздким. Тем не менее, мы считаем полезным как с учебной, так и с методической точки зрения разобрать с учащимися и это решение. Наша цель здесь заключается в том, чтобы помочь учащимся как можно точнее и полнее осознать возможности и ограничения, достоинства и недостатки такого важного инструмента решения математических задач, каким является метод математической индукции.

Итак, мы переходим к третьему решению задачи, на этот раз, к решению, основанному на методе математической индукции.

Решение 3.

Символом S_n, $n \geqslant 0$, мы будем обозначать для краткости следующий симметрический многочлен от трех переменных X_1, X_2, X_3:

$$S_n = X_1^n + X_2^n + X_3^n$$

(многочлен S_n называется n-й степенной суммой от трех переменных).

Лемма 1. *При любых числах n, p, q таких, что $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$, $pn - q \geqslant 3p$, имеет место следующее тождество:*

$$S_{pn-q} = A_p S_{pn-q-p} - B_p S_{pn-q-2p} + C_p S_{pn-q-3p},$$

где $A_p = X_1^p + X_2^p + X_3^p = S_p$, $B_p = X_1^p X_2^p + X_1^p X_3^p + X_2^p X_3^p$, $C_p = X_1^p X_2^p X_3^p$.

Доказательство. Путем непосредственного раскрытия скобок и приведения подобных членов легко убедиться в справедливости следующего равенства:

$$X_1^{pn-q} = A_p X_1^{pn-q-p} - B_p X_1^{pn-q-2p} + C_p X_1^{pn-q-3p}.$$

Складывая это равенство с аналогичными равенствами, которые получаются в результате замены переменной X_1 на переменную X_2 и на переменную X_3, получаем требуемое равенство.

Замечание 1. *При $p = 1$, $q = 0$, $n \geqslant 3$, доказанное в лемме тождество принимает следующий вид:*

$$S_n = A_1 S_{n-1} - B_1 S_{n-2} + C_1 S_{n-3},$$

где $A_1 = X_1 + X_2 + X_3 = \sigma_1$, $B_1 = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 = \sigma_2$, $C_1 = X_1X_2X_3 = \sigma_3$.

Это не что иное как известная формула Ньютона для симметрических многочленов (см., например, [3], стр. 46). Входящие в эту формулу многочлены σ_1, σ_2, σ_3 называются элементарными симметрическими многочленами от трех переменных.

Запишем доказанное в лемме тождество при $p = 2$, $q = 1$, $n = k$, $k \geqslant 4$:

$$S_{2k-1} = A_2 S_{2k-3} - B_2 S_{2k-5} + C_2 S_{2k-7},$$

где $A_2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = S_2$, $B_2 = X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_3^2$, $C_2 = X_1^2X_2^2X_3^2$.

Заменим в этом равенстве переменную X_1 на целое число a, переменную X_2 на целое число b, а переменную X_3 на целое число c. В результате мы получим равенство

$$S_{2k-1} = A_2 S_{2k-3} - B_2 S_{2k-5} + C_2 S_{2k-7}, \qquad (*)$$

где $S_n = a^n + b^n + c^n$, $A_2 = a^2 + b^2 + c^2 = S_2$, $B_2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$, $C_2 = a^2b^2c^2$.

Собственно, для дальнейшего решения задачи нам понадобится только формула $(*)$, которую можно было бы доказать просто с помощью громоздкой выкладки (раскрыв все скобки и приведя подобные члены). Тем не менее, мы посчитали целесообразным вывести формулу ($*$) в несколько более общем контексте, заодно перекинув мостик от этой формулы к хорошо известной формуле Ньютона для симметрических многочленов.

Теперь мы переходим собственно к доказательству утверждения задачи с помощью метода математической индукции.

База индукции. При $n = 1, 2, 3$ утверждение задачи верно. Это проверяется непосредственно (автор данной статьи, чтобы самому не производить громоздкие выкладки, использовал пакет Maple):

1) если $n = 1$, то $x_1 = (a + b + c)^1 - a^1 - b^1 - c^1 = 0$ делится нацело на число $y = (a + b)(a + c)(b + c)$;

2) если $n = 2$, то $x_2 = (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(a + c)(b + c)$ делится нацело на число $y = (a + b)(a + c)(b + c)$;

3) если $n = 3$, то $x_3 = (a + b + c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 = 5(a + b)(a + c)(b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)$ делится нацело на число $y = (a + b)(a + c)(b + c)$.

Шаг индукции. Пусть $k \geqslant 4$. Предположим, что утверждение задачи верно при $n = k - 1$, $n = k - 2$, $n = k - 3$, и докажем, что тогда утверждение задачи верно при $n = k$. Имеем:

$$x_k = (a + b + c)^{2k-1} - a^{2k-1} - b^{2k-1} - c^{2k-1} = (a + b + c)^{2k-1} - S_{2k-1} \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} (a + b + c)^{2k-1} - A_2 S_{2k-3} + B_2 S_{2k-5} - C_2 S_{2k-7} = (a + b + c)^{2k-1} -$$

$$-A_2[(a + b + c)^{2k-3} - x_{k-1}] + B_2[(a + b + c)^{2k-5} - x_{k-2}] - C_2[(a + b + c)^{2k-7} - x_{k-3}] =$$

$$= A_2 x_{k-1} - B_2 x_{k-2} + C_2 x_{k-3} + (a+b+c)^{2k-7}\{(a+b+c)^6 - A_2(a+b+c)^4 + B_2(a+b+c)^2 - C_2\}.$$

Числа x_{k-1}, x_{k-2}, x_{k-3} делятся нацело на число y по предположению индукции. Тот факт, что число x_k делится нацело на число y, будет доказан, если мы докажем, что «фигурная скобка» в последней строке вычислений делится нацело на y.

Это действительно так. Проще всего в этом убедиться с помощью какого-либо математического пакета (например, с помощью пакета Maple):

$$\{\ldots\} = (a+b+c)^6 - (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^4 + (a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)(a+b+c)^2 - a^2b^2c^2 =$$

$$= (a + b)(a + c)(b + c)(a + b + 2c)(a + c + 2b)(b + c + 2a) \,\vdots\, y = (a + b)(a + c)(b + c).$$

База индукции и шаг индукции доказаны. Итак, согласно принципу математической индукции, утверждение задачи верно при всех $n \in \mathbb{N}$.

Обратим внимание на то, что в данном решении был использован несколько усложненный вариант метода математической индукции, когда для доказательства справедливости утверждения задачи при $n = k$ мы предполагали справедливость утверждения задачи при трех предыдущих значениях n ($n = k - 1$, $n = k - 2$ и $n = k - 3$), а не только при $n = k - 1$.

Еще одна особенность этого решения заключается в привлечении вычи- слительной техники, без которой проведение выкладок стало бы чрезмерно утомительным.

Это еще раз говорит о том, что современный математик (как, впрочем, вообще любой современный исследователь) должен активно использовать весь арсенал доступных средств и способов решения задачи. Вычислительная техника, кстати, часто помогает не только произвести громоздкие и рутинные вычисления, но также помогает обнаружить важную закономерность, построить объект или конфигурацию с требуемыми свойствами, сконструировать контрпример к какому-либо утверждению.

Подводя итог нашей статьи, мы хотели бы отметить три обстоятельства. Во-первых, крайне важно, чтобы учащиеся владели различными модификациями метода математической индукции (например, встречаются задачи, в которых надо делать шаг индукции от $n = k - 2$ к $n = k$; встречаются задачи, где используется возвратная индукция и т. д.). Во-вторых, при применении метода математической индукции крайне важно правильно сформулировать доказываемое утверждение. Встречаются ситуации, когда более сильное утверждение с помощью метода математической индукции доказывается проще, чем более слабое (так называемый «парадокс индукции»). В-третьих, и это, наверное, самое главное, крайне важно, чтобы учащиеся четко понимали, что метод математической индукции не всесилен, встречаются задачи, в которых он не приводит к цели или же приводит к неоправданному усложнению решения. Опыт, приобретаемый в процессе решения математических задач, а также математическая интуиция помогают понять, целесообразно или нет в данной задаче применять метод математической индукции.

Мы надеемся, что наша статья заинтересовала читателей и будем благодарны за любые комментарии или замечания по затронутым нами вопросам.

Литература

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Факториал Пресс, 2002. 544 с.

2. Волков Ю.В., Ермолаева Н.Н., Козынченко В.А., Курбатова Г.И. Практические занятия по алгебре. Комплексные числа, многочлены. СПб.: Лань, 2014. 192 с.

3. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2002. 240 с.

РАСШИРЕНИЕ ЗНАНИЙ ШКОЛЬНИКОВ ПО ДРОБНО–РАЦИОНАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

Н.И. Лобанова

Муниципальное образовательное учреждение «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района», Зеленокумск, Россия

e-mail: `lobantchik@yandex.ru`

Аннотация: В статье рассматривается вопрос о реализации принципа преемственности в обучении математике между дополнительным образованием и общеобразовательной школой. В статье на примере изучения раздела «дробно – рациональные уравнения с параметром» описан один из вариантов обеспечения преемственности в курсе алгебры, использование которого позволит осуществить углубленное изучение материала в научных объединениях учащихся.

Ключевые слова: преемственность в обучении математике, принцип непрерывности образования, математическая подготовка учащихся, последовательность, углубленное изучение.

EXPANSION OF KNOWLEDGE OF SCHOOL STUDENTS ON FRACTIONALLY – TO THE RATIONAL EQUATIONS IN ADDITIONAL EDUCATION

Abstract: In article the question of realization of the principle of continuity in training in mathematics between additional education and comprehensive school is considered. In article on the example of studying of the section "fractionally-the rational equations with parameter" one of options of ensuring continuity is described it is aware of algebra which use will allow to carry out profound studying of material in scientific associations of pupils.

Keywords: continuity in training in mathematics, the principle of a continuous of education, mathematical training of pupils, sequence, profound studying.

Всестороннее развитие учащихся, формирование у них научного мировоззрения – важнейшая задача учреждений среднего и высшего профессионального образования. Важная роль при этом отводится дополнительному образованию детей, составляющему вариативную часть общего образования. Согласно ФЗ «Об образовании в РФ», основой образовательного процесса в дополнительном образовании учащихся является реализация дополнительных общеобразовательных программ, выходящих за рамки (общих) основных и имеющих конкретные образовательные цели. Математика выполняет системообразующую функцию в образовании, влияя на преподавание других дисциплин, и поэтому ей принадлежит значительная роль в этом процессе. Усиление ее мировоззренческого и воспитательного воздействия на учащихся, совершенствование методики преподавания для более глубокого усвоения основ математики – таковы основные задачи, стоящие перед отечественной системой образования.

Одним из средств достижения перечисленных целей является введение в школе занятий по математике научных объединений учащихся (НОУ). Занятия по математике НОУ состоит в развитии способностей и интересов учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой, зарождении интереса к математике на первичном уровне, поддерживании его до познавательного уровня. Взаимосвязь обязательного обучения математике в общеобразовательной школе и занятий по математике в рамках дополнительного образования выступает как средство осуществления принципа непрерывности и приемственности.

Преемственность и последовательность в обучении позволяют разрешить противоречие между необходимостью формирования у будущих выпускников школ целостной системы математических знаний, умений, навыков и дискретным характером изучения учебного материала [2]. Преемственность в содержании математической подготовки выступает как непрерывный процесс развертывания структурных компонентов содержания, плавный переход от одного этапа обучения к другому, постепенное усложнение содержания учебной информации, последовательная смена уровня требований к объему и глубине усвоения знаний, умений и навыков [1]. В этом случае каждая следующая ступень образовательной системы является естественным продолжением, развитием предыдущей, что характерно при спиралевидном расположении материала, а учащиеся имеют возможность постепенно и непрерывно расширять знания по конкретной учебной проблеме, не допуская разрывов [2].

Рассмотрим один из вариантов обеспечения преемственности на примере изучения дробно-рациональных уравнений с параметром. Предлагаемый материал дополняет стандартную программу школьного курса математики, предполагает углубленное изучение предмета по данной теме, что будет способствовать совершенствованию и развитию важнейших математических умений, предусмотренных программой.

Для многих учащихся уравнения с параметром являются непривычными и сложными. Необходимо понимание закономерностей, навыки анализа конкретного случая на основе известных общих свойств объекта, системность и последовательность в решении, умение объединить рассматриваемые частные случаи в единый результат, недостаточно механического применения формул. Выписывание ответа часто вызывает трудности в связи с изобилием всевозможных вариантов и подвариантов, на которые распадается основной ход решения. Решение уравнений с параметром требует исследования, даже если это слово не упомянуто в формулировке задания. Возникающие у учащихся при решении таких уравнений трудности обусловлены необходимостью его проведения.

Большое число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития, применимых в исследованиях и в любом другом математическом материале, открывает перед учениками решение уравнений с параметром. Уравнения такого типа имеют принципиально исследовательский характер, и с этим связаны как методическое значение таких уравнений, так и трудности выработки навыков их решения.

Незначительное место в программе по математике отводится задачам с параметром для неспециализированных школ. Так, с параметрами мы встречаемся:

- при введении некоторых понятий (например, при введении понятий функции: прямая пропорциональность $y = k \cdot x$ (x и y – переменные, k – параметр, $k \neq 0$); линейной функция $y = k \cdot x + b$ (x и y – переменные, k и b – параметры); линейного уравнения $ax + b = 0$, где x – переменная, a и b – параметры; квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a, b, c – параметры, $a \neq 0$);

- при поиске решений линейных и квадратных уравнений в общем виде;

- при исследовании количества их корней в зависимости от значений параметров (например, решая относительно x уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, мы фактически решаем не одно, а множество уравнений относительно x, при каждом наборе значений параметров a, b, c получается определенное уравнение относительно x).

Параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу, небольшой класс задач, рассмотренный выше, многим не позволяет усвоить это. Во-первых, предполагаемая известность позволяет «общаться» с параметром как с числом, а во-вторых, – степень свободы общения ограничивается его неизвестностью [3]. Трудности решения задач с параметром вызваны даже при решении простейших уравнений, содержащих параметры, приходится производить ветвление всех значений параметров на отдельные классы, при каждом из которых задача имеет решение. При этом следует четко и последовательно следить за сохранением равносильности решаемых уравнений с учетом области определения выражений, входящих в уравнение, а также учитывать выполнимость производимых операций.

Уравнения с параметрами можно разделить на четыре основных типа:

1. Уравнения, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

2. Уравнения, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

3. Уравнения, для которых требуется найти все те значения параметра, при

которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

4. Уравнения, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Уравнения с одной неизвестной и одним параметром – наиболее массовый класс уравнений с параметром.

Рассмотрим основные способы решения уравнений с параметром именно этого класса:

- аналитический – это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра.

- графический (в зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости $(x;\, y)$, или в координатной плоскости $(x;\, a)$).

- решение относительно параметра (при решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение).

Процесс решения дробно – рациональных уравнений протекает по обычной схеме: дробное уравнение заменяется целым путем умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель левой и правой его частей. После чего учащиеся решают известным им способом целое уравнение, исключая посторонние корни, т. е. числа, которые обращают общий знаменатель в нуль. В случае уравнений с параметрами эта задача более сложная. Здесь, чтобы исключить посторонние корни, требуется находить значение параметра, обращающее общий знаменатель в нуль, то есть решать соответствующие уравнения относительно параметра [3].

Литература

1. Балакирева Э.В. Преемственность как условие обеспечения непрерывного педагогического образования // Проблемы и перспективы взаимодействия вузов Санкт-Петербурга с регионами России в контексте реформирования образования: Материалы IV межрегиональной научно-практической конференции. – СПб., 2001. – С. 181–182.

2. Аммосова Н.В, Краснова Г.Г. Реализация преемственности в обучении математике в основной и старшей школе (на примере изучения уравнений) // Сибирский педагогический журнал № 3 / 2012. – С. – 253.

3. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами // Киев: РИА «Текст»; МП «ОКО», 1992. – С. 290.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ: ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ

О.А. Малыгина, Т.Р. Игонина, Е.В. Кольцова, И.Н. Руденская, Л.И. Таланова, Н.С. Чекалкин

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики, Москва, Россия e-mail: malygina58@mail.ru

Аннотация: Рассмотрены проблемы совершенствования математической подготовки современных дипломированных специалистов, бакалавров, магистров, обучающихся в технических университетах. Разработана системно-деятельностная модель обучения высшей математике, основные принципы которой представлены в настоящей работе.

Ключевые слова: высшая математика, системно-деятельностный подход, принципы обучения.

HIGHER MATHEMATICS IN TECHNICAL UNIVERSITIES: TEACHING PROBLEMS AND WAYS OF SOLVING

Abstract: Problems of giving improved education in mathematics to today's certificated specialists, bachelors and of masters of sciences who are studying in technical universities were considered. The system and activity technology model of teaching higher mathematics was developed. The main principles of this approach was considered in the current work.

Keywords: higher mathematics, the system and activity approach, the teaching principles.

Анализ профессиональной деятельности современного дипломированного специалиста, бакалавра, магистра по техническим направлениям подготовки показывает, что успешное решение профессиональных задач предполагает глубокое знание основ специальности, владение на высоком уровне аппаратом высшей математики, умение применять общенаучные и конкретные методы в своей исследовательской деятельности, постоянно пополнять имеющийся образовательный багаж. Формирование компетенций специалиста, бакалавра, магистра с учетом требования рынка является одной из важных целей, стоящих перед высшей школой. Анализ процесса обучения математическим дисциплинам будущих выпускников высшей школы позволяет выделить следующие проблемы.

Обучение высшей математике строится при предположении наличия у студентов полноценно усвоенных знаний и умений по элементарной математике. Но анализ результатов тестирования студентов 1-ого курса ряда технических вузов по элементарной математике указывает на существование разрыва между имеющимися у учащихся математическими знаниями и умениями по школьной программе и требованиями к ним со стороны курса высшей математики.

При организации процесса усвоения содержания математических курсов, при организации учебного процесса в целом принципы деятельностной теории обучения не реализуются. Преобладает по-прежнему эмпирический подход к построению и проведению занятий, стихийное формирование математических знаний и умений. Не осуществляется целенаправленное формирование умений учиться самостоятельно; развитие способностей к самообразованию и самосовершенствованию происходит стихийно и медленно. В то же время, именно формирование умений самостоятельно получать новые знания, совершенствовать имеющиеся навыки, видеть проблему и самостоятельно искать пути ее разрешения является важнейшей целью высшего образования. На сегодня существует противоречие между потребностями общества в производстве творчески мыслящего и деятельного человека и выпуском специалистов, ориентированных только на пассивное усвоение знаний и умений.

В процессе обучения не происходит целенаправленного формирования методологических знаний и умений. Основной акцент делается на получение только математических знаний и умений. При этом решение многих типов задач, в частности, прикладных, предполагает применение как общих методов познания (анализа, синтеза, моделирования, построения гипотез, доказательство), так и математических. На основе методологических знаний и умений происходит самостоятельное изучение нового материала, строится деятельность по исследованию объектов.

При обучении математическим дисциплинам не формируются знания о деятельности, ее структуре и закономерностях построения. Вместе с тем, именно на базе таких знаний, субъект в дальнейшем должен самостоятельно выстраивать профессиональную деятельность. Обучение высшей математике осуществляется изолированно от решения профессиональных задач выпускаемого специалиста, бакалавра, магистра. Учащиеся при изучении математических курсов зачастую не связывают возможности математики с решением проблем познания и преобразования действительности; математика остается абстрактным и обособленным приобретением вузовского образования. Отметим, что специальные дисциплины, в свою очередь, не занимаются описанием взаимосвязей с высшей математикой, считая, что подобная проблема рассматривается непосредственно в математических дисциплинах.

При изучении высшей математики не в полной мере реализуется воспитывающая функция обучения. Сюда можно отнести игнорирование описания исторического пути становления и развития той или иной математической науки, использование только традиционных объяснительно-иллюстративных методов обучения и непонимание достоинств современных интерактивных форм и методов обучения. Часто при изучении математических дисциплин не затрагиваются мировоззренческие аспекты, которые имеют непосредственное отношение к математике.

Педагоги высшей школы, ведущие предмет «Высшая математика», имеют хорошую фундаментальную подготовку по специальности «математика», но, как правило, не владеют в совершенстве психолого-педагогическими аспектами своей профессии. Процесс обучения высшей математике, организации усвоения ее знаний и умений строится в высшей школе в основном эмпирическим образом, без учета достижений педагогики и психологии. В связи с этим, проблема подготовки преподавателя высшей математики в техническом вузе является актуальной наряду с проблемой подготовки высококвалифицированного специалиста, бакалавра, магистра.

Решение вышеперечисленных проблем предполагает совершенствование содержательной и процессуальной сторон обучения высшей математике. В качестве теоретического основания для модернизации содержания обучения и организации усвоения курса высшей математики предлагаются принципы теории деятельности и идеи системного подхода, что и нашло отражение в экспериментальной модели курса высшей математики для технического университета.

Предлагаемая модель обучения высшей математике базируется на следующих принципах: принцип системного построения содержания курса высшей математики; описания курса высшей математики в единстве общего, особенного и частного; принцип оптимального сочетания фундаментальности и профессиональной направленности обучения высшей математике в техническом университете; принцип предметной деятельности при изучении высшей математики; принцип развивающего обучения; принцип интеграции современных технологий обучения; принцип единства основ подготовки педагога и учащегося по экспериментальной программе с учетом особенностей каждого субъекта процесса.

Прокомментируем содержание некоторых из приведенных принципов. Экспериментальная модель курса высшей математики строится с учетом принципа системности. Логика изложения материала математических дисциплин соответствует логике системного исследования: выделяется предмет изучения, он рассматривается как система, фиксируются его целостные свойства, выделяются подсистемы, уровни строения, системообразующие связи, различные виды подсистем, элементов. Предмет изучения каждой математической дисциплины в экспериментальной модели рассекается не эмпирическим путем, а на основе положений системного исследования. При таком подходе меняется структура учебно-познавательной деятельности обучаемого. Во-первых, при изучении высшей математики формируются не только математические знания и приемы, а усваивается общий метод – метод системного анализа. Во-вторых, учитывая универсальность математики как науки, становится возможным формирование еще одного общенаучного метода познания – математического моделирования. Причем математическое моделирование осуществляется на основе предварительно проведенного системного анализа объекта-оригинала и его модели. Наконец, применение метода синтеза также опирается на системное изучение объекта. Фактически обучаемые решают задачи с использованием сложной аналитико-синтетической деятельности, только в данном случае основаниями для анализа и, соответственно, синтеза служит идеология системного исследования. Свойства математических объектов, связи между ними выявляются учащимися на основе исследования, построения гипотез, их доказательства, а не даются, как обычно, в готовом виде. Формирование методологических и математических знаний и умений осуществляется в процессе решения специально разработанных заданий с опорой на учебные карты, в которых представлена нормативная деятельность решения разных типов задач.

Вторым принципом экспериментального обучения является описание высшей математики (ее дисциплин) в единстве общего, особенного и частного (единичного). Это означает, что предмет изучения любой математической дисциплины описывается на разных уровнях абстракции и обобщения, используются три системы понятий. Во-первых, предмет изучения можно рассматривать с точки зрения его системной организации, поскольку системность есть всеобщая форма существования объективной реальности. Поэтому всеобщей формой понятий, описывающих предмет науки и, соответственно, учебной дисциплины, являются понятия системного анализа: система, среда, подсистемы, элементы, системообразующие связи, структура системы, целостные свойства и другие. Особенная форма понятий в экспериментальной программе – это общие математические понятия (величина, функция, уравнение и другие), которые могут рассматриваться как системные. Наконец, частная (единичная) форма относится к понятиям конкретных математических разделов, например, алгебраические уравнения, дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, предел функции, непрерывность и другие. Каждое конкретное понятие в свою очередь может рассматриваться как системное и связанное с общими математическими понятиями (особенными). В экспериментальной модели предмет изучения каждой дисциплины высшей математики описывается изначально во всеобщей форме, т.е. в понятиях системного подхода. Затем - с помощью общих математических понятий (особенных) и, наконец, представляется как частное (единичное), относящееся только к конкретному разделу математики. Принцип описания курса высшей математики в единстве общего, особенного и частного (единичного) непосредственно вытекает из принципа системного построения содержания математических дисциплин и является его непосредственным продолжением.

Принцип оптимального сочетания фундаментальности и профессиональной направленности обучения высшей математике в техническом университете (вузе) является одним из важных принципов экспериментального обучения. Фундаментализация знаний и умений по высшей математике представлена в модели, во-первых, посредством использования методологической схемы описания объектов в современной науке - системного исследования, во-вторых, посредством применения к изучению математики общих методов исследования. Фундаментальность и универсальность математики как науки, ее связь с профессиональной составляющей образования выпускников технических направлений – через решение прикладных задач на основе методов системного анализа, математического моделирования, метода синтеза. Экспериментальная модель не затрагивает уменьшения теоретической части курса высшей математики (ее дисциплин), не предполагает ее освобождения от доказательств, не нарушает внутренней логики математики, не исключает собственно математических заданий, а дополняет их задачами с профессиональным содержанием. Введение таких задач не является механическим пополнением списка обычных заданий. По существу меняется подход к подбору учебных задач.

Выделяются задачи на формирование деятельности системного анализа, математического моделирования, деятельности синтеза, приемов построения гипотез и доказательство, а также конкретных математических приемов и методов. В частности, стандартные тренировочные математические задачи (вычислить предел функции в точке, вычислить производную, интеграл, найти сумму числового ряда и другие) дополняются задачами с прикладными (профессиональными) аспектами, например, вычислить скорость движения материальной точки, определить объем тела вращения, установить закон протекания тока через элемент электрической цепи. Рассматривается большое количество задач на математическое моделирование, которое в экспериментальной программе осуществляется посредством системного анализа объекта-оригинала и его модели. Например, известные текстовые задачи на экстремумы функции решаются на основе развернутой и обобщенной деятельности математического моделирования, а не эмпирически, как это происходит традиционно. С помощью такой же деятельности решаются задания по исследованию переходных процессов в линейных электрических цепях, которые при традиционном обучении высшей математике не рассматриваются. Значительное внимание уделено задачам синтеза, например, построить функцию с заданными свойствами; разработать электрическую схему (фрагмент), обеспечивающую прохождение тока с заданными параметрами. Выявление свойств математических объектов, их взаимосвязей происходит через деятельность построения гипотез и их обоснования, которую выполняют студенты по экспериментальной программе.

Принцип оптимального сочетания фундаментальности и профессиональной направленности обучения высшей математике в техническом вузе, заложенный в экспериментальной модели, связан с принципом системного построения содержания математических дисциплин. Системность, как всеобщее свойство, открывается и в математических и в иных объектах. Становится возможным выявлять взаимосвязь структур объектов-оригиналов и их математических моделей. Изучение моделей и перенос выводов на оригинал открывает возможности преобразования мира, создания новых объектов. Аналитико-синтетическая деятельность, построенная на знании системной организации реальных объектов, расширяет профессиональные возможности будущих специалистов. Изучение высшей математики с позиций системного подхода, введение задач с элементами профессионального содержания как естественное требование этого подхода раскрывает универсальность математики как науки, органично соединяет абстрактную дисциплину с реальными прикладными проблемами.

Содержание других принципов экспериментального обучения и их реализация на материале курса математического анализа представлены в работах Малыгиной О.А. [1, 2].

Отметим некоторые особенности предлагаемой модели обучения. Рассматривая обучение как специфическую динамическую педагогическую систему, в которой во взаимодействии и во взаимовлиянии находятся педагог и учащийся, следует подчеркнуть, что внедрение экспериментальной модели проходит в два этапа. Первый этап направлен на обучение преподавателя математики системно-деятельностному подходу и на раскрытие перед ним особенностей внедрения модели в учебный процесс. Второй относится к обучению студентов курсу высшей математики на описанных выше принципах.

По существу первоначальный этап связан с повышением квалификации преподавателя математики. Сюда включается освоение педагогом идеологии системного исследования, метода системного анализа, математического моделирования (предполагающего системное исследование объекта-оригинала и его модели), метода синтеза с опорой на системное изучение объекта, а также теории поэтапного формирования умственных действий. В процессе реализации первого этапа повышение квалификации преподавателя разворачивается в двух направлениях: повышение квалификации его как математика и как педагога. Преподаватель высшей математики должен изначально сам освоить методологию системных исследований, применить ее к изучению своего предмета, связать математику с профессиональными задачами в рамках выпускаемых специальностей и организовать процесс обучения студентов на принципах системно-деятельностного подхода. Все это целесообразно включать в общую систему повышения квалификации преподавателей вуза, либо осуществлять самостоятельно на основе данной методики обучения педагога.

Собственно обучение студентов высшей математике реализуется подготовленным педагогом на основе внедрения системно-деятельностного подхода в учебный процесс. Для полноценного усвоения содержания математических курсов в соответствии с выделенными выше дидактическими принципами обучения коллективом кафедры высшей математики-2 МГТУ МИРЭА разработаны учебно-методические пособия по курсам «Теория рядов», «Теория вероятностей», «Алгебра и геометрия» и др.[3].

Литература

1. Малыгина О.А. Изучение математического анализа на основе системно-деятельностного подхода. М.: ЛКИ, 2011. 416 с.

2. Малыгина О.А. Обучение высшей математике на основе системно-деятельностного подхода. М.: URSS, 2007. 256 с.

3. Аксененкова И.М., Малыгина О.А. Чекалкин Н.С., Шухов А.Г. Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения. М.: URSS, 2009. 208 с.

СОВРЕМЕННОЕ МНОГОУРОВНЕВОЕ ОБУЧЕНИЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ В УНИВЕРСИТЕТАХ

В.Т. Петрова[1], О.А. Матвеев[2]

[1]*Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия*
[2]*Московский государственный областной университет, Москва, Россия*

e-mail: [1]`petrovavt@gmail.com`, [2]`matveyevoa@mail.ru`

Аннотация: В статье обсуждаются и анализируются основные аспекты педагогических проблем (в частности, эффективность и доступность изложения, степень и качество усвоения студентами базового учебного материала), возникающих при интенсивном многоуровневом обучении высшей математике в современных технических и классических университетах. Определены и обоснованы пути решения наиболее важных из этих проблем, а в концепции интенсификации обучения математике в высшей школе выделены основные направления дидактических воздействий для успешного решения возникающих при этом задач.

Ключевые слова: многоуровневое обучение, многоуровневое обучение высшей математике, интенсивное обучение, дифференцированное обучение, стандарты третьего поколения.

MODERN MULTY-LEVEL HIGHER MATHEMATICS TEACHING IN UNIVERSITIES

Abstract: In the paper the basic aspects of the pedagogical problems arising at intensive multilevel training to higher mathematics at modern technical and classical universities are discussed and analyzed. Ways of the decision of most important of these problems are certain and proved, and in the concept of an intensification of training to the mathematician in the higher school the basic directions of didactic influences for the successful decision of problems arising at it are allocated.

Keywords: multilevel training, multilevel training to the higher mathematics, the intensive training, the differentiated training, the standards of the third generation.

Several years in Russia education reform is held. The specialization deepened in high school, that leads to a narrowing of the General fundamental knowledge, including mathematical, even among the graduates of physical and mathematical classes, lyceums and gymnasiums. Along with this, among higher education graduates in different specialties the need for fundamental mathematical knowledge is quite high.

It is important that some professionals' non-mathematicians had a fairly good idea of the necessary mathematical methods of research and their capabilities in order to formulate their own special problems for professional mathematicians. Thus, the role of applied mathematics, models and methods in various fields of human activity grows.

For these reasons, it was significantly expanded the list of academic majors in learning courses in computer science which are studied, information theory, probability theory, statistics, mathematical modeling, etc. Obviously such courses cannot be successfully mastered by the students, if they do not get in front of these ideas about the fundamental topics and classical methods of higher mathematics. They form the basis of a special mathematical culture and those of the mathematical methods that are required for successful work in the future.

Note that the educational standards of the third generation are not clearly define the criteria of complexity or "advancement" of training courses and assessments of the academic work of students on such courses. But demands that the student should have the skills of independent work and the development of new disciplines; skills development a large amount of information and solutions to complex and unusual problems; the target culture, analyze, and solve mathematical and applied problems require for their solution the use of mathematical approaches and methods; mathematical language and literacy skills describe the solution of problems and presentation of the results." [9, page 23].

However, in almost all universities in the content of courses of higher mathematics was considered, not adapted to their specializations. In addition, the level of mathematical training of students in recent years has been significant.

These contradictions led first to the fact that students naturally could not develop such courses and to give a good performance on courses of higher mathematics. Instead, to think and to adjust the content and methods of teaching such courses, universities went towards mechanical reduction of their content and time to study them. As a result of this knowledge students have become worse, and the goals of introduction to mathematical treatment specialties, mentioned above, have not been achieved and forgotten almost everywhere. Moreover, in recent years there has been a dramatic decline courses of higher mathematics in almost all universities.

However, mathematics is also teaching thinking and intelligent selection of information, including special. Thus, to speak of a trend towards formalization of higher education, formal learning does not provide education.

One of still the best universities of the country - Moscow Physical Technical Institute (MIPT) has not escaped these problems. There are traditionally mathematics courses focused on the level of the first courses of mechanics and mathematics faculty of Moscow State University, which gave students a high quality mathematical basis for future special knowledge and training in the selection and development of knowledge. This training system was created by the great scholars and teachers, who founded the legendary Institute, and been justified in previous years of its existence, which was confirmed many years traditionally high rating of its graduates in our country and abroad.

Of course, the time and the growth of new professional information changes in the pedagogical process. In MIPT was put forward the concept of the so-called «two-level learning programs» "basic level" and "high". The idea would be useful, if "high level" would be really advanced and basic program and traditionally would need for the level of mathematical knowledge and ability to learn. The transition to two-level training required extensive experimentation, analysis of results and correction programs and methods. However, the two-leveled structure," mathematical courses was introduced on all specialties prescriptive way. In the manner clearly negative result on the quality of knowledge, violated one of the basic principles of intensification of teaching mathematics, which was substantiated in a study [4]: differentiation of instruction should encourage students to deepen the level of mastering of educational material, and not to provoke him an easier path to receive satisfactory evaluations [7].

Academician of the European Academy of Sciences, corresponding member of Russian Academy of Sciences, Professor Lev D. Kudryavtsev, the head of Department of mathematics in MIPT more than 30 years in the book "Contemporary mathematics and its teaching" noted that "in the teaching of mathematics should pay special attention to the development of students' logical thinking, which requires the presentation of mathematics was strictly logical, clear and concise".[2]

We believe that, in order to avoid the collapse of higher education, it is important to understand the relevance of the following problems of mathematical education in modern high school:

1. to accurately determine the content of General and special mathematics courses for various mathematical and non-mathematical specialties.

2. to correctly determine the amount and the desired depth of ownership of the foundations of mathematical knowledge and techniques for each of a University degree to which such methods are used;

3. to develop modern methods of teaching mathematics in high school, which would take into account a variety of pre-University training of students;

4. to develop modern criteria, methods and techniques of quality control mathematical knowledge of students and their ownership of the necessary mathematical apparatus;

5. to develop modern teaching methods, which would significantly intensify the training of students and mathematics disciplines;

6. to develop mathematics teaching methods that take into account sociological, cultural, and informational changes.

These conditions-principles of modernization of mathematics education and mathematics education in high school is quite natural, but requires massive and competent work. We would add that education reform has led to the formation of a new educational paradigm, which considers the fundamental nature, integrity, and humanity, as the basis of higher education.[1]

To achieve real success necessary reform, due to the nature of this type culture of modern society and the rapid growth of information flow can only teaching students of higher educational institutions intensive methods of development and information processing, and therefore must be relevant intensive methods and techniques of training, self-training and self-control.[3, 5].

Good potential in this regard are the consistency of presentation and thoughtful and systematic training of the conceptual structures in the training courses of mathematics [7], and consequently, it is possible, and block the way of teaching such courses with the statements in each block with the assessment of each of them. Training knowledge or training is possible through the practical realization and implementation of the student under the guidance of teachers of mathematical and educational goals, methods of educational and cognitive activity in a dedicated holistic system of training tasks.

For example, the primary exploring and mastering fundamental new fundamental mathematical concepts, the classification of knowledge regarding all investigated systems of knowledge associated with the fundamental mathematical concept, the relationship of theoretical and practical (including lecture and seminar material, etc.

It is natural to assume that intensive teaching methods on a separate mathematical discipline will be considerably more effective if applied when learning complex high school academic subjects, the quality and consistency of training programs in various disciplines and comprehensive intensification of the organization of the learning process of students in higher education. We identify the main directions of the didactic effects: parallel-layered, psychological-pedagogical, special subject, humanitarian and program-control in the concept of intensification of teaching mathematics in high school [6].

Effective means of achieving intensification of teaching mathematical disciplines in the modern school, in particular higher, would be to select the correct didactic principles and schemes to create and competent use of educational-methodical complexes, which would include (to optimize impact on the quality of education and relevant professional activity of the future specialist, bachelor, master) methodologically justified:

- the selection of material for lectures and practical classes;
- the application of interdisciplinary relations in educational courses;
- the professional orientation educational material;
- the handouts (paper and electronic);
- the preparation of competent teaching AIDS;
- differentiated multi-level jobs for students;
- the control and measuring materials;
- the technology of carrying out of tests, examinations, tests [8].

Thus, we tried not only to outline the problems of modern mathematical education in high school, but to identify and propose possible solutions, emphasizing that during the transition to the subject multi-level training is most important experiments, analyzing their results, the gradual extension of the experimental base, consideration of course content, focus on their particular specialty, and, of course, following this basic principles of didactics.

Литература

1. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении (логико-психологические проблемы построения учебных предметов). – М.: Педагогика,1972.-424 с.

2. Кудрявцев Л.Д. Избранные труды. Т.III. М., Физматлит, 2008. 434 с.

3. Матвеев О.А. Логико-семантическое моделирование в информационной педагогической среде процесса обучения дисциплинам математического цикла в высших учебных заведениях. Тезисы доклада //Международная научно-образовательная конференция Наука в вузах. М.: РУДН, 2009, С.592-593.

4. Петрова В.Т. Научно-методические основы интенсификации обучения математическим дисциплинам в высших учебных заведениях. Дисс. докт. пед. наук. – Москва, 1998. – 410с.

5. Петрова В.Т. Приемы технологий развивающего обучения в учебном курсе высшей математики современного технического вуза. // Труды Международного коллоквиума «Des jeux a la creative. Methodes d'education active». – Boulogne-Billancourt, France. – 2007, с. 116-121.

6. Петрова В.Т. О проблемах современного математического образования. // Труды Международной научной конференции «Education, science and economics at universities. Integration to international area». – Plock, Poland. 2008, с. 210-215.

7. Петрова В.Т. О проблемах обучения математике в современных высших учебных заведениях // Bulletin d'Evrotalent-FIDJIP. Paris, Editions du JIPTO, 2010. v.1. p.27-33.

8. Петрова В.Т., Матвеев О.А. Моделирование процесса интенсивного обучения высшей математике в современных университетах. // Вестник МГОУ, Педагогика №3, 2011 с.205-209.

9. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 010600 – Прикладные математика и физика/, 2012, Proekt_FGOS, http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc

ПРОБЛЕМЫ ПОСТАНОВКИ И ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

А.А. Пунтус

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

e-mail: artpuntus@yandex.ru

Аннотация: В статье рассматриваются формы активного соединения учебного и научного процессов при подготовке специалистов в высшей школе. Содержанием статьи является многолетний опыт автора по преподаванию отдельных разделов высшей математики на факультете прикладной математики и физики Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Ключевые слова: учебный процесс, методы преподавания высшей математики, научная работа студентов, индивидуальная форма обучения, прикладные задачи высшей математики, подготовка квалифицированных специалистов.

PROBLEM STATEMENT AND THE TEACHING OF MATHEMATICAL DISCIPLINES IN HIGH SCOOL

Abstract: In article are considered forms of active compounds of educational and scientific processes at preparation of specialists in higher education. The content of the article is the author's many years of experience teaching the individual sections of the higher mathematics at the Faculty of applied mathematics and physics of the Moscow Aviation Institute (national research University).

Keywords: the learning process, on the teaching methods of higher mathematics, the scientific work of students, individual training form, applied problems of higher mathematics, training of qualified specialists.

Содержанием данной статьи является накопленный автором многолетний опыт по преподаванию отдельных разделов высшей математики на факультете прикладной математики и физики Московского авиационного института (национального исследовательского университета). В содержание данного опыта входит не только лекционное изложение материала математического курса студентам, но и закрепление этого материала на соответствующих практических занятиях. Успешная реализация цели усвоения материала курсов высшей математики достигается как автором, так и его коллегами тремя путями, а именно: использование современных методов преподавания математических дисциплин, привлечение наиболее продвинутых студентов к активной научно-исследовательской работе, и, наконец, оправдавшая себя такая эффективная форма, как обучение студентов по индивидуальному учебному плану.

Остановимся подробнее на каждой из этих эффективных форм и на их взаимодействии. Что касается новых современных методов преподавания математических дисциплин, то, например, в процессе преподавания отдельного курса обыкновенных дифференциальных уравнений в отличие от традиционного подхода автором предлагается современное и достаточно строгое изложение теории и методов отдельных разделов данного курса в компактной векторно-матричной и операторной форме [1].

В данной статье рассматриваются также следующие формы активного соединения учебного и научного процессов при подготовке высококвалифицированных специалистов в высшей школе. Основная цель такого взаимодействия состоит в привитии будущим инженерам навыков научного подхода к решаемым инженерным задачам. Реализации такой цели способствует включение примеров приложений материала преподаваемых дисциплин в прикладных задачах физики, механики и техники. Важную роль в развитии самостоятельной научно-исследовательской деятельности студентов играют выполняемые студентами в рамках учебного процесса содержательные, ориентированные на исследование или решение прикладных задач, индивидуальные задания. Это задания по лабораторным и курсовым работам, задания по вычислительной, исследовательской и преддипломной практикам. Последовательное выполнение этих заданий требует от студентов самостоятельного расширения знаний и развития навыков творческой научно–практической деятельности. Наконец, важную роль в совершенствовании процесса соединения учебного и научного процессов в вузе составляет также индивидуальная форма обучения студентов, которые проявили свои способности к самостоятельной творческой научно–исследовательской деятельности. По итогам такого практического взаимодействия учебного и научного процессов студенты имеют возможность участвовать в различных конкурсах студенческих научно–исследовательских работ, в научных или научно–практических конференциях и семинарах факультета, института и конференциях более высокого уровня и, кроме того, студенты могут представлять полученные ими законченные научные результаты к публикации в виде научных статей. Комплексное использование различных форм педагогического процесса, активное сочетание учебного и научного подхода в подготовке студентов, позволяют выпускать из стен вуза высококвалифицированных специалистов.

Примером современного метода преподавания математических дисциплин может служить преподавание автором курса обыкновенных дифференциальных уравнений путём достаточно строгого изложения теории и методов отдельных разделов данного курса в современной векторно-матричной и операторной форме [1]. Так, в данной форме нормальная система дифференциальных уравнений записывается в виде:

$$y' = A(x)y + f(x),$$

,

где y, $f(x)$ - векторы, $A(x)$ - функциональная матрица, или в эквивалентной операторной форме $L(y) = f(x)$, где $L(y) = y' - A(x)y$ - линейный оператор. В этой форме достаточно наглядно и строго легко доказываются как свойства решений соответствующей линейной однородной системы, так и данной неоднородной. При таком доказательстве свойств решений систем линейных дифференциальных уравнений обязательно проводится сравнительное рассмотрение понятия и определения оператора с понятием и определением функции и функционала (их определённой общности и различия).

С использованием такой формы нормальной системы дифференциальных уравнений даётся достаточно математически строгое и в то же время относительно простое доказательство теоремы существования и единственности решения начальной задачи для системы дифференциальных уравнений и дифференциального уравнения высшего порядка в векторно-матричной форме для общего случая их постановки. Доказываются важнейшие следствия этой теоремы, проводится исследование свойств гладкости этих решений и их зависимости от параметров, начальных данных и правой части системы. В отличие от традиционного подхода основные свойства решений линейных дифференциальных уравнений и линейных систем дифференциальных уравнений рассматриваются одновременно в наглядной, доступной и математически строгой координатной, векторно-матричной и операторной формах. При изложении в данном курсе объединённого раздела линейных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений даётся наглядное и строгое обоснование возможности сведения задачи интегрирования одного из данных объектов к задаче интегрирования другого из них. Кроме того, предлагается редкий вывод формулы Остроградского-Лиувилля-Якоби, а также изложение важного для приложений приближённо-аналитического метода малого параметра. Излагаемые методы интегрирования иллюстрируются примерами типовых задач, решаемых с достаточно подробными пояснениями и комментариями. В качестве примера прикладных задач, приводятся примеры различных видов приложений дифференциальных уравнений к задачам авиационной техники.

Кажется, что привлечение студентов к научно-исследовательской работе меньше всего связано с усвоением материала различных математических курсов. Однако, целый ряд возможностей открывается при этом не только с точки зрения взаимодействия в этом случае научного и учебного процессов, но и появляется вероятность более глубокого усвоения традиционных учебных курсов, входящих в цикл фундаментальной подготовки. Здесь, прежде всего, используются самые широкие возможности для иллюстрации связи учебного процесса с практическим применением получаемых в учебном процессе знаний, используемых в практической научно-производственной деятельности. В данном случае, при преподавании фундаментальных математических дисциплин постоянно включаются примеры приложений методов данных дисциплин в прикладных задачах механики, физики и техники.

Опыт привлечения наиболее продвинутых студентов к активной научно-исследовательской работе, т.е. реализации процесса активного взаимодействия учебного и научного процессов на факультете прикладной математики и физики Московского авиационного института показал, что главной целью такого взаимодействия учебной и научной деятельности является привитие будущим инженерам навыков научного подхода к решаемым инженерным задачам.

Примером выполненных студентами научно-исследовательских работ могут служить работы, выполненные в МАИ под моим руководством, представленные на Всероссийский конкурс студенческих научных работ и получившие соответственно Медаль и Диплом данного конкурса (Приказ Министерства образования и науки РФ №641 от 15.06.2009 «О награждении лауреатов открытого конкурса 2008 г. на лучшую научную работу студентов»). Привожу краткую аннотацию примера постановки одной из данных работ, выполненной студенткой Нораевой Е.С.

Е.С.Нораева, А.А.Пунтус (научный руководитель)
«Математическая модель двухконтурного гидравлического сервопривода».

В данной работе строится математическую модель, обеспечивающая оптимальность параметров контура управления, учитывающая основные нелинейности и максимально приближенная по значению выходного сигнала к идеальной модели. С точки зрения системы управления полётом самолёта рулевые приводы являются исполнительными устройствами этой системы, перемещающими органы управления летательного аппарата в соответствии с командными сигналами лётчика или автопилота. Структура системы дистанционного управления в общем виде представлена на рис.1. На ручке управления лётчика установлены электрические датчики, измеряющие приложенные к ней усилия или перемещения, сигналы от которых поступают прямо к многоканальному аналоговому или цифровому вычислителю. Вычислительные системы управления бывают механические и дистанционные электрические. В электрических системах механическая связь между рычагами управления лётчика и приводами аэродинамических поверхностей летательного аппарата и других органов управления полётом заменена электрическими связями (аналоговыми или цифровыми). В структурном плане рулевые приводы представляют собой следящие системы с обратной связью по положению выходного звена, которое механической передачей связано с рулевой поверхностью. Важным обстоятельством, характеризующим качество рулевых приводов, является их быстродействие, которое оценивается по фазовым частотным и амплитудным искажениям на определенных частотах синусоидальных сигналов управления. Указанные оценки динамических свойств рулевых приводов приближенно могут быть получены математическими методами линейной теории управления по передаточной функции привода. Параметры передаточной функции зависят от конструктивных размеров механизмов привода, свойств рабочего тела и коэффициентов передачи электрических цепей сигналов управления.

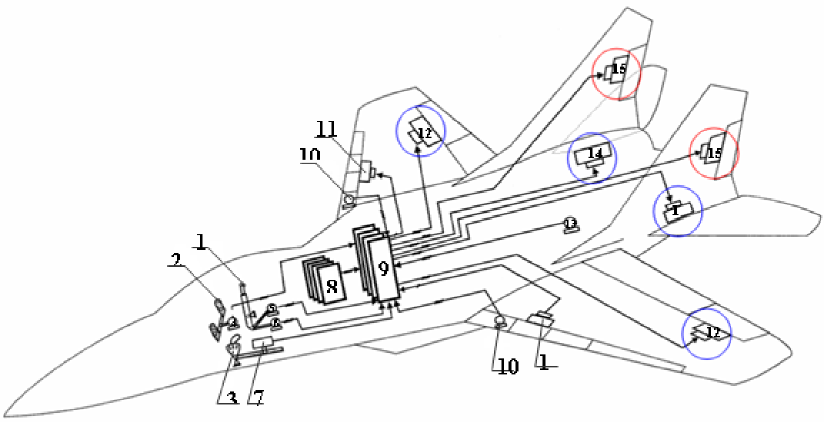


Рис. 1. Система управления самолётом

1 – ручка управления самолётом; 2 – педали; 3 – рукоятка управления двигателями; 4 – датчик положения педалей; 5 – датчик положения ручки управления по крену; 6 – датчик положения ручки управления по тангажу; 7 – привод автомата тяги; 8 – датчики первичной информации; 9 – цифровой резервированный вычислитель КСУ с блоками питания; 10 – датчик положения адаптивных носков крыла; 11 – агрегат управления носками крыла; 12 – электрогидравлический рулевой привод канала крена; 13 – датчик положения тормозного щитка; 14 – электрогидравлический рулевой привод канала тангажа; 15 – электрогидравлический рулевой привод канала курса.

Для современных летательных аппаратов актуален переход от аналоговых систем управления к цифровым, позволяющий обеспечивать динамическую корректировку параметров системы управления самолётом в полёте. Роль рулевого привода в контуре управления самолётом всегда была определяющей, поскольку требуемые статические, динамические и энергетические характеристики рулевого привода, в конечном счёте, определяют его конструктивный облик и возможности системы управления.

При регулировке системы на земле, путем подачи специального входного управляющего воздействия, определяются начальные значения основных параметров рулевого привода, которые заносятся в основную память цифрового вычислителя. Применение корректируемого алгоритма управления приводом, позволяет добиться значительного улучшения характеристик замкнутой системы самолёт – система дистанционного управления – привод. Это улучшение характеристик состоит в уменьшении гармонических искажений выходного сигнала; снижении влияния нелинейностей контура управления; повышении динамических характеристик системы путём снижения перерегулирования и компенсации зоны нечувствительности. В результате применения математических аналитических, а также численных исследований и применения математических численных методов расчёта к рассматриваемой математической модели с учётом конструктивных, физических и механических особенностей показано, что имеется зависимость параметров движения выходного звена от наличия нелинейностей, которые приводят к изменению амплитуды и фазового запаздывания выходного сигнала. В то же время они снижают чувствительность контура управления, подавляя малые колебания, и тем самым исключая "дрожь" управляющих поверхностей самолёта в полёте.

Приведенный пример самостоятельной научно-исследовательской работы студентки иллюстрирует факт достаточно уверенного применения изученных методов математических курсов к исследованию достаточно сложной математической модели. Изучая или выбирая метод решения поставленной задачи, студент знакомится как с отечественной, так и зарубежной литературой, при этом он проводит сравнение достоинств и недостатков выбранного метода для решения поставленной задачи, сравнивая его с другими возможными методами решения задачи.

Лучшие работы студентов по рекомендации кафедры и руководителя работы студента могут быть представлены к участию в конкурсе студенческих научно–исследовательских работ, а также, в случае высокого уровня работы, к участию в научных или научно–практических конференциях и семинарах факультета, института и конференциях более высокого уровня. Кроме того, студенты могут представлять законченные научные результаты к публикации в виде научных статей.

Важную роль в совершенствовании процесса соединения учебного и научного процессов в вузе составляет практически достаточно результативно оправдавшая себя индивидуальная форма обучения студентов, проявивших способности к самостоятельной творческой научно–исследовательской деятельности. Индивидуальная форма обучения студентов активно проводится в Московском авиационном институте. Эта форма способствовала дальнейшему развитию существовавших к этому времени эффективных учебных и учебно–научных форм подготовки квалифицированных специалистов, а также отвечала требованиям времени по индивидуализации и интенсификации процесса обучения. Каждый из таких студентов, как правило, подключается к научно–исследовательской работе на кафедре, достигает заметных успехов в учёбе и научной деятельности, принимает активное участие в различных конкурсах, олимпиадах, выполняет творческую научную работу под руководством преподавателя или научного сотрудника кафедры. Эта форма обучения позволяет ввести в учебный план, как наряду, так и вместо позиций стандартного учебного плана, дисциплины, повышающие знания студентов и дополнительные элементы самостоятельной работы студентов, в том числе и на основе выполняемых научно–исследовательских работ. Кроме того, реализуется тесный контакт обучающегося студента с его научным руководителем, передающим не только свои знания и навыки активной самостоятельной работы, но и умение работать с необходимой учебной и научной литературой. Эффективностью индивидуальной формы обучения студентов в Московском авиационном институте является обеспечение органичного соединения учебного и научного процессов подготовки специалистов, что характеризуется следующим показателем. Только на одном факультете прикладной математики и физики в последние годы подавляющее большинство выпускников, поступивших в аспирантуру, будучи студентами, сочетали успешную учебу с научной работой на основе индивидуальной формы обучения.

Литература

1. Пунтус А.А. Дифференциальные уравнения. М.: Издательство МАИ-ПРИНТ, 2014. 364 с.

2. Пунтус А.А. Проблемы новой постановки математических дисциплин в техническом вузе. М.: Издательство МАИ, 1994. 58с.

3. Пунтус А.А. О соединении учебного и научного процессов во втузе // Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство. Избранные труды Международной научной конференции, Ереван, 26-30 сентября 2011 г. Армения, Ереван: Изд-во Ереванского государственного университета, 2012. С. 245–255.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

А.А. Русаков

Московский государственный университет приборостроения и информатики, Москва, Россия

e-mail: vmkafedra@yandex.ru

Аннотация: В данной статье обсуждается процесс формирования, содержание и пути реализации Концепции развития математического образования в Российской Федерации, утвержденной распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г.

Ключевые слова: Концепция развития математического образования в РФ, цели математического образования, международный и отечественный опыт развития математического образования.

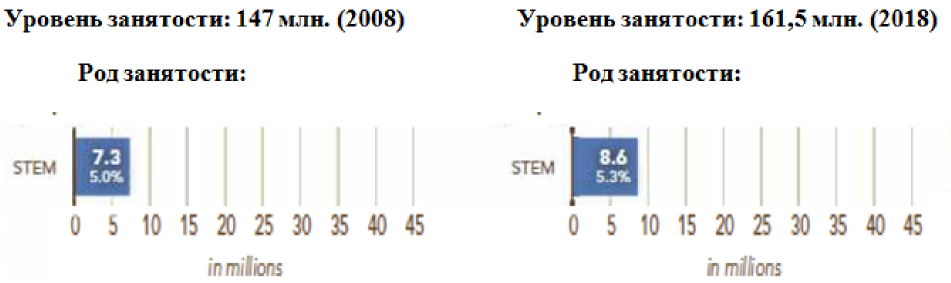
METHODOLOGICAL ASPECTS OF TEACHING MATHEMATICS UNDER IMPLEMENTATION OF MATHEMATICS EDUCATION

Abstract: This paper discusses the process of formation, content and ways to implement the Concept of development of mathematics education in the Russian Federation, approved by the Government of the Russian Federation of December 24, 2013.

Keywords: Concept of development of mathematics education in the Russian Federation, the goals of mathematics education, international and domestic experience

in the development of mathematics education.

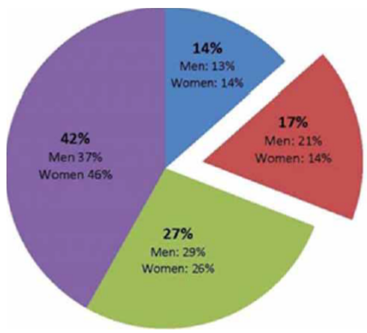
В феврале 2012 года Конгресс США, на основе доклада Совета президента советников по науке и технике, принимает решение о подготовке дополнительного миллиона выпускников колледжей по специальностям в сферах науки, технологий, инженерии и математики (НТИМ) до 2018 года. В своем докладе Конгрессу США советники по науке и технике акцентируют внимание на продолжающееся увеличение спроса на специалистов в сфере НТИМ (процентное соотношение указывает уровень занятости в конкретной области от общего количества):



- В период с 2008 по 2018 год количество рабочих мест в сфере НТИМ от общего числа рабочих мест в США возрастет с 5,0% до 5,3%, что эквивалентно миллиону рабочих мест.

- К 2018 году для 92% профессий в сфере НТИМ будет необходимо, по крайней мере, частичное высшее образование.

Исследования в США показали, практически 60% студентов поступают в колледж по специальностям в сферах науки, технологий, инженерии и математики (НТИМ), не имея для этого необходимых математических знаний. Пробелы в математической подготовке студентов препятствуют получению дипломов в сфере НТИМ.



- Красным цветом обозначен: высокий уровень математической подготовки высокая степень заинтересованности в НТИМ;

- Синим цветом обозначен: низкий уровень математической подготовки высокая степень заинтересованности в НТИМ;

- Зеленым цветом обозначен: высокий уровень математической подготовки низкий степень заинтересованности в НТИМ;

- Фиолетовым цветом обозначен: низкий уровень математической подготовки низкая степень заинтересованности в НТИМ.

Около 14% выпускников школ заинтересованы в науках НТИМ, но не имеют достаточной математической подготовки.

7 мая 2012 года Президент Российской Федерации подписал указ № 599 «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки» и поручение главы государства на разработку Концепции развития математического образования РФ. Концепции развития математического образования в Российской Федерации, утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р. Над созданием Концепции развития математического образования РФ работали различные научно-педагогические, математические сообщества (под руководством Алексея Львовича Семенова, академика РАН и РАО ректора Московского государственного педагогического университета, под руководством Виктора Антоновича Садовничего, академика РАН ректора Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и др.).

Научно-методический совет (НМС) по математике Минобразования России – это государственно-общественный орган, осуществляющий координацию деятельности научно-педагогической общественности образовательных учреждений направленной на развитие содержания математического образования, его научно-методического обеспечения и на повышение качества математической подготовки школьников, абитуриентов, студентов, аспирантов [1]. Работой НМС руководили такие выдающиеся ученые как академики Андрей Николаевич Колмогоров и Андрей Николаевич Тихонов.

В 2000 году в Великих Татрах (Словакия) НМС организовал и провел конференцию «Образование, наука и экономика в вузах на рубеже тысячелетий», председателем организационного и программного комитетов был великий русский математик и педагог академик Сергей Михайлович Никольский, 30 апреля 2015 года ему исполнилось бы 110 лет [2].

Члены НМС по математике после заседания. Академик РАО Колягин Ю.М., профессор МГУ Бутузов В.Ф., профессор МФТИ Шабунин М.И., академик С.М Никольский, профессор МГУ Русаков А.А. (слева направо).

Великие Татры 2000г. Академик РАН С.М. Никольский, профессор Ягола А.Г.

В материалах Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах на рубеже тысячелетий» опубликованы результаты личных исследований в России, СНГ и за рубежом члена НМС профессора Московского университета В.М.Тихомирова, обобщённых им, позволили ранжировать цели математического образования, которые по своей практической значимости группировались вокруг следующих тем:

- *интеллектуальное развитие,*
- *ориентация в окружающем мире,*

- *формирование мировоззрения,*
- *физкультура мозга,*
- *подготовка к будущей профессии,*
- *подготовка в Вуз.*

Примерно так представляют себе цели математического образования отечественные учителя, математики, педагоги, деятели просвещения, хотя в развитых странах Запада на первое место ставят подготовку к профессии.

25 сентября 2012г. на заседания Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки РФ, в который входят представители ведущих вузов России (зав. кафедрами математики, проректоры, профессора), с докладом «К разработке концепции математического образования РФ. Почему математика нужна каждому?» выступил академик Алексей Львович Семенов. Основной вывод его выступления, текста его Доклада Совету при Президенте Российской Федерации по науке и образованию следует, что мы на пути создания фактически во многом новой отечественной системы получения и воспроизводства знаний, необходимой для решения задач национального развития РФ. Анализ мирового опыта развития математического образования позволяет выделить три его важные тенденции [3]:

- понимание необходимости математического образования для всех людей (и в том числе для всех школьников и студентов) и широкая постановка соответствующих исследований (в том числе педагогических, что привело к появлению значительного числа новых базовых и альтернативных учебников по математике);
- стремление к включению общеобразовательных математических курсов в учебные планы на всех ступенях общего и профессионального образования
- глубокая дифференциация математической подготовки студентов вузов и школьников.

Заседание НМС ведет зам. председателя профессор Ягола А.Г., выступает с докладом академик Семенов А.Л. , 25 сентября 2012г.

Делегация Академии информатизации образования в составе президента Ваграменко Я.А., ректора ПГУ им. Т.Г. Шевченко Берила С.И., главного учёного-академика секретаря президиума АИО профессора Русакова А.А. была приглашена весной 2014 года Институтом математики и информатики Болгарской академии наук на 43-ю Весеннюю международную конференцию Союза болгарских математиков. Болгарские ученые осуществляют национальную программу информатизации образования, во многом ориентированную на западные традиции, однако проявляют большой интерес к нашему российскому опыту. И вообще, все то, что касается России, по прежнему воспринимается там с большой заинтересованностью, сохраняется дух принадлежности к единому славянскому миру.

Мы о многом беседовали с выдающимся ученым, ранее бывшим ректором Софийского университета, президентом Болгарской академии наук, председателем национального парламента, крупным математиком **Благовестом Христовичем Сендовым**, книги которого широко издавались в России, в том числе учебник по математическому анализу, написанный вместе с ректором МГУ им. М.В. Ломоносова В.А. Садовничим.

Академики А.Л. Семенов (Россия) и Б.Х. Сендов (Болгария) обсуждают проблемы развития математического образования (март 2013г)

Конференция состоялась в г. Боровец, где автор статьи выступил с пленарным докладом. Был организован и хорошо работал круглый стол «Концепции развития математического образования», который проходил под руководством академика РАН, академика и члена президиума РАО А.Л. Семенова, ректора МПГУ. В недрах самой математики (после работ Н.Бурбаки в 1960-70г.) сейчас вновь существенно переоценивается понятие о ее предмете, об исходных и всеобщих его признаках. Это обстоятельство тесно связано с определением природы самой математической абстракции, способов ее выведения, т.е. с логической стороной проблемы, которую нельзя не учитывать при обсуждении уже реализации[1] «Концепции развития математического образования» (и естественно при создании учебного предмета по математике и информатике). Подчеркнем, что в июле 2014 года для ее реализации Минобрнауки России создало Координационную группу, которую возглавил Министр образования и науки Российской Федерации **Д.В. Ливанов**.

[1]Приказ №765 Минобрнауки России от 3.04.2014г. Об утверждении плана мероприятий Министерства образования и науки Российской Федерации по реализации Концепции развития математического образования в Российской Федерации, утвержденной распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г.

Из активной дискуссии участников круглого стола, а среди них были представители 7 стран, акцентируем внимание, учитывая утвержденный план мероприятий Министерства образования и науки Российской Федерации, на следующем:

1. Всякий объект информационных технологий, проектируется в первую очередь, как математический объект. Более того материальный объект все чаще проектируется сначала в цифровой форме, затем из цифровой формы создается экранный и одновременно материальный образ (трехмерная печать – прототипирование).

2. Математическое образование и математическая деятельность – включают сферу прикладной математики и информатики. В частности, создание средств и инструментов ИКТ является прежде всего математической деятельностью.

3. Информационная, цифровая цивилизация, экономика, основанная на знании, требуют новых видов и уровней математической грамотности, культуры и компетентности, как от профессионалов в области математики и информатики, так и от простых граждан.

4. Сознательное владение компьютерной техникой также невозможно без математических знаний.

5. Самая важная, сложная и проблемная область цифровых технологий при изучении математики является применение цифровых образовательных ресурсов. Более простая часть – информационные источники, в первую очередь открытый банк заданий, затем учебные тексты (учебники и т.д.).

Нам хорошо известны автоматизированные Пакеты программ электронного тестирования, с последующей автоматической проверкой результатов тестирований. Здесь есть еще достаточное количество проблем, наверное прежде всего связанных с разнообразием видов теста (а значит и формы ответа), с развитием информационного ресурса эти Пакеты будут совершенствоваться. В современных условиях последовательного увеличения нагрузки преподавателя вуза остро стоит проблема автоматизации всего учебного процесса, и здесь уже есть различные наработки. Педагогическая наука серьезно отстает от практики. Методологической, дидактической проблемой является формирование принципов составления учебных заданий, например по математике, с выполнением требований:

- автоматической проверки решения задачи;
- автоматического сопровождения при решении задачи (говорят об интерактивности Пакета);
- достижением нужного уровня понимания [4];
- сохранение прежнего качества подготовки по математике.

И не специалист сознает и понимает, не всякий ответ математической задачи может быть сегодня проверен с помощью программных средств, ну а с проверкой и сопровождением самого хода решения трудности могут быть непреодолимыми. Большая и кропотливая работа требующая пересмотра и ревизии лекционных курсов и комплектов задач к ним, позволяющая автоматизировать процесс обучения математике.

В октябре этого года мы продолжили обсуждение реализации концепции на конференции Приднестровского государственного университета имени Т.Г.Шевченко (г. Тирасполь ПМР) в «Русском центре» университета. Коллектив научно-исследовательской лаборатории «Дидактика математики» ПГУ им. Т.Г.Шевченко ознакомил с результатами исследования сотрудников лаборатории, которое проводилось согласно плану по следующим направлениям:

- Изучение теоретических основ определения качества математического образования;

- Исследование математической подготовки на уровне начальной школы;
- Исследование математического образования на уровне основной школы;
- Исследование управленческих проблем математического образования развивающей направленности;
- Математическое образование одаренных учащихся и студентов;
- Математическое моделирование при обучении решению текстовых задач;
- Формирование универсальных учебных действий и исследовательских компетенций;
- Проблемы оценки качества математического образования;
- Разработка концептуальных требований к качеству математического образования.

В «Русском центре» ПГУ им. Т.Г. Шевченко, октябрь 2014.
Декан физико-математического факультета Стамов И.Г., профессор Русаков А.А., президент Академии информатизации образования Ваграменко Я.А.

Об актуальности темы исследования говорит хотя бы тот факт, что наметилась тенденция снижения качества образования, которая выявилась ещё при первых контрольных замерах учебных достижений учащихся начальной и основной школ. Исследования лаборатории «Дидактика математики» социально значимы и открыты, они доступны через наши публикации [5], [6], [7], а рекомендации по использованию моделирования размещены на сайте сотрудника лаборатории с открытым доступом.

Среди принципов математического образования особое место занимает один из кардинальных вопросов: должен ли соблюдаться в вопросах математического образования принцип свободы или оно в значительной мере должно использовать элементы принуждения? Академик РАН В.В. Козлов, считает что азы точных наук нужны каждому: «Учеба в школе - это в принципе не такое уж приятное дело. Скажу жестче; любая школа содержит некий элемент насилия, поскольку ребят заставляют изучать то, к чему у многих из них душа не лежит» (газета Известия 22.01.2010). Старшее поколение помнит, что в Советское время государство контролировало все стороны жизни каждой личности, и образование было единым для всех, учились все по единым учебникам, единым предметам, и возможность выбора сводилась к минимуму. Очевидно, однако, и то, что человеку необходимо предоставить возможность выбора. Но без определённого стимулирования к получению образования, массовое образование невозможно. Необходимо именно стимулирование, создание такой атмосферы в обществе, когда образованность, широта взглядов были бы среди основных критериев оценки личности. Видными академиками учёными-математиками

России (А.Н.Тихонов, С.М.Никольский) считалось естественным, чтобы в начальной и частично в основной школе свобода выбора была несколько ограничена, и чтобы обучение в значительной мере было единым, но чтобы каждому была понятна его необходимость и разумность, а далее могло бы идти ветвление и «многоуровневость».

Наряду с принципом свободы в вопросах образования рекомендуется руководствоваться принципом разумного консерватизма, включающего в себя преемственность с взвешенным учётом положительного опыта, накопленного отечественным математическим образованием.

Понятно, что естественнонаучное образование, как и наука в целом, не является гарантом разумного и устойчивого развития общества. Однако сегодня мы сознаем, что в XXI веке роль знаний станет определяющей, что успешными и благополучными смогут стать только те общества, которые научатся ценить и развивать интеллект, а также эффективно использовать этот потенциал в интересах всех его членов. Именно поэтому очень хочется надеяться, что сегодня не повторятся ошибки прошлых лет и веков, а российское образование вместе со всей страной не погрузятся во тьму.

Литература

1. http://www.cso-nms.ru

2. Rusakov A. The First Student of academician Andrey Nikolaevich Kolmogorov, Springer International Publishing Switzerland 2015, Mathematics, Volume 116, 2015 – P.125-153

3. Русаков А.А. Деятельность Академии информатизации образования по развитию отечественного и международного образовательного пространства, Информатизация образования и науки №4 (24)/2014, стр.119-127.

4. Rusakov A. A., Lungu K.N. Understanding as a pedagogical category. ISBN 978-1-927480-57-1 // Science, Technology and Higher Education [Text] : materials of the international research and practice conference, Westwood, Canada, December, 11-12 2012, 2012 / -c. Westwood, Canada, 2012. 34-39 p

5. Русаков А.А., Гайдаржи Г.Х. Теоретико-методологические аспекты проектирования концепции математического образования, ISSN 1310-2230 Mathematics and Informatics. Bulgarian Journal of Educational Researh and Practice, Volume 57 Number 4 2014 – p.492-502.

6. Русаков А.А. Методологические аспекты реализации концепции математического образования в условиях построения информационного общества, материалы VIII Международной научно-методической конференции «Совершенствование математического образования – 2014: проблемы и пути их решения» ПМР, г. Тирасполь, 15-18 октября 2014 года, издательство Приднестровского государственного университета, 3300 г. Тирасполь ул. Мира 18, С 35- 44

7. Rusakov A. On the selflearning activities of university students, ISSN 1313-3330 Proceeding of the 43 Spring conference of the Union Bulgarian mathematicians, Borovetz, april 2-6, 2014/–p.211-217.

ОБ ОДНОЙ МЕТОДИЧЕСКОЙ ИЗЮМИНКЕ В ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С МОДУЛЕМ

А.А. Русаков[1], В.Н. Русакова[2]

[1] *Московский государственный университет приборостроения и информатики, Москва, Россия,*
[2] *Орловский государственный университет, Орел, Россия*

e-mail: [1]`vmkafedra@yandex.ru`, [2]`v.n.rusakova@yandex.ru`

Аннотация: В данной статье предложен методический прием обучения решению задач с модулем с использованием его геометрической интерпретации. Рассмотрено несколько примеров, в которых такой подход значительно упрощает решение, демонстрируя взаимосвязь различных разделов математики.

Ключевые слова: методика обучения решению задач с модулем, применение геометрической интерпретации модуля числа.

ABOUT ONE METHODICAL HIGHLIGHT IN TRAINING IN THE SOLUTION OF TASKS WITH THE MODULE

Abstract: In this article methodical reception of training is offered the solution of tasks with the module with use of its geometrical interpretation. Some examples in which such approach considerably simplifies the decision are reviewed, showing interrelation of various sections of mathematics.

Keywords: technique of training in the solution of tasks with module, application of geometrical interpretation of the module of number.

Решение задач с модулем — одна из наиболее сложно усваиваемых учащимися тем школьной математики, что подтверждает, в том числе, большое количество ошибок в таких типовых задачах, встречающихся на ЕГЭ [1].

Наиболее часто предлагаемое учащимся старших классов и студентам решение задач с модулем предполагает "раскрытие модулей" входящих в выражение [2,3]. Что подразумевается под таким решением? Числовая прямая разбивается на интервалы, на каждом из которых подмодульные выражения сохраняют знак. Т.е. чисто механически выполняются следующие действия (рассмотрим простейший случай - «раскроем модуль» в выражении $|x-a|$):

1) приравнивается к нулю многочлен, стоящий подмодулем: $x-a=0$;
2) находятся его корни: $x=a$;
3) определяются промежутки, на которых многочлен сохраняет знак: положителен ($x-a>0$ при $x>a$) и при "раскрытии модуля" выражение записывается в неизменном виде — просто опускается знак модуля (получаем: $x-a$) или отрицателен ($x-a<0$ при $x<a$) и при "раскрытии модуля" перед выражением ставится знак "минус" (получаем: $-(x-a)=-x+a$).

Далее задача решается отдельно на каждом из данных промежутков, а ответом становится совокупность полученных решений.

При таком решении задач от учащихся ускользает геометрическая интерпретация модуля числа. Как следствие, трудности вызывает даже решение тривиального уравнения с модулем $|x|=a$ (не говоря о соответствующих неравенствах). Причем опрос учащихся, успешно справляющихся с такими заданиями, показывает, что главную роль играет просто выученное решение данного уравнения, а не понимание геометрического смысла модуля и его свойств. Отсюда частые ошибки в чуть более сложных заданиях. А с геометрической точки зрения на модуль числа сразу видно, что на числовой прямой есть две точки, расстояние от которых до нуля равно a. Это точки a и $-a$. Значит, у уравнения $|x| = a$ есть два решения: $x = a$ и $x = -a$.

Между тем, в 6 классе понятие модуля вводится как расстояние. Вот, например, некоторые факты, которые содержатся в учебнике [4]:

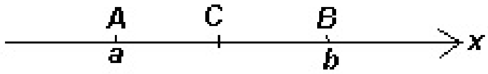


Рис. 1.

1) Расстояние от точки $A(a)$ до начала отсчета, т.е. до точки $O(0)$, называют модулем числа a и обозначают $|a|$.

2) Расстояние между точками a и b равно модулю разности координат этих точек: $|a - b|$.

Но далее работа с модулем не получает должного подкрепления, поэтому встречаясь с этим понятием в старших классах, школьники делают много ошибок, задачи, связанные с модулем считаются трудными, решаются подчас очень громоздко.

Например, рассмотрим уравнение $|x + 1| + |x - 3| = 4$, [4].

1 способ. Рассмотрим решение через «раскрытие модулей», описанное выше.

Числа -1 и 3 (корни уравнений $x + 1 = 0$ и $x - 3 = 0$ соответственно) разбивают числовую прямую на три интервала, на каждом из которых подмодульные выражения сохраняют знак.

При $x \in (-\infty; -1)$ имеем $x + 1 < 0$ и $x - 3 < 0$, т.е. $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$ и $|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$.

При $x \in [-1; 3], x + 1 > 0$ и $x - 3 < 0$, т.е. $|x + 1| = x + 1$ и $|x - 3| = -x + 3$.

При $x \in (3; +\infty), x + 1 > 0$ и $x - 3 > 0$, т.е. $|x + 1| = x + 1$ и $|x - 3| = x - 3$.

Т.о. на каждом из промежутков получаем,

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1), \\ -x - 1 - x + 3 = 4; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1), \\ x = -1; \end{array} \right. \Leftrightarrow \varnothing$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [-1; 3), \\ x + 1 - x + 3 = 4; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [-1; 3], \\ 0 \cdot x = 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [-1; 3]$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (3; +\infty), \\ x + 1 + x - 3 = 4; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (3; +\infty), \\ x = 3; \end{array} \right. \Leftrightarrow \varnothing$$

Совокупность решений дает ответ: $x \in [-1; 3]$.

2 способ. Рассмотрим решение при помощи геометрической интерпретации модуля.

На числовой прямой найдем все точки с координатой x, сумма расстояний от которой до точек с координатами -1 и 3 равна 4 — геометрическая интерпретация данного уравнения.

Очевидно, что $d_1 + d_2 = 4$ при любом $x \in [-1; 3]$.

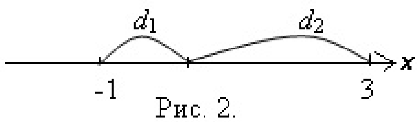


Рис. 2.

Если говорить о простоте и наглядности геометрического метода решения задач с модулем, можно привести такой практический пример. Необходимо построить магазин таким образом, чтобы расстояние до него от двух домов было одинаковым. Естественное решение задачи — строить нужно в середине отрезка, соединяющего эти дома. Формально этот ответ не совсем точен, так как геометрическим местом точек на плоскости, равноудаленных от двух данных является серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки. Но с точки зрения здравого смысла из всех таких точек разумно выбрать ту, для которой требуемые расстояния не только равны, но являются и наименьшими из возможных. Действительно, если K — произвольная точка серединного перпендикуляра к отрезку AB, а C — середина этого отрезка, то $KA > CA$, так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета (см. рис. 3).

Эта несложная задача дает "ключ" к решению некоторых уравнений, содержащих модуль числа. Вот несколько примеров.

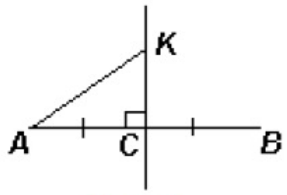


Рис. 3.

1. Решите уравнение: $|x-2| = |x-4|$.

Решение. Условие задачи означает, что надо найти на координатной прямой точку, которая равноудалена от точек $A(2)$ и $B(4)$. Понятно, что это середина отрезка AB, то есть $C(3)$. Следовательно, решением уравнения является $x = 3$.

Ответ: 3.

Более того, с той же легкостью можно решать и некоторые неравенства с модулями.

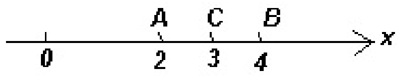


Рис. 4.

2. Решите неравенство: $|x+1| \geq |7-x|$.

Решение. Из определения модуля следует, что **модули противоположных чисел равны**, а для того, чтобы использовать формулу расстояния между точками, под знаком модуля должна стоять разность координат. Поэтому, данное неравенство удобно переписать в таком виде: $|x-(-1)| \geq |x-7|$. Тогда его решением будут все точки координатной прямой, для которых расстояние до $A(-1)$ не меньше, чем расстояние до $B(7)$. Понятно, что этим свойством обладает точка $C(3)$ — середина отрезка AB, а также все точки лежащие правее точки C. Таким образом, решением неравенства являются все числа, большие или равные трем, то есть $x \geq 3$.

Ответ: $[3; +\infty)$.

Переформулируем исходную задачу. Пусть магазин требуется построить так, чтобы сумма расстояний от него до двух домов была наименьшей. Интуиция подсказывает, что магазин надо строить на отрезке, соединяющем эти дома, но в какой точке? Оказывается, что в любой точке этого отрезка! Действительно, **какую бы точку** M **на отрезке** AB **мы не выбрали, сумма расстояний от нее до концов отрезка одна и та же, и она равна длине отрезка** AB (именно это свойство использовано при решении указанного выше примера вторым способом).

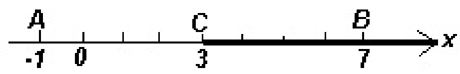


Рис. 5.

Если же выбрать произвольную точку N на прямой AB вне отрезка, то сумма расстояний от нее до точек A и B, очевидно, будет больше, чем длина AB. Аналогично, если точка K не лежит на прямой AB, то $KA + KB > AB$ по неравенству треугольника. Полученный факт

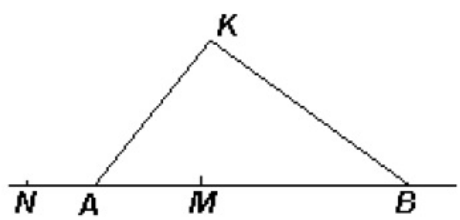


Рис. 6.

позволяет решать простейшие задачи о сумме двух модулей.

3. Найдите наименьшее значение выражения $|x+4|+|x-2|$.

Решение. Рассмотрим на координатной прямой точки $A(-4)$ и $B(2)$ и найдем такие точки, сумма расстояний от которых до точек A и B наименьшая. Эти точки, как было доказано, лежат на отрезке AB, а искомая сумма равна длине отрезка AB, то есть равна 6.

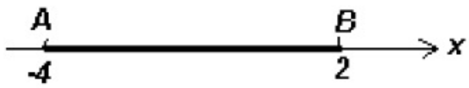


Рис. 7.

Ответ: 6.

Можно также решать уравнения и неравенства.

4. Решите уравнение: $|x+4|+|x+2|=10$.

Решение. Найдем на координатной прямой точки, сумма расстояний от которых до точек $A(-4)$ и (2) равна 10. Понятно, что на отрезке AB они лежать не могут, иначе эта сумма была бы равна 6, значит, они лежат вне этого отрезка. Искать их можно, например, так: заметим, что для любой точки N, лежащей на координатной прямой вне отрезка, сумма $NA+NB=2NC$, где $C(-1)$ — середина отрезка AB. Действительно, $NA=NC+0,5AB, NB=NC-0,5AB$ (или наоборот).

Таким образом, искомые точки удалены от точки $C(-1)$ на расстояние 5. Получим, что решением уравнения являются два числа: 4 и -6.

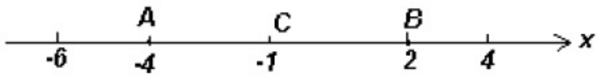


Рис. 8.

Ответ: -6; 4.

5. Решите неравенство: $|x+4|+|x-2|>10$.

Решение. Из предыдущих рассуждений следует, что решением неравенства являются точки координатной прямой, лежащие левее числа -6 и точки, лежащие правее числа 4.

Ответ: $(-\infty;-6)\cup(4;+\infty)$.

Усложним задачу. Пусть теперь вдоль прямой дороги стоят семь домов, причем расстояния между соседними домами не обязательно одинаковы. В какой точке дороги надо построить магазин, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

Обозначим дома по порядку точками $A_1, A_2, \ldots, A_6, A_7$ на прямой, а искомую точку — через X. Для того, чтобы сумма XA_1+XA_7 была наименьшей точка X должна находится на отрезке A_1A_7. Сумма XA_2+XA_6 — наименьшая, если точка X лежит на отрезке A_2A_6, а сумма XA_3+XA_5 — наименьшая, если X лежит на отрезке A_3A_5. Следовательно, сумма $XA_1+XA_2+XA_3+XA_5+XA_6+XA_7$- наименьшая, если точка X принадлежит всем трем отрезкам, то есть лежит на отрезке A_3A_5. Осталось сделать наименьшим расстояние от X до A_4. Понятно, что это произойдет в том случае, если эти точки совпадают. Таким образом, магазин надо строить около четвертого дома, причем полученный результат никак не зависит от расстояний между соседними домами!

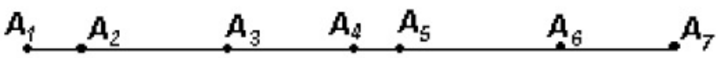


Рис. 9.

6. Найдите наименьшее значение суммы: $|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-11|$.

Решение. Условие задачи означает, что на координатной прямой надо найти точку, сумма расстояний от которой до точек $A_1(1), A_2(2), \ldots, A_11(11)$ будет наименьшей. По аналогии с только что рассмотренной задачей получим, что это точка $A_6(6)$. Остается подсчитать сумму расстояний от этой точке до остальных: $(1+2+3+4+5)\cdot 2 = 30$.

Ответ: 30.

7. Где проводить турнир? (Задача взята из замечательной книги Р. Хонсбергера "Математические изюминки" [6]).

В Нью-Йорке шахматных мастеров больше, чем на всей остальной территории США. Планируется провести шахматный турнир с участием всех мастеров. Решено, что турнир будет проведен в таком месте, чтобы сумма расстояний всех переездов была наименьшей. Нью-Йоркские мастера считают, что этому критерию удовлетворяет их город, а мастера с Западного побережья настаивают на том, что турнир надо проводить в городе, который является «центром тяжести» всей совокупности мест, в которых живут шахматисты. Кто из них прав?

Оказывается, правы мастера из Нью-Йорка! Докажем это. Рассмотрим всех мастеров, живущих не в Нью-Йорке, и каждому из них дадим в пару какого-то из шахматистов Нью-Йорка. Для каждой такой пары сумма переездов будет наименьшей, если турнир проводить в городе, лежащем в любой точке отрезка MN, где M — место жительства выбранного шахматиста, а N — Нью-Йорк. Значит, искомая сумма расстояний не меньше, чем сумма длин всех таких отрезков. Эти отрезки имеют единственное пересечение — точку N, поэтому, для всех уже рассмотренных шахматистов искомая сумма наименьшая, если турнир проводить в N. Остались не рассмотренными только те мастера из Нью-Йорка, которым не хватило пары, но для них проведение турнира в Нью-Йорке также оптимально.

Литература

1. Бубен С.В. Математика: полный сборник задач для подготовки к централизо-ванному тестированию / С.В. Бубен, В.В. Казаченок. – Минск : Аверсэв, 2011. — 511 с. – (Школьникам, абитуриентам, учащимся).

2. Демонстрационные варианты КИМ ЕГЭ // Официальный информационный пор-тал Единого государственного экзамена http://www.ege.edu.ru/ru/main/demovers/

3. Русаков А.А., Чубариков В.Н. Преподавание математики в специализированных физико-математических школах // Современные проблемы преподавания математики и информатики: Материалы научно-методической конференции: В 3 ч. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2004. – Ч.III.

4. Зубарева И.И. Математика. 6 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреж-дений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2009. – 264 с.

5. Кожухов С.К. О методической целесообразности решения задач разными спосо-бами // Актуальные проблемы обучения математике (К 155-летию со дня рождения А.П. Киселева): Труды Всероссийской заочной научно-практической конференции. Орел : Издательство ОГУ, Полиграфическая фирма "Картуш 2007. – С. 120 – 123.

6. Хонсбергер Р. Математические изюминки – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 176 с. – (Б-чка "Квант". Вып. 83).

РЕАЛИЗАЦИЯ ЗДОРОВЬЕСБЕРЕГАЮЩЕЙ НАПРАВЛЕННОСТИ УЧЕБНО-ВОСПИТАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

С.С. Салаватова[1], М.Х. Салаватов[2], Л.М. Сандулова[3]

[1]*Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,*
[2]*Стерлитамакский институт физической культуры (филиал) УралГУФК, Стерлитамак, Россия*
[3]*МОБУ СОШ с. Новая Отрадовка Стерлитамакского района РБ, Россия*

e-mail: [1]sssalavatova@mail.ru, [2]mh23091998@gmail.com, [3]sunlilian@mail.ru

Аннотация: В статье описаны содержание и технологии реализации здоровьесберегающей направленности обучения математике в средней школе. На основе системного подхода обоснована возможность дополнения целевого компонента новой задачей: формированием здорового образа жизни. Содержание характеризуется обогащением курса математики комплексом сюжетных математических задач, выполняющих нормативную, оценочную и регулятивную функции. Процессуальный компонент включает в себя разработанные здоровьесберегающие и здоровьесозидающие технологии.

Ключевые слова: обучение школьников, здоровьесберегающие технологии, здоровьесозидающие технологии.

REALIZATION OF THE HEALTH SAVING ORIENTATION TEACHING AND EDUCATIONAL PROCESS

Abstract: In article the contents and technologies of realization of a health saving orientation of training in mathematics at high school are described. On the basis of system approach possibility of addition of a target component with a new task is proved: formation of a healthy lifestyle. The contents is characterized by enrichment of a course of mathematics a complex of the subject mathematical tasks which are carrying out normative, evaluative and regulatory functions. The procedural component includes developed health keeping and health creating technologies.

Keywords: training of school students, health keeping technologies, health creating technologies.

Проблема сохранения здоровья учащихся на сегодняшний день выделяется в качестве одной из наиболее острых как в различных официальных документах по образованию, так и в деятельности ученых и учителей-практиков.

Наше исследование, связанное с реализацией здоровьесберегающей направленности обучения различным школьным дисциплинам, в том числе и математике, проводится в рамках деятельности научно-образовательной лаборатории методических исследований Стерлитамакского филиала БашГУ (научный руководитель – проф. С. С. Салаватова).

Выбор системно-структурного подхода в качестве методологической базы исследования, подход к учебно-воспитательному процессу как целостной системе позволяет нам утверждать, что каждая школьная дисциплина, в том числе и математика, выступают в качестве структурных клеточек-подсистем (элементов-дифференциалов), составляющих учебно-воспитательный процесс школы, поскольку цели, содержание, методы, формы и средства обучения этих дисциплин строятся в соответствии с целями и требованиями целостного учебно-воспитательного процесса. Отсюда, все предметы должны в определенной мере вносить свою лепту в достижение общих целей школы, в том числе и целей сохранения и формирования здорового образа жизни. В этой связи перед каждым учителем возникает принципиально важный вопрос: как следует осуществлять обучение, в частности обучение математике, чтобы оно способствовало сохранению и укреплению здоровья за период обучения в школе, научило школьников использовать полученные знания в повседневной жизни.

Реализация здоровьесберегающей направленности обучения математике как подсистемы учебно-воспитательного процесса в школе предполагает, прежде всего, обогащение его целевого компонента через введение в этот компонент, соответственно, новой дополнительной задачи. То есть, кроме традиционных задач, стоящих перед обучением математике в школе, возникает еще и задача реализации здоровьесберегающей направленности. Целевой компонент системы, являясь его системообразующим компонентом, вносит свои коррективы в содержательный и технологические компоненты системы. Полная модель методической системы формирования ценности здорового образа жизни при обучении математике описана в статье [2].

Изменение в содержании школьного математического образования в рамках тематики исследования мы видим на сегодняшний день в использовании текстовых сюжетных задач, удовлетворяющих определенным требованиям. Среди этих требований основными являются следующие:

- соответствие основным разделам изучаемого курса школьной математики;
- связь сюжета задачи с ценностью здорового и безопасного образа жизни;
- реализация задачей хотя бы одной из функций в формировании здорового и безопасного образа жизни школьников (нормативной, оценочной, регулятивной).

Таким образом, в дополнение к существующим в классической методике обучения математике классификациям текстовых сюжетных задач (в частности, предполагающим выделение задач с обучающими, воспитательными, развивающими и др. функциями в соответствии с целями образовательного процесса), нами проведена новая классификация таких задач: продифференцированы сюжетные задачи с нормативной, оценочной и регулятивной функциями. Сюжетная математическая задача будет отнесена нами к задачам с нормативной функцией, если в процессе ее решения обучающиеся приобретают знания, идеи, моральные понятия, принципы, отражающие показатели здорового образа жизни. Если же решение задачи позволяет школьникам выполнять оценку и самооценку своих действий по формированию здорового образа жизни, то такая сюжетная задача относится к задачам с оценочной функцией. И, наконец, сюжетную математическую задачу отнесем к классу задач с регулятивной функцией, если результаты ее решения позволяют формировать нравственные убеждения, которые оказывают существенное влияние на поведение школьника и регулируют его. Дифференциация эта условная, поскольку одна и та же задача может выполнять несколько функций. Приведем примеры задач.

Задача 1. Вес годовалого младенца Тимура составляет 10 кг, а годовалой Сони – 9 кг. 1) Вычислите массу тела Тимура в 11 лет, если известно, что ежегодно она возрастала в среднем на 2,5 кг. 2) На сколько кг ежегодно (в среднем) увеличивалась масса тела Сони, если считать что ежегодно это увеличение было одинаковым и через 10 лет вес Сони составил 38 кг.

Для решения этой задачи (до изучения арифметической прогрессии), учащиеся фактически индуктивно выводят и используют формулу n-го члена арифметической прогрессии:

	Тимур	Соня
1 год	10 (кг)	9 (кг)
2 года	10 + 2,5	
3 года	10 + 2,5 *2	
4 года	10+ 2,5 *3	
...	...	
10 лет	10 + 2,5 *9	
11 лет	10 + 2,5 *10	38 = 9 + x * 10

По отношению к реализации здоровьесберегающей и здоровьесозидающей направленности обучения эта задача отнесена нами к задаче с нормативной функцией, поскольку при ее решении учащиеся получают информацию о нормах физиологического развития детей. Задача приобретает оценочную функцию, если при ее решении учащимся ставится задание: сравнить полученные результаты с табличными нормативными медицинскими показателями.

Задача 2. Вода – один из наиболее важных компонентов человеческого организма, составляющий 2/3 его массы. Средняя потребность воды в сутки для организма человека составляет: в 10-летнем возрасте 70-85 мл на кг массы тела, в 14 лет – 50-60 мл на кг массы тела [3, с. 24]. 14 –летняя Люзия и ее братишка Ахмед, съев с утра почти целую селедку, естественно, стали испытывать большую жажду и употребили в течение дня целых 7,5 литров жидкости, причем Люзия в 1,5 больше, чем Ахмед. Сколько лишней жидкости употребил каждый ребенок, если масса Люзии 42 кг, а масса Ахмеда – 32 кг? Рассчитайте собственную суточную потребность в воде.

Приведенная задача при умелом подходе может нести все три функции: нормативную, оценочную и регулятивную.

Нижеследующие две задачи составлены учениками в рамках выполняемых ими исследовательских проектов по этнокультурной тематике под руководством студентов-практикантов [1]. Первая их них причислена нами к задаче с нормативной функцией, вторая задача может выполнять все три функции.

Задача 3. Национальный напиток кумыс – кисломолочный напиток из кобыльего молока – содержит много полезных для жизнедеятельности человека витаминов и минералов. В 100 г (100 мл) кумыса витамина B1 (тиамина) содержится 23,9 мкг, витамина B2 (рибофлавина) – 26,6 мкг, витамина C (аскорбиновой кислоты) – 7,9 мг. Определите количество витаминов в 1 литре кумыса в миллиграммах (микрограмм – это одна миллионная часть грамма, а миллиграмм – одна тысячная часть грамма).

Задача 4. Витамины играют важную роль в функционировании человеческого организма. Недостаток витаминов неблагоприятно сказывается на здоровье и общем самочувствии. Так, например, недостаток витамина B1 приводит к различным нарушениям функции нервной системы, мышечной слабости, бессоннице, повышенной раздражительности. Недостаток витамина B2 – к развитию анемии, падению иммунитета. Недостаток витамина C приводит к кровоточивости, снижению сопротивляемости организма к возникновению ряда инфекционных заболеваний, к остановке роста мышечной массы. Однако переизбыток витаминов может причинить организму вред, поэтому необходимо соблюдать правильную дозировку. Зная, что суточная норма витамина В1 для взрослого человека составляет от 2 до 2,5 мг, витамина В2 составляет 2-3 мг, а витамина С – 75 мг рассчитайте возможно максимальную дозу целебного башкирского напитка – кумыса для человека в сутки.

Технологический компонент системы включает в себя технологии двух видов: здоровьесберегающие и здоровьесозидающие технологии.

К здоровьесберегающим технологиям мы относим те технологии, которые позволяют избегать в учебно-воспитательном процессе всех стрессовых для детей ситуаций, создают благоприятную эмоциональную обстановку на уроке, то есть технологии, направленные на сохранение физического, психического, социального, нравственного и духовного здоровья обучаемых. Среди них, в первую очередь – игровые технологии, технологии включения учащихся в целостную деятельность, технологии нейролингвистического программирования. Как показывает анализ опыта и исследования специалистов при обучении математике из трех каналов восприятия информации (аудиального, визуального и кинестетического) акцент делается обычно на визуальный канал. Мы же разрабатываем комплекс заданий, при которых визуальный канал «отдыхает». Среди таких заданий, к примеру, работа только с включением аудиального канала: использование устных упражнений с закрытыми глазами: учитель диктует ряд вычислительных примеров, а ученики, положив головы на парту, закрыв глаза, производят в уме вычисления. А затем, подняв руку, не открывая глаз, пальчиками показывают ответ. Обычно упражнения составляются так, чтобы в ответе получилось число не более пяти. Пример такого упражнения: к 85 прибавить 15, разделить на 20, умножить на 2 и разделить на пять, прибавить минус 2, умножить на 250, прибавить 1 (в ответе получим 1). Такие упражнения позволяют, кроме того, развить внимание и память школьников, они интересны и полезны школьникам и тем, что дают возможность изменить положение тела в ходе урока. В состав здоровьесберегающих технологий мы включаем также использование на уроках математики физкультминуток. Физкульминутки снимают усталость, напряжение, позволяют переключаться с одного вида деятельности на другой, что обеспечивает улучшение кровообращения и снабжения кислородом клеток головного мозга, и, как следствие этого, способствуют снижению или снятию умственного напряжения. Особенностью использования разработанных физкультминуток является то, что они связаны с определенной математической темой (к примеру, изображение с помощью рук острых, тупых, прямых, развернутых углов в горизонтальной и вертикальной плоскостях).

К здоровьесозидающим технологиям мы относим те технологии, которые направлены на приобретение обучающимися знаний о нормах здоровья, оценку ими отрицательных и положительных влияний на здоровье, регулирование собственного поведения по отношению к сохранению здоровья. Конкретными примерами таких технологий в нашей модели являются использование в учебном процессе математических задач с тремя названными выше функциями, привлечение к составлению таких задач самих обучаемых, использование тематических дидактических игр в системе урочной и внеурочной работы, в ходе которых также используются задачи с нормативной, оценочной и регулятивной функциями. Среди разработанных и используемых дидактических игр мы выделяем два класса:

- Безсюжетные дидактические игры-соревнования. В этих играх отсутствует здоровьенаправленный сюжет, и лишь решив в ходе игровых соревнований математические задачи, ученики соотносят полученный результат с тем или иным фактом, относящимся к теме здоровья.

- Сюжетно-ролевые дидактические игры – игры, в которых обучаемые выполняют определенные роли, соответствующие сюжету игры, раскрывающие как положительное, так и отрицательное отношение к своему здоровью. К примеру, в ролевой игре «Суд над сигаретой», действующими лицами являются «сигарета», «судья», «прокурор», «адвокат», свидетели: «доктор», «химик», «пассивная курильщица».

Естественно, что обогащение целевого компонента и, соответственно, содержания уроков математики требует и дополнительного времени, что невозможно компенсировать только за счет поиска оптимальных технологий внутри одного предмета. Перспективы нахождения дополнительного времени мы видим в использовании интеграции с другими дисциплинами.

Как показали результаты опытно-экспериментальной работы, реализация здоровьесберегающей и здоровьесозидающей направленности обучения математике возможна и полезна. Такая работа, кроме приобщения подрастающего поколения к ведению здорового образа жизни, понимания ценности здоровья, его сохранения и развития, повышает интерес школьников к математике, практическую значимость уроков математики в глазах школьников и их родителей.

Литература

1. Салаватова С.С. Вариативная составляющая в системе методической подготовки будущих учителей математики для национальных школ // Фундаментальные исследования. 2013. №1 (часть 2). – С. 352-356.

2. Салаватова С.С., Шуляренко Е.Ю. Модель методической системы формирования ценности здорового образа жизни при обучении математике // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 6; URL: www.science-education.ru/120-15496. Дата размещения статьи 23.11.2014 г.

3. Шабалов Н.П. Детские болезни. Учебник. 5 изд-е. В 2-х томах. Т1. СПб: Питер, 2002. С.24. (Серия «Национальная медицинская библиотека)

ХАРАКТЕРИСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ: ДИДАКТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

О.А. Саввина[1], М.О. Черноусов[2]

Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина, Елец, Россия

e-mail: [1]`oas5@mail.ru`, [2]`chernousov777@vail.ru`

Аннотация: В статье охарактеризованы электронные образовательные ресурсы, актуальность и перспективы их использования в условиях внедрения ФГОС ООО.

Ключевые слова: электронные образовательные ресурсы, повышение качества образования.

CHARACTERISTICS OF ELECTRONIC EDUCATIONAL RESOURCES: DIDACTIC ANALYSIS

Abstract: The article describes the electronic educational resources , relevance and prospects of their use in the conditions of introduction of the Federal state educational standards of general education.

Keywords: electronic educational resources , improving the quality of education.

Повышение качества, эффективности и доступности образования – традиционные педагогические проблемы. На первый взгляд, видится, что они потеряли свою новизну и стали частью повседневной жизни. Однако это далеко не так. Проблема соответствия системы образования потребностям современности не становится разрешенной. Поиск резервов, анализ системообразующих звеньев, представление наиболее благоприятных условий для развития образовательного процесса, повышение эффективности процесса обучения в целом продолжают оставаться актуальными.

На рубеже XX–XXI вв. в педагогической практике все чаще стали использоваться электронные образовательные ресурсы (ЭОР) — учебные материалы, для создания и воспроизведения которых применяются электронные устройства [1]. Общие требования к ЭОР, широко используемым в сфере образования (для реализации процесса обучения с помощью информационно-коммуникационных технологий) устанавливает национальный стандарт Российской Федерации «Информационно-коммуникационные технологии в образовании» [2].

ЭОР многочисленны, они имеют множественные характеристики, различные классификации (по цели создания, по основной информации, по наличию печатного эквивалента, по технологии распространения, по функции в учебном процессе, по характеру взаимодействия с пользователем и др.).

Самые простые электронные ресурсы – **текстографические**. Их часто называют электронными учебниками. Текстографические ЭОР эффективны, когда необходимо привлечь сведения из многих источников, а также в случае, когда содержимое ресурса оперативно обновляется. Очевидно, что преимущества электронного текста проявляются в тех видах деятельности, где характерна работа со многими информационными источниками и необходимо ориентироваться в последних достижениях науки, техники, производства.

Аудиовизуальные ресурсы представляют собой компьютерные файлы, содержащие картинку (фотографию), видеозапись, музыкальный фрагмент и т.д.

Относить эти ресурсы к образовательным можно только опосредовано, так как в общем случае дидактическая основа в них не заложена. Чаще всего они играют роль электронных наглядных пособий при работе преподавателя в аудитории, повышая, уровень наглядности обучения. В рамках традиционных образовательных технологий они помогут разнообразить работу учащихся и преподавателей. При этом следует помнить, что компьютер исполняет роль вспомогательного средства и не влияет на изменение дидактической, методической, организационной и других сущностей образовательного процесса.

Мультимедийные ресурсы — самые мощные и интересные для образования. Термин «мультимедиа» применяется достаточно широко. Мультимедиа ЭОР — это возможность одновременного воспроизведения на экране компьютера и в звуке согласованной совокупности текстовых и аудиовизуальных элементов, представляющих различными способами изучаемые объекты и процессы. Характерным свойством мультимедиа контента является интерактивность. Необходимо отметить, что интерактив возможен и в текстографических ресурсах, но только в простой ссылочной форме, а вот при использовании элементарного аудиовизуального ресурса интерактивность вообще отсутствует. Несомненно, интерактивные мультимедиа ЭОР — наиболее сложные в изготовлении ресурсы, они включают множество содержательных элементов и программный сценарий их интерактивного представления. Создавая такие ресурсы, следует иметь в виду известное положение: чем проще и понятнее программа выглядит снаружи, тем сложнее она устроена внутри.

На сегодняшний день в рамках внедрения ФГОС ООО использование ЭОР становится все более актуальным в процессе обучения. Это приводит к изменениям в деятельности учителя (учитель и книга перестают быть единственными источниками информации). В педагогическом сообществе продолжают обсуждаться преимущественно положительные и довольно редко отрицательные стороны использования электронных образовательных ресурсов в обучении. По нашему мнению, к наиболее перспективным аспектам использования электронных образовательных ресурсов в процессе обучения следует отнести: учет индивидуальных особенностей учащихся при усвоении ими элементов содержания предмета; расширение информационного пространства за счет использования межпредметных связей; новые возможности развития зрительной памяти за счет разнообразия средств наглядности; увеличение познавательных возможностей учащихся на основе организации исследовательской деятельности по предмету.

Литература

1. Бордовский, Г.А. Использование электронных образовательных ресурсов нового поколения в учебном процессе: Научно-методические материалы /Г. А.Бордовский, И. Б. Готская, С. П. Ильина, В. И. Снегурова — СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2007.

2. ГОСТ Р53620-2009. Национальный стандарт Российской Федерации «Информационно-коммуникационные технологии в образовании. Электронные образовательные ресурсы» [электронный ресурс]. http://gostrf.com/norma_data/52/52050/index. htm.

3. Осин, А.В. Электронные образовательные ресурсы нового поколения /А.В. Осин. – М.: Ритм, 2005.

О ПУТЯХ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В.А. Тестов

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

e-mail: vladafan@inbox.ru

Аннотация: В статье рассматриваются пути решения основных проблем, стоящих перед математическим образованием (повышение мотивации учащихся, обновление содержания обучения, подготовка учителей математики). Главный путь повышения мотивации учащихся – это решение проблемы понимания изучаемого материала. Для качественной подготовки учителя математики необходимы фундаментальные знания и тесные связи вуза и школы.

Ключевые слова: мотивация изучения математики, обновление содержания обучения, подготовка учителей.

ABOUT SOLUTIONSOF PROBLEMS OF MATHEMATICAL EDUCATION

Abstract: This article discussesways to solvethe majorproblems facingmathematical education(increasestudent motivation, updating contentof training,training of teachersof mathematics). The mainway to increasemotivation of students– asolution to the problemof understandingthe material being studied. Quality training for teachersof mathematicsrequiresfundamental knowledgeandclose connectionsof the university andthe school.

Keywords: motivation tostudy mathematics, updatelearning content, teacher training.

В российском математическом образовании накопилось немало проблем. Основные из них обозначены в концепции развития математического образования. Необходимо начать работу по ее реализации, нацелив усилия на решение этих основных проблем. Одна из основных проблем – низкая мотивация к изучению математики. Причин такой низкой мотивации несколько и главные из них обозначены в концепции. Ясны и пути преодоления этих проблем: необходимо кардинально изменить отношение общества к математическому образованию, шире пропагандировать его значение в печати, СМИ и Интернете, вовлекать учащихся в математические конкурсы, соревнования, олимпиады. Низкая мотивация учащихся тесно связана с проблемой понимания. Математика, как никакой другой предмет, требует особых методических приемов, направленных на достижение понимания.Надо учитывать, что современные молодые люди предпочитают символические и графические формы предъявления математических знаний по сравнению с вербальной формой, поэтому важно обеспечить в большей степени наглядность обучения математике, лежащую в основе развития познавательного интереса, который является ведущим мотивом учебно-познавательной деятельности. Для развития познавательного интереса могут использоваться и такие известные приемы как, занимательность; стимулирование творческого подхода, инициативы и самостоятельности в познании; создание позитивной психологической атмосферы, ситуации успеха.

Исследования отношения учащихся к изучению математики выявили основные факторы, оказывающие отрицательное воздействие на их отношение. Можно конечно игнорировать эти факторы, но тогда проблемы будут только нарастать. Один из таких факторов - необходимость решения большого количества задач со сложными выкладками. Для решения таких задач видимо следует в большей степени привлекать компьютер. Другой фактор, на который указали учащиеся - скучность, не эмоциональность предмета. Преодолеть этот фактор могут помочь и новые учебники, а главное – мастерство учителя. Третий фактор - необходимость постоянной опоры на прошлый опыт. Можно оправдываться тем, что это специфика математики, а можно эту специфику обратить во благо: постоянно и ненавязчиво проводить повторение, добиваясь более глубокого понимания и более прочного усвоения. Наконец, учащиеся указывают на большое количество непонятных терминов, символов, определений, которые необходимо запомнить. Совершенно ясно, что не следует требовать от школьников запоминания сложных формулировок, а подводить их к этому надо постепенно, используя на первых этапах изучения упрощенные, наглядные модели сложных понятий.

Как отмечено в концепции, в современных условиях интерес к математике должен поддерживаться многообразием ее приложений, тем самым, проблема развития интереса к изучению математики тесно увязывается с оптимальным решением другой проблемы – проблемы содержания образования, которое продолжает устаревать и остается формальным и оторванным от жизни. Математические методы за последние полстолетия стали более общими и разнообразными. Сочетание с гигантскими возможностями компьютеров позволило оформиться принципиально новому направлению научного познания – математическому моделированию и математическому эксперименту. В математике возникли новые важные разделы, требующие своего внедрения, как в вузовскую, так и в школьную программу по математике (теория графов, теория кодирования, фрактальная геометрия, компьютерный эксперимент и др.). Эти новые направления в математике обладают большим методологическим, развивающим и прикладным потенциалом. [4]

В настоящее время наблюдается перегруженность программ техническими элементами и устаревшим содержанием. Как этому не сопротивляются многие математики, все же ряд чисто технических вопросов придется исключить из школьной программы. Это можно сделать без особого ущерба для развития математического мышления, важно лишь сохранить при этом традиционное ядро обучения математике, но это ядро не четко очерчено, что тоже может привести к перегибам в другую сторону. Сейчас наблюдается большая активность в реформировании школьных программ. Учителя математики очень обеспокоены тем, что в результате кавалерийского наскока программы изменятся настолько, что от традиционной математики в ней ничего не останется.

Но менять школьную программу конечно надо. Как отмечал на Всероссийском съезде учителей математики В.М. Тихомиров, важнейшая задача математического просвещения – возбудить в человеке интерес к самому себе, как к мыслящей личности. Каждый человек должен научиться рассуждать и решать задачи. «Всех» надо обучать на общедоступном и осмысленном материале, чтобы у учащихся не закрадывалась мысль о заумности и бессодержательности нашего предмета.

К сожалению, такие мысли возникают у многих школьников. Например, они никак не могут понять, почему в век информационных технологий надо строить геометрические фигуры так же, как это делали древние греки, с помощью циркуля и линейки. Гораздо более интересными для них являются задачи из теории графов или из теории кодирования, которые не включены в школьную программу. Поэтому представляется, что целый рад традиционных разделов школьной математики следует оставить только для учащихся уже имеющих устойчивый интерес к математике и склонных к творчеству и размышлениям[4].

При работе с одаренными к математике учащимися необходимы совсем другие подходы в подборе содержания обучения. Для таких учащихся надо подбирать темы исследовательского характера, темы научных рефератов, циклов задач, математических проектов и экспериментов и пр. Важной составляющей школьной жизни России становятся школьные научные конференции. Выступления учеников с докладами на научных конференциях заметно способствуют становлению устойчивого интереса учащихся к изучению математики. Здесь многое зависит от учителя, от уровня его профессиональной подготовки, от его умения видеть, искать, находить и ставить задачи.

Поэтому одной из главных проблем математического образования является кадровая. Роль учителя в математическом образовании особенно велика, при обучении математике ученик очень часто сталкивается с проблемой понимания и, как показывает опыт, с ней ученик без диалога с учителем справиться не может. Математическое знание плохо совмещается со случайными постройками и требует особой культуры, как усвоения, так и преподавания. Поэтому учитель математики был и остается толкователем смыслов различных математических текстов.

От учителя зависит очень многое, зависит от уровня его профессиональной подготовки, от его умения создавать атмосферу творчества, видеть, искать, находить и ставить задачи. Однако учителей, которые могут качественно преподавать математику, учитывая, развивая и формируя учебные и жизненные интересы обучающихся в России не хватает. Поэтому все более остро встает проблема подготовки квалифицированных учителей математики. Хотя эта проблема и обозначена в концепции, однако не указаны пути ее решения, за исключением одного направления – студентам необходимо решать задачи элементарной математики в существенно большем объеме, чем сегодня. Разумеется, это важное направление, но это необходимо делать не в ущерб фундаментальной математической подготовке. Такая замена может только усилить «рецептурность» знаний студентов, не будет способствовать вовлечению их в научно-исследовательскую деятельность, а значит, не будет способствовать повышению качества подготовки учителей математики.

А такая опасность вполне реальна, поскольку Минобрнауки предлагает уже в другой концепции – концепции педагогического образования в качестве основной модели подготовки педагогических кадров прикладной бакалавриат, программа которого предполагает замену значительного объема теоретических курсов на практический компонент. Эта концепция далеко не во всем согласуется с концепцией развития математического образования. Общее направление этой концепции в некоторой части только развивает и усиливает те негативные тенденции, которые характерны ныне для педагогического образования –дальнейшее снижение уровня научной подготовленности и методической компетентности выпускников педвузов.

В образовательных стандартах профессионального педагогического образования нельзя найти, например, какие-либо требования к научной, предметной подготовке будущего учителя, к его владению основами преподаваемого предмета, в них нет ни слова о том, что учитель-предметник должен знать свой предмет хотя бы в объеме школьного курса. На это обстоятельство редко обращают внимание, а оно играет ключевую роль. Непонятно, почему методы преподавания предметов занимают такое скромное место в общем объеме подготовки. Непонятно, почему предметные знания по дисциплине не указаны в стандартах вообще, как будто учителя математики и музыки должны иметь почти одинаковую подготовку.Отметим, что именно владение предметом и методикой преподавания должно образовывать перечень компетенций преподавателя, необходимых для успешной профессиональной деятельности.

Определенные риски есть и в предложении значительно увеличить число педагогических практик. Надеяться на спонтанное формирование методического мастерства без теоретического базиса в ходе планируемого расширения практики в школе, по меньшей мере, наивно. Набирать преподавательское мастерство исключительно за счет собственной практики – занятие бесплодное, поскольку теоретический багаж и методические эрудиция и гибкость, накопленные за столетия педагогической мыслью, освоить лишь собственным умом невозможно. Невозможно это сделать и лишь на готовых примерах, наблюдая за опытными учителями, поскольку процесс принятия методического решения учителем интуитивен и часто скрыт. Индивидуальные обстоятельства неповторимы и могут быть унифицированы только за счет теоретической базы, которую предлагает педагогическая наука. Однобокое увлечение практикой приведет к подготовке ремесленников, но никак не людей общества, основанного на знаниях[2].

Повышение значимости самостоятельной работы студентов и роли вариативного компонента в новых стандартах можно только приветствовать. Однако для того, чтобы стоящие за этим благие намерения стали реальностью, необходимо создать соответствующие условия. Никто даже серьезно не озадачился тем, способны ли студенты физически справиться с предлагаемым объемом самостоятельной работы и готовы ли к ней. Даже неспециалистам из собственного опыта ясно, что объем самостоятельной работы студентов должен возрастать постепенно, а на первом курсе их необходимо специально обучать приемам рациональной организации различных видов самостоятельной деятельности. Эффективная и продуктивная самостоятельная работа студентов требует эффективного и продуктивного управления и контроля со стороны преподавателя. На деле же руководство самостоятельной работой студентов фактически перестало входить в его учебные поручения. Может ли он при такой нагрузке качественно управлять самостоятельной работой студентов? [3].

Пора перестать скоропалительно плодить до конца не доработанные стандарты и учебные планы и постоянно их корректировать. Стабильность стандартов и базовой части учебных планов на протяжении относительно длительного периода – непременное условие самоорганизации вузов и повышения качества профессионального образования. Пора наконец перестать варварски разрушать уникальную отечественную систему педагогического образования.

Спецификой подготовки студентов в педагогическом вузе всегда была профессиональная направленность всех видов деятельности, введение контекста будущего преподавания в школе в изучение всех дисциплин, в частности математики. Очень важно, чтобы в вузе, где готовят учителей, очень хорошо знали саму систему школьного образования, ее проблемы. В широком смысле необходима интеграция между вузом и системой образования. Педвузы всегда были тесно связаны со школами, а большинство непедагогических вузов слабо взаимодействует со школами.

Забота о подготовке учителя должна стать главной заботой общества и государства. Еще 140 лет назад об этом хорошо сказал великий русский писатель и мыслитель Ф.М. Достоевский: «Деньгами вы, например, настроите школ, но учителей сейчас не наделаете. Учитель – это штука тонкая; народный, национальный учитель вырабатывается веками, держится преданиями, бесчисленным опытом. ... Люди, люди – это самое главное. Люди дороже даже денег. Людей ни на каком рынке не купишь и никакими деньгами, потому что они не продаются и не покупаются, а опять-таки только веками выделываются»[1].

В резолюции Всероссийского Съезда учителей математики (2010 г) отмечается, что съезд считает важным повысить государственный статусучителя, включая улучшение условий его труда и повышение заработной платы, модернизацию системы оценки его труда и значительное упрощение системы отчетности, формирование отношения к профессии учителя как к государственной миссии. Только в случае таких изменений в статусе учителя – ключевого звена образования - можно ожидать положительных результатов в деле модернизации математического образования.

При решении этой проблемы следует опираться на опыт таких стран, как Финляндия, которая, согласно данным Международной программы оценки PISA, по качеству школьного образования удерживает первое место. Причина такого успеха финнов в учителях, которые на сегодня одни из лучших в мире, и объясняется это большим престижем профессии педагога. В Финляндии своевременно осознали, что в эпоху глобализации их главное стратегическое оружие – учитель. Вот это понимание очень необходимо и нашему правительству.

Литература

1. Достоевский Ф.М. Дневник писателя (1873). Полное собрание сочинений в 30 т. –Л., 1980. Т. 21.

2. Гребенев И.В., Кузнецов А.А. Подготовка педагогов для будущей школы. Перспективы и риски реформы педагогического образования //Вестник ННГУ им. Н.И.Лобачевского. Серия: Социальные науки, 2014, №3(35),с. 146-155.

3. Клековкин Г.А. Педагогическое проектирование или педагогическое прожектерство? //Тенденции и перспективы развития математического образования: материалы XXXIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педвузов. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2014. – С. 43-49.

4. Тестов В.А. Обновление содержания обучения математике: исторические и методологические аспекты: монография. – Вологда, ВГПУ, 2012. – 176 с.

О КУРСЕ ПО ВЫБОРУ «ИНТЕГРАЛЫ С ПАРАМЕТРАМИ»

В.Е. Щербатых

Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина, Елец, Россия

e-mail: wega18@mail.ru

Аннотация: В статье на основе многолетнего опыта чтения спецкурса «Интегралы с параметрами» на физико-математическом факультете, автор обосновывает правильность выбора тематики курса, обеспечивающего расширение базовых знаний и повышающего качество будущих специалистов.

Ключевые слова: интеграл, интегрирование, параметр, равномерная сходимость, функция.

ABOUT COURSE ON CHOICE «INTEGRALS WITH PARAMETERS»

Abstract: In the article on the basis of long-term experience of reading of the special course "Integrals with parameters" on a mathematical faculty, an author grounds the rightness of choice of subjects of course, providing the spread of the base learning and improving quality future specialists.

Keywords: integral, integration, parameter, even convergence, function.

Речь пойдет о курсе по выбору «Интегралы с параметрами», который читается автором на выпускных курсах физико-математического факультета. Есть несколько причин знакомить студентов с этим материалом.

Во-первых, с основными понятиями математического анализа студенты знакомятся на первом курсе, когда не имеют еще опыта освоения серьезных университетских дисциплин, поэтому, как правило, не все основополагающие понятия усваиваются должным образом.

Во-вторых, в связи с переходом на Болонскую систему образования, уменьшились объемы в часах многих дисциплин, в частности это касается и дисциплины «Математический анализ» направления подготовки, например, «Прикладная математика и информатика». Если до Болонской системы дисциплину читали 4 семестра по 36ч. лекций и 36 ч. практических занятий, то сейчас читают 3 семестра по 18 ч. лекций и 18 ч. практики. А объем материала практически не изменился. Так в первом семестре за 18 часов необходимо рассмотреть следующие разделы:

-вещественные числа (определения, свойства, приложения);

-теория пределов (основные понятия, теоремы о пределах, монотонная варианта, принцип сходимости);

-функция одной переменной (понятие, предел, непрерывность, свойства);

-производные и дифференциалы (основные понятия, основные теоремы, высшие порядки, формула Тейлора);

-исследование функций (экстремумы, выпуклые и вогнутые функции, асимптоты, построение функций, раскрытие неопределенностей);

-неопределенный интеграл (простейшие приемы вычисления, интегрирование рациональных выражений, некоторых иррациональных выражений, функций, содержащих тригонометрические и показательные выражения).

Очевидно, невозможно полноценно («с толком, с чувством»), вычитать все это, а студентам глубоко освоить, поэтому хотим мы этого или не хотим (а мы не хотим), но у студентов знания будут фрагментарными. А ведь это одна из базовых дисциплин, основания которой являются фундаментом математических знаний.

В процессе освоения курса по выбору «Интегралы с параметрами», студенты знакомятся с различными видами интегралов, в том числе с замечательными интегралами [1]:

- Фруллани $\left(\int\limits_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx,\ a, b>0\right)$;

- полными эллиптическими $\left(E(k)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-k^2 \sin^2 \varphi\right)^{\pm\frac{1}{2}} d\varphi\right)$;

- Эйлера $\left(B(a,\ b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx,\ a, b>0;\ \ \Gamma(a)=\int\limits_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx,\ a>0\right)$;

- Лежандра $\left(\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin mx}{e^{2\pi x}+1} dx,\ m>0\right)$;

- Лапласа $\left(\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2+x^2} dx; \int\limits_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2+x^2} dx,\ \alpha, \beta>0\right)$;

- Френеля $\left(\int\limits_0^{\infty} \sin x^2 dx; \int\limits_0^{\infty} \cos x^2 dx\right)$ - эти интегралы не зависят от параметра, но вычисляются с применением данной теории;

- функцией Бесселя $\left(J_0=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \Theta) d\Theta\right)$;

- Раабе $\left(R_0=\int\limits_0^1 \ln \Gamma(a) da\right)$.

Как показывает опыт, некоторые из приведенных выше интегралов вызывали большой интерес у хорошо успевающих студентов еще в процессе изучения дисциплины «Математический анализ», но без соответствующих знаний подступиться к таким интегралам было нелегко.

Вообще говоря, освоение тематики «Интегралы с параметрами» на последнем курсе обучения, помогает студентам заблаговременно готовиться к государственной итоговой аттестации, поскольку исследование интегралов, зависящих от параметров, предполагает высокий уровень знаний.

Вот лишь неполный перечень разделов математического анализа, которые задействованы при освоения курса «Интегралы с параметрами».

1) Сходимость (равномерная сходимость) функциональных последовательностей и рядов (например, предел функции можно определить, как сходимость функциональной последовательности - используется в определениях);

2) разложение функций в ряд (например, разложением в ряд вычисляется интеграл Лапласа $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\ dx$;

3) непрерывность и предел функции нескольких переменных, равномерное стремление к предельной функции (например, в утверждении о предельном переходе под знаком интеграла требуется равномерное стремление к предельной функции);

4) перестановка двух предельных переходов (предлагается обобщенная формулировка теоремы, сформулированной ранее в курсе математического анализа);

5) неопределенный интеграл, свойства и методы интегрирования;

6) определенный интеграл, свойства;

7) несобственные интегралы 1-го и 2-го родов, признаки сходимости (например, при исследовании на равномерную сходимость интегралов вида $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\cos x\ dx$;

8) кратные интегралы и способы их вычисления (для интегрирования под знаком интеграла, например, когда в интеграле $I=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}x}{x\sqrt{1-x^2}}\ dx$ заменяется выражение $\frac{\mathrm{arctg}x}{x}$ равным ему интегралом $\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$);

9) простейшие дифференциальные уравнения (когда используется прием дифференцирования под знаком интеграла);

10) элементы теории функций комплексного переменного (например, при вычислении интеграла $I=\int\limits_0^\infty e^{a\cos x}\sin(a\sin x)\frac{dx}{x}$).

Кроме того, при рассмотрении некоторых видов интегралов, можно использовать различные подходы для вычисления одного и того же интеграла. Например, интеграл

$$J=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}x}{x\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

можно вычислить двумя способами:

а) вводя параметр, рассматривают более общий интеграл $J(y)=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}xy}{x\sqrt{1-x^2}}\ dx$, потом дифференцируют по y под знаком интеграла. Получается интеграл, который легко вычисляется. Результат интегрируют по параметру, находят константу и полагают $y=1$;

б) заменяют в подынтегральной функции выражение $\frac{\mathrm{arctg}x}{x}$ равным ему интегралом $\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$, потом записывают исходный интеграл в виде двойного, меняют порядок интегрирования и получают конечный результат.

Такое всеобъемлющее исследование способствует углублению и расширению базовых знаний, формированию соответствующих компетенций, удовлетворению познавательного интереса.

Несомненно, элементы данного курса могут входить в рамки дисциплины «Математический анализ», но только частично. В этом случае объем изучения будет ознакомительным, поэтому невозможно будет показать многообразие методов исследования, потенциал практического применения, без чего вообще интегральная тематика будет неполной.

Как отдельная дисциплина, курс «Интегралы с параметрами» реализует принцип системности обучения на основе внутридисциплинарных связей, сочетает в себе фундаментальность, профессиональную направленность, что приведет к повышению качества будущего специалиста и, соответственно, его конкурентоспособности.

Литература

1. Г.М.Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3т. Т.2, М.- Физматлит, 2003, 800с., ISBN 5-9221-0156-0.

РОЛЬ УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

С.В. Щербатых[1], О.Ю. Мелякова[2]

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец, Россия

e-mail: [1]shcherserg@mail.ru,[2]lesikx5@mail.ru

Аннотация: В статье рассматривается основная цель работы школы; модернизация процесса подготовки учащихся на всех ступенях общего образования; представление учащихся о учебно-исследовательской деятельности.

Ключевые слова: учебно-исследовательская деятельность, метапредметные результаты, модернизация процесса обучения.

ROLE OF EDUCATIONAL AND RESEARCH ACTIVITY OF SCHOOL STUDENTS IN TRAINING OF MATHEMATICS

Abstract: In article the main objective of work of school is considered; modernization of process of training of pupils at all steps of the general education; idea of pupils of educational and research activity.

Keywords: educational and research activity, metasubject results, training process modernization.

Совершенствование учебного процесса идет сегодня в направлении увеличения активных методов обучения, обеспечивающих глубокое проникновение в сущность изучаемой проблемы, повышающих личное участие каждого обучающегося и его интерес к учению. [1]

Цель работы школы помимо образовательной, заключается также в формировании у школьников интереса к самостоятельному получению знаний, воспитании в них стремления к саморазвитию. Одним из направлений формирования навыков саморазвития у школьников является учебно-исследовательская работа, которая способствует развитию мышления у школьников, стимулирует их интерес к самостоятельной работе и расширяет образовательный опыт путем приобщения их к научным исследованиям.

Для реализации поставленной цели необходимо решение следующих задач:

1) выявление наиболее одаренных и продвинутых школьников, имеющих выраженную мотивацию к научной деятельности;

2) создание благоприятных условий для развития учебно-исследовательской деятельности школьников;

3) содействие всестороннему развитию личности школьника, формированию его объективной самооценки, приобретение навыков самостоятельной работы и работы в творческих коллективах, овладение методологией научных исследований;

4) обеспечение участия школьников в проведении поисковых, методических и педагогических научных исследований по математике;

Целевая установка формирования у учащихся названных качеств обозначена в Федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования (ФГОС), который устанавливает требования к результатам обучающихся, освоивших основную образовательную программу среднего общего образования. Согласно ФГОС приоритетными результатами личностного развития учащихся являются их готовность и способность к саморазвитию и личностному самоопределению, сформированность мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности. Ожидаемые метапредметные результаты образовательной деятельности определены как способы деятельности, применимые как в рамках образовательного процесса, так и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях, освоенные обучающимися на базе одного, нескольких или всех учебных предметов [2].

В ФГОС метапредметные результаты конкретизированы посредством метапредметных умений, необходимых для осуществления таких способов деятельности. К ожидаемым метапредметным результатам относятся:

- овладение умением ставить и принимать цели и задачи учебной деятельности;

- освоение способов решения проблем творческого и поискового, исследовательского характера;

- формирование умений планировать, контролировать, оценивать учебные действия в соответствии с поставленной задачей и условиями ее реализации, определять наиболее эффективные способы решения;

- формирование умения понимать причины успеха/неуспеха учебной деятельности и способности конструктивно действовать в ситуациях неуспеха;

- освоение начальных форм познавательной и личностной рефлексии;

- использование знаково-символических способов представления информации для создания моделей изучаемых объектов и процессов, схем решения учебных и практических задач;

- активное использование речевых средств и средств информационно-коммуникационных технологий для решения коммуникативных и познавательных задач;

- использование различных способов поиска, сбора, обработки, анализа, организации, передачи и интерпретации информации;

- умение осознанно строить речевое высказывание в соответствии с поставленными задачами и составлять тексты в устной и письменной форме;

- овладение логическими действиями сравнения, анализа, синтеза, обобщения, классификации по родовидовым признакам, установления аналогий и причинно-следственных связей, построение рассуждений, отнесения к известным понятиям;

- готовность вести диалог, признавать возможность существования различных точек зрения, аргументированно излагать свое мнение и оценку событий;

- умение договариваться о распределении функций и ролей в совместной деятельности, осуществлять взаимный контроль, адекватно оценивать собственное поведение и поведение окружающих;

- готовность конструктивно разрешать конфликты посредством компромисса и сотрудничества и т.д. [2]

Изменение требований к результату обучения влечет за собой и модернизацию процесса подготовки учащихся на всех ступенях общего образования. В связи с этим современной школе требуются новые подходы к организации образовательного процесса, обостряется необходимость поиска возможностей формирования в учебном процессе деятельности учащихся, способствующей развитию умений самостоятельно приобретать знания и применять их на практике, размышлять, сопоставлять разные факты, точки зрения, формулировать и аргументировать собственную позицию. В качестве такой деятельности может быть рассмотрена учебно-исследовательская деятельность учащихся.

Участвуя в учебном исследовании, школьники обучаются математической деятельности, ибо они непосредственно проделывают эту деятельность. Учебные исследования создают своего рода платформу для активной мыслительной деятельности учащихся. В таком случае важна не только работа учащихся, но и то, каким образом они приобретаются.[3]

Особую роль в развитии учащихся играет их исследовательская деятельность, непосредственно связанная с усвоением математических знаний. Поэтому решение стоящих перед школой задач возможно посредством приобщения учащихся к исследовательской деятельности в процессе обучения.[3]

Учебно-исследовательская деятельность - как метод обучения математике не только формирует, развивает мышление учащихся, но и способствует формированию высшего типа мышления – творческого мышления.

Учебно-исследовательская работа позволяет расширить представление учащихся о различных предметных областях и применить знания, полученные учащимися, в реальной ситуации. Знания, выходящие за рамки учебника, помогают стереть границы между предметами, создать для себя целостную картину окружающего мира и определить свое место в нем.[4]

Участие в исследовательской деятельности дает возможность максимально раскрыть свои способности при работе в группе или индивидуально, получить больше знаний в отдельной области, показать публично достигнутый результат при защите работы. Основная задача учителя привлечь к этой работе как можно больше рассудительных, усердных учащихся, еще не успевших проявить высокую степень одаренности.

Литература

1. Далингер В.А. О тематике учебных исследований // Математика в школе. – №9. – 2000. – С. 7-10

2. Федеральный государственный образовательный стандарт общего образования. Проект. М.: РАО, 2011.

3. Далингер В.А. Поисково-исследовательская деятельность учащихся по математике: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2005. – 456 с

4. Левитес Д.Г. Современные образовательные технологии. Под ред. Т.И. Шамовой. – Новосибирск, 1999.

Научное издание

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, СТОХАСТИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: НОВЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Отпечатано с готового оригинал-макета,
предоставленного ред. коллегией НМС по математике Министерства образования и науки РФ
Технические редакторы: *С.Н. Дворяткина, Д.И. Максимов*

Дизайн обложки *М.В. Рогова*

Подписано в печать 24.04.2015 г. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 60,0. Тираж 500 экз. Заказ 519.

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41

Для заметок