НАУКА В ВУЗАХ: МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА

ПРОБЛЕМЫ ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Труды
Международной научно-образовательной конференции

Москва
Российский университет дружбы народов
2009

УДК 510.2
ББК 22+74.5
Н 34

Н 34 **Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования:** Труды Международной научно-образовательной конференции. – М.: РУДН, 2009. – 357 с.: ил.

ISBN 978-5-209-03223-6 ББК 22+74.5

В Москве, в Российском университете дружбы народов с 23 по 27 марта 2009 года проходила Международная научно-образовательная конференция «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования».

Организаторами конференции выступили Федеральное агентство по образованию (ФАО), Российский университет дружбы народов (РУДН), Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) (МИРЭА), Российский государственный социальный университет (РГСУ), Московский педагогический государственный университет (МПГУ), Ярославский государственный педагогический университет (ЯГПУ), Российский новый университет (РосНОУ), Научно-методический совет по математике Министерства образования и науки РФ (НМС), Академия педагогических и социальных наук (АПСН), Высшая школа им. Павла Влодковица, г. Плоцк, Польша (ВШ ПВ), Математический институт Педагогического университета им. Комиссии Народного Образования, г. Краков, Польша (МИ ПУ), Варненский свободный университет, г. Варна, Болгария (ВСУ), Международное образовательное учреждение, г. Кошице, Словакия (МОУ), Центр современного образования (ЦСО).

Конференция проходила при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) и Федерального агентства по образованию (ФАО) и при участии издательств Физматлит, Дрофа, Академия, Лань, БХВ-Петербург.

С пленарными докладами выступили выдающиеся деятели науки и образования: академик Европейской АН, член-корреспондент РАН Л.Д. Кудрявцев; ректор РУДН, академик РАО В.М. Филиппов; ректор МИРЭА, член-корреспондент РАН А.С. Сигов; ректор РосНОУ, профессор В.А. Зернов; ректор ВШ ПВ, профессор З. Крушевский (Польша); ректор ЯГПУ, профессор В.В. Афанасьев; профессор В.И. Буренков (Англия); академик РАН, директор Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга МГУ им. М.В. Ломоносова А.М. Черепащук; академик РАЕН, профессор С.П. Капица; член-корреспондент РАН, профессор Д.Р. Хохлов; член-корреспондент РАО, профессор Н.Х. Розов; член-корреспондент РАО, профессор Г.И. Саранцев и др.

Работа ученых и педагогов протекала в следующих 10 секциях:

Секция 1. «Научные исследования в области математики в вузах».

Сопредседатели: М.С. Джабраилов, профессор АзГПУ, (Азербайджан); В.М. Тихомиров, профессор МГУ;

Секция 2. «Прикладные задачи математики».

Сопредседатели: А.Г. Ягола, зам. председателя Президиума НМС по математике, профессор МГУ;

Секция 3. «Научные исследования в области физики в вузах».

Сопредседатели: Н.М. Кожевников, ученый секретарь НМС по физике, профессор; В.С. Сенашенко, профессор РУДН.

Секция 4. «Научные исследования в области информатики в вузах».

Сопредседатели: В.В. Тихомиров, ученый секретарь НМС по информатике, профессор; А.И. Кириллов, профессор МЭИ;

Секция 5. «Проблемы высшего профессионального образования».

Сопредседатели: В.А. Зернов, ректор РосНОУ; С.А. Розанова, профессор МИРЭА; О.В. Зимина, профессор МЭИ;

Секция 6. «Актуальные проблемы школьного образования».

Сопредседатели: В.А. Гусев, профессор МПГУ; М. Клякля, директор МИПУ(Польша);

Секция 7. «История математики и естествознания».

Сопредседатели: С.С. Демидов, профессор МГУ, С.С. Петрова, с.н.с. МГУ.

Секция 8. «Проблемы среднего профессионального образования».

Сопредседатели: В.А. Лазарев, директор ЦСО, профессор; С.Н. Штанов, директор НАМТ.

Секция 9. «Проблемы воспитания молодёжи».

Сопредседатели: Л.Д. Кудрявцев, член-корреспондент РАН; П. Павлов, проректор ВСУ, профессор (Болгария); В.Т. Петрова, профессор МФТИ; М.И. Рожков, директор педагогического института ЯГПУ, профессор.

Секция 10. «Информационные технологии в образовании».

Председатель: В.А. Соколов, профессор ЯрГУ.

Такой широкий охват тематики данной конференции отражает плодотворность и многоплановость интересов профессорско-преподавательского состава многих стран в области математики и естественнонаучных дисциплин.

В работе конференции приняли участие около 500 ученых и педагогов и 94 человека участвовали заочно (с публикацией статей) из России и разных стран ближнего и дальнего зарубежья: Азербайджана, Великобритании, Армении, Болгарии, Грузии, Казахстана, Латвии, Литвы, Молдавии, Польши, Украины.

Отличительные особенности конференции:

- впервые объединены усилия трех научно-методических советов по математике, физике и информатике Министерства образования и науки РФ;

- актуализированы проблемы состояния и путей развития науки в вузах, межпредметных связей;
- с пленарными докладами выступили выдающиеся деятели науки и образования.

По итогам работы Конференции принято
РЕШЕНИЕ

1. Учитывая большой интерес к тематике конференции, интегрирующей математику, физику и информатику, предложить Оргкомитету проводить конференцию ежегодно на базе крупных вузов России.
2. .Считать тематику конференции важной и актуальной для развития науки в вузах и для решения проблемы профессионального образования. Целесообразно шире привлекать к участию в работе конференции научно-педагогическую общественность, представляющую другие естественные и гуманитарные науки.
3. Использовать систему информационной поддержки при организации и подготовке конференции (Easy Chair или, например, представленную на секции 10 группой авторов Н.С. Живченковой и др.).
4. Учитывая существенное увеличение значимости и объема самостоятельной работы студентов при переходе к ФГОС 3-го поколения, необходимо усовершенствовать методическое обеспечение учебного процесса, шире используя современные информационные технологии. Необходимо особое внимание обратить на исследование методологии применения ИТ в профессиональном образовании, в том числе на проблему разработки простых и эффективных средств поддержки создания электронных учебных пособий.
5. Считать деятельность Научно-методических советов по математике, физике и информатике важной и конструктивной для сохранения, консолидации и совершенствования системы российского образования.

6. Обратить внимание НМС по математике, физике, информатике на необходимость выработки комплекса мер для привлечения учащихся школ и вузов к участию в научно-исследовательской работе.

7. Войти в Министерство образования и науки РФ с предложением допустить НМС к экспертизе заданий ЕГЭ с целью их усовершенствования.

8. Рекомендовать вузам при переходе на двухуровневую систему высшего образования не сокращать объем фундаментальной подготовки студентов.

9. Предложить Научно-методическим советам разработать меры по усилению контроля за качеством учебников и учебных пособий.

10. Признать эффективность федерального Интернет-экзамена в сфере профессионального образования и дать положительную оценку структурному подходу к формированию содержания аттестационных педагогических измерительных материалов для оценки качества математической подготовки студентов в свете требований государственных образовательных стандартов.

11. Рекомендовать НМС принять участие в разработке инструментария и методики для оценки освоения компетенций по математическим и естественнонаучным дисциплинам базовой части Федеральных государственных образовательных стандартов 3-го поколения.

12. Предложить НМС и учебно-методическим объединениям вузов обсудить два различных подхода к построению схемы изучения математики в школе и вузе: линейный метод и метод «диалектической спирали».

13. Оргкомитету Конференции предложить выделить из весьма перегруженной секции 5 «Проблемы высшего образования» новую секцию «Организация и стимулирование творческой деятельности студентов», на которой бы обсуждались, в том числе, проблемы и формы привлечения студен-

тов к научно-исследовательской работе и участию в олимпиадах и конкурсах.

14. Обратить внимание Министерства образования и науки РФ на тот факт, что за последние 10–15 лет слово «педагогический» исчезло из названий нескольких десятков региональных университетов. Из учебных планов этих «гуманитарных», «открытых» и т.п. университетов практически исчезли методики преподавания конкретных школьных предметов. Сложившаяся практика может привести к непредсказуемым последствиям в уровне и качестве подготовки будущих школьных учителей.

15. Оргкомитету конференции способствовать расширению научно-педагогических контактов с образовательными учреждениями стран – организаторов конференции: Белоруссии, Болгарии, Казахстана, Польши, Словакии, стран Балтии, Украины.

Оргкомитет

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РОССИЙСКИХ И МИРОВЫХ ТЕНДЕНЦИЙ РАЗВИТИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

В.М. Филиппов
академик РАО,
ректор Российского университета дружбы народов

Образование, как высшее так и среднее, основано в значительной мере на культурно-исторических традициях, социально-экономических и политических реалиях своих стран. В большей степени это относится к сферам гуманитарного и социально-экономического образования.

Вместе с тем, в условиях глобализации и интернационализации высшего образования, возрастания роли образования, и особенно – высшего, в построении обществ, основанных на знаниях, возрастания академической и трудовой миграции населения в мире возникает необходимость учета как региональных (например, в рамках Болонского процесса), так и мировых тенденций в развитии высшего образования, в стратегии развития образования всех стран, претендующих на полноценное участие (а тем более – на лидирующие позиции) на мировой арене.

К числу тех тенденций, которые Россия восприняла и реализует (конечно, в ряде случаев – по особому, а иногда даже опередив показатели ряда мировых тенденций), относятся:

- переход к массовому высшему образованию;
- расширение доступности и создание механизмов более объективного обеспечения доступа к высшему образованию (ЕГЭ);
- диверсификация структуры и содержания высшего образования;
- стратификация учреждений высшего образования;
- реализация в РФ принципов Болонского процесса;

– разработка мер по повышению качества высшего образования и его признания как в РФ, так и на международном уровне;

– стимулирование расширения связи высшего образования и научных исследований (фундаментальных или прикладных исследований);

– разработка содержания высшего образования, основанного на компетентностном подходе и в сотрудничестве с работодателями;

– большее взаимодействие с рынками труда и потребностями экономик и обществ;

– многоканальность финансирования вузов;

– определение вузами собственных миссий и разработка стратегий развития, реализация принципов стратегического менеджмента.

Вместе с тем, следует еще более акцентировать внимание на ряде мировых тенденций в развитии высшего образования.

При подготовке Всемирной Конференции ЮНЕСКО по высшему образованию 2009 года на всех Региональных подготовительных конференциях ЮНЕСКО было подчеркнуто стремление всех континентов, в силу тенденции расширения академической и трудовой миграции населения, к *гармонизации* систем высшего образования в мире, на основыве принципов Болонского процесса.

Известной тенденцией в мире, особенно в последние годы, после завершения перехода к массовому высшему образованию, в целях повышения качества высшего образования, является намерение усиления (диверсификации) критериев отбора в высшие учебные заведения. При этом особое внимание уделяется качеству полного среднего образования, основанного, как правило, на 12–13-летнем периоде обучения и на профильном обучении в последние 2–3 года получения полного среднего образования.

К сожалению, Россия остается в числе менее 10% стран-«изгоев» в мире, которые реализуют менее чем 12-летнее школьное образование, с ранних лет эксплуатируя детей интенсивными нагрузками, в ущерб здоровью детей и качеству школьного образования, содержание которого за последние 20 лет во всем мире существенно разрослось.

Никто в мире не будет подталкивать Россию к 12-летнему школьному образованию: как показала комиссия Сената США в 1958 году, среди одной из важнейших причин опережения русскими США в запуске в космос первого человека, являлось более лучшее в СССР образование, чем в США («Русские победили США за школьной партой»). Поскольку извне никто не заинтересован в очередном усилении России, то и подталкивать нас на переход на 12-летнее школьное, более качественное образование, никто не будет, пока Россия сама (вместе с Туркменистаном и некоторыми оставшимися слаборазвитыми странами мира) не будет к этому готова.

Ограниченность ресурсов для развития высшего образования, как одно из следствий массового высшего образования (почти повсеместное уменьшение доли бюджетного финансирования, выделяемого высшим учебным заведениям в расчете на одного студента и расходов на науку в расчете на одного преподавателя вуза), требует разработки четких правил финансирования высшего образования и научных исследований в вузах со стороны государства: защита бюджетов университетов при финансировании бюджетов на последующие периоды во Франции и в десятках «франкофонных» стран; финансирование, основанное на известных формулах расчета как по образовательной, так и по научной деятельности университетов Великобритании и в десятках «англофонных» стран.

При этом, в последнее время в большинстве стран мира (кроме некоторых – Китай, Казахстан и др.) правила финансирования все в большей мере становятся основанными не на категорировании вузов, а на принципах конкуренции за бюджетные средства и средства фондов по известным, заранее определенным критериям.

В развитых странах мира очевидной является тенденция создания или позиционирования вузов в рамках диверсификации учреждений высшего образования: помимо университетов *классического типа и отраслевых вузов*, все большее количество вузов позиционируется *как инновационные, предпринимательские, исследовательские, корпоративные и др.*

При этом, многие университеты мира (особенно – крупные, многопрофильные) реализуют одновременно целый «ряд миссий», действуя как в сфере исследовательской деятельности (фундаментальные научные исследования), так и как инновационные (предпринимательские) университеты, реализуя прикладные научные исследования и консалтинг, вплоть до создания корпоративных факультетов в своих структурах. Таким образом, фактически происходит отход высших учебных заведений от чисто «Гумбольдтовской модели» университетов, основанной на жесткой зависимости образовательной и научной деятельности каждого преподавателя: в ряде случаев, значительная часть профессорско-преподавательского состава задействована в реализации учебно-методической работы для повышения качества образования, в чисто прикладной деятельности в работе с производствами или в других видах деятельности (консалтинг, ДПО и т.д.).

В этих условиях возникает необходимость более гибких внутренних структур управления в университетах; очевидно, что существующая в российских вузах структура кафедр (в отличие от более крупных структур департаментов во всех ведущих университетах мира) не всегда позволяет обеспечить эффективные организационно-экономические механизмы реализации вышеуказанных многоцелевых задач, что особенно важно также в связи с еще одной известной мировой тенденцией – расширением междисциплинарных (часто – межфакультетских) программ подготовки специалистов, в первую очередь – на уровне магистратур.

В России мы обозначали необходимость таких изменений уже через полгода после дефолта 1998 года: в феврале 1999 года в Тюмени состоялось Всероссийское совещание «Организационно-экономические и структурно-функциональные изменения в российском образовании». Уже тогда были заложены (работой соответствующих секций Конференции) многие идеи последующей модернизации российского образования на всех уровнях – дошкольного; общего среднего; начального, среднего, высшего, послевузовского и дополнительного профессионального образования – уже тогда было заявлено, что дело не только в недостатке финансовых средств, а необходимы новые организационно-экономические механизмы и структурно-функциональные изменения на всех уровнях российского образования.

В настоящее время происходят достаточно серьезные структурные изменения в системе высшего образования, в частности, путем создания федеральных, исследовательских университетов. Однако опыт большинства стран мира говорит о том, что нужны и институциональные изменения – создание более гибких структур в вузах. В частности, в российских вузах достаточно сложно, с позиций нормативно-правового и экономического обеспечения, решаются многие вопросы межфакультетского взаимодействия в реализации новых междисциплинарных образовательных программ, при всем понимании их важности и перспективности в обеспечении инновационного развития экономики и обществ.

Здесь у нас ситуация в отрасли примерно такая же, как в автомобильной отрасли. Никакие миллиардные решения Москвы не помогли заводу «Москвич» (причем – задолго до финансового кризиса!); сейчас уже «АвтоВаз» задолжал десятки миллиардов рублей: автомобильная отрасль также не имеет достаточно гибких производственных систем, позволяющих гибко реагировать на изменяющиеся потребности рынка. Такая же примерно ситуация и у нас в сфере высшего образования. Не случайно, наверное, министр А.А. Фурсенко сказал, что «выпускники наших вузов не хуже наших автомобилей».

В частности, речь идет о жесткой системе кафедр. Здесь дело доходит до абсурда. В РУДН, например, около 200 кафедр. Рособрнадзором по представлению вуза присваивается ученое звание – «профессор» или «доцент» – *по кафедре.* Через некоторое время ученый совет вуза меняет название этой кафедры, кафедры с прежним названием уже нет, а на всю жизнь человек сохраняет выданный Рособрнадзором аттестат профессора или доцента по уже давно несуществующей кафедре!

Но это – частный, причем легко разрешаемый парадокс. Более важно создание таких образовательно-научных внутривузовских структур, которые бы более гибко реагировали на решение вновь возникающих задач. Причем Минобрнауки РФ уже принял ряд решений, подталкивающий необходимость ускорения решения этой задачи: в рамках нового перечня направлений подготовки и специальностей происходит укрупнение их; установлена возможность приема студентов на I курс не на конкретную специальность или направление подготовки, а в целом на факультет, с последующим распределением по специальностям и направлениям подготовки и др.

Еще одним принципиально важным вопросом является диверсификация экономики высших учебных заведений. Многоканальность финансирования вузов во многих случаях приводит к четкому пониманию многоканальности составляющих суммарной заработной платы профессорско-преподавательского состава и сотрудников вузов (что пока еще не вполне осознается в российской высшей школе), включая административно-управленческий персонал, финансируемых во все возрастающей мере на условиях достижения определенных показателей деятельности в реализации программ развития вузов.

В развитии многоканальности финансирования высшего образования, в условиях глобализирующегося мира, интернационализации высшего образования, все большую роль играет развитие экспорта образовательных услуг. Во всех ведущих странах мира, с учетом также значительного удовлетворения соответствующих внутренних рынков потребностями в высшем образовании, характерна достаточно целевая политика государственной поддержки продвижения высшего образования своих стран на рынки других стран мира (Франция, Великобритания, Германия, США; Болонский процесс); помимо получения значительных доходов в системы высшего образования своих стран, таким образом государства реализуют также свои геополитические и геоэкономические стратегические интересы. В Российской Федерации на сегодня не существует системы (в частности – структур, аналогичных DAAD (Германия), EduFrance (Франция), British Council (Великобритания), Американскому Совету по образованию), обеспечивающей аналогичную поддержку российским вузам в наборе иностранных студентов или в реализации их образовательных программ за рубежом.

В результате всем российским вузам «предоставлено право» самостоятельно искать потенциальных студентов в странах Африки, Азии и Латинской Америки. Вот и ездят наши «эмиссары-комиссары» из Сибири по странам Африки и Азии в поисках «своих» студентов. А поскольку «результат поездок должен быть», многие вузы принимают (например, из Индии и Китая) таких иностранных студентов, кто по итогам своих ЕГЭ не имеет право доступа к высшему образованию в этих странах, что в итоге дискредитирует в целом российское высшее образование в мире.

Более того, во-первых, далеко не все вузы имеют такие возможности, опыт, выпускников в десятках стран мира, как РУДН, и это касается не только «периферийных» вузов, но и очень сильных, однако ранее закрытых режимом секретности вузов, начиная с МГТУ им. Н.Э. Баумана, МИФИ и др.

Во-вторых, такая самостоятельность приводит к тому, что вуз находит «свою нишу» набора в какой-то одной стране, например, Китае, и превращает свой вуз в вуз массового приема китайских студентов, что не влияет положительно на процессы интернационализации вузовской жизни.

В-третьих, в этой «самостоятельности», будучи вынужденными во многих странах мира конкурировать с ведущими университетами как России, так и из США, Франции, Великобритании, а теперь и Германии, Китая, многие российские «несильные» вузы начинают демпинговать на ценах (не имея к тому же опыта и условий, инфраструктуры обучения иностранных студентов), что также приводит к дискредитации российского высшего образования на мировой арене.

Таким образом, для российского высшего образования крайне актуальной является создание общероссийской структуры (государственной или с участием частного капитала), централизованно решающей комплекс вопросов (начиная от рекламы российских вузов и маркетинга рынков труда и образовательных услуг более 200 стран мира) по подбору абитуриентов, организации приема в российские вузы иностранных студентов. В итоге это резко увеличит количество иностранных студентов, принимаемых в российские вузы (что особенно важно, в том числе в условиях известного демографического спада в Российской Федерации, как и во многих развитых странах мира), привлечет дополнительные финансовые ресурсы в российские вузы, что также немаловажно в условиях не только финансового кризиса.

Такая системная организация поддержки российским вузам в наборе иностранных студентов повысит качество набора иностранных студентов, а также будет способствовать, с помощью выпускников наших вузов, в перспективе решению стратегических геополитических и геоэкономических задач нашей страны. Не случайно, наверное, на сегодняшний момент, в преддверии 50-летия Российского университета дружбы народов, среди выпускников РУДН – десятки министров, а также президент и премьер-министры в различных регионах мира; среди них, в Латинской Америке – Президент Кооперативной Республики Гайяна; в Азии – премьер-министр Республики Казахстан; в Африке – премьер-министр Республики Чад.

О МАТЕМАТИКЕ

Л.Д. Кудрявцев
академик Европейской АН, чл.-кор. РАН,
первый заместитель председателя Президиума НМС по математике
Министерства образования и науки РФ,
советник МИАН им. В.А. Стеклова

В предлагаемой статье делается попытка дать описание математики как науки, а также анализируются некоторые трудности, возникающие в процессе ее развития.

Прежде всего, встает вопрос о том, что такое математика? В советский период в России было принято определение Ф. Энгельса, в котором говорилось, что математика изучает пространственные формы и количественные соотношения реального мира. Однако, это является не определением математики, как науки, а лишь указанием на одно из её приложений. Еще Галилей говорил, что вселенная – это книга, написанная на математическом языке. Поэтому существует мнение, что математика – это язык для описания реальных явлений, причем не только физических, химических и биологических, происходящих в материальном мире, но и социальных явлений, протекающих в человеческом обществе. Однако функцией описания явлений далеко не исчерпывается сущность математики. Математическое описание реальных явлений или, как говорят, их математическое моделирование дает возможность не только описывать, но и изучать эти явления, в частности, предсказывать их дальнейшее развитие. Таким образом, математика является одним из важнейших методов изучения (а не только описания) реальных процессов, протекающих в окружающем нас мире. Но это еще не ответ на вопрос, что такое математика. Математические модели не тождественны реальным явлениям, которые они описывают. Так что же представляют собой эти модели?

Говорят, что математика – абстрактная наука. Это в частности означает, что для математической модели не существенна конкретная реализация ее элементов. Так, например, одна и та же формула

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

описывает как гравитационное взаимодействие масс (закон всемирного тяготения Ньютона), так и взаимодействие электрических зарядов и магнитных масс (законы Кулона).

Важно подчеркнуть, что с помощью математического моделирования можно изучать разнообразные явления, в частности прогнозировать их развитие и в том случае, когда это невозможно делать с помощью постановки опытов. Это относится как к физическим, так и к социальным явлениям.

Вернемся снова к сущности математики. Что же является предметом ее изучения? Математика изучает определенного рода логические понятия и отношения между ними. Для этих понятий даются логические определения и постулируются их связи. Определяются теоретико-множественные, топологические, метрические, геометрические, аналитические, алгебраические и вероятностные структуры, которые и представляют собой предмет, изучаемый математикой. Конкретные определения этих структур даются в математической литературе.

Математические структуры представляют собой часть информационного поля, которое существует наряду с материальным (физическим) полем. Информационное поле состоит из реально существующих абстрактных фактов. Так, например, в то время, когда человечество еще не додумалось до теоремы Пифагора, она уже существовала в информационном поле как его реальный элемент, позже открытый людьми.

Информационное поле содержит в себе разнообразные логические (не только математические) структуры, все сведения о материальном (физическом) мире, о законах его развития, взаимодействии его частей, о его прошлом и будущем.

Все это говорит о большой роли информационного поля. Не случайно Евангелие от Иоанна начинается со слов «Вначале было Слово», а что такое «Слово» как не информация? Значимость понятия «Слово» разъясняется во второй части фразы «Вначале было Слово, и Слово было у Бога, и Слово было Бог».

Заметим, что информационное поле, о котором идет речь в настоящей статье, понимается не в божественном смысле, а как часть реального мира, неотъемлемо сопутствующего его материальной части. Конечно, все сказанное здесь об информационном поле является лишь некоторым внешним его описанием. Что же касается изучения его сущности, анализа взаимодействия информационного поля и окружающего нас мира и механизма этого взаимодействия, то это предстоит сделать человечеству в будущем.

Вернемся к математическим структурам. Интересно отметить, что разные логические понятия могут иметь одинаковые логические связи. Эти связи могут быть весьма неожиданными и удивительными. Вспомним, например, формулу

$$e^{\pi i} = -1,$$

открытую Леонардом Эйлером, связывающую четыре числа, действительные: -1, π, e и комплексное число i. Число -1 является отрицательным целым числом. Пополнение натуральных чисел отрицательными целыми числами и нулем дает возможность определить вычитание для любых натуральных чисел. Кроме того, вообще отрицательные действительные числа удобны в приложениях при измерении физических величин, например, температур тел, они бывают выше или ниже нуля; высоты расположения участков суши – на земле они могут быть выше и ниже уровня моря. Число π

связано с геометрией – оно равно отношению длины окружности к ее диаметру. Число e характеризуется тем, что показательная функция с основанием e совпадает со своей производной, причем основание показательной функции с таким свойством единственное. Наконец, число i является комплексным числом, которое возникло при решении квадратных уравнений. И вот эти четыре столь далеких друг от друга числа оказываются связанными замечательной формулой Эйлера. Эта формула является своеобразным математическим чудом. Не случайно она высечена на огромном камне фронтона главного здания университета Королевы в городе Кингстон, бывшем ранее столицей Канады.

Отметим еще функцию Гаусса

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt ,$$

которая применяется в теории вероятностей при исследовании как непрерывных, так и дискретных величин. В этой формуле снова присутствует число π. Казалось бы, какая связь может быть между задачами теории вероятностей и отношением длины окружности к ее диаметру?! Все это не может не вызывать восхищения стройностью, глубиной и непредсказуемостью математических связей.

Математические формулы содержат в себе много скрытой информации. Не случайно говорят, что формулы умнее нас. Это действительно так. Нередко математик правильно применяя формулы при исследовании какого-либо вопроса, неожиданно для себя приходит к результатам гораздо более сильным, чем он предполагал, более того, получает результаты, о которых раньше даже не думал.

Отметим так же, что разные по своей структуре математические понятия бывают, связаны одними и теми же логическими отношениями. Поэтому основной интерес в математике представляет изучение логических связей между рассматриваемыми объектами математических структур, а не только сами эти объекты. Поясним сказанное на двух примерах.

Сначала рассмотрим определение действительного числа. Прежде всего, определяется множество натуральных чисел, как упорядоченное множество, имеющее первый элемент, который называется единицей и обозначается 1. Постулируется, что в этом множестве определены операции сложения и умножения его элементов, обладающие свойством коммутативности и ассоциативности, а также дистрибутивности операции умножения относительно операции сложения. Предполагается ещё, что вместе с каждым элементом n множества натуральных чисел элемент $n+1$ так же принадлежит этому множеству и каждый элемент множества натуральных чисел может быть получен из единицы последовательным прибавлением к ней конечного числа единиц.

Во множестве натуральных чисел операции, обратные к операциям сложения и умножения, т.е. операции вычитания и деления, определены не для любых пар натуральных чисел. Однако, при расширении множества натуральных чисел до множества целых чисел $\mathrm{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,...\}$, как это было отмечено выше, операция вычитания становится определенной уже для любых целых чисел, а при расширении множества целых чисел до множества рациональных чисел $Q=\left\{0,\pm\frac{p}{q}, p,q\in \mathrm{Z}, q\neq 0\right\}$ операция деления определена для любых пар рациональных чисел, кроме деления на ноль. Доказывается, что каждое рациональное число можно записать в виде периодической десятичной дроби. С помощью рациональных чисел можно определить действительные числа и притом разными способами.

Первый способ (Вейерштрасс): действительным числом называется бесконечная десятичная дробь, не имеющая периода, состоящего из одних девяток.

Второй способ (Коши). Действительным числом называется класс эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

Третий способ (Дедекинд). Действительным числом называется сечение множества рациональных чисел.

Во всех трех случаях упорядоченность, а так же операции сложения и умножения переносятся с множества рациональных чисел на множество всех действительных чисел с сохранением свойств этих операций. В результате получаются множества, изоморфные относительно порядка и указанных операций. Именно в этом смысле неважно, что из себя конкретно представляет действительное число: бесконечную десятичную дробь, класс эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел или сечение рациональных чисел, а существенны лишь связи, которые существуют между ними.

В качестве второго примера рассмотрим прямую на плоскости. Прямая может быть определена, например, с помощью аксиом Евклида или более точной аксиоматикой Гильберта. Напомним некоторые из них: через любые две точки плоскости можно провести прямую; две разные прямые либо пересекаются в одной точке, либо не имеют общих точек; через любую точку на плоскости вне данной прямой можно провести и притом единственную прямую не пересекающуюся с ней, т.е. ей параллельную.

Если ввести на плоскости декартовы координаты x, y, то прямая является множеством точек (x, y), координаты которых удовлетворяют линейному уравнению:

$$Ax + By + C = 0\,, \tag{1}$$

где A, B и C – некоторые заданные постоянные.

Рассмотрим теперь на плоскости всевозможные окружности и прямые, проходящие через некоторую фиксированную точку, например, начало координат. Удалим из указанных окружностей эту точку и будем называть их проколотыми окружностями. Из указанных прямых также удалим ту же точку, но дополним их бесконечно удаленной точкой и будем называть такие множества проколотыми окружностями бесконечного радиуса.

Рассматриваемые окружности конечного радиуса описываются уравнениями вида:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2,\ x^2+y^2>0 \tag{2}$$

где a и b – некоторые постоянные. Проколотые окружности (конечного и бесконечного радиусов) удовлетворяют тем же аксиомам, что и обычные прямые вида (1). Например, через любые две точки плоскости можно провести и притом единственную проколотую окружность конечного или бесконечного радиусов.

Любые две различные проколотые окружности либо не пересекаются (если в начале координат у них общая касательная), либо пересекаются в одной точке (рис. 1 и 2).

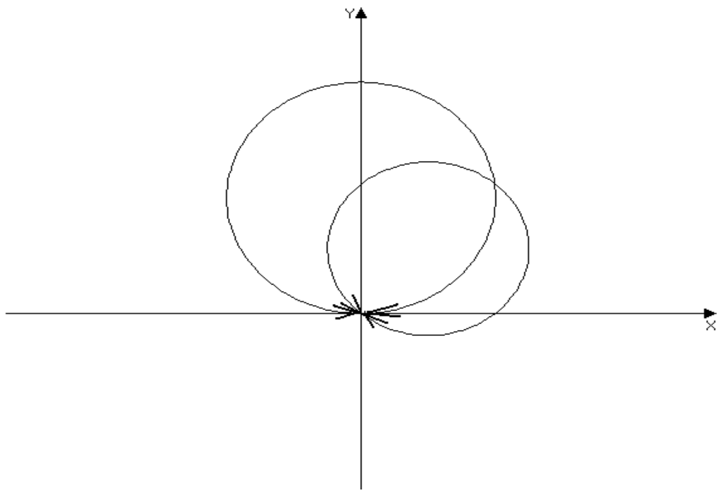

Рис. 1

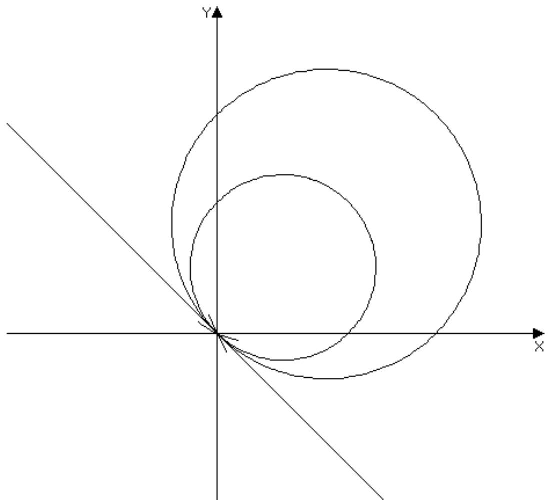

Рис. 2

Наконец, через любую точку, лежащую вне заданной проколотой окружности можно провести единственную проколотую окружность, не пересекающую исходную проколотую окружность (аксиома параллельности, см. рис 2). Таким образом, непосредственно проверяются аксиомы Евклида для построенных проколотых окружностей конечного или бесконечного радиусов. Поэтому такие проколотые окружности конечного или бесконечного радиусов могут рассматриваться как прямые.

Углом между такими пересекающимися «прямыми» называется угол между касательными к окружностям в точке их пересечения.

Для полноты надо, конечно, ввести понятие расстояния между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) плоскости с такими «прямыми».

Для этого рассмотрим отображение $z = \dfrac{1}{w}$ плоскости комплексного переменного $w = u + iv$ на плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. При таком отображении бесконечно удаленная точка плоскости переменного w отображается в начало координат плоскости переменного z, а обычные прямые $Au + Bv + C = 0$ переходят в проколотые в начале координат окружности конечного или бесконечного радиусов.

Отсюда в частности ещё раз следует выполнение аксиом Евклида, и конечно, аксиом Гильберта, для «прямых» предоставляющих собой проколотые окружности.

Расстояние

$$\rho((x_1, y_1),(x_2, y_2)) \overset{def}{=} \left|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right|,$$

где $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

то есть, если $w_1 = \dfrac{1}{z_1}$, $w_2 = \dfrac{1}{z_2}$, то $\rho((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = \rho(z_1, z_2) = |w_1 - w_2|$ – обычное расстояние.

Отметим еще, что в силу конформности отображения $z = \dfrac{1}{w}$ сохраняется величина углов между кривыми.

Я всегда рассказывал студентам этот пример, когда знакомил их с аксиоматическим методом, добавляя при этом, что для плоскости с прямыми, понимаемыми как выше описанные проколотые окружности справедлива вся планиметрия, которую они изучали в средней школе. В этом случае имеет место, в частности, и теорема Пифагора и ее не надо доказывать, так как она уже доказана в школьном курсе на основе только аксиом Евклида. Таким образом, говорил я, – вы знаете на самом деле гораздо больше, чем вы думаете. Это производило впечатление: оказывается, и проколотые окружности могут быть прямыми!

Итак, действительно, рассмотренные примеры показывают, что при изучении математических структур конкретные интерпретации их элементов являются несущественными, а существенны лишь логические связи, существующие между этими элементами. Так, например, как было показано, прямые могут изображаться в виде проколотых окружностей – и те и другие удовлетворяют одним и тем же аксиомам евклидовой геометрии.

При этом обыкновенная классическая прямая (1) не может быть целиком нарисованной на плоскости, так как она является неограниченным множеством. Всю же «прямую» (2) можно нарисовать на плоскости, так как проколотая окружность представляет собой ограниченное множество!

Возвращаясь ещё раз к вопросу о сущности математики следует заметить, что то обстоятельство, что математика изучает логические понятия, которые удовлетворяют определенным свойствам, формулируемым в виде аксиом, порождает специфические трудности. Они прежде всего связаны с возникновением вопроса: существуют ли в действительности определенные нами структуры. Не противоречивы ли они? Этот вопрос возникает уже при введении основных понятий. Так, например, до сих пор не решен вопрос о непротиворечивости арифметики. Не ясно, не противоречиво ли понятие «множества действительных чисел». Дело в том, что из того, что конкретно определяются какие-то элементы, наделенные заданными свойствами, не следует, что можно рассматривать совокупность всех таких элементов. Например, определяется понятие кардинального числа как мощности некоторого множества. Однако понятие множества всех кардинальных чисел противоречиво, так как какое бы множество кардинальных чисел не взять, всегда можно указать кардинальное число, которое не принадлежит этому множеству.

Математические истины точно формулируются и логически обосновываются. Однако, это только внешняя сторона математики. Подобно тому, как нотная запись является формальной записью музыкальных произведений. Было бы заблуждением думать, что занимаясь математикой или ее приложениями можно достичь существенных успехов лишь на основе логических рассуждений. Если нет готовых разработанных алгоритмов для решения поставленного вопроса, то для его изучения, как правило, недостаточно одной логики. При решении математической задачи выбор правильного направления логических рассуждений происходит на основе интуиции, чувства гармонии и фантазии. И здесь возникают свои сложности: бывает, что интуиция нас подводит. Приведем простой пример. Если вокруг земли и вокруг теннисного мяча обмотаны нити, то если длины этих нитей увеличить на 1 метр и снова расположить их по окружностям с прежними центрами, то спросим себя, какой из получившихся зазоров будет больше? Интуиция подсказывает, что у теннисного шарика зазор будет больше, так как на земле зазор вообще не будет заметен. Однако, если взять окружность данной длины $c = 2\pi R$ и увеличить ее длину на 1, то радиус новой окружности будет равен

$$\frac{c+1}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} = R + \frac{1}{2\pi},$$

то есть «зазор $\frac{1}{2\pi}$» не зависит от длины окружности! Невероятно, но факт.

Я не встречал в жизни ни одного человека, который бы интуитивно чувствовал правильный ответ в этой задаче. Один неплохой инженер, когда я сообщил ему правильный ответ, простодушно сказал мне: «Этого не может быть. Здесь ваша математика врет». Такое категорическое суждение инженера вполне понятно. Например, с точки зрения инженера-строителя всякая деталь может оказать влияние на целую конструкцию лишь в случае, когда размеры этой детали соизмеримы в каком-то смысле с размерами всей конструкции. Ситуация же, при которой деталь данного размера оказывает одинаковое влияние как на сколь угодно малую, так и на сколь угодно большую по размерам конструкцию представляется невероятной, противоречащей «здравому смыслу».

Этот пример наглядно показывает, как важно развивать математическую интуицию.

Для развития математической интуиции, несомненно, является полезным решение так называемых «поисковых задач», т.е. таких задач, которые не требуют: «вычислите». «докажите». Учащийся, как правило, должен самостоятельно отыскать правильное утверждение и доказать его. Формулировки поисковых задач чаще всего заканчиваются вопросом: «Верно ли такое-то утверждение?», не указывая априори на возможный ответ. К сожалению, в задачниках по математике для средней и высшей школы таких задач мало. Чтобы учить решать подобные задачи, целесообразно начинать с довольно простых вопросов, например: «Будет ли каждый вектор системы линейно независимых векторов выражаться в виде линейной комбинации остальных векторов этой системы?». Но затем переходить к все более сложным.

В качестве примеров поисковых задач в математическом анализе приведем следующие:

- будет ли произведение бесконечного числа бесконечно малых бесконечно малой? (для последовательностей и функций).
- Будут ли равносходящимися два числовых ряда с асимптотически равными членами при стремлении номеров их членов к бесконечности? (т.е. будут ли они одновременно сходиться и расходиться). А так же аналогичная задача для функций: Будут ли несобственные интегралы от эквивалентных функций при стремлении аргумента к их особой точке равносходящимися.

Математика это абстрактная и логически строгая наука. В этом ее сила, но в этом заключается и трудность её изложения и изучения. Бывает совсем не просто дать четкое и ясное определение и ещё труднее провести до конца логически строгое заключение. Поясню это на примере решения 21-й проблемы Гильберта. Она была «положительно решена» ёще в начале XX века математиком Е. Племелем. Но через

70 лет русский математик А.А. Болибрух, в то время доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического института, обнаружил в доказательстве Е. Племеля ошибку и решил 21-ю проблему Гильберта «наоборот» – оказалась, что эта проблема имеет отрицательное решение.

Бывали и курьезные случаи. Так в 40-х годах прошлого века один наш отечественный математик обнаружил замечательный класс алгебраических групп, обладающих некоторыми удивительными свойствами. Прошло около 10 лет, и было доказано, что найденный класс групп состоит лишь из одной нулевой группы. Чаще бывает, что ошибочные результаты как в математике, так и в её приложениях случаются за счет нестрогого применения математических методов.

Специфическую особенность присущую математическим исследованиям выразительно и с чувством юмора описал знаменитый русский математик Л.С.Понтрягин сказав, что человек, занимающийся математикой, постоянно испытывает чувство страха: тогда, когда он берется за решение задачи, он боится, что ему не удастся это сделать (как это часто и бывает при решении трудных, принципиальных математических задач), а, если ему это удалось, он боится, что он где-то ошибся, и кто-то найдет эту ошибку.

Поэтому при преподавании математики следует обратить особое внимание на развитие у учащихся чёткого логического мышления, для чего необходимо, чтобы изложение математики было строго логичным, ясным, понятным и по возможности кратким.

Несмотря на большую проделанную работу по совершенствованию методики преподавания математики эту деятельность не следует прекращать.

Поясню сказанное на простейших примерах. Напомним два равносильных традиционных определения предела числовой функции $f: X \to R$, определенной на некотором множестве X действительных чисел R.

Определение 1^0. (по Гейне) Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in R$ и пишется $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, если для любой последовательности $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, $n = 1,2\ldots$ такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ имеем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_n) = a$.

И эквивалентное ему определение.

Определение 1^1. (по Коши) Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, таких, что $|x - x_0| < \delta$ и $x \neq x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Точка x_0 может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X, на котором определена функция f. Если $x_0 \in X$, и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция f называется непрерывной в точке x_0.

Рассмотрим случай, когда множество X, на котором определена функция f состоит из одной точки x_0. В этом случае множество таких $x \in X$, для которых выполняется неравенство $x \neq x_0$ пусто. Для элементов пустого множества справедливо любое утверждение: например верно, что все элементы пустого множества в стельку пьяные, верно и то, что все эти элементы совершенно трезвые. И то и другое верно, так как элементов пустого множества просто нет и поэтому нельзя построить пример, противоречащий данным утверждениям.

В случае, когда множество X состоит из одной точки x_0, то для функции f верны следующие утверждения: как в силу определения 1^0, так и в силу определения 1^1 она имеет в качестве предела в точке x_0 любое число a, и в то же время, не имеет никакого предела в этой точке. А потому такая функция одновременно непрерывна и не является непрерывной в точке x_0. Как отмечено выше, ни одно из этих утверждений нельзя опровергнуть. Скажем прямо, странная получается картина.

Можно подумать, что это особый случай, когда функция f определена только в одной точке. Но это не так.

Вспомним, например, теорему о пределе сложной функции $f(g(x))$ в некоторой точке x_0, когда у функций f и g существуют пределы в соответствующих точках. Если функция $y = g(x)$ является постоянной: $g(x) \equiv y_0$, то функция f оказывается определенной только в одной точке y_0. Поэтому, согласно сказанному выше, она в этой точке имеет любой предел и, одновременно, не имеет никакого предела. Поэтому условие в указанной выше теореме о том, что функция f имеет какой-то предел бессодержательно,

Таким образом, даже в таком простом случае, когда функция g является постоянной, в теореме о существовании предела сложной функции $f(g(x))$ требуются какие-то дополнительные пояснения. Это, конечно, не является естественным и говорит о недостатке традиционного определения предела функции.

Чтобы избежать трудностей, возникающих при использовании определений 1^0, 1^1 достаточно в них отбросить условие $x_n \neq x_0$, и, соответственно, $x \neq x_0$, то есть сформулировать следующие определения (запишем их для краткости в символическом виде).

Определение 2^0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_n \to x_0, x_n \in X \Rightarrow f(x_n) \to a.$$

Определение 2^1.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,\ |x-x_0|<\delta, x\in X \Rightarrow$$

$$|f(x)-a|<\varepsilon.$$

Эти определения проще, так как в них отброшено одно из условий по сравнению с традиционными определениями. Поэтому и доказательства теорем с помощью 2^0 и 2^1 так же упрощаются.

Конечно, предлагаемое определение предела не равносильно традиционному. Например, для функции

$$sign\,x=\begin{cases}1 & при\ x>0\\ 0 & при\ x=0\\ -1 & при\ x<0\end{cases}$$

предел при $x\to 0$ в смысле определения 1^0, а, следовательно, и в смысле равносильного определения 1^1, существует и равен 1, а предел в смысле также равносильных определений 2^0 и 2^1 не существует. Однако, предел функции $sign\,x$, рассматриваемый в смысле определений 2^0 и 2^1 на числовой оси R, проколотой в точке $x=0$, то есть на множестве $R\setminus\{0\}$, также существует и равен 1.

Таким образом, с помощью определений 2^0 и 2^1, применив их к функции $f: X\to R,\ X\subset R$, рассматриваемой на множествах X и $X\setminus\{0\}$ можно, вообще говоря, получить больше информации о поведении функции f в точке x_0, чем используя определения предела 1^0 и 1^1.

Замечу, что определения 2^0 и 2^1 не являются новыми для учебной литературы. Они, например, имеются в учебниках Г.П. Толстого и Б.А. Райкова (Толстов Г.П. Элементы математического анализа. – Т. I, II. – М.: Наука, 1974, 1982; Райков Б.А. Одномерный математический анализ. – М.: Наука, 1982). К сожалению, эти определения недостаточно используются при преподавании математического анализа, хотя и стали последнее время чаще применяться (см., например, Егоров В.И., Омельченко И.Н. Предел функции. – М.: Физматлит, 2007).

Заметим, что в задачах о пределе функций в точке x_0 в случае, когда функция задана формулой, «условие $x \neq x_0$» выполняется само собой. Это связано с тем, что в силу формулы, задающей функцию, точка x_0 может оказаться не принадлежащей множеству, на котором определена функция.

Так, например, для пределов $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ и $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ функции $\frac{\sin x}{x}$ и $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ не определены при $x = 0$. При определении производной $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ функции $y = f(x)$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не определено при $\Delta x = 0$. По-видимому, исторически из рассмотрения подобных пределов, и возникло в определении предела функции «лишнее условие $x \neq x_0$».

Приведенные определения предела функции могут быть сформулированы и в терминах пределов по фильтрам. Первое (традиционное) определение предела функции в точке x_0 равносильно определению предела по фильтру, состоящему из пересечений всевозможных проколотых в точке x_0 окрестностей с множеством X, на котором задана функция. Второе определение предела равносильно определению предела функции по фильтру, состоящему из пересечений всевозможных окрестностей точки x_0 с множеством X (в случае, когда точка x_0 не принадлежит множеству X, этот фильтр совпадает, очевидно, с предыдущим).

Ясно, что в силу сказанного выше, методически предпочтительнее определение предела функции с помощью фильтров, состоящих из целых (непроколотых) окрестностей точек множеств, на которых задана функция. Действительно, в случае определения предела функции с помощью фильтров проколотых окрестностей всякая функция в каждой изолированной точке множества своего определения, одновременно имеет любой предел и не имеет никакого предела, является непрерывной и не является непрерывной в этой точке. Внешне ситуация выглядит довольно странно.

В случае же фильтров, состоящих из непроколотых окрестностей, функция в каждой изолированной точке множества своего определения непрерывна.

Это означает, что в математике, понятие дискретности является частным случаем понятия непрерывности.

Второй пример касается определения несобственного интеграла. Обычно, если функция f определена на полуинтервале $[a,b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$ и интегрируема, например, по Риману, на любом отрезке $[a,c]$, $a < c < b$, и существует конечный предел $\lim\limits_{c \to b} \int\limits_a^c f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Если указанный предел не существует, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется расходящимся.

При таком подходе остается неясным, что же такое расходящийся несобственный интеграл: ведь говорится лишь, когда он существует, а о том, что он из себя представляет умалчивается.

Более того, без дополнительных разъяснений, непонятной, например, оказывается часто рассматриваемая задача об асимптотике расходящегося интеграла, т.к. асимптотика в курсе математического анализа изучается только для функций, а в приведенном выше определении несобственный интеграл не является функцией.

Все это подсказывает, что несобственный интеграл целесообразнее определить как некоторую функцию.

Поэтому естественно дать следующее определение.

Если функция f определена на полуинтервале $[a,b)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,c]$, $a<c<b$, то несобственным интегралом называется функция $\int\limits_a^x f(t)dt$, $a \le x < b$, и она обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to b}\int\limits_a^x f(t)dt$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется сходящимся, а указанный предел называется его значением и обозначается тем же символом, что и интеграл, то есть $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Если указанный предел не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся. При таком определении в формулировках задач для расходящихся несобственных интегралов не возникает никаких неясностей. Например, понятно, что означает порядок расходимости или асимптотика несобственного интеграла.

Эти примеры показывают, что даже методика преподавания математики нуждается в дальнейшем совершенствовании. И здесь далеко не исчерпаны все возможности.

Более подробное изложение некоторых из затронутых вопросов, а так же примеры их практических реализаций можно найти в работах автора, приведенных ниже в списке литературы.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – Т. 1, 2. – М.: Физматлит, 2002.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – 5-е изд. – Т. 1. – М.: Дрофа, 2003.
3. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. – 5-е изд. – Т. 2. – М.: Дрофа, 2004.
4. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. – 5-е изд. – Т. 3.– М.: Дрофа, 2006.
5. *Кудрявцев Л.Д.* Предел функции. Формулы Ньютона-Лейбница и Тейлора. – М.: Физматлит, 2004.
6. *Кудрявцев Л.Д.* Избранные труды. – Т. III. – М.: Физматлит, 2008.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ОРГАНИЗМА В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

В.И. Антонов
профессор Санкт-Петербургского государственного политехнического университета
А.М. Федулин
профессор Санкт-Петербургского государственного политехнического университета

Введение. При исследовании сложных динамических систем для оценки текущего состояния и прогноза их развития требуется измерение большого числа характеристик системы. Часто такого рода измерения невозможны из-за отсутствия необходимого для этого времени и оборудования. Поэтому возникает необходимость оценить состояние системы и краткосрочную динамику ее дальнейшего изменения, используя для этого характерные сигналы, которые могут быть получены в реальном режиме времени.

При разработке метода предполагается, что у системы измеряется характеристика периодического характера R_T, представляющая собой дискретную последовательность интервалов r_i. Величину R_T – можно представить следующим образом:

$$R_T = \{r_i(t_i)\}_{i=1}^{K}, t_i = \sum_{j=1}^{i} r_j, T = t_K \qquad (1)$$

Величина r_i составляет порядка 1 *с,* время анализа порядка 5–10 минут. Анализ производится на персональном компьютере с частотой процессора порядка 2–3 гигагерц. При поставленных условиях метод анализа сложной системы сводится к анализу временного ряда. Ниже приведен краткий обзор основных методов.

Статистические методы. Эти методы применяются для непосредственной количественной оценки сигнала в исследуемый промежуток времени. Наиболее важными статистическими характеристиками динамического ряда являются: дисперсия, коэффициент вариации и пр.

Временной анализ. Заключается в изучении закона распределения интервалов как случайных величин. При этом строится гистограмма и определяются ее основные характеристики:

Mo (Мода)	наиболее часто встречающееся в данном динамическом ряде значение интервала
AMo	число интервалов, соответствующих значению моды, в % к объему выборки
TINN	вариационный размах. Он вычисляется по разности максимального (*Mx*) и минимального (*Mn*) значений интервалов и иногда обозначается как *MxDMn*
Ин	индекс напряжения регуляторных систем (*Ин* = *AMo*/2**Mo***MxDMn*)

Автокорреляционный анализ. Позволяет судить о скрытой периодичности R_T. В качестве количественных показателей вводятся:

C_1	значение коэффициента корреляции после первого сдвига
C_0	число сдвигов в результате которого значение коэффициента корреляции становиться отрицательным

Автокорреляционный анализ. Позволяет судить о скрытой периодичности R_T.

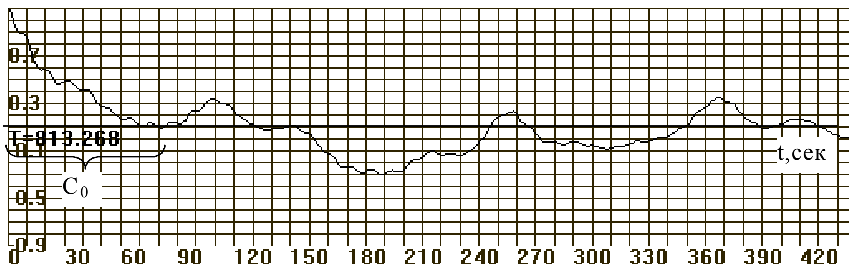

Рис. 1. Автокорреляционная функция

Частотный анализ. Анализ спектральной плотности мощности колебаний дает информацию о распределении мощности в зависимости от частоты колебаний. Различают параметрические и непараметрические методы спектрального анализа. К первым относится авторегрессионный анализ, ко вторым – быстрое преобразование Фурье (БПФ) и периодограммный анализ. Обе эти группы методов дают сравнимые результаты. При спектральном анализе вычисляют:

P	Абсолютная суммарная мощность спектра
P_{avg}	средняя мощность спектра
f_{main}	значение максимальной гармоники
IC	индекс централизации. IC = (HF+LF)/VLF

Спектр с помощью преобразования Фурье вычисляется:

$$F(\{r_n | n = 0..N\}, f) = \sum_{n=0}^{N} r_n \cos(wn), w = 2\pi f \frac{T}{N+1}. \qquad (2)$$

Здесь f – циклическая частота, T – период, а $\{r_n\}$ – величины RR интервалов. Мощность сигнала в диапазоне $[f_a,f_b]$ рассчитывается как:

$$P(\{r_n\}, [f_a, f_b]) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{f_a}^{f_b} F(\{r_n\}, f)^2 df \qquad (3)$$

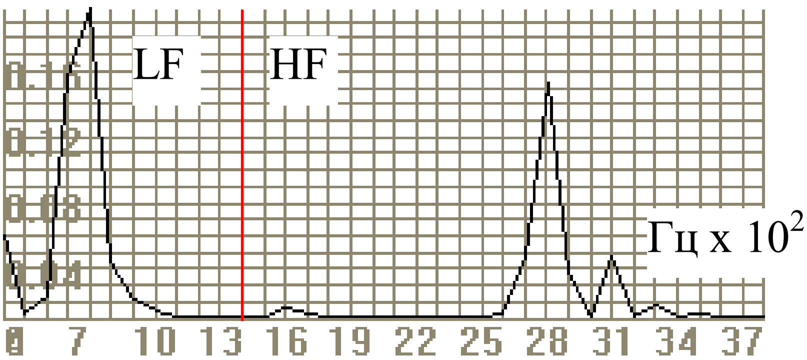

Рис. 2. Высокочастотная и низкочастотная части спектра

Корреляционная ритмография. Сущность метода заключается в графическом отображении последовательных пар интервалов (предыдущего и последующего) в двумерной координатной плоскости. При построении скаттерграммы образуется совокупность точек, центр которых располагается на биссектрисе I четверти координатной плоскости. Расстояние от центра до начала осей координат соответствует наиболее ожидаемой длительности интервала (*Mo*). Величина отклонения точки от биссектрисы влево показывает, насколько данный интервал короче предыдущего, вправо от биссектрисы – насколько он длиннее предыдущего. Определяются следующие показатели скаттерграммы:

Длина (*L*)	длина «облака» соответствует вариационному размаху
Ширина (*w*)	ширина скаттерграммы
Площадь (*S*)	площадь скаттерграммы: $S = \pi L w/4$

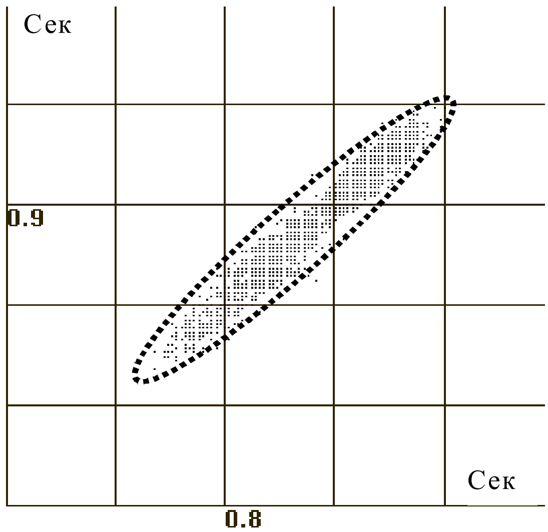

Рис. 3. Скаттерограмма

Методы нелинейной динамики. Анализ временных рядов методами описания нелинейных динамических систем приобретает все более широкое распространение. С точки зрения методов нелинейного анализа исследуемые процессы содержат в себе детерминированный хаос, а с точки зрения линейных эти процессы – стохастические [1]. Хотя такие процессы нельзя считать детерминированным, абсолютно случайными они тоже не являются. Для исчерпывающего описания состояния системы требуется множество переменных, объединенных в вектор из фазового пространства состояний $Q(t)=(q_1(t), q_2(t),\ldots, q_n(t))$. Если поведение системы стохастично, то фазовая траектория равномерно заполняет некоторый объём фазового пространства; если же это детерминированный процесс, то траектория заполнит поверхность какой-либо симметричной фигуры, например тора [2]. Фазовые портреты систем с хаотическим поведением также заполняют некоторую ограниченную область фазового пространства, но при этом независимо от начальных условий, система, приходит в определённую область фазового пространства – ту, в которой находится её фазовый портрет – аттрактор системы. Несмотря на то, что аттрактор занимает некоторый замкнутый объем пространства, траектории, по которым эволюционирует система, никогда не пересекаются. Часто хаотическое поведение в пределах аттрактора очень чувствительно к начальным условиям. Размерность аттрактора системы всегда меньше, чем размерность фазового пространства [2].

Описание метода

Понятие хаотичности R_T. Определим числовую величину E – хаотичности R_T таким образом, что ее нулевое значение соответствует абсолютно детерминированному сигналу (значения интервалов неизменно), и Е возрастает с увеличением вариабельности интервалов. Введенная таким образом величина похожа на термодинамическую энтропию Больцмана:

$$S = k \ln \Gamma , \tag{4}$$

где k – постоянная Больцмана, Γ – число микросостояний.

В качестве E используется величина информационной энтропии, определяемой через вероятности состояний по формуле [3]:

$$I = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i, \sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \tag{5}$$

Данная величина достигает своего минимума ($I = 0$), когда исход события достоверен, и максимума ($I = log_2 N$) при равновероятном исходе всех состояний. Информационную энтропию можно рассматривать в качестве меры хаоса системы – чем больше величина информационной энтропии, тем более недетерминировано ее состояние. Информационная и термодинамическая энтропии имеют много общего [4].

Для вычисления E целесообразно построить по исходным интервалам системы нормированную гистограмму вариабельности H_R, определяющую вариабельности сигнала. Иными словами по последовательности интервалов R_T требуется построить последовательность H_R:

$$H_{R_T} = \{p_i\}_{i=1}^{N}, \sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \tag{6}$$

Затем E вычисляется по формуле:

$$E = I = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i \tag{7}$$

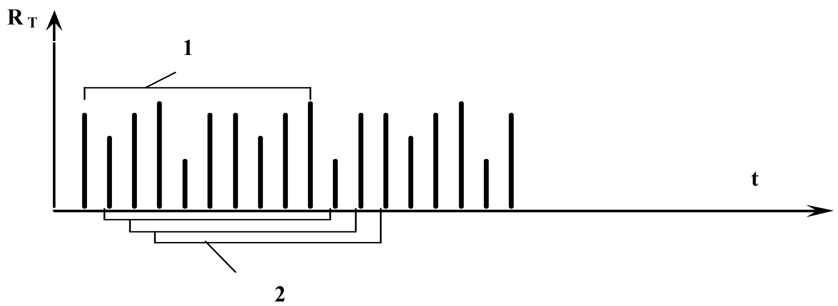

Рис. 4. Выбор последовательностей RT для обработки

Для экспресс-анализа используется 5-минутная длительность со сдвигом на один интервал относительно предыдущего.

Построение гистограммы вариабельности

Основные требования, предъявляемые к гистограмме вариабельности:

- сохранение информативности вариабельности исходного сигнала;
- устойчивость к аддитивному константному шуму;
- устойчивость к аддитивному высокочастотному шуму.

Для построения гистограммы вариабельности весь диапазон возможных значений последовательности R_T делят на N интервалов. При этом величина p_i будет означать вероятность того, что случайное значение из последовательности R_T находится в i-ом интервале. Однако такой метод не учитывает вариабельности сигнала. Приведенные на рисунке последовательности имеют одинаковые гистограммы вариабельности, но исходный характер сигнала различен:

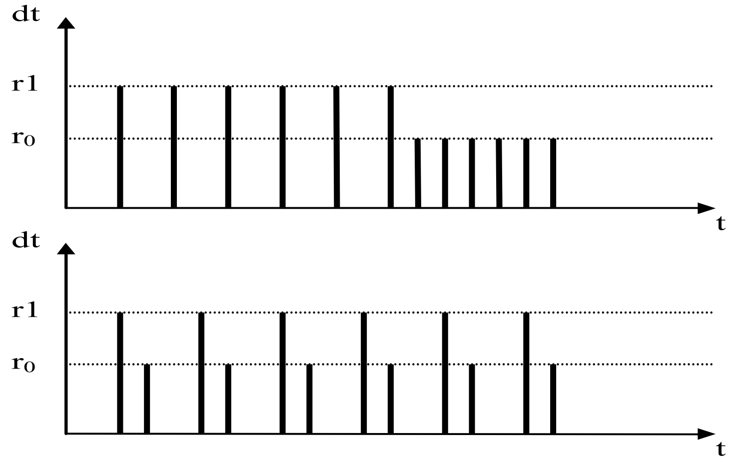

Рис. 5. Последовательности R_T с одинаковой гистограммой значений

Лучше использовать в качестве гистограммы вариабельности нормированный по мощности дискретный спектр последовательности R_T.

$$f_i = (\sum_{k=0}^{K-1} r_{k+1}\cos(\frac{2\pi k}{K}i))^2 + (\sum_{k=0}^{K-1} r_{k+1}\sin(\frac{2\pi k}{K}i))^2,\ i = 1...N,$$

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{N} f_i} \qquad (8)$$

Вычисленная по такой гистограмме величина E будет равна 0 при абсолютно ригидном сигнале (1 пик на спектре) и достигать максимума при белом шуме. Также переход в спектральное пространство позволяет эффективно решать проблемы с высокочастотными и аддитивными шумами. Другим важным достоинством использования спектра в качестве гистограммы вариабельности является его устойчивость к выбору шага дискретизации

Использование спектра автокорреляционной функции. В [12] нами описаны преимущества использования спектра автокорреляционной функции в качестве гистограммы вариабельности. Гармоники спектра автокорреляционной функции вычисляются по формуле:

$$F_i = NT\,\frac{a_i^2 + b_i^2}{2},\ i = 1...N \qquad (9)$$

где a_i, b_i – соответствующие коэффициенты разложения исходной функции в ряд Фурье:

$$r(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(\frac{2\pi}{T}nt) + b_n\sin(\frac{2\pi}{T}nt)] \qquad (10)$$

Видно, что спектр автокорреляционной функции по своим свойствам аналогичен спектру исходной функции. При этом мы сразу получаем положительно определенный спектр четной и нечетной частей функции, используя только дискретное косинусное преобразование.

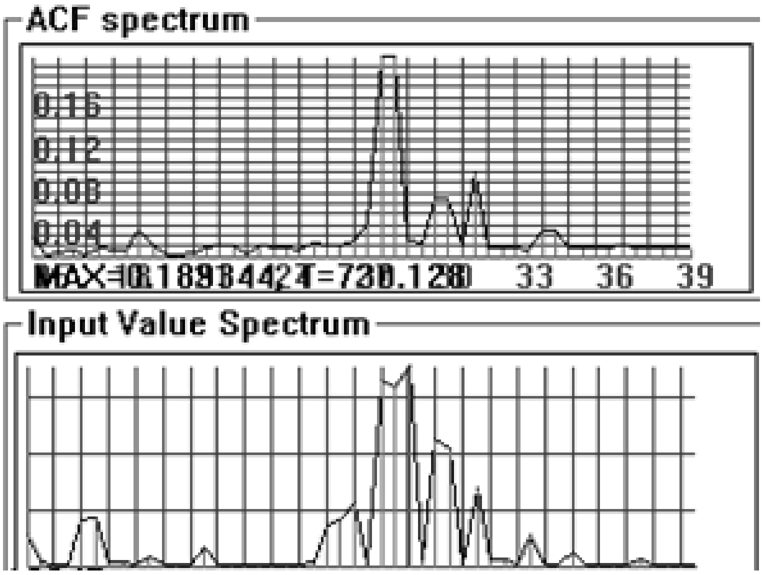

**Рис. 6. Спектр автокорреляционной (вверху)
и исходной (внизу) функции**

Динамический анализ. Для более глубокого анализа временного ряда $E(t)$ используются нелинейные методы.

Для характеристики аттракторов вводят понятие размерности, которая определяет количество информации, необходимое для задания координат точки, принадлежащей аттрактору, в рамках указанной точности. Чем больше размерность аттрактора системы, тем более сложным и, соответственно, менее предсказуемым является её поведение. Таким образом, размерность аттрактора D является мерой стохастичности динамики системы. Мы предполагаем, что отсутствие динамики D является признаком устойчивого состояния системы, а наличие динамики – признаком переходного.

Аттракторы систем, демонстрирующих хаотическое поведение, называются странными аттракторами. Строгого математического доказательства того, что все странные аттракторы фрактальны, не существует, однако обратных примеров ещё не найдено.

Размерность D_F произвольного аттрактора в n-мерном фазовом пространстве определяется по Колмогорову-Хаусдорфу [5], [6] следующим образом:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \qquad (11)$$

где $M(\varepsilon)$ – минимальное число n-мерных кубиков с ребром – ε, необходимых для покрытия аттрактора.

Рассмотрим, например, канторово множество [7]. Его размерность:

$$D_F = \ln 2/\ln 3 \approx 0{,}63... \quad (12)$$

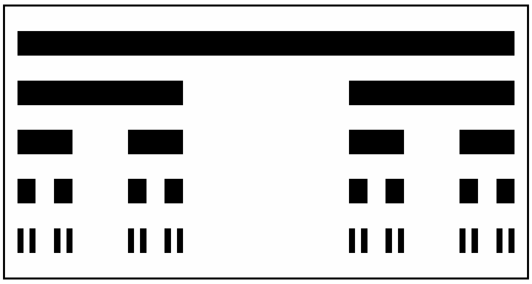

Рис. 7 Построение Канторова множества

В формуле для вычисления фрактальной размерности D_F одинаково важны все непустые кубики. Особенно важно это для странных аттракторов, так как они пространственно неоднородны, то есть некоторые области аттрактора посещаются чаще других. Требуется знание очень длинной траектории, чтобы гарантировать посещение даже очень маловероятных кубиков. Поэтому каждый непустой кубик нужно взвешивать с помощью относительной частоты, с которой он посещается типичной траекторией. Размерности, определяемые с учетом вероятности посещения траекторией различных областей аттрактора в фазовом пространстве, называют вероятностными. Одним из представителей класса вероятностных размерностей является корреляционная размерность D_C, определяемая соотношением [9]:

$$D_c = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2}{\ln \varepsilon} \tag{13}$$

где $(p_i)^2$ – вероятность того, что пара точек аттрактора принадлежит i-му кубику.

При вычислении размерности аттрактора системы учтем, что неизвестна размерность ее фазового пространства, и мы располагаем информацией о поведении во времени лишь одной из динамических переменных – $E(t)$. Путь к решению этой проблемы был предложен Такенсом [10].

В [13] нами дано описание метода вычисления D=D_c при малом количестве данных, основанного на методе реконструкции аттрактора Такенса. Правильность вычисления данным методом была проверена на различных аттракторах, корреляционная размерность которых известна. Например, аттрактор Хенона определяется следующим образом:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + y_k - 1.4 * x_k^2 \\ y_{k+1} = 0.3 x_k \end{cases} \tag{14}$$

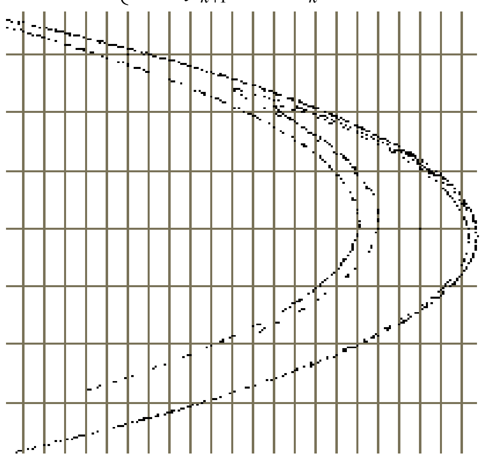

Рис. 8. Аттрактор Хенона

Его корреляционная размерность: ~1.26

Общий алгоритм

В целом, метод описывается на приведенной ниже схеме:

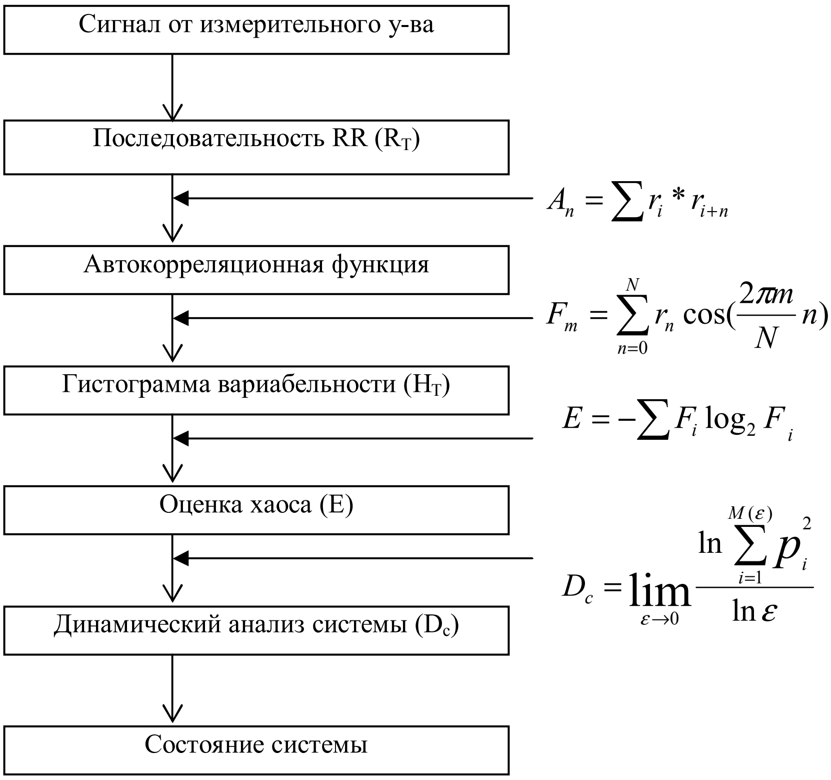

Рис. 9. Схема метода

Результаты

Описанный выше метод был реализован в виде компьютерной программы. В реальном режиме времени строятся графики корреляционной размерности по данным *RR*-пиков [11] и временных интервалов между последовательными *R*-пиками ЭКГ человека.

Были вычислены значения корреляционной размерности для коротких записей (18–20 минут). При этом были выбраны следующие константы:

- период для вычисления автокорреляционной функции – 150 с;
- величина смещения при построении фазового пространства – 150 точек;
- число точек для вычисления корреляционной размерности – 300 точек.

Для коротких записей было получено, что флуктуации значения корреляционной размерности незначительны. При этом у разных людей среднее значение корреляционной размерности различалось. В то же время для всех записей значение корреляционной размерности находилось в пределах между 1.5 и 2.0, что подтверждало фрактальность исследуемой величины.

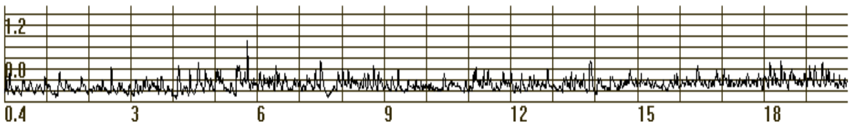

Рис. 10. Исходные RR-пики

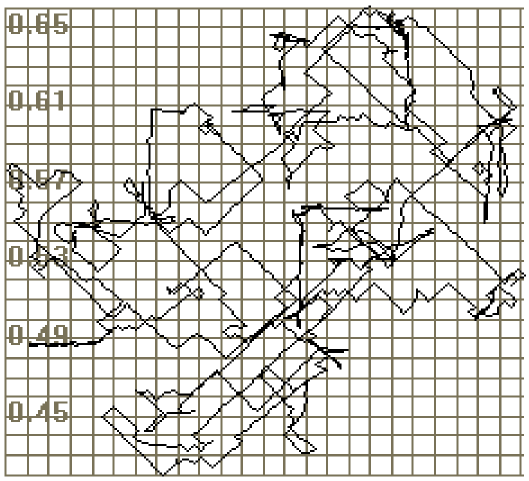

Рис. 11. Фазовое пространство

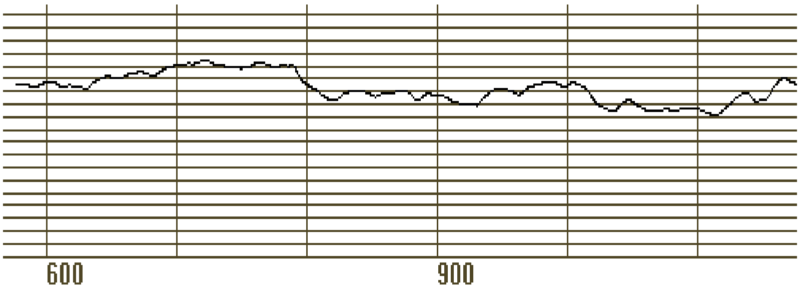

Рис. 12. Корреляционная размерность
На приведенных выше графиках график исходных RR-пиков и график корреляционной размерности изображены в единой оси времени (в минутах на верхнем и в секундах на нижнем)

Анализ электроэнцефалограммы. Одним из актуальных приложений является анализ состояния человека на основе изучения сигналов его головного мозга – электроэнцефалограммы (ЭЭГ). Очевидно, что по одной компоненте невозможно восстановить точное состояние всей системы. Однако мы исходим из предположения, что снимаемая с постоянной частотой f_0 ЭЭГ достаточно информативна, чтобы отражать такие важные характеристики человека как степень сознания и степень боли. Входные данные метода можно представить следующим образом. За время L снимается сигнал:

$$C_L = \{r_i(t_i), t_i = \frac{i}{K}\}_{i=1}^{K}, \ K = Lf_0$$

Предполагается, что величина f_0 находится в пределах 200–1000 Гц.

Как и в случае анализа RR интервалов выделяется выборка $R_i = R(t_i, T)$ последовательности C_L за период T в момент времени t_i: $L > t_i > T$:

$$R_i = R(t_i, T) = \{s_i\}_{i=1}^{M} = \{r_j(t_j),\}_{j=m}^{i} : t_{m-1} < t_i - T < t_m$$

Далее по каждой выборке R_i строится некоторая интегральная характеристика $\Phi_i = \Phi(R_i)$. Полученная таким образом последовательность Φ_i используется для анализа.

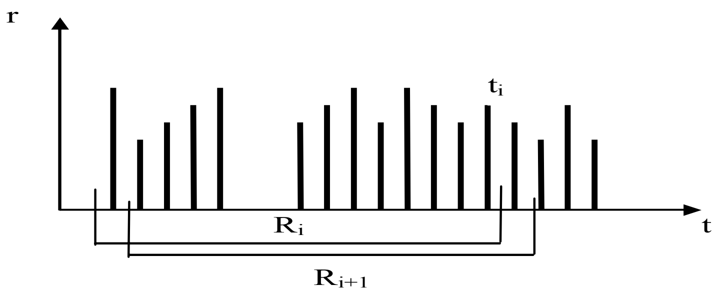

Рис. 13. Выбор последовательностей *R_i* для обработки

Величина T – длина выборки – определяется из двух критериев. С одной стороны, ее увеличение увеличивает «точность» метода, с другой стороны увеличивает и количество вычислений – а время, отведенное на вычисление каждой Φ_i ограничивается частотой входного сигнала.

Описание метода анализа. Суть метода состоит в определении по выборке R_i характеристической функции $\Phi_i(R_i)=(P_i, E_i)$, 2-х величин, описывающих сигнал в некотором частотном диапазоне – его относительной мощности (P_i) и его информационной энтропии (E_i) [3] в этом частотном диапазоне.

Спектр функции вычисляется по следующей формуле:

$$F(w_m) = \left| \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} s_{k+1} e^{-iwk} \right|, \quad m = 0,\ldots,M-1 \qquad (15)$$

А сами величины по спектру вычисляются следующим образом:

$$P_i = \sum_{wa}^{wb} F(w_m)^2$$

$$E_i = -\frac{1}{\log_2(M)} \sum_{m=n_1}^{n_2} p_m \log_2 p_m, \; p_m = \frac{F(w_m)^2}{P_i} \qquad (16)$$

Таким образом, две определенные выше величины качественно характеризуют спектр в диапазоне – мощность (мера влияния) определяет общее влияние исходной функции в данном диапазоне частот, а информационная энтропия (мера хаоса) определяет вклад каждой из гармоник – увеличение значения информационной энтропии показывает, что мощность в диапазоне определяется большим количеством гармоник.

Для применения метода выделяются некоторые характерные диапазоны частот, соответствующие тем или иным физическим особенностям человека, по каждому их них вычисляется спектр, а по нему две оценивающие функции – мощность в диапазоне и информационная энтропия в диапазоне. Получаемый вектор рассматривается как вектор состояния системы в «восстановленном фазовом» пространстве. Часто используется не сам вектор, а лишь некоторые его компоненты или простейшие арифметические действия над ними (сложение, вычисление отношения и т.п.).

Для экспресс–анализа состояния человека (степень сознания и степень боли) по снятой с помощью прибора ЭЭГ (f_0=250 Гц) происходит вычисление описанного характеристического вектора по следующим диапазонам частот:

- Диапазон очень низких частот (ОНЧ): (1 Гц, 3 Гц)
- Диапазон низких частот (НЧ): (3 Гц, 8 Гц)
- Диапазон высокие частот (ВЧ): (8 Гц, 16 Гц).

Фазовый вектор (на плоскости) строится следующим образом:

$$\vec{\Phi} = \left(\frac{P_{ВЧ}}{P_{НЧ} + P_{ОНЧ} + P_{ВЧ}}, E_{НЧ} + E_{ВЧ}\right)$$

Время обсчета одного фазового вектора с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье для построения спектра по выборке с длиной периода 16 сек на стандартном персональном компьютере Pentium-IV 2 HHz составляет 1–2 мс, что позволяет производить анализ в режиме реального времени. Было получено, что для состояния сознания и отсутствия боли характерно нахождение траектории в левом нижнем углу фазовой плоскости.

Литература

1. *Меклер А.А.* Применение аппарата нелинейного анализа динамических систем для обработки сигналов ЭЭГ. Актуальные проблемы современной математики: Ученые записки. – Т. 13 (Вып. 2) / Под ред. проф. Е.В. Калашникова. – СПб.: Изд-во ЛГУ им. А.С. Пушкина, 2004. – С. 112–140.
2. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. – М., 1990.
3. *Shannon C.E.* A Mathematical Theory of Communication // Bell System Technical J. – 1948. – V. 27. – № 4. – P. 379–423, 623–656.
4. *Николис Дж.* Динамика иерархических систем. – М.: Мир, 1989.
5. *Колмогоров А.Н.* Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. – 1959. – Т. 124. – С.754–755.
6. *Hausdorff G.* Dimension und auberes Mab. Math. Ann. – 1919. – 79. – P. 157–179.
7. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991.
8. *Mandelbrot B.* Fractals: Form, Chance, Dimension. Freeman, San-Francisco, 1977.
9. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D 9. – 1983. – P. 189–208.
10. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence. In: Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics, edited by D.A. Rand L.S. Young. Heidelberg: Springer-Verlag. – 1981. – P. 366–381; *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D 9. – 1983. – P. 189–208.
11. Heart rate variability. Standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use // European Heart Journal. – 1996. – 17. – 354–381.
12. *Antonov V., Fedulin A., Nosyrev S., Kovalenko A.* Critical Condition in Human. The Entropy Based Technology of Definition // CDQM Journal. – 2007. –Vol. 10. – № 1.
13. *Антонов В.И., Федулин А.М., Носырев С.П., Коваленко А.Н.* Определение состояния биосистемы на основе вычисления корреляционной размерности аттрактора в фазовом пространстве энтропии: Материалы X Всероссийской конференции по проблемам науки и высшей школы «Фундаментальные исследования в технических университетах». – СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2006.

ПРОБЛЕМЫ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ СИСТЕМЫ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ ФУНДИРОВАНИЯ

В.В. Афанасьев
профессор, ректор Ярославского педагогического государственного университета

Е.И. Смирнов
профессор Ярославского педагогического государственного университета

Несмотря на многочисленные попытки изменения учебных планов и программ, введение государственного образовательного стандарта и его модификаций (с 1994 года – первое поколение, где наряду с требованиями к уровню подготовки выпускников в профессиональной области определялись общие требования к развитию личности, и с 2000 года – стандарты ВПО второго поколения с более полной проработкой юридического обоснования и расширением перечня направлений подготовки бакалавров, магистров и дипломированных специалистов), проявления тенденций демократизации высшего педагогического образования, за последние десятилетия не происходит реальных изменений в качестве профессиональной подготовки учителя средней школы. Разрабатываемые стандарты сохранили ориентацию на информационно-знаниевую модель высшего профессионального педагогического образования, где основу определяют требования к минимуму содержания профессиональной подготовки в составе перечня дисциплин, их объемов и содержания, а не на требования к уровню освоения учебного материала. Более того, наши учителя и методисты озабочены определенным падением уровня образования в педвузах России. Усугубилась ситуация, о которой знаменитый немецкий математик Ф. Клейн еще в 1924 году писал как о «двойном разрыве» между школьными и вузовскими предметами, указывая на необходимость преподавания школьного предмета с точки зрения высшего педагогического образования. Об осторожности в отборе учебного материала и объеме фундаментальных знаний будущего учителя неоднократно говорил великий педагог К.Д. Ушинский. И дело не только в реальном уменьшении учебных часов на предметный блок дисциплин или в объективно сложившейся экономической и демографической ситуации, когда в педвузах учатся, в основном, средние по способностям студенты, а *в качестве и действенности освоения профессионально-ориентированного учебного содержания, достаточного для теоретического обобщения школьного предмета, и направленного на развитие мышления и личностных профессиональных качеств будущих учителей средней школы.*

Существенным фактором является и то, что Россия с 2003 года включилась в Болонский процесс на фоне интеграции в мировое образовательное пространство и отдавая приоритет общечеловеческим ценностям на всех ступенях высшего профессионального образования. Однако при этом необходимо сохранить в новых парадигмах традиционную фундаментальную составляющую высшего педагогического образования, адекватно ориентированную на будущую профессиональную деятельность учителя. Уникальным явлением в мировой истории является Российская система высшего педагогического образования, ведущая свое начало от Главного Педагогического Института первой половины XIX века в Петербурге и получившая свое развитие в советское время XX века. Достаточно отметить, что например, около 90% учителей Ярославской области – выпускники педагогических вузов и почти все заслуженные учителя в этом регионе также окончили педвузы, и эта картина характерна для большинства российских регионов.

Проект нового стандарта высшего профессионального образования был разработан в 2006 году как федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) на основе положительного опыта, накопленного в течение периода более, чем 10 лет системой высшего профессионального (в том числе, педагогического) образования. Введение уровневого высшего профессионального образования (бакалавр-магистр-специалист) в области педагогической деятельности создаст прецедент вариативности и преемственности освоения уровней, учета способностей и личностных качеств студентов, реальной опоры на ГОС общего образования в определении требований и содержания основных образовательных программ, направленности на профессиональный стандарт педагогической деятельности. Следует отметить, что проект макета ФГОС не предусматривает деления на компоненты, а устанавливает необходимые свободы образовательному учреждению для формирования образовательных программ с участием всех заинтересованных субъектов.

На основе опыта разработок и реализации ГОС ВПО первого и второго поколения и с учетом документов Болонского процесса проект макета ФГОС предусматривает:

- формирование стандартов по направлениям подготовки как совокупности образовательных программ бакалавра, специалиста и магистра, объединенных на базе общности их фундаментальной части;
- формирование требований к основным образовательным программам (ООП) и результатам освоения ООП направлений подготовки в виде компетенций как в области профессиональной деятельности, так и социально-личностной;
- разработку стандартов без деления их на федеральный, национально-региональный и вузовский компоненты одновременно с расширением академических свобод вузов при формировании ООП;
- разработку требований к содержанию и результатам отдельных образовательных программ;

- введение научно-исследовательской работы студентов как обязательного компонента ООП;
- установление трудоемкости (объема учебной работы студентов) ООП в зачетных единицах вместо часовых эквивалентов.

На основе проделанной исследовательской и аналитической работы, с учетом международного отечественного опыта предлагается сохранить цикловую структуру ФГОС ВПО (гуманитарный, социальный и экономический цикл; математический и естественнонаучный цикл; профессиональный цикл; практики и научно-исследовательская работа). При этом каждый цикл (который в европейском варианте называется модулем) должен иметь базовую и вариативную части. Предлагается задавать циклы не в жестком объеме трудоемкости, а в интервале, а также отказаться от регламентации состава дисциплин цикла, что позволит вузам самостоятельно проектировать образовательную программу в дисциплинарном или модульном (учебный предмет) варианте. Проект ФГОС ВПО задает перечень дисциплин только для создания учебников и учебных пособий. Единство образовательного пространства должно обеспечиваться единством требований к уровню подготовки как выпускника вуза (в виде компетенций), так и единством требований к освоению циклов ООП студентом.

Отмечая в целом динамику развития системы профессионального педагогического образования, следует признать наличие следующих проблем, обусловленных как внешними факторами, так и внутренними особенностями современного этапа ее деятельности:

– снижение престижности педагогического образования, понижение социального статуса педагога;

– отсутствие концепции профессионального педагогического образования, нормативно-правовой базы и экономических механизмов ее реализации;

– неразработанность научных и научно-методических основ диагностики качества педагогического образования; отсутствие эффективного механизма повышения качества подготовки педагогических кадров;

– наличие противоречий между содержанием современного педагогического образования и требованиями, предъявляемыми в настоящее время школой, обществом и государством к личности и уровню профессиональной компетентности педагога;

– несогласованность методологических подходов при создании и реализации преемственных государственных образовательных стандартов и программ для всех уровней и ступеней педагогического образования, механизма их мониторинга;

– отсутствие теоретически обоснованных и практически апробированных подходов и научно-методического обеспечения подготовки специалистов по образовательным областям базисного учебного плана общеобразовательной (основной) и профилям (средней) школы, ориентированных на работу в условиях малокомплектной и сельской школ, а также на преподавание в профильных классах;

– необходимость создания научно-методического обеспечения и разработки педагогических технологий подготовки педагогов к ведению учебно-воспитательной работы с разновозрастными коллективами;

– отсутствие научно обоснованного долгосрочного прогноза потребностей рынка образовательных услуг, запросов личности и общества;

– несоответствие механизма разработки, апробации и внедрения государственных образовательных стандартов всех уровней профессионального педагогического образования особенностям и традициям, современным тенденциям развития образования и общества в России;

– слабая материально-техническая база и недостаточное программное и научно-методическое обеспечение информационной подготовки педагогических кадров;

– нескоординированность тематики научных исследований в учреждениях системы педагогического образования, низкая активность педагогических учреждений в конкурсах научных проектов, недостаточный уровень поддержки и стимулирования фундаментальных и прикладных исследований, развития научных школ и научных направлений в системе педагогического образования.

Сохраняющиеся проблемы подготовки специалистов в системе профессионального педагогического образования усугубляют: низкий социальный статус педагога и уровень его заработной платы; отсутствие быстрой ориентации и адаптации системы профессионального педагогического образования к новым запросам образовательных учреждений, субъектов рынка образовательных услуг; недостаточно полный учет возможностей университетского комплекса для обеспечения высокого качества профессионального педагогического образования, несогласованность структур системы профессионального педагогического образования в работе по профессиональной ориентации и профессиональному отбору, препятствующие выявлению творческих способностей и мотивов абитуриентов к осуществлению педагогической деятельности; несовершенство механизмов обеспечения успешной адаптации педагогов к новым условиям и быстрого их продвижения в системе профессионального педагогического образования; неразработанность содержания и технологий продуктивного взаимодействия всех субъектов и структур системы профессионального педагогического образования. Это диктует необходимость изменения концептуальных основ подготовки современного учителя.

Наличие этого противоречия усиливает реально существующее несоответствие логики развертывания содержания, методов вузовского обучения и содержания школьного предмета, учебные элементы которого и универсальные учебные действия школьников не получают адекватного теоретического обобщения и технологического оснащения.

С другой стороны, исторически в содержании подготовки учителя средней школы фундаментальная и методическая составляющие (специализированная подготовка к педагогической деятельности) традиционно разделялись: например в 90-х годах XIX века Министерство народного просвещения было вынуждено отказаться от предварительных испытаний, которые были установлены для окончивших курс университета при определении на учительские должности. Более того, существовавшие при учительских округах одногодичные курсы для подготовки учителей средней школы влачили жалкое существование, так как окончившие университет считали излишним тратить год на свою педагогическую подготовку и предпочитали прямо поступать на учительские места в среднюю школу. Но и в начале XXI века несмотря на исторический опыт часть наших ученых-педагогов убеждена в том, что сначала надо давать широкое фундаментальное университетское образование в области наук, а затем проводить специализированную подготовку к педагогической деятельности. В таких случаях игнорируется тот факт, что *формирование психологической системы деятельности студента происходит успешнее, если фундаментальная подготовка увязывается с методической на основе глубокого знания и теоретического обобщения школьных учебных элементов в свете определения профессионального стандарта педагогической деятельности.*

Более того, фундаментальная подготовка, в основном, осуществляется в отрыве от профессионально-педагогической, от ориентиров профессионального стандарта педагогической деятельности и ГОС общего образования и, как следствие, отсутствуют достаточные методологические основания для отбора содержания, методов, форм и средств профессионально-предметной подготовки учителя. Сейчас данная проблема решается различными способами. Первый способ – увеличение объема предметных и психолого-педагогических курсов, читаемых в вузе, например, в рамках специалитета после бакалаврской подготовки. Авторы данного подхода, по-видимому, считают, что чем больше студентам читается фундаментальных и психолого-педагогических теорий и методик, тем быстрее у них сформируется система профессионально-педагогической деятельности. Опыт подсказывает, что это происходит далеко не всегда. Второй способ, более перспективный, заключается в том, чтобы как можно раньше, на первом-втором курсах, начинать методическую подготовку студентов, используя различные профессиональные пробы, пока не обоснованные ни теоретически, ни экспериментально. К тому же, это противоречит современной тенденции к уровневому образованию, сближению мировых образовательных систем, наличию универсального ядра содержания ООП подготовки бакалавра и магистра.

По нашему мнению [1], *процесс высшего профессионального педагогического образования должен рассматриваться в парадигме фундирования процессов становления личности на основе:*

- *определения и реализации в структуре ООП профессионального стандарта педагогической деятельности на компетентностной основе;*
- *учета и систематического расширения и углубления результатов освоения ГОС общего образования (второго поколения) личностью обучающегося.*

Фундирование (нем. Fundierung – обоснование, основание) – термин, используемый в феноменологии (и в других науках) для описания отношений онтологического обоснования. В [2] Э. Гуссерль определяет отношение фундирования следующим образом: А фундировано посредством В, если для существования А сущностно необходимо В, только в единстве с которым А может существовать. Отношение фундирования может быть односторонним (А фундировано в В) или двухсторонним (А и В фундированы друг в друге). Согласно феноменологическому учению, все комплексные высокоуровневые акты и предметности фундированы в изначальных простых актах и предметах. В педагогику впервые понятие фундирования было введено В.Д. Шадриковым [1] в 2002 году *как процесс создания условий для поэтапного углубления и расширения школьных знаний в направлении профессионализации и формирования целостной системы научных и методических знаний, как процесс формирования целостной системы профессионально-педагогической деятельности.*

На первом, *профессиональном* этапе определялись предметные знания и умения, предназначенные для дальнейшего формирования ближайшего видового обобщения базовых учебных элементов школьного предмета, на втором этапе, *фундаментализации,* осуществляется их глубокое теоретическое обобщение необходимое и достаточное для успешной профессиональной деятельности, которое на третьем, *методическом,* этапе включалась в структуру профессиональной деятельности как средство реализации учебно-воспитательных функций педагога. Чтобы включение обобщенных знаний происходило безболезненно, они были организованы в форму, наиболее удобную для их освоения студентами. Именно эту функцию перестройки освоения предметных знаний в соответствии с целями и задачами педагогической деятельности выполняло фундирование.

Концепция фундирования опыта личности предполагает развертывание в процессе предметной подготовки студентов следующих компонентов:

– определение, анализ и механизмы реализации содержания уровней базовых школьных учебных элементов и видов деятельности (знания, умения, навыки, математические методы, идеи, алгоритмы и процедуры, содержательные линии, характеристики личностного опыта);

– определение, анализ и механизмы реализации содержания уровней и этапов (профессионального, фундаментального и технологического) развертывания базовых вузовских учебных элементов и видов деятельности в направлении «школа-вуз-школа»;

– определение и реализация технологии фундирования с учетом проектирования индивидуальных образовательных траекторий и развития самостоятельности студентов как основы конкурентоспособности на рынке труда (диагностируемое целеполагание, наглядное моделирование уровней глобальной структуры преемственности, локальной модельности видового освоения, механизмы управления познавательной и творческой деятельностью студентов, дидактические модули, блоки формирования профессиональной мотивации в освоении базовых учебных элементов и видов деятельности, вариативность способов решения педагогических и учебных задач);

– определение и механизмы методической адекватности обеспечения преемственности базовых школьных и вузовских (фундированных) учебных элементов и видов деятельности на основе современных методологических принципов и концепций.

Формирование и развитие компетентностей профессиональной деятельности студентов педагогического вуза связано как с динамичными изменениями в социальной жизни общества, так и с перестройкой системы профессионального образования, изменениями в образовательной системе.

Следует так же отметить, что у части учителей не сформирована система значимых профессиональных компетентностей, следовательно, необходимо создать такую инновационную систему вузовского образования на единой концепции, которая бы являлась основой для формирования компетентностей будущего учителя, конкурентоспособности на рынке труда и успешность профессиональной деятельности учителя.

Новое качество профессиональных компетентностей будущего учителя – это восприимчивость к реализации новых образовательных технологий, в том числе информационных, способность решать профессиональные задачи в условиях выбора и неопределенности, в контексте повышения уровня:

- профессиональной мотивации в учебной и внеучебной деятельности на основе всемерного развития самостоятельности;
- освоения интегративных связей академических и школьных знаний на генетической и вариативной основах;
- контрольно-диагностических компетентностей в оценке результатов учебной и обучающей деятельности;
- наглядного моделирования процессов, явлений и учебных элементов для понимания учебных задач и способов деятельности;
- предметных компетентностей в системогенезе (формирования знаний, умений, навыков, частных методов, алгоритмов и процедур, методов и технологий организации учебной деятельности);
- компетентностей в принятии решений, в типичных и нетипичных педагогических ситуациях (исследовательское поведение)
- иноязычной коммуникационной компетентности студентов путем организации дополнительного образования на базе оснащения специальных кабинетов, аудиторий и классов, приобретения и создания учебно-методических материалов.

В современных условиях перехода к уровневому образованию рассмотрение идеи и концепции фундирования приобретает новые качественные характеристики в свете расширения сторон личности от усвоения опыта до развития функциональных механизмов психики и типологических свойств личности (восприятие, мышление, способности, рефлексия и т.п.) равно как и ориентации на разработанный в 2006 году профессиональный стандарт педагогической деятельности [3].

В то же время ГОС общего образования, лежащий в основе развертывания процессов фундирования, претерпел в последние годы существенные изменения. В отличие от образовательных стандартов общего образования первого поколения, которые были ориентированы в основном на задание уровня подготовки выпускников и индивидуальную оценку учебных достижений отдельного школьника, ГОС второго поколения стандарта (2005 г.) ориентирован на задание *ориентиров развития* системы образования, на ожидаемые обществом *результаты образования.* Требования к ООП, результатам освоения образовательных программ должны будут формироваться на основе *профессиональных стандартов, в области педагогической деятельности*, разработанных под руководством академика РАО В.Д. Шадрикова в 2006 году. Формирование ФГОС ВПО на компетентностной основе ставит новые сложные задачи в разработке требований к ООП, результатам освоения ООП в виде перечня компетенций, структуре и условиям реализации ООП.

Таким образом, организация заблаговременной и целенаправленной успешной реализации образовательных программ профессионального педагогического образования может стать интегративным условием развития педагогической системы учебного заведения, особенностью которой является оптимизация педагогического процесса, развитие мышления, самостоятельности, творческой активности учащихся, формирование основ профессионального мастерства. В связи с желанием создать такие педагогические системы, у учителей создаются благоприятные возможности появления новых потребности педагогического самосовершенствования.

Анализ действующих образовательных программ, передового опыта и результатов профессионально-педагогической деятельности учителей и педагогов, учет факторов содержания общего образования (второго поколения), положений Профессионального стандарта педагогической деятельности, разработанного нами приводит к выводам, что *требования к результатам освоения основных образовательных программ подготовки в области профессионального педагогического образования должны иметь универсальное ядро компетенций (универсальных и предметно-специализированных или профессиональных)*, необходимое и достаточное, для соответствия макету ФГОС и успешности педагогической деятельности.

Рис. 1. Успешность профессиональной деятельности педагога

Реальные инновационные процессы и эффективные педагогические выводы в этом направлении могут актуализироваться только при условии глубокого теоретического анализа проблем и противоречий образовательного процесса подготовки учителя, глубокого психологического анализа и диагностики учебной деятельности студента, системогенеза и практики подготовки учителя в педагогическом вузе. Исследование такого рода проводится в Ярославском государственном педагогическом университете им. К.Д. Ушинского с 1997 года в направлении определения содержания и технологии профессиональной подготовки учителя (специальности «математика», «физика», «химия») на основе *инновационной концепции фундирования* (научный руководитель – В.Д. Шадриков). В рамках этой концепции впервые в истории России разработан и с 2001 года внедряется экспериментальный ГОС высшего педагогического образования по специальности «математика» (приказ № 2046 от 14.05.2001 г., МО РФ). В Ярославле на протяжении последних семи лет регулярно проводятся школы-семинары по проблемам математического образования будущих учителей , в той или иной мере трактующие результаты и передовой опыт исследования (последние четыре года – это Колмогоровские чтения, в честь великого математика, родовые корни которого находятся на ярославской земле, академика А.Н. Колмогорова). Ряд университетов России активно участвует в реализации инновационной технологии фундирования для повышения качества профессиональной подготовки учителей естественнонаучного профиля (Астраханский, Вологодский, Ставропольский, Тюменский, Пермский, Костромской и др.).

Поэтому надо понять и принять, что система массовой подготовки учителя в педагогических вузах – это уникальная образовательная ниша в системе высшей профессиональной подготовки в России. Поэтому по-прежнему остается актуальным вопрос, который заключается в определении научно-обоснованного содержания, форм, методов и технологий, повышении качества профессиональной подготовки учителя, отвечающих современным мировым тенденциям, запросам личности и общества, реалиям жизни и задачам вовлечения России в мировые образовательные процессы.

Литература

1. *Афанасьев В.В., Поваренков Ю.П., Смирнов Е.И., Шадриков В.Д.* Подготовка учителя математики: инновационные подходы. – М.: Гардарики, 2001. – 384 с.

2. *Гуссерль Э.* Идеи к чистой феноменологии и феноменологической философии. – М.: Лабиринт, 1994.

3. Профессиональный стандарт педагогической деятельности / Под ред. Я.И. Кузьминова, В.Л. Матросова, В.Д. Шадрикова // Вестник образования. – 2007. – 7. – С. 20–34.

СИНЕРГЕТИЧЕСКАЯ КОНЦЕПЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

Г.А. Балыхин
Председатель Комитета по образованию Государственной Думы РФ

В.В. Егоров
профессор Московского городского университета управления Правительства Москвы

О.А. Сперанский
доцент Московского института радиотехники, электроники и автоматики (технического университета)

Прежде всего, предлагается определиться с основными понятиями и определениями, которые будут использованы в докладе.

Синергетика (от греч. synergetike – содружество, коллективное поведение) – наука о самоорганизации простых систем и превращения хаоса в порядок. Под самоорганизацией понимается появление определенного порядка в однородной массе и последующего совершенствования и усложнения возникающей структуры, т.е. образование структуры происходит не за счет внешнего воздействия, а за счет внутренней перестройки. В синергетическом действии присутствуют три основных процесса – это адекватное планирование, эффективный обмен знаниями и текущей информацией между сотрудниками организации и текущая координация работы.

Сама концепция синергетического управления базируется на результативном использовании данных процессов в управлении трудовыми коллективами в сфере образования и науки. Данная концепция позволяет преодолеть интеллектуальные барьеры и достаточно быстро перейти на инновационный путь развития всего народного хозяйства России.

Переход на инновационный путь развития сопряжен с увеличением расходов на всю интеллектуальную сферу для последовательного решения ряда более мелких задач:

(1) повышение уровня технической оснащенности всей системы образования; (2) повышение качества телекоммуникационных систем страны; (3) ликвидации компьютерной неграмотности; (4) привлечение высококвалифицированных кадров в организационные системы интеллектуальной сферы; (5) интеллектуализации всех видов деятельности для формирования условий востребованности интеллектуального продукта, произведенного интеллектуальной сферой. Пока Россия к таким переменам не готова. Преимущество западных экономик заключается в том, что в их системе управления произошли глубокие перемены ставшие основой «экономики знаний». Материализация знаний – главный источник расширенного воспроизводства новых товаров и услуг, сокращения сроков практической реализации проектов и программ, преобразования технического базиса общества, изменения характера и содержания труда, форм организации и управления трудовой деятельностью. Это сложная, по сути и содержанию, задача для своего решения требует формирования новой концепции, направленной на создание творческой инициативы снизу и всесторонней её поддержки сверху. Для формирования новых условий функционирования образовательной сферы требуется новая стратегия управления сложнейшими социоинформационными системами. Основными причинами, определяющими потребность в данной концепции, являются:

1) общая тенденция нарастания интеллектуализации и информатизации трудовой деятельности, которая предъявляет повышенные требования к управленческой деятельности и методологии оценки её вклада в конечный результат;

2) изменение системы взаимодействия людей, вовлеченных в совместную деятельность, предъявляющей дополнительные требования к формам и методам управления;

3) невозможность управления без перераспределения управленческих функций при создании и коммерциализации объектов интеллектуальной собственности;

4) необходимость обеспечения интеллектуальной деятельности, в силу её природы, с одной стороны, свободой творчества, а с другой – повышением ответственности каждого участника трудового процесса за конечный результат.

В России изучение управленческого воздействия на результаты деятельности было положено работами И.Т. Посошкова, Д.И. Менделеева и другими учеными. Было выявлено, что одно из самых ценных качеств лица, принимающего управленческое решение, является предвидение изменений в системе от управленческого воздействия. Однако, для оценки результатов в условиях инновационного развития необходимо иметь ясность и понимание так называемой инновационной пирамиды, основу которой составляет инновационная платформа состоящая из трёх равноценно значимых вершин – идея, капитал и политическая воля, которые лежат на плоскости инновационной культуры. Из центра основания пирамиды выходит временная ось которая и указывает на время внедрения идеи в реальную сферу (экономическую, социальную, техническую и т.п.), которая становится нововведением. Таким образом, нововведение – это результат инновационного процесса, а инновационный процесс – совмещение во времени трех инновационных составляющих (идея, капитал и политическая воля). Все вышесказанное представлено на рис. 1.

Управление в интеллектуальной сфере – это комплекс методов информационного воздействия на отдельных работников, отдельную группу или коллектив, позволяющий преобразовать управленческую информацию в перспективную, реализуемую идею, имеющую практическое воплощение в виде отдельного проекта или системы прогнозных результатов. Управление обеспечивает: а) генерацию идеи, б) аналитическую работу с идеей, в) НИР, ОКР, опытное производство, г) коммерциализацию результатов интеллектуальной деятельности.

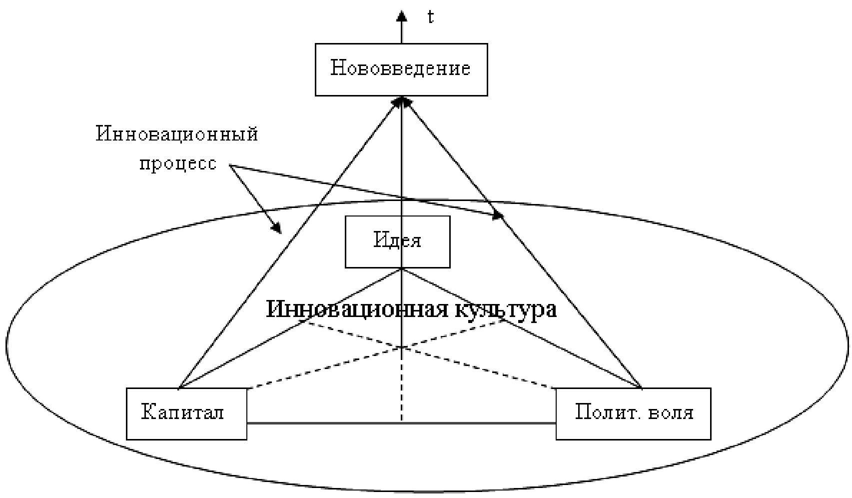

Рис. 1. Инновационная пирамида

Инновационное развитие страны становится возможным в следующих условиях управленческих воздействий на микро-, мезо- и макро уровнях согласно рис. 2.

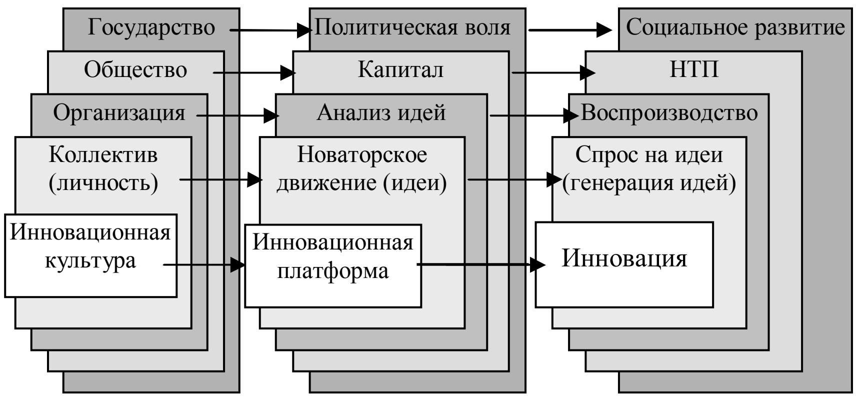

Рис. 2. Инновационный путь развития общества

На макроуровне: (1) государство через политическую волю обеспечивает социальное развитие общества; (2) общество через капитал (трудовой, финансовый, интеллектуальный) добивается научно-технического прогресса страны. *На мезоуровне:* организация (фирма, корпорация, конгломерат) через анализ идей добивается расширенного воспроизводства новых товаров и услуг, востребованных обществом. *На микроуровне:* коллектив (творческая группа) через новаторское движение создает условия востребованности идей со стороны членов и руководства коллектива и организации, а члены коллектива через межличностное соревнование в условиях новаторского движения генерируют новые идеи. Важность решаемой проблемы сопряжена с устранением двойного противоречия: (1) отсутствие условий перехода на инновационный путь на макроуровне и создание новшеств на микроуровне; (2) отсутствие востребованности новшеств на микроуровне и провозглашение инновационного пути развития на макроуровне.

Управленческое воздействие имеет три уровня: (1) базовый (рефлексивно-ценностное управление); (2) мобилизационный (мобилизационное управление); (3) синергический (синергетическое управление). *Информационный путь* управляющего воздействия имеет три уровня: (1) целевой; (2) корректирующий; (3) автономный (рис. 3).

Показателями качества синергетического управления являются: (1) разность между достигнутым и нормативным (прогнозируемым) результатами; (2) объем информации, получаемый каждым членом коллектива за фиксированный промежуток времени; (3) количество внедренных разработок в хозяйственный оборот в течение года; (4) соотношение времени, затраченного на новаторскую деятельность, к общему времени трудовой деятельности.

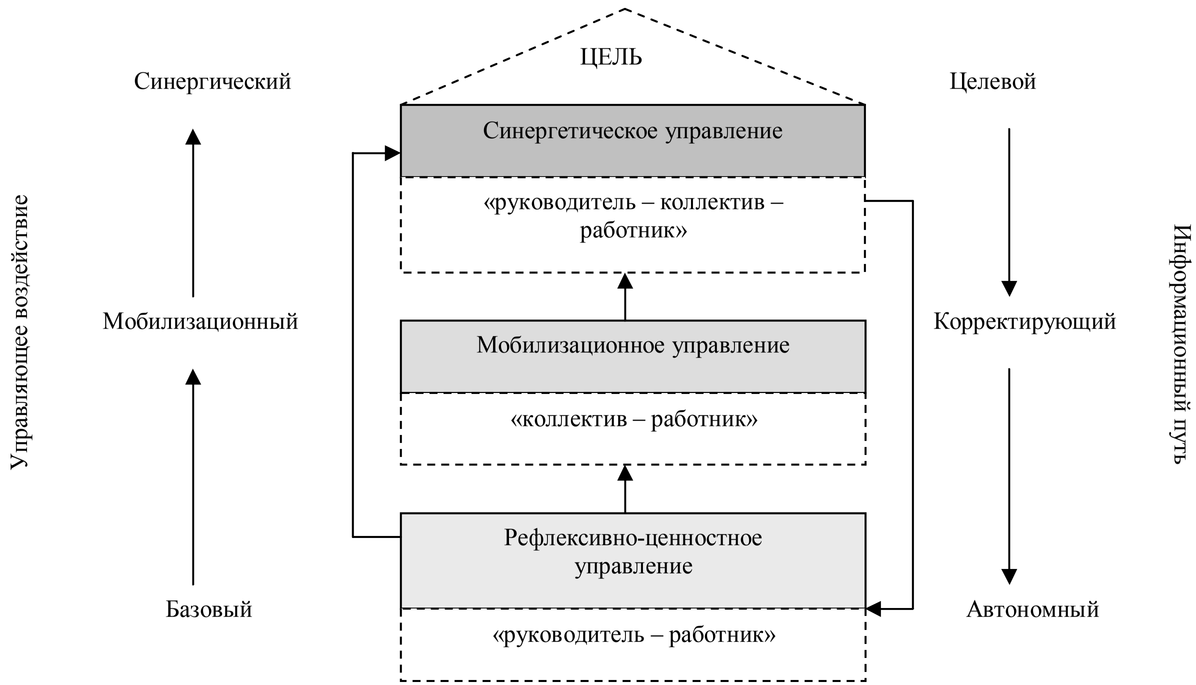

Рис. 3. Структура и взаимосвязи синергетического управления

Эффективность синергетического управления зависит от вклада управленческого воздействия в конечный результат. Эффективность управления указывает на: (1) умение руководителя рационально использовать интеллектуальный потенциал членов трудового коллектива; (2) информационное, материальное и временное обеспечение трудовой деятельности; (3) организацию процесса информационного обмена внутри коллектива; (4) условия безопасности деятельности при распространении интеллектуального продукта. На рис. 4 представлена схема оценки эффективности управления.

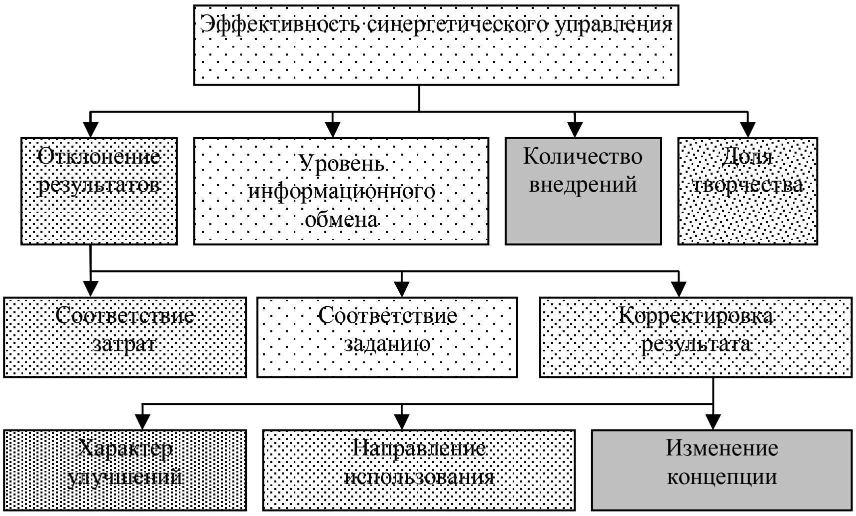

Рис. 4. Декомпозиционная схема эффективности синергетического управления

Синергетический эффект – это результат перехода социальной системы на качественно новый уровень развития. Он проявляется в виде дополнительных эффектов в составе результатов деятельности трудового коллектива.

Фазы реализации концепции синергетического управления представлены на рис. 5, а социальная конструкция результативности синергетического управления на рис. 6.

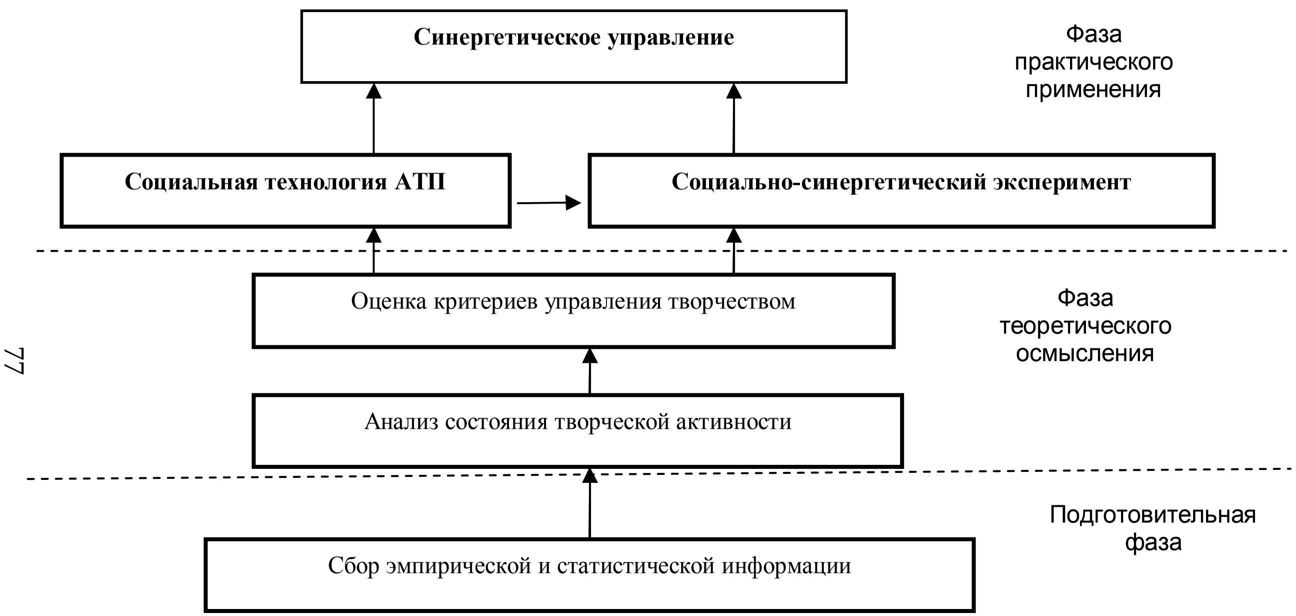

Рис. 5. Фазы реализации концепции синергетического управления

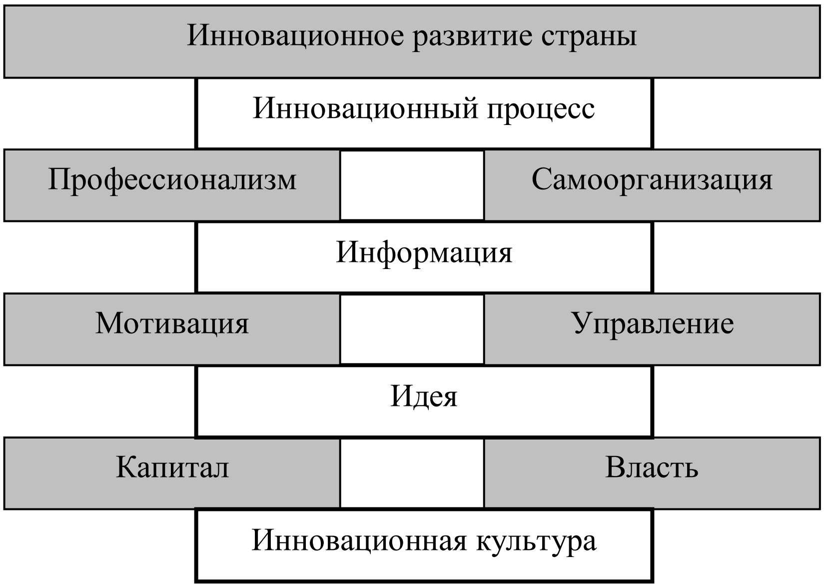

Рис. 6. Конструкция реализации концепции синергетического управления

Результатом управления является наполнение отдельных сфер общества (экономической, социальной, политической, духовной) интеллектуальным продуктом (новые знания, интеллектуальная собственность и информация), способствующим существенным изменениям основ организации жизнедеятельности общества, трансформации и пересмотру многих социокультурных приоритетов (ценностей), формированию глобального информационного пространства.

Глобальное информационное пространство призвано обеспечить: а) эффективное информационное взаимодействие людей, б) их доступ к мировым информационным ресурсам, в) удовлетворение их потребностей в информации. Для этих целей создается система организационных структур, обеспечивающих функционирование и развитие информационного пространства страны и средств информационного взаимодействия. *Управление в интеллектуальной сфере* отличается от других сфер тем, что результат трудовой деятельности определяется качеством и объемом управленческой информации и интеллектуальным потенциалом личности и коллектива, на который направлен данный информационный поток.

Накопленный огромный теоретико-методологический материал в настоящее время требует практического применения во благо развития российского общества. Однако, современное состояние характеризуется недостаточной степенью разработанности ряда ключевых вопросов, составляющих основу концепции синергетического управления.

1. Синергетическое управление деятельностью трудового коллектива в интеллектуальной сфере – это особый вид управления, позволяющий создать условия, благоприятные для преодоления интеллектуальных барьеров, возникающих в ходе решения новой проблемной задачи, стоящей перед трудовым коллективом. Интеллектуальный барьер как специфическое свойство интеллектуальной деятельности сводится к попыткам решения новых задач старыми апробированными способами (методами или алгоритмами), непригодными в данных условиях и сдерживающими поиск нового, более эффективного способа (метода или алгоритма) решения данной проблемной задачи.

2. Синергетическое управление имеет как сходство, так и различия с другими видами управления в своём воздействии на деятельность трудового коллектива. Сходство заключается в передаче информации от субъекта к объекту управления, необходимости прогнозирования результата и обосновании конечных целей деятельности. Различия связаны с особенностями задач, требующих решения, спецификой предоставления новых знаний, методологией использования «коллективного разума» при разрешении выявленных противоречий, методикой создания дополнительной значимой информации, присутствие которой снижает степень её неопре-

деленности, объемом информации, подлежащей обработке в процессе деятельности трудового коллектива, непропорциональностью приложенных управленческих усилий полученному результату, поиском условий деятельности трудового коллектива, изменения которых приводит к максимальному результату и т. д.

3. Совокупность элементов, используемых в синергетическом управлении, способствует формированию условий для выдвижения новых идей, способствующих достижению желаемых целей.

4. К элементам синергетического управления относятся: информация; знания; установки на использование методологии технического творчества для преодоления интеллектуальных барьеров; индивидуальные подходы и алгоритмы решения проблемных задач; аргументация новизны и значимости предлагаемых вариантов решения поставленных задач; разделение деятельности на создание (генерацию) идей и аналитическую работу; рациональное распределение ролей внутри трудового коллектива и др.

5. Социальная конструкция результативности синергетического управления указывает на три фазы управляющих воздействий (базовая, мобилизационная и синергетическая), которые обеспечивают: осознание каждым членом трудового коллектива значимости творческого подхода и своего вклада в конечный результат трудовой деятельности; саморегуляцию системы взаимодействия работников внутри трудового коллектива; совершенствование процесса трудовой деятельности, способствующее решению интеллектуальных задач на основе творческого подхода и преодолению интеллектуальных барьеров, возникающих в ходе решения поставленных задач.

6. Взаимодействие членов трудового коллектива во время интеллектуальной работы парадоксально по своей сущности. Этот процесс одновременно способствует сближению всех членов коллектива и их отчуждению. Вероят-

ность отчуждения увеличивается в условиях постоянных реформ в интеллектуальной сфере, изменений отношения общества к интеллектуальной деятельности, отсутствия социальных институтов популяризации и/или пропаганды творческой и новаторской деятельности или их неэффективной работе, слабой финансовой поддержки государства и т. п. Феномен поливалентности социальных ценностей способствует все более неоднозначному восприятию творческого подхода в достижении поставленных целей, расслоению коллектива на сторонников и противников нововведений. Особое значение в этих условиях приобретает синергетическое управление, отражающее ценности и нормы инновационной культуры и способствующее формированию позитивных тенденций в деятельности трудового коллектива (получение социальных, экономических и технических эффектов, ранее отсутствовавших).

7. Синергизм управления как социальный феномен характеризуется сложностью его получения и неоднозначностью его восприятия и оценки. Он заключается в проявлении ранее отсутствовавших эффектов в процессе деятельности или в конечном результате. Неоднозначность восприятия и оценки проявляется в системе характеристик показателей значимости получаемых эффектов для индивида, коллектива и общества.

8. Одним из проявлений синергизма является качественный параметр – скачок в интеллектуальном развитии всех членов трудового коллектива. Он заключается в понимании (осознании): необходимости нового подхода к решению поставленной перед ним задачи; значимости информационного обмена между членами трудового коллектива; возможностей преодоления интеллектуальных барьеров при условии получения дополнительных знаний и интенсификации взаимодействия членов трудового коллектива. На уровне коллектива (организации) данный феномен описывает переход имеющегося интеллектуального потенциала и накопленных

информационных ресурсов в материальный ресурс, востребованный обществом.

9. Конечный результат трудовой деятельности в сфере образования и науки трудно предсказуем и зависит от способностей руководителя мобилизовать весь имеющийся потенциал коллектива на достижение стратегических и тактических целей организации, фактически соединив социальное и информационное пространство. При этом социальное пространство ограничивают социальные интересы и ценности членов трудового коллектива, занятого интеллектуальной работой, которые в определенных условиях повышают или понижают вклад работника в конечный результат. Информационное пространство ограничивают: доступность, надежность и достоверность необходимой информации; объём знаний пользователя; возможности обработки и представления информации в установленные сроки.

Рассмотрим основные тенденции подачи заявок на изобретения в США, Японии и России представленные на рис. 7.

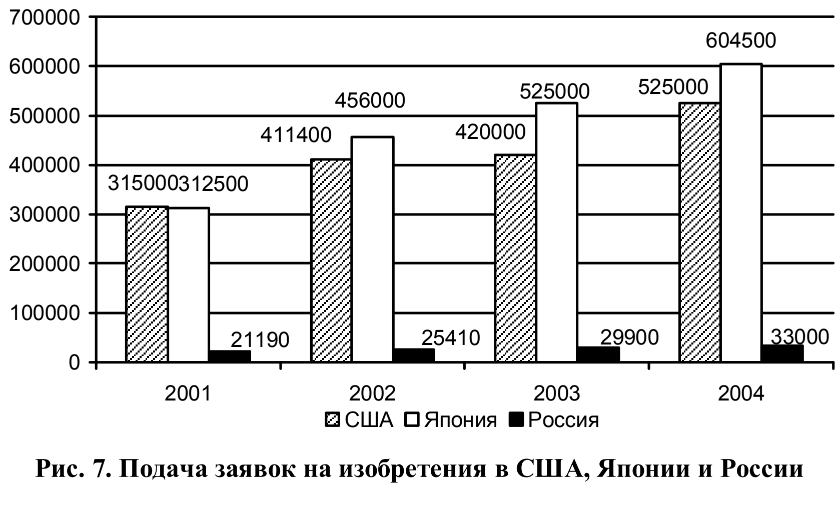

Рис. 7. Подача заявок на изобретения в США, Японии и России

Причины способствующие снижению интеллектуальной активности в нашей стране представлены на рис. 8 и в таблице 1.

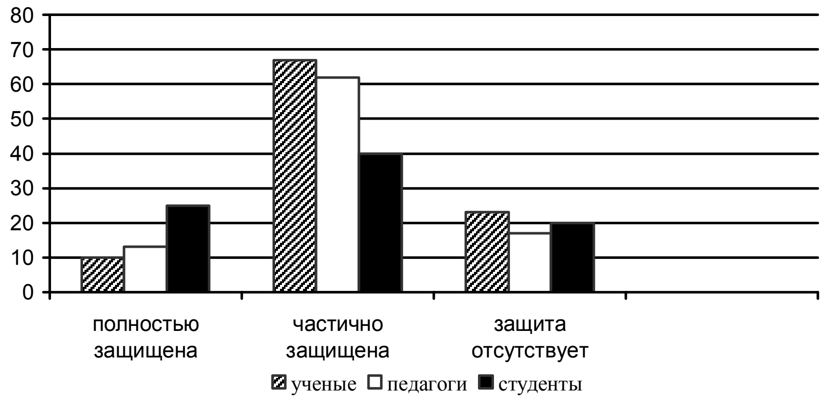

Рис. 8. Защищенность интеллектуальной собственности в России

Таблица 1

Ассигнования на науку из средств федерального бюджета в млн. руб.[1]

Вложения в научную сферу	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
в действующих ценах	26,25	187,5	1649,7	4275,2	9493,5	11737,3	18413,6	10881,8	24600,1	34539,2
в постоянных ценах	26,25	11,79	10,49	6,67	5,33	4,57	6,26	3,19	4,37	4,37

Доля расходов на науку в ВВП сократилась за 10 лет на 75% (с 4,72% в 1990 г. до 1,16% в 2000 г.). Удельный вес занятых в науке сократился на 45%. Следует заметить, что в последние годы науке стало уделяться большее внимания и изменилось стратегическое отношение государства к науке как к приоритетной сфере своих интересов. Данные табл. 1 наглядно показывают двойственность тенденций: а) в дейст-

[1] *Гохберг Л.М.* Статистика науки. – М.: ТЕИС, 2003. – С. 446.

вующих ценах расходы на науку и научное обслуживание за 10 лет возросли в 1315,7 раз; б) в постоянных ценах расходы снизились в 6,5 раз. Таким образом, чтобы интеллектуальная сфера финансировалась на уровне 1991 года на нее необходимо было выделить в 2008 году в 10 раз больше, чем предусмотрено бюджетом Росси. Социальные последствия этого периода: (1) потеря половины высококвалифицированных сотрудников; (2) нарушение системы информационного обмена перестал существовать институт наставничества, произошли возрастные перекосы – отсутствие сотрудников среднего возраста, произошла быстрая феминизация науки и образования – замена мужчин женщинами и другие изменения. В 2004–2006 гг. были предприняты попытки изменить сложившуюся обстановку в интеллектуальной сфере, и это дало определенный результат. Например, частный предпринимательский сектор стал проявлять большее внимание к научным разработкам, Правительство РФ возобновило реализацию оборонного заказа на основе отбора передовых образцов техники и вооружений, появилась национальная программа поддержки инновационных предприятий, возникли технопарки, технозоны, инновационные центры и т. п. Все это повышает вероятность положительного направления вектора развития российской интеллектуальной сферы в ближайшем будущем, на что указывают прогнозные результаты 2010 г.

Однако, современная ситуация является достаточно парадоксальной по той причине, что вместо вложения дополнительных средств, которыми располагает Россия, в собственную экономику, образование и науку средства направляются на другие цели. Например, реально проводится политика по реализации приоритетных направлений, невыгодных самой России.

Направление 1 – приоритетная оплата внешнего долга, при сохранении долга внутреннего.

Направление 2 – оказание помощи странам СНГ (списание 20 млрд долл. с Украины и 10 млрд долл. с Белоруссии в 2003 г.) и некоторым другим странам (списание 10 млрд долл. с Ирака, 15 млрд долл. с Кубы, списание долгов странам Африки и т.д.).

Направление 3 – поддержка западного производителя как продовольственных товаров (импорт продовольствия составляет около 40% потребления, что превышает порог национальной продовольственной безопасности), так и промышленных товаров (закупка списанных самолетов гражданской авиации США – около 30% от всего самолетного парка).

Направление 4 – состояние и состав золотовалютного резерва России: золото – 10–15%, валюта – 20–25%, остальное, то есть не менее 60% – акции западных компаний. Названные факторы со всей очевидностью свидетельствуют о том, что в России существуют благоприятные условия для поддержки иностранного производителя, развития и материализации интеллектуального потенциала развитых стран.

Низкий уровень оплаты труда в России (ниже среднемирового в шесть раз[2]) не создает условия, стимулирующие покупательский спрос, а рост цен на продукты питания, оплату жилья, лекарства и другие жизненно важные продукты и услуги делают его минимальным.

Подводя итог вышесказанному можно сделать следующие выводы:

1) устойчивость инновационной платформы определяется прочностью связей между её базовыми составляющими;

---

[2] Минимальный уровень оплаты труда в США установлен 8 долл./час, в странах ЕС – 6–8 евро/час, для развивающихся стран – 3 долл./час, в России – от 30 до 100 долл./месяц (примерно 0,5 долл./час), см. Российский экономический журнал – 1998. – № 4; *Парсаданов Г. А., Егоров В.В.* Прогнозирование национальной экономики: Учебник. – М.: Высшая школа, 2002.

2) формирование уникальной инновационной культуры коллектива, организации и общества зависит от управления и обеспеченности творческой деятельности всеми видами ресурсов;

3) основными ресурсами страны являются: (а) интеллектуальный потенциал каждого члена трудового коллектива; (б) информационный ресурс трудового коллектива и организации; (в) интеллектуальный продукт, созданный коллективом, оформленный в виде объектов интеллектуальной собственности и включенный организацией в хозяйственный оборот.

ОСОБЕННОСТИ СОЗДАНИЯ НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ В ВУЗАХ

А.И. Бугрова
профессор Московского института радиотехники, электроники и автоматики (технического университета)

А.С. Сигов
профессор, ректор Московского института радиотехники, электроники и автоматики (технического университета)

В постановлениях правительства РФ в последние годы неоднократно упоминалось о необходимости усовершенствования образования и создания при институтах и университетах научных центров, результаты исследований которых должны внедряться в промышленность. Этот подход позволяет превратить вузы страны в крупные инновационные центры.

В МИРЭА существуют такие центры, которые имеют большой авторитет у коллективов, занимающихся аналогичной проблемой. Рассмотрим пути создания научных центров в вузах, например «Научно-технический центр высоких технологий плазмодинамики МИРЭА». Речь идет о работе центра, занятого разработкой плазмодинамических систем, предназначенных для решения технологических задач, задач нанотехнологий, а также космических технологий.

Особенностью этих работ является тот факт, что эффективность создаваемых систем определяется пониманием физических процессов, происходящих в них, т.е. прежде чем создать заданную систему (решить поставленную задачу) необходимо четко понимать физические процессы сопровождающее её получение.

Естественно, что создание такого центра в институте принципиально отличается от аналогичной работы в НИИ или ОКБ. Она резко отличается решением вопросов финансирования. Если в НИИ работы начинаются уже при готовом финансировании государством (или кем-то), то организация центра в институте должна начинаться сплочением группы энтузиастов, которые являются компетентными в смежных областях той области, в которой делается новая разработка, так как известно открытия всегда возникают на стыке наук. Эти энтузиасты, используя свой авторитет, техническую помощь института, приобретают оборудование для оснащения технической базы работы. Здесь подразумевается приобретение оборудования, практически списанного за ненадобностью на предприятиях и готовых передать их институту. Кроме того, эта группа энтузиастов должна получить контракт на другую тему отличную от центра, из которой энтузиасты начнут оплачивать монтаж оборудования. Это всё проводится при условии того, что сами специалисты ещё заняты педагогической работой. Тем не менее, этот этап должен сопровождать привлечение к работе студентов, которые рассматриваются не только как база для научных исследований института, но и как пропаганда и агитация студентов вуза для работ в данном направлении.

Следующий этап работ по созданию центра в вузе является наиболее сложным: нужны основные стенды, новое оборудование, обучение, работа и передача научных знаний студентам, учитывая наклонности каждого из них и продвижение вперед на «плечах» специалистов, которые сами полностью не работали на данных схемах, и имеют только замыслы по реализации своих идей. Это очень трудный путь, так как «молодые таланты» собраны только в вузах, но их нужно не только учить науке, но и платить деньги, которых нет.

Тем не менее, следующий этап должен непременно быть: это составление двух план-графиков работ. Это графики работ для специалистов, который включает в себя личную работу на стендах и план-график для руководства студентов, в котором отражена не только «железная» часть работы, но и научная (кто кем из студентов руководит, в чем это выражается, как поднимается научный уровень студента и т.д.).

Со студентами заключается контракт на работу, в котором четко оговариваются сроки и результаты выполнения работ. Следующий этап: план-график уточняется. Для каждого студента подбирается работа в соответствии с его интересами и возможностью повышения его научного уровня, приводятся в соответствии с психологией молодого поколения: «паблисити» лаборатории, при наличии специалистов высшей категории получения больших научных результатов и дальнейшему развитию предложенной темы. Если в достаточно короткий срок станет очевидным недееспособность подобранного коллектива, возможно будет сэкономить финансы для организации нового направления использующего на 50÷70 % оборудованный центр, что приведет к финансовой экономии.

Примером тому может служить «Научно-технический центр высоких технологий плазмодинамики МИРЭА».

Рассмотрим принципиальное перечисление оборудования для плазмодинамических исследований проводимых в МИРЭА. Задачи, которыми занимается центр принципиально новые, нереализуемые ни в РФ, ни в любой стране Мира.

Задачи, которые решаются в центре в зависимости от сложности делятся на три пункта:

Группа 1. Студенты I–II курсов. При составлении задач для этой группы учитываются знания и возможность работать. Эти группы занимаются в основном механической работой и участием в получении экспериментальных данных.

Группа 2. Студенты второй группы занимаются уже научным сопровождением работы. Им не только объясняют физический и технический смысл работы, но и предлагаются пути решения поставленной задачи. В их функцию входит также полное ознакомление с необходимым оборудованием и принципами его работы.

Группа 3. Эта группа формируется из студентов, которые самостоятельно могут вести экспериментальную работу или теоретическое исследование под руководством преподавателей. На этом уровне по полученным материалам пишутся статьи и готовятся дипломные работы.

В центре проводятся исследования и разработка источников плазменных потоков для плазменных двигателей малой мощности. Сейчас такие двигатели используют на всех космических аппаратах. Однако они имеют большую расходимость струи и к.п.д. η. Целью работы центра является увеличение η до предельно возможной величины, уменьшение расходимости струи до величин $(5\div7)^0$ и уровня шумов до $(2\div4)\%$. Двигатели, созданные на базе таких источников нужны во всем мире. Поэтому эти разработки являются перспективными.

Второй темой является разработка плазмооптических сепараторов. Это экологически чистое устройство должно разделять плазменный поток в пределе $\Delta m/m \sim 1$. Возможно получение спектрально чистых пленок различных материалов, а также проводить разделение отходов атомных реакций. Оба эти направления требуют вакуумные камеры с большой откачкой, источников питания мощности $>1000\div2000$ кВт и систем регистрации I и U и их динамики в пространстве и времени СВЧ и спектральной диагностики. Требуется прокладка кабельной системы питания, поскольку запал по мощности требует до 10 000 кВт. Имеется специально изолированный распределительный пункт системы подачи газа, позволяющей подавать в объем камеры фиксированные порции газа или смеси газов в камеру.

Центр, в котором решаются перечисленные задачи и работающий в МИРЭА пользуется признанием и в РФ и в странах Европы, Америки и Азии.

Рис. 1. Работа плазменной ловушки

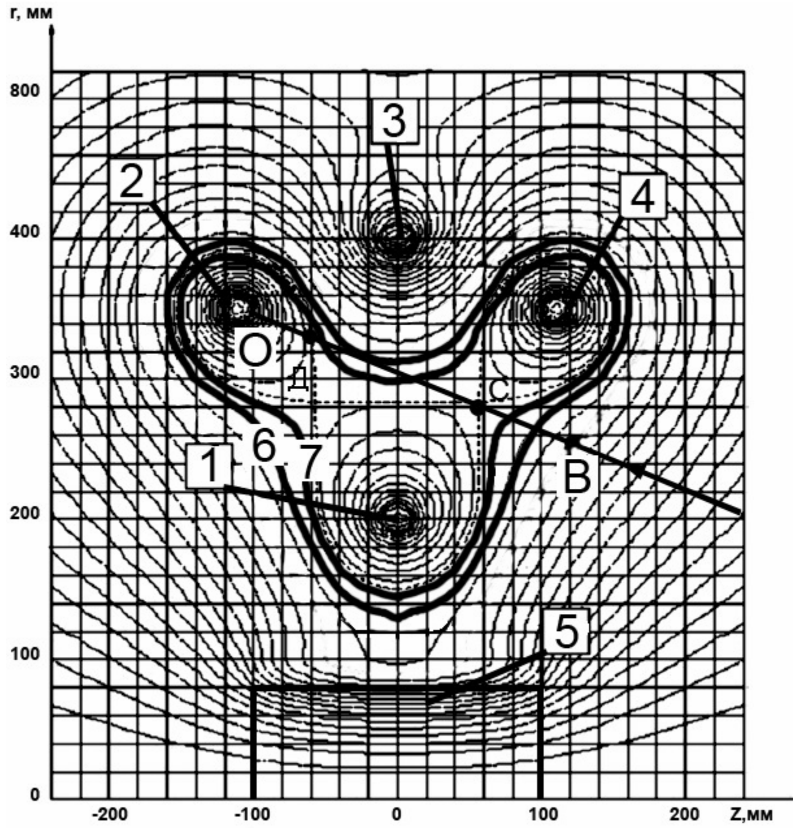

Рис. 2. Магнитная конфигурация галатеи «Тримикс»:
1,2,4 – миксины; 3 – «расталкиватель»; 5 – соленоид;
6, 7 – границы Окавы А (6) и Окавы Б (7); ВО – направление инжекции;
точки С и Д – положение электрических зондов 1 и 2.

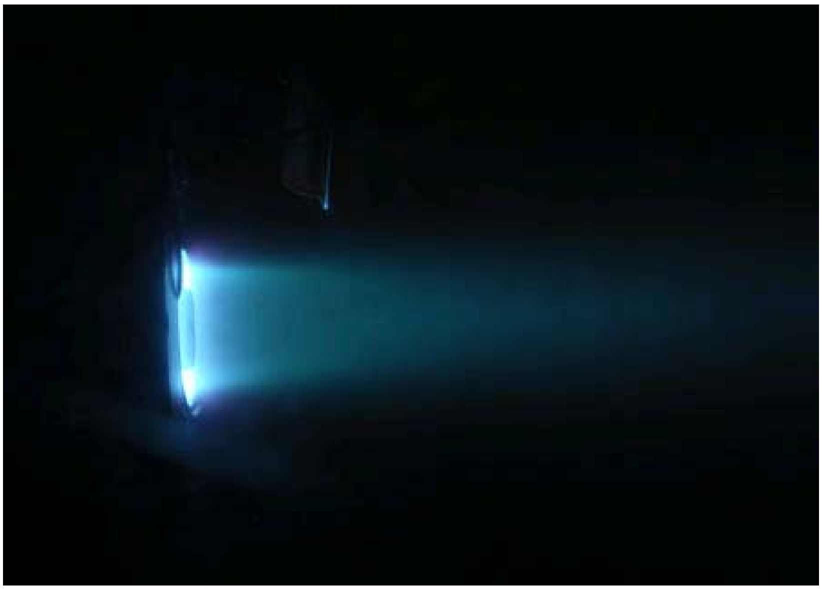

Рис. 3. Плазменный поток стационарного плазменного двигателя (СПД)

Рис. 4. СПД

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА: МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ

Я.А. Ваграменко
доктор технических наук, профессор, директор Института информатизации образования МГПУ им. Н.А. Шолохова

Для математической подготовки учащихся в условиях информатизации обучения важно установить сбалансированные отношения между информатикой и математикой в преподавании, выстроить во многих случаях интегрированные подходы, при которых органичные связи между математикой и информатикой эффективно сказывались бы на качестве обучения. Имеется в виду не только углубленное изучение тем и дисциплин, относящихся к задачам специальной подготовки, но и проникновение с помощью информационных технологий в ту специфику математического образования, которая традиционно оказывалась наиболее абстрактной и сложной для восприятия областью знаний.

Применение инструментария информационных технологий в обучении и изучение фундаментальных принципов информатики всегда связано с изучением базовых для информатики, отправных положений из соответствующих разделов математики. В этом отношении существует определенная традиция и здесь мы не предполагаем пояснять методические особенности освоения таких, например, вопросов, как теория автоматов академика В.М. Глушкова, методы экономии памяти академика А.П. Ершова. Обычным уже является смыкание информатики и математики в таких разделах, как дискретная математика и численные методы, поиск решений в задачах оптимизации. Обсуждать эти вопросы здесь означало бы ломиться в открытую дверь. Мы хотим обратить внимание на те методические поиски, которые оказываются возможными благодаря значительному прогрессу в мультимедийном инструментарии и программном обеспечении вычислительных процессов не столько на специальных высокопроизводительных компьютерах, сколько на персональных компьютерах, широко применяемых в учебных заведениях.

В математике всегда существовали проблемы, воспринимаемые как нечто мистическое, глубинное, так что заглянуть в эту глубину оказывалось делом заманчивым, но и трудно выполнимым. Можно вспомнить, например, вопросы сходимости рядов – равномерной и неравномерной, асимптотического поведения функции и возникновения их разрывов, процесс возникновения ветвлений решения уравнений и систем уравнений и влияния возмущений решений в точках ветвления. Мощный аналитический аппарат теории функции комплексного переменного оставался слабо подкрепленным средствами наглядной интерпретации преобразования пространства существования функций и их поведения в комплексной области. Оставалась неудовлетворенной потребность наглядного пространственного представления многомерных решений в прикладных задачах. В последнее время выполнен ряд исследований методического характера, значительно восполняющих нехватку в соответствующих методических подходах.

Появились инструментальные методы для экранного представления информации из области топологии локальных сетей, интегральных микросхем, когда требуется усвоение не только традиционных знаний о кривых и поверхностях, но и теории многообразий, группы преобразований, алгебры Ли, топологии пространственных дифференциальных операторов, связности дифференциальных уравнений. В среде Живой математики можно добиться визуализации внутренних, внешних и граничных точек, продемонстрировать понятия геоморфизма в среде Maple. Доступна визуализация понятия многогранников в среде Cabri, кривизны поверхности и индикатрисы Дюпена, асимптотических линий [1].

Необходимо подчеркнуть, что система Maple универсальна для выполнения символьных вычислений. Мощным инструментом для курса компьютерной математики является система Mathematica, которая весьма приспособлена для реализации компьютерной графики [2]. Появляются новые возможности решения алгебраических уравнений, для которых отдельные случаи ранее рассматривались в соответствующих учебных курсах, но полное исследование которых оставалось недоступным в виду недостаточности известных методов и большой трудоемкости. Так методом Кардана в табличном процессоре OpenOffice может быть осуществлено решение кубических уравнений с необходимой полнотой. В классах с повышенной физико-математической подготовкой такую работу приходилось выполнять либо путем приведения решения к более простому случаю, либо поиска нулей функции. При этом комплексные корни выделить почти невозможно. Табличный процессор позволяет находить решение с комплексными числами [3].

Имеется опыт использования компьютера при изучении элементарных доказательств в средней школе. Построение дедуктивных схем доказательств с визуализацией на экране позволяет отразить элементарные шаги рассуждений [4]. Эффективным является применение компьютера при изучении рекурсивных алгоритмов в элективных курсах – в тех задачах, которые имеют математическое происхождение. Это – перебор вариантов, сортировка и поиск, динамическое программирование, комбинаторика, алгоритмы на графах, структуры данных [5].

Впечатляющие результаты дает применение информационных технологий при изучении фрактальной геометрии. Это – область математики, которая сегодня утверждается в некоторых курсах высшего образования с расчетом на возможности современной компьютерной графики и программной поддержки компьютерного моделирования. Недавно выполненное диссертационное исследование на эту тему В.С. Секованова [6] показало, что использование информационных технологий при решении задач фрактальной геометрии выполняет равноправную роль с математическими методами. Только таким способом удается с должной полнотой раскрыть свойства решений, соседствующих со стохастическими.

Педагоги считают важным при освоении методов математического моделирования обращать внимание на адекватность моделей, легкость реализации которых на компьютере может создавать обманчивое впечатление об абсолютной ценности получаемых решений и презентаций. Предлагается оценивать модели на этапах проверки исходных факторов, корректности формул, выявления источников погрешности. С такими обстоятельствами целесообразно разбираться в старших классах [7].

Информационные технологии в математической подготовке становятся незаменимыми уже в школьном обучении. С этого момента и прививаются навыки «культурного» применения компьютера в образовании так, чтобы он дальше в жизни гражданина присутствовал не только как калькулятор или источник информационного «наводнения», но и представлял перспективу для обретения профессий в высокотехнологичном обществе. Следовательно, должен быть достигнут определенный уровень базовой информационной компетентности учителя математики. Комплекс соответствующей его подготовки должен содержать базовые понятия информатики, программные средства реализации обработки информации, текстовые редакторы, программы презентаций, технологические средства реализации информационных процессов, основы алгоритмизации и программирования, численных методов решения задач, вопросы построения баз данных, работы в сетях ЭВМ, защиты информации. Все это обозначено в той или иной мере в учебных планах педагогических вузов в виде обязательных или факультативных курсов. Развитие профильного обучения в школах потребует выполнения методических исследований для установления необходимых акцентов в различных случаях специализации обучения. Но еще более интересная и трудоемкая работа предстоит в процессе создания соответствующего программно методического инструментария, позволяющего достаточно полно использовать уже созданные информационные технологии и информационный ресурс современных компьютеров. Известно, что такой ресурс сегодня используется в лучшем случае на 50 процентов. Нам представляется, что в порядке модернизации курсов математики для высшей и средней школы необходимо создать и вести в практическую работу типовую библиотеку компьютерных программ, которые могут по-новому высветить различные темы в математике с учетом потребностей профильной и профессиональной подготовки.

Литература

1. *Гинзбург В.И.* Об информатизации курса «Элементы топологии и дифференцированная геометрия» // ИНФО. – 2009. – № 1. – С. 109.

2. *Клековкин Г.А., Иванюк М.Е.* Владение системами компьютерной математики – специальная ключевая компетенция информационного общества // ИНФО. – 2009. – № 1. – С. 122.

3. *Зубрилин А.А., Лобурева О.Н., Черемухина Е.В.* Решение кубических уравнений методом Кардано в табличном процессоре OpenOffice.org.Calc // ИНФО. – 2008. – № 12. – С. 57.

4. *Лукьянова Е.В.* Моделирование элементарных рассуждений с помощью программы Power Point: Сб. материалов XVII Международной конференции «Применение новых технологий в образовании». – Троицк, 2006. – С. 236–238.

5. *Иванов С.Ю., Окулов С.М.* Дидактический потенциал курса «Дискретная математика» в профильной школе: Материалы XXV Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов. – Киров; М., 2006. – С. 11–14.

6. *Секованов В.С.* Обучение фрактальной геометрии как средство формирования креативности студентов физико-

математических специальностей университетов: Автореф. дисс.… д.пед.н. – М., 2007.

7. *Ставцева Л.М.* Проблемы преподавания курса «Компьютерное моделирование» // Новые технологии в образовании. – Вып. IV. – Изд-во Воронежский государственный педагогический университет, 2002. – С. 38–40.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

В.Г. Евстигнеев
доцент Государственного университета управления

Получена теорема, которая позволяет сделать вывод об асимптотической устойчивости нулевого решения скалярного уравнения. Эта теорема является улучшением менее общей теоремы, полученной автором в [5]. При доказательстве использованы сведения из курса математического анализа и определения устойчивости движений А.М. Ляпунова, приведенные в тексте. Поэтому статья может быть использована для первоначального знакомства с теорией устойчивости и при проведении занятий со студентами.

Определение. Для задачи Коши, состоящей из динамического уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, решение $x = \varphi(t)$, $t \ge t_0$ удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$, называется устойчивым по Ляпунову, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x = x(t)$, $t \ge t_0$ уравнения (1) из неравенства $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ вытекает, что $|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ при $t \ge t_0$. Если для некоторого $\varepsilon > 0$ такого δ не существует, то решение $x = \varphi(t)$ называется неустойчивым.

Решение $x = \varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно удовлетворяет условиям:

(A) Это решение устойчиво по Ляпунову.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 07-06-00224).

(B) Существует $\delta_1 > 0$ такое, что для любого решения $x = x(t)$, $t \geq t_0$ уравнения (1), удовлетворяющего неравенству $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta_1$, функция $|x(t) - \varphi(t)|$ стремится к 0 при $t \to +\infty$.

Предполагается, что через каждую точку (t_0, x) области определения функции $f(t,x)$ для значений x, достаточно близких к x_0, проходит решение уравнения (1), определенное при $t \geq t_0$ [1, с. 204]. Под областью понимается открытое связное множество.

Рассмотренная в определении задача Коши заменой $x = u + \varphi$ сводится к новой задаче Коши для уравнения $\dot{u} = f(t, u+\varphi) - \dot{\varphi}$, $t \geq t_0$ с нулевым начальным условием $u(t_0) = 0$ и нулевым решением $u(t) = 0$, $t \geq t_0$. Поэтому в теории устойчивости принято рассматривать задачи Коши с нулевыми начальными условиями и нулевыми решениями, *которые называются точками покоя.*

В дальнейшем будем считать, что решение $x = \varphi(t)$, $t \geq t_0$ является точкой покоя задачи Коши для скалярного уравнения (1) с нулевым начальным условием, т.е. $x = \varphi(t) = 0$, $t \geq t_0$.

В книге Л.Э. Эльсгольца [1, с. 204] сказано, что из условия (B) определения не вытекает условие (A). Однако, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $x = \varphi(t) = 0$, $t \geq t_0$ точка покоя задачи Коши для скалярного уравнения $\dot{x} = f(t,x)$ (1) с начальным условием $x(t_0) = 0$, функция $f(t,x)$ определена в области G, содержащей график точки покоя, и для начальных условий из области G имеет место единственность решения уравнения (1). Тогда для точки покоя из условия (В) определения вытекает условие (А).

Доказательство. В противном случае существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существует решение $x = x(t)$, $t \geq t_0$ уравнения (1), удовлетворяющее неравенствам: $0 \neq |x(t_0)| < \delta$; $|x(t)| \geq \varepsilon$ в некоторой точке промежутка $[t_0, +\infty)$ и, в силу условия (В) определения, $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$. Выберем число $M > 0$ такое, что $\dfrac{1}{M+1} < \varepsilon$ и для $\delta = \dfrac{1}{M+1}$ найдем решение $x_1(t)$, $t \geq t_0$ уравнения (1) , удовлетворяющее условиям: $0 \neq |x_1(t_0)| < \dfrac{1}{M+1}$; $|x_1(t)| \geq \varepsilon$ в некоторой точке промежутка $(t_0, +\infty)$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} x_1(t) = 0$. (В условии (В) определения предполагается, что число $\dfrac{1}{M+1}$ достаточно мало. Этого можно добиться, считая M достаточно большим). Если $x_1(t)$ обращается в ноль в некоторой точке промежутка $(t_0, +\infty)$, то через эту точку проходят графики решений $x_1(t)$ и $\varphi(t)$ уравнения (1), что невозможно в силу единственности решения уравнения в области G. Следовательно, функция $x_1(t)$ сохраняет знак при $t \geq t_0$. Затем найдем решение $x_2(t)$, $t \geq t_0$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям: $0 \neq |x_2(t_0)| < \min\left(\dfrac{1}{M+2}, |x_1(t_0)|\right)$; $|x_2(t)| \geq \varepsilon$ в некоторой точке промежутка $(t_0, +\infty)$ и $x_2(t)$ стремится к 0 при $t \to +\infty$, сохраняя свой знак. Продолжая этот процесс, получим последовательность $\{x_n(t)\}$ (2) решений уравнения (1) , среди членов которой найдется бесконечное число функций одного знака. Не теряя общности, будем считать, что все функции последовательности (2) положительны. Если какая-то функция $x_N = x_N(t)$ не превосходит ε при $t > t_0$, но $x_N(t) = \varepsilon$ для некоторого $t > t_0$, то в силу единственности решения уравнения в области G имели бы при $t > t_0$: $0 < x_{N+1}(t) < \varepsilon$, что невозможно. Таким образом, для функций последовательности (2) имеем: $0 < x_{n+1}(t_0) < x_n(t_0) < \varepsilon$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(t_0) = 0$ (3); $x_n(t) > \varepsilon$ в некоторой точке промежутка $(t_0, +\infty)$ (4); $\lim\limits_{t\to+\infty} x_n(t) = 0$ (5). В силу (4) и непрерывности функции $x_n(t)$ существует число $t_n = \inf\{t > t_0 : x_n(t) > \varepsilon\}$, $t_n > t_0$ такое, что $x_n(t) \le \varepsilon$ при $t \in [t_0, t_n]$, $x_n(t_n) = \varepsilon$ и в любой близости от t_n найдется интервал, состоящий из точек $t > t_n$, для которых $x_n(t) > 0$. Из (3) , (5) вытекает, что числовая последовательность $\{t_n\}$ возрастает и ограничена сверху числом $\sup\{t \ge t_0 : x_1(t) = \varepsilon_1\}$. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \tau$.

Чтобы получить противоречие, можно выбрать точку $(\tau, x) \in G$, $0 < x < \varepsilon$ и доказать, что решение уравнения (1), проходящее через эту точку, пересекает при $t \in [t_0, \tau)$ график одной из функций последовательности (2). В [5] показано, что таким способом можно доказать теорему в случае $\{(t,x) : t_0 \le t \le \tau, 0 \le x \le \varepsilon\} \subset G.$ Но по условию теоремы область G содержит только график точки покоя $x = \varphi(t) = 0$,

$t \geq t_0$ и может оказаться, что некоторое решение уравнения (1), проходящее через точку $(\tau, x) \in G$, $0 < x < \varepsilon$, не пересекает при $t \in [t_0, \tau)$ ни одну из функций последовательности (2). Например, так будет в случае, изображенном на следующем рисунке.

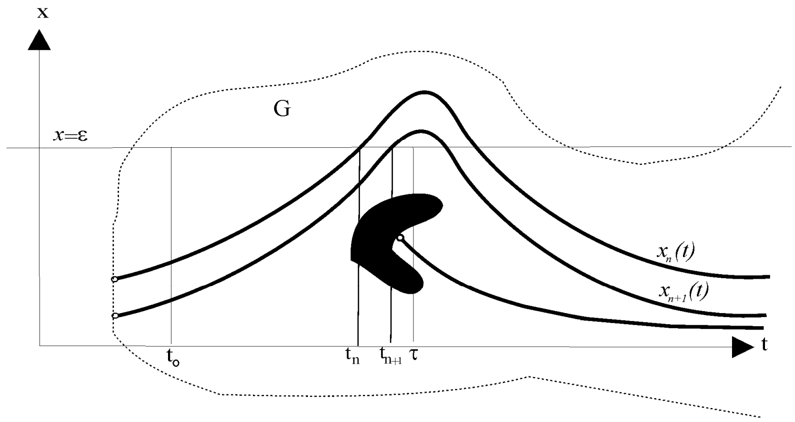

Рис. Область *G*, в которой определено уравнение (1), ограничена пунктирной линией и границей замкнутого множества, окрашенного в черный цвет, с которым *G* имеет пустое пересечение. Следовательно, $\{(t,x): t_0 \leq t \leq \tau, 0 \leq x \leq \varepsilon\} \not\subset G.$

Графики решений $x_n(t)$, $x_{n+1}(t)$ уравнения (1), входящих в последовательность (2), пересекают прямую $x = \varepsilon$ в точках с абсциссами t_n, t_{n+1}, принадлежащих последовательности $\{t_n\}$, предел которой равен τ. Эти решения, согласно [2, с. 65], могут быть продолжены как угодно близко к границе G, что показано выколотыми точками на пунктирной линии, ограничивающей G. Через каждую точку $(\tau, x) \in G$ проходит единственное решение уравнения (1). На рисунке показан график одного из таких решений, содержащий при $t < \tau$ точки, расположенные как угодно близко к границе G, не пересекая ее. Это показано выколотой точкой на общей границе G и замкнутого множества. Ввиду конфигурации замкнутого множества решение, изображенное на рисунке, не пересекает при $t \in [t_0, \tau)$ ни одну из функций последовательности (2).

Избежать трудность, представленную на рисунке, и доказать теорему позволяет лемма Гейне-Бореля [4, с. 422]. Для этого каждой точке отрезка $\{(t,0): t_0 \le t \le \tau\}$ поставим в соответствие некоторый открытый на плоскости tx круг с центром в рассматриваемой точке, лежащий в G. Из этого покрытия отрезка $\{(t,0): t_0 \le t \le \tau\}$ открытыми множествами выделим (по лемме) конечное покрытие и найдем ε_1, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ такое, что прямоугольник $R = \{(t,x): t_0 \le t \le \tau, 0 \le x \le \varepsilon_1\}$ содержится в области G. Из условия (3) находим, что, начиная с некоторого номера, функции последовательности (2) пересекают отрезок $\{(t,\varepsilon_1): t_0 \le t \le \tau\}$. Не теряя общности, будем считать, что каждая функция последовательности (2) пересекает этот отрезок. Снова построим возрастающую последовательность $\{\tilde{t}_n\}$, для которой выполняются условия: $x_n(t) \le \varepsilon_1$ при $t \in [t_0, \tilde{t}_n]$, $x_n(\tilde{t}_n) = \varepsilon_1$ и в любой близости от $\tilde{t}_n$ найдется интервал, состоящий из точек $t > \tilde{t}_n$ таких, что $x_n(t) > \varepsilon_1$. Из определения чисел $\tilde{t}_n, t_n$ находим, что $\tilde{t}_n \le t$ при любом n. Следовательно, существует $\lim_{n\to\infty} \tilde{\tau}_n = \tilde{\tau}$, $\tilde{\tau} \le \tau$. Через точку $(\tilde{\tau}, \varepsilon_1 / 2) \in G \bigcap R$ проходит единственное решение уравнения (1), которое обозначим $\hat{x}(t)$. Так как решение $\hat{x}(t)$ продолжается при $t < \tilde{\tau}$ до значений, расположенных как угодно близко к границе G, а расстояние от замкнутого прямоугольника R до границы области G больше нуля, то график $\hat{x}(t)$ пересекает одну из сторон прямоугольника $R \subset G$. Ввиду того, что решения $\hat{x}(t)$ и $x = \varphi(t) = 0$, $t \geq t_0$ уравнения (1) не могут иметь общих точек, график $\hat{x}(t)$ пересекает либо отрезок $\{(t, \varepsilon_1) : t_0 \leq t \leq \tilde{\tau}\}$, либо интервал $\{(t_0, x) : 0 < x < \varepsilon_1\}$. В первом случае множество $\{t < \tilde{\tau} : \hat{x}(t) = \varepsilon_1\}$ не пусто и, в силу непрерывности $\hat{x}(t)$, это множество содержит число $t_u =$ $\sup\{t < \tilde{\tau} : \hat{x}(t) = \varepsilon_1\}$, $t_0 \leq t_u < \tilde{\tau}$. Из определения $\tilde{\tau}$ найдем номер n_1 такой, что $t_0 \leq t_u < \tilde{t}_{n_1} < \tilde{\tau}$. Следовательно, $\varepsilon_1 = x_{n_1}(\tilde{t}_{n_1}) > \hat{x}(\tilde{t}_{n_1})$, $\varepsilon_1 = \hat{x}(t_u) \geq x_{n_1}(t_u)$ и решения $x_{n_1}(t)$, $\hat{x}(t\ )$ пересекаются в G, что невозможно. Во втором случае для всех $t \in [t_0, \tilde{\tau}]$ выполняется неравенство $0 < \hat{x}(t) < \varepsilon_1$. Из свойства (3) последовательности (2) найдем номер n_2 такой, что $x_{n_2}(t_0) < \hat{x}(t_0)$. Сопоставляя это неравенство с неравенством $\hat{x}(\tilde{t}_{n_2}) < x_{n_2}(\tilde{t}_{n_2}) = \varepsilon_1$, снова получаем противоречие, что завершает доказательство теоремы.

Пример. Для задачи Коши $\dot{x} = \dfrac{x(4-t^2)}{t(4+t^2)}$, $x(1) = 0$ решения уравнения с разделяющимися переменными имеют вид: $x(t) = \dfrac{ct}{t^2+4}$. Точка покоя $x = \varphi(t) = 0$, $t \geq 1$ асимптотически устойчива, так как выполнены условия теоремы:

1. Начальные условия $(t\ (t_0, x_0)$, $t_0 > 0$, $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ определяют единственное решение уравнения, определенное при $t > 0$.

2. При фиксированном значении константы $c: \lim_{t\to+\infty}(x(t)-\varphi(t)) = \lim_{t\to+\infty}\frac{ct}{t^2+1}=0$.

Замечание. В доказанной теореме предполагается, что рассматриваемое уравнение определено в области G, содержащей график точки покоя $x=\varphi(t)=0$, $t\geq t_0$. В теореме из [5] сделано более сильное предположение о том, что рассматриваемое уравнение определено в некоторой полосе, содержащей график точки покоя, и ее доказательство не требует применения леммы Гейне-Бореля. Доказанную в [5] теорему также можно сформулировать для скалярного уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ (6) с начальными данными при $x=x_0$ в виде задачи № 8 из книги И.Г. Петровского [3, с. 194] следующим образом: Пусть два решения, удовлетворяющие начальным данным $y(x_0)=y^{01}$ и $y(x_0)=y^{02}>y^{01}$, асимптотически стремятся к одному и тому же (конечному) пределу при $x\to+\infty$. Тогда, если имеет место единственность решения, определяемого начальными условиями, то каждое решение $y(x)$, для которого $y^{01}<y(x_0)<y^{02}$, устойчиво.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим (в обозначениях из [3, с. 194] решение $y=y^0(x)$, $x\geq x_0$ уравнения (6), удовлетворяющее условиям $y^{01}<y^0(x_0)<y^{02}$. Очевидно, можно ограничиться случаем $y^0(x)\equiv 0$. Тогда $y^0(x)\equiv 0$ будет точкой покоя уравнения (6), определенного, согласно сделанному в [3, с. 187] предположению, в некоторой окрестности линии $y^0(x)$ вида $|y-y^0(x)|<M$, $x\geq x_0$. По условию задачи два решения с начальными условиями $-M<y^{01}<0<y^{02}<M$, асимптотически стремятся при

$x \to +\infty$ к одному и тому же (конечному) пределу. Так как $y^{01} < 0 < y^{02}$, то этот предел необходимо равному нулю. Учитывая единственность решения уравнения (6) в полосе $|y| < M$, находим, что и решение $y^0(x)$ со значениями $y^{01} < y^0(x_0) < y^{02}$ также стремится к нулю при $x \to +\infty$. Таким образом, уравнение (6) удовлетворяет условию (В) определения и устойчивость решения $y^0(x)$ вытекает из теоремы, доказанной в [5], или из более общей доказанной здесь теоремы.

Автор благодарен своему учителю член-корреспонденту РАН, профессору Л.Д. Кудрявцеву за содержательные обсуждения полученных результатов и постоянную поддержку, профессору Н.Н. Холщевниковой за то, что она обратила внимание на связь тематики статьи с задачей И.Г. Петровского и доценту кафедры высшей математики ГУУ И.М. Тарарину за помощь при выполнении компьютерной графики.

Литература

1. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.

2. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959.

3. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970.

4. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. – М. Высшая школа, 1988.

5. *Евстигнеев В.Г* Анализ понятий устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости решений динамических уравнений // Вестник ГУУ (Государственный университет управления). – М., 2008. – 11 (21). – С. 421–428.

УПРАВЛЕНИЕ ПРИРОДНОЙ И ТЕХНОГЕННОЙ БЕЗОПАСНОСТЬЮ

В.А. Зернов
доктор технических наук, профессор,
ректор Российского нового открытого университета

В.А. Минаев
доктор технических наук, профессор,
проректор Российского нового открытого университета

А.О. Фаддеев
кандидат физико-математических наук,
доцент Академии ФСИН России, г. Рязань

Одной из актуальных проблем обеспечения устойчивого развития территориальных социально-экономических система (ТСЭС) как в долгосрочном, так и в краткосрочном плане является управление природно-техногенным риском [1–3], [5–9], [11]. При этом под управлением таким риском в ТСЭС понимают его заблаговременное предвидение, выявление влияющих факторов, принятие мер по его снижению путем целенаправленного изменения этих факторов с учетом эффективности принимаемых мер.

Для решения такой сложной и многоплановой проблемы, как управление рисками в ТСЭС необходим научно-методический аппарат, учитывающий основные факторы, влияющие на безопасность землепользования и жизнедеятельности, а также разработка методов и математических моделей, позволяющих выполнять соответствующие количественные оценки и прогнозы. С учетом имеющегося научно-методического аппарата анализа рисков, управление безопасностью ТСЭС, в первом приближении должна представлять собой следующую схему (рис. 1).

1. Определение предполагаемого уровня безопасности, ее ранжирование.

Ключевым признаком при ранжировании безопасности, на наш взгляд, является территориальный признак.

В самом деле, безопасность территорий 1000×1000 км и 1000×1000 м зависят от совершенно различного количества факторов. На разных по площади территориях последствия развития однотипных опасных природно-техногенных процессов значительно отличаются друг от друга по степени их суммарной тяжести и времени их проявления.

Основными параметрами территориального признака ранжирования безопасности с нашей точки зрения являются: площадь территории и ее местоположение как на политической карте мира, так и по отношению к участкам, на которых наиболее часто наблюдаются опасные природно-техногенные явления и процессы.

Перечислим предполагаемые уровни безопасности для ТРСЭС:

1) глобальный (космопланетарный) уровень;
2) транснациональный (международный) уровень;
3) национальный уровень;
4) региональный уровень;
5) районный уровень;
6) локальный уровень;
7) «точечный» уровень.

Следующим важным признаком ранжирования предполагаемого уровня безопасности ТСЭС является вид туристской деятельности, т.е. вид туризма. Ясно, что, скажем, пеший туризм, автомобильный и экстремальный туризм имеют различную степень риска для участников туров.

Несомненно, важными признаками, влияющими на ранжирование уровня предполагаемой безопасности, являются такие признаки, как длительность туристского мероприятия (турпоездки), протяженность маршрута, относительная туристская наполняемость территории и сезонность. Последние два признака могут быть в какой-то мере сопоставимы, но только качественно.

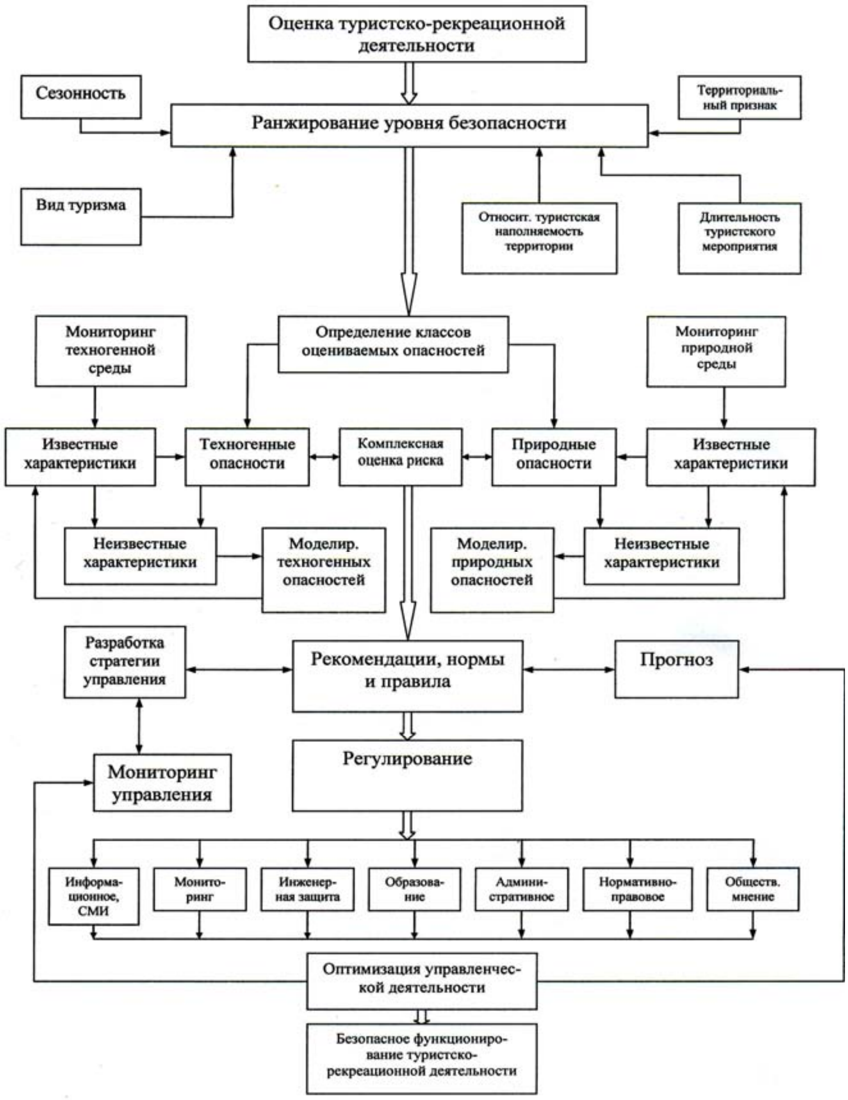

Рис. 1. Схема управления природно-техногенной безопасностью ТРСЭС туристско-рекреационного назначения

Таковы основные признаки ранжирования предполагаемой безопасности туристского продукта. Этот первый этап является очень важным, так сказать, постановочным. Отталкиваясь от него, становится возможным задачу по оценке безопасности конкретизировать и перевести ее на уровень математического описания.

2. Начало второго этапа связано с определением классов оцениваемых опасностей, исходящих от природной, техногенной и информационной сред.

Как известно, каждое из природно-техногенных явлений оценивается целым комплексом всевозможных параметров, из которых часть являются на какой-либо конкретный момент времени известными, а часть – нет. Поэтому на данном этапе должна решаться задача по двум различным направлениям. Первая из них – сбор исходной информации для составления «портрета» явления в его первом приближении, так сказать, создание его ретроспективного образа, а вторая – подготовка тех полей данных, которые могут послужить основой для определения параметров явления, позволяющих строить перспективный образ явления или процесса. Подготовка таких данных должна осуществляться на основании очень качественного мониторинга природно-техногенных процессов.

Неизбежным и важным шагом при создании перспективного образа какого-либо процесса является построение его модели и, в первую очередь, модели математической, которая затем оптимизируется набором исходных данных. При построении модели и, особенно, при анализе результатов проведенного моделирования обязателен постоянный контроль за процессом моделирования, заключающийся в сопоставлении модели с ретроспективным образом изучаемого процесса. При этом также необходимо иметь в виду и сам характер используемой модели, каков он – вероятностный, детерминированный или вероятностно-детерминированный. Затем, используя информацию о параметрах среды, определенных как опытным, наблюдательным путем, из архивных источников, так и на основании расчетных данных выполняется комплексная оценка зон предполагаемого риска.

Все это позволяет произвести прогноз развития ситуации на интересующей территории на заданный промежуток времени и приступить к построению стратегии управления безопасностью рассматриваемой ТСЭС туристско-рекреационного назначения. Эта процедура, собственно, и завершает второй этап – этап оценки безопасности территории, на которой реализуется турпродукт.

3. Третий этап начинается с выработки рекомендаций, норм и правил, созданных на основании принятой стратегии управления безопасностью.

Но дело в том, что эта стратегия, предложенная, так сказать, в ее черновом варианте, ее первом приближении, имеет вероятностный характер, поэтому этот первый, промежуточный уровень принятия решений должен постоянно контролироваться, т.е. постоянно должен осуществляться мониторинг управленческой деятельности – управление должно управляться.

Но как осуществить это управление? Единственно верный путь, достаточно известный – это проверка практикой. При этом сам процесс регулирования, по нашему мнению, должен осуществляться через следующие важные виды управления, а именно: нормативно-правовое регулирование [14], [15], административное, управление посредством повышения образовательного уровня, просвещения [13], создания общественного мнения, использования средств массовой информации, рекламы, а также техническими методами, скажем, инженерная защита зданий и сооружений, сетей коммуникаций от опасных геологических процессов, приборная защита (например, экранирование от электромагнитного излучения) и постоянный контроль за состоянием и качеством природной, техногенной и информационной сред [12] (см. рис. 1).

Перечисленные выше методы регулирования позволяет выполнить оптимизацию разработанной ранее стратегии управления безопасностью ТСЭС туристско-рекреационного назначения. Далее, на основании оптимизированной стратегии выполняется прогноз развития ситуации на интересующей территории при постоянном проведении мониторинга и выработка новых рекомендаций, норм и правил.

Использование подобной циклической схемы третьего этапа, по нашему мнению, позволит добиться значительного усовершенствования стратегии управления безопасностью в достаточно сжатые сроки, что, в свою очередь, создаст предпосылки для безопасного функционирования данной ТСЭС.

Теперь необходимо затронуть вопрос, связанный с принятием решений при управлении риском и безопасностью ТСЭС туристско-рекреационного назначения.

Как известно, процесс принятия решения представляет собой действие над множеством альтернатив, в результате которого находится одна альтернатива или подмножество альтернатив (когда невозможно остановить выбор на одной альтернативе), удовлетворяющие определенным условиям или целям.

Существует несколько способов сравнения альтернатив между собой и определения наиболее предпочтительных из них. Наиболее развитым и чаще других применяемых является способ, основанный на критериальном языке выбора.

Множество факторов, принимаемых во внимание при решении подобных задач, на наш взгляд, должно включать по крайней мере:

1) факторы воздействия на людей, их здоровье и жизнедеятельность;

2) факторы воздействия источников опасности на объекты ТСЭС;

3) социально-экономические факторы, проявляющиеся в воздействии источников опасности на социальную среду и экономику;

4) факторы психологического устрашающего воздействия на население, обусловленного наличием источников опасности в том или ином регионе;

5) экономические затраты на установление и поддержание риска на приемлемом социально осознанном уровне.

Анализ способов и процедур, используемых для выхода из состояния неопределенности при решении подобных задач, дает возможность выбрать те из них, которыми можно было бы воспользоваться при системном анализе источников опасности. К числу таких способов в настоящее время относят [4], [9], [10]:

1) способ выбора с использованием оценочной (целевой) функции;

2) способ выбора с использованием функции предпочтения при сведении многокритериальной задачи к однокритериальной, основанной на свертывании множества критериев в один;

3) способ выбора с использованием функции предпочтительности и выделением приоритетного критерия;

4) способ выбора с отбором недоминируемых альтернатив и использованием множеств Парето.

Между тем, при использовании указанных способов остается открытым вопрос об оценке управляемости в ТСЭС той или иной опасностью природно-техногенного характера. И если задачу по оценке управляемости техногенных опасностей еще можно как-то решить, используя описанные ранее способы регулирования опасности и риска, то в отношении природных процессов данный вопрос является достаточно сложным и неоднозначным.

На наш взгляд, разрешение этой ситуации для ТСЭС возможно в рамках комплексного подхода к оценке состояния среды ТСЭС, представляя ее как пространство динамических квадруполей со всем многообразием взаимодействий, присущих данному пространству [8], [16]. Согласно этой методике, каждое квадруполе обладает наличием прямых t и обратных r связей. Результаты проведенного нами анализа взаимодействий между полями P и Q приведены в табл. 1 и на рис. 2.

Таблица 1

Количественный анализ взаимодействий полей P и Q

Источники воздействия	Кол-во прямых связей	Кол-во обратных связей	Коэффициент регулируемости	Коэффициент регулируемости (%)	Примечание
Землетрясения	12	1	0,08	8	нерегулируемо
Опускания и поднятия	5	4	0,80	80	значительно регулируемо
Провалы	10	5	0,50	50	умеренно регулируемо
Оползни, лавины	9	8	0,89	89	значительно регулируемо
Цунами	11	1	0,09	9	нерегулируемо
Поля биоактивного диапазона	6	1	0,17	17	возможно регулируемо
Акустические поля	6	3	0,50	50	умеренно регулируемо
Вибрационные поля	9	3	0,33	33	слабо регулируемо
Температурное поле	3	3	1,00	100	стабильно регулируемо
Организационно-правовое поле	11	11	1,00	100	стабильно регулируемо
Социокультурное поле	10	8	0,80	80	значительно регулируемо

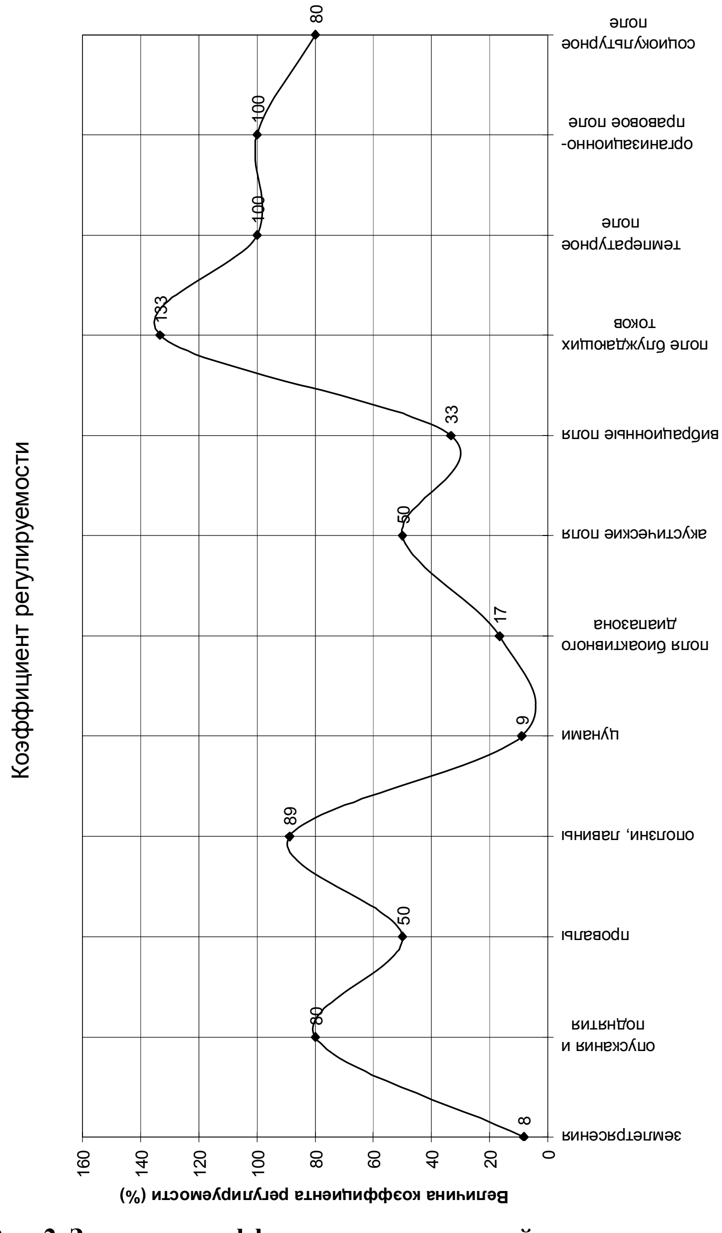

Рис. 2. Значения коэффициента естественной регулируемости для ряда элементов полей *P* и *Q*

Расчет коэффициента естественной (без учета стороннего воздействия, например, со стороны управленческих структур) регулируемости K выполнялся на основании следующей формулы:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{m} t_i}{\sum_{i=1}^{n} r_i}, \tag{1}$$

где t_i, r_i – соответственно прямые и обратные связи, *m*, *n* – соответственно количество прямых и обратных связей.

Предположим, что функция *K* является функцией трех аргументов, т.е. $x_1 = t$, $x_2 = r$, $x_3 = \tau$ (*t* – количество прямых связей, *r* – количество обратных связей, τ – время). Тогда для функции $K = f(t, r, \tau)$ должна выполняться следующая теорема, называемая нами условием синхронизации естественной регулируемости связей.

Теорема. Если функция трех аргументов $K = f(t, r, \tau)$, описывающая состояние ТРСЭС, определена, непрерывна в некоторой области *D* изменения ее аргументов, в этой области существует отличная от нуля непрерывная производная функции *K* по переменной τ, и ТРСЭС является самоуправляемой, то должно выполняться следующее условие

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \tau \partial t} = \frac{\partial^2 K}{\partial \tau \partial r}. \tag{2}$$

В том случае, если $\frac{\partial^2 K}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial \tau} \neq 0$, то данный процесс подлежит принудительному регулированию. И управление в таком случае представляет собой не что иное, как согласование действия (со стороны субъекта управления, или управленческой структуры) и естественного регулирования этого процесса или явления. Подобный подход к данному вопросу, на наш взгляд, уместно называть принципом резонансного регулирования.

Таким образом, выбор оптимального механизма управления безопасностью любой ТСЭС, в том числе и туристско-рекреационного назначения необходимо выполнять на основе системного анализа структуры пространства динамических квадруполей, в формализованном виде описывающего протекание процессов в многокомпонентной системе «природная среда» – «техногенная среда» – «ТСЭС», а также динамики взаимодействия элементов данного поля. Сама же технология управления геодинамической безопасностью ТРСЭС должна представлять собой циклическую процедуру, обеспечивающую достаточно высокий уровень регулирования взаимодействий элементов пространства динамических квадруполей.

Литература

1. *Браймер Р.* Основы управления в индустрии гостеприимства. – М.: Аспект-Пресс, 1995. – 340 с.
2. *Волков Ю.Ф.* Введение в гостиничный и туристический бизнес. – 2-е изд. / Серия «Высшее профессиональное образование». – Ростов н/Д: «Феникс», 2004. – 352 с.
3. *Воробьев Ю.Л., Осипов В.И., Владимиров В.А. и др.* Катастрофы и общество. – М.: Контакт-Культура, 2000. – 332 с.
4. *Голубков Е.П.* Технология принятия управленческих решений. – М.: Изд-во «Дело и Сервис», 2005. – 544 с.
5. ГОСТ Р 50644–94 «Туристско-экскурсионное обслуживание. Требования по обеспечению безопасности туристов и экскурсантов».
6. *Минаев В.А., Фаддеев А.О.* Методика оценки геоэкологического риска и геоэкологической безопасности ландшафтно-территориальных комплексов // Мат. XVII науч.-техн. конф. «Системы безопасности» – СБ-2008 Международного форума информатизации 30 октября 2008, Москва. – М.: Академия ГПС МЧС РФ. 2008. – С. 96–102.

7. *Минаев В.А., Фаддеев А.О.* Модели оценки геоэкологического риска на заселенных и промышленных территориях // Мат. XVII науч.-техн. конф. «Системы безопасности» – СБ-2008 Международного форума информатизации 30 октября 2008, Москва. – М.: Академия ГПС МЧС РФ. 2008. – С. 113–118.

8. *Минаев В.А., Фаддеев А.О.* Оценки геоэкологических рисков. Моделирование безопасности туристско-рекреационных территорий. – М.: Финансы и статистика, изд. дом ИНФРА-М, 2009. – 370 с.

9. Природные опасности России. Природные опасности и общество. Тематический том / Под ред. В.А. Владимирова, В.Л. Воробьева, В.И. Осипова. – М.: Изд. фирма «КРУК», 2002. – 248 с.

10. *Протасов В.Ф., Молчанов А.В.* Экология, здоровье и природопользование в России / Под ред. В.Ф. Протасова. – М.: Финансы и статистика, 1995. – 528 с.

11. Туризм как объект управления / Под ред. В.А. Квартальнова. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 350 с.

12. *Фаддеев А.О.* К проблеме управления экологической безопасностью на объектах уголовно-исполнительной системы: Сб. науч. тр. междунар. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы пенитенциарной науки и практики». – М.: НИИ УИС, 2004. – С. 46–48.

13. *Фаддеев А.О.* О преподавании экологии в высшей школе // Мат. II Всеросс. науч.-метод. конф. «Пути дальнейшего повышения эффективности и качества образовательного процесса в высшей школе». – Самара, 2004. – С. 185–187.

14. *Фаддеев А.О.* О проблеме правового отношения к научной деятельности при оценке факторов экологического риска // Экологическое право. – М.: ИГ «Юрист». – 2006. – № 3. – С. 23–24.

15. *Фаддеев А.О.* Правовые проблемы экологической безопасности личности в условиях современного общества // Безопасность бизнеса. – М.: ИГ «Юрист». – 2006. – № 3. – С. 26–28.

16. *Фаддеев А.О.* Методика формализованного подхода к оценке геоэкологического риска и геоэкологической безопасности для ландшафтно-территориальных комплексов // Двойные технологии. – 2008. – № 4. – С. 32–38.

МОБИЛЬНАЯ СВЯЗЬ, КОМПЬЮТЕРЫ И ИСПРАВЛЕНИЕ НРАВОВ

О.В. Зимина
профессор Московского энергетического института (технического университета)

А.И. Кириллов
профессор Московского энергетического института (технического университета)

Введение

Ничто не обладает только количественными свойствами. Применительно к населению этот философский принцип означает, что наряду с численностью, возрастным составом и другими количественными характеристиками населения, большое значение имеют его качественные свойства. Они определяют то, что мы будем называть *качеством населения*. Эта категория характеризует способность населения в целом, а также отдельных его групп и индивидуумов, оптимально реагировать на сложившиеся природные, технические, экономические и социокультурные условия. Качество населения посредством совокупности его потребностей и способностей к деятельности определяет качество жизни населения.

Этот доклад посвящен тому, как образование может и должно способствовать повышению качества населения. После краткого очерка исторических фактов, относящихся к теме доклада, мы представим несколько тезисов о том, каким должно быть современное образование, чтобы оно могло надлежащим образом повысить качество населения, и какую роль в этом важном деле призваны сыграть современные устройства мобильной связи и компьютеры.

Образование и качество населения

В XVI–XVII вв. на пороге Нового времени научная и промышленная революция, зарождение капиталистических производственных отношений потребовали кардинального улучшения качества населения. Очень важно, что главным средством такого «исправления нравов» выдающиеся мыслители прошлого считали образование и всячески радели о его развитии и совершенствовании. Потребность в образовании ощущало и общество: «У всех народов появилось такое стремление открывать школы, какого не помнит история ни одной из прежних эпох» [1. – Т. 1. – С. 479].

В XVII–XVIII вв. ответом европейского общества на вызовы Нового времени стала эпоха Просвещения — эпоха создания массовой школы и становления научной педагогики.

Переход к постиндустриальному обществу, когда стремительно развиваются информационные, коммуникационные, био- и нанотехнологии, и возникают глобальные экономические, экологические, национальные и социокультурные проблемы, — все это требует нового «исправления нравов», т.е. кардинального повышения уровня просвещенности общества, профессиональной компетентности и гражданской ответственности индивидуумов, формирования современного научного мировоззрения, развитой системы этических и эстетических ценностей и многого другого. Как и в прошлом, главную роль в «исправлении нравов» призвано играть образование. Как и в прошлом, население ощущает потребность в массовом образовании нового качества. Но удовлетворяется ли эта потребность? В основном — количественно. Появилось много разных школ, колледжей, лицеев, гимназий, возросло количество высших учебных заведений и число студентов в них (см., напр., [2]). Тем же количественным образом реформируется и содержание образования: увеличивается число учебных предметов и объемы преподносимой в них информации. Идущая по этому пути система образования не повышает, а снижает качество населения, плодя «образованщину».

Приведение качества образования в соответствие с задачей повышения качества населения – вызов профессиональному педагогическому сообществу

В XVII в., отвечая на этот вызов, Коменский сформулировал задачу массового образования – учить всех, всему, всесторонне и с гарантией успеха – и разработал соответствующую дидактическую систему школьного образования. В XXI в. задача Коменского представляется очень сложной, потому что «всех» и «всего» стало гораздо больше. Но вызов обычно является вместе с необходимым средством ответа на него. Таким средством в XVII в. был печатный станок. Теперь это компьютер.

Игнорирование средства ответа на вызов приводит к тому, что вызов воспринимается как неразрешимая и поэтому неактуальная проблема. Так и в наше время. Общество обсуждает лишь школьное образование, а снижение качества подготовки специалистов либо его совсем не волнует, либо общество полагает, что это снижение является неизбежным следствием массовости высшего образования, т.е. общество либо не осознало наличие вызова, либо, не видя ответа на этот вызов, игнорирует его. Действительно, традиционным образом индивидуум со средним интеллектом не способен получить то образование, которое сейчас требуется. Следовательно, необходимо усилить интеллект.

На пути к гибридному интеллекту

Примечательно, что средство ответа обычно создается значительно раньше, чем общество воспримет вызов. Так и разработка устройств, предназначенных для усиления способностей человека к интеллектуальной деятельности началась задолго до возникновения всеобщей в них потребности. Важной вехой в современной истории разработки этих устройств явилась публикация в 1945 году статьи Ванневара Буша «Как мы могли бы мыслить» («As we may think») [3]. В ней описано устройство Memex. Оно призвано быть хранилищем информации на микрофильмах и служить расширением памяти человека. Эта статья произвела сильное впечатление на Дугласа Энгельбарта — автора или соавтора почти всех понятий, концепций и устройств, которые мы теперь используем при работе с компьютерами. Энгельбарт рассматривал людей, сидящих перед мониторами, как путешественников в информационном пространстве, где они представляют свои мысли такими способами, которые позволяют вовлечь в интеллектуальную деятельность те способности ощущать, воспринимать и анализировать, которые обычно не используются.

В отчете Стэнфордскому исследовательскому институту за 1962 год Энгельбарт представил основные положения концепции так называемого усиленного (augmented) интеллекта, разработанной возглавляемой им группой ученых. Исследовалась система, состоящая из индивидуума и технических средств, которые усиливают его способности до уровня, адекватного сложности стоящих перед ним задач. Наиболее многообещающим из таких средств был признан компьютер, при условии, что он используется для *непосредственной* и *всегда доступной* помощи. Мы будем упоминать это условие как критерий Энгельбарта.

В 1968 году в статье «Компьютер как коммуникационное устройство» [4] Ликлайдер (руководитель IPTO ARPA с 1962 по 1964 г.) и Тейлор объясняли, что основная роль создаваемой в ARPA системы компьютерной связи ARPANET состоит в предоставлении обществу возможности объединять интеллектуальные ресурсы для решения приоритетных для США задач.

Интернет сформировался в результате присоединения к ARPANET все новых и новых сетей, сначала университетских, а потом и коммерческих. Так расширялись возможности объединять интеллектуальные ресурсы людей и соединять компьютеры в мощные ЭВМ. После разработки концепции гипертекста (Ted Nelson, 1965), создания World Wide

Web (Tim Berners-Lee, 1989), языка разметки HTML и средства интерпретации гипертекстов Mosaic (Mark Angreessen, группа студентов и специалистов из Национального центра суперкомпьютерных приложения при Университете Иллинойса, 1993) стало формироваться то самое информационное пространство, для путешествия в котором Энгельбарт предназначал компьютеры.

Средства усиления интеллекта разрабатывались в условиях стремительного развития технологий микро-, магнито- и оптоэлектроники и поэтому непрерывно совершенствовались. В результате мы являемся свидетелями того, как был прав Г. Биркгофф, который еще в 1969 г. писал: «...мы можем предвидеть все более растущий симбиоз человека и машины, в котором каждый партнер выполняет задачи, наиболее для него подходящие» [5]. Машиной, о которой здесь говорится, является компьютер.

Система «человек + компьютер, усиливающий его интеллект», имеет много названий: симбиоз человека и ЭВМ, синергизм человека и машины и др. Мы предпочитаем термин, который В.Ф. Венда вынес в название своей книги [6], – «гибридный интеллект».

Гибридный интеллект и тандем «учащийся + компьютер»

Поскольку решение все более широкого круга профессиональных задач делегировано компьютерам, оснащенным программным обеспечением типа систем автоматизированного проектирования (САПР), одной из глобальных целей подготовки специалиста, способного решать задачи не только сегодняшнего, но и завтрашнего дня, становится формирование гибридного интеллекта.

Обсуждая идею симбиоза человека и ЭВМ, Ликлайдер отмечал, что в подлинно симбиотическом взаимодействии человек не просто «партнер», он «лидер, ведущий игру». В образовании это означает, что цели обучения должны определяться как по отношению к учащемуся, так и к программному обеспечению его компьютера, а также к умению учащегося формировать это программное обеспечение и использовать компьютер для выполнения учебных и учебно-исследовательских работ. Таким образом возникает новый объект обучения – тандем «учащийся + компьютер» (подробнее см. [7, 8]). Для обучения по принципу «делай как я» и преподаватели тоже должны быть тандемами.

Но как такие тандемы могут существовать в нынешних условиях? Студенты и преподаватели находятся в аудитории, а их компьютеры — дома. Кажется, что тандемы распадаются. Однако развитие коммуникационных технологий дает нам средство для решения этой проблемы — мобильный доступ к Интернету. Благодаря этому теперь и преподаватель, и студент *имеют возможность* получить ту самую *непосредственную* и *всегда доступную* помощь, которая согласно критерию Энгельбарта необходима для усиления интеллекта. Чтобы реализовать такую возможность, им требуется 1) компьютер, подключенный к Интернету с известным адресом; 2) программа-сервер, например, Apache, установленная на компьютере и выполняющая поручения клиента; 3) набор сценариев обработки поручений и исполняющая эти сценарии программа; 4) устройство мобильной связи клиента с сервером: сотовый телефон или ноутбук с доступом к Интернету. Очевидно, что компьютеры, входящие в тандемы, должны значительно отличаться от тех, которыми пользуется наша молодежь (подробнее см. в [9]).

Кто-то должен позаботиться, чтобы компьютеры студентов были оснащены надлежащим образом, и кто-то должен следить, чтобы программное обеспечение этих компьютеров планомерно пополнялось и совершенствовалось. Проблема в том, что в наших учебных заведениях таких сотрудников нет. Этот недостаток является продолжением достоинства – отсутствия системы тьюторов.

Большинство студентов вследствие традиционного содержания и методов преподавания не ощущают ни пробелов в своей компьютерной грамотности, ни недостатков программного обеспечения своего компьютера. Восторги взрослых по поводу так называемых «компьютерных гениев» и «кибербогов» на самом деле ничем не обоснованы и немало способствуют тому, что даже исполнительные и прилежные студенты пренебрежительно относятся к рекомендациям преподавателей навести порядок на своих компьютерах, установить то или иное программное обеспечение, научиться тем или иным действиям с компьютером и т.п. Возникающий психологический барьер, когда «дети» отгораживаются от «отцов» компьютерами, разрушает и так ослабленную в условиях массового образования коммуникацию преподаватель–студент, вынуждает преподавателей всячески избегать компьютеров и является почти непреодолимым в настоящее время препятствием для эффективного использования компьютеров в нашей системе образования.

Во многих зарубежных вузах практические занятия проводят не профессиональные преподаватели, а тьюторы (студенты старших курсов). Они уступают нашим преподавателям во владении предметом и методикой его преподавания. Но тьюторы и обучаемые ими студенты не разделены психологическим барьером во всем, что относится к компьютерам и Интернету. Поэтому переход на обучение тандемов в зарубежных учебных заведениях имеет больше шансов на успех, чем в наших. Но наши зарубежные коллеги пока не могут реализовать свое преимущество, поскольку стараются использовать информационные технологии путем все более интенсивного использования компьютеров в дисплейных классах, что противоречит критерию Энгельбарта. Исключением является, может быть, лишь весьма амбициозная программа «Мобильный Тайвань», но она еще далека от завершения, и модернизация образования не занимает в ней надлежащего места. В других странах понимание роли мобильной связи отсутствует почти полностью, и мы обнаруживаем в них более или менее явно выраженные инициативы запретить использование мобильных средств младшими школьниками везде и всей молодежью – в учебных заведениях. Если такие инициативы возьмут верх, то трудно будет надеяться на кардинальную модернизацию образования на основе усиления интеллекта.

Математический сервер кафедры высшей математики

Для организации настоящего обучения тандемов необходима постоянная связь человека с его компьютером и компьютер должен быть персональным в буквальном смысле этого слова. Поэтому дисплейные классы, сколько бы их ни было, не могут служить основой для организации обучения тандемов. С другой стороны, программное обеспечение тандемного компьютера должно строиться не «с нуля», а на какой-то основе. Такая основа была впервые создана нами в 2008-м году по договору с МЭИ (ТУ). Она достаточна для начала кардинальной модернизации учебного процесса и может развиваться под влиянием новых запросов, когда «аппетит приходит во время еды». Она же предназначена для использования в тандемных компьютерах. Система создана на основе свободно распространяемых программных средств и поэтому может копироваться и видоизменяться так, как это необходимо для образовательных или научных целей. При этом для использования системы не нужно никаких навыков работы с компьютером.

Наша информационная система устроена следующим образом. На мощном компьютере установлены программа-сервер Apache и пакет символьной математики Maxima. Там же размещены сценарии обработки запросов и программы для представления математических формул в принятой в научно-технической литературе форме. Для интерпретации сценариев на сервере установлен пакет Perl.

Мобильные телефоны, имеющиеся у преподавателей и студентов, являются клиентами для сервера. С них на сервер отправляются команды – запросы информации, необходимой для решения математических задач, предусмотренных планами практических занятий. Сервер производит запрошенную информацию и отсылает ее на тот мобильный телефон, с которого поступил запрос. Клиентом сервера может быть не только мобильный телефон, но и карманный персональный компьютер или ноутбук.

Доступ к услугам математического сервера в настоящее время происходит по каналам беспроводной связи и WWW. Важно, что сервер присылает информацию в такой форме, что ее удобно воспринимать с экрана мобильного телефона.

Математический сервер в нынешней версии поддерживает решение всех задач курса высшей математики. Он призван значительно экономить время студентов и преподавателей. О том, как достичь этой экономии и как использовать высвободившееся время, подробно говорится в пособии «Методические указания к практическим занятиям по высшей математике с использованием мобильного доступа к математическому серверу МЭИ». В ближайшее время пособие будет представлено на сайте www.AcademiaXXI.ru и опубликовано в издательстве МЭИ.

Внедрение нашей системы подобно переоборудованию каждой аудитории института, каждой лаборатории и каждого зала библиотеки в дисплейный класс нового типа, не имеющий тех существенных недостатков, которыми обладают дисплейные классы с настольными компьютерами, и из-за которых попытки информатизации образования зашли в тупик (подробнее см. [10]). Поскольку абсолютное большинство мобильных телефонов сейчас позволяют соединяться с серверами WWW, все студенты и преподаватели МЭИ (ТУ) теперь получают ту самую *непосредственную* и *всегда доступную* помощь компьютера, о которой писал Энгельбарт.

«Как?» или «Что?» и «Зачем?»

Приступая к решению той или иной задачи, мы нуждаемся в ответах на три вопроса «Что нужно сделать?», «Зачем это нужно сделать?» и «Как это можно сделать?» Сейчас при изучении каждой задачи почти все время уходит на изучение компонента «как» этой триады. Таким образом возникает разрыв между теоретическими знаниями (они относятся к компонентам «что» и «зачем») и практическими навыками, нет времени на обсуждение получаемых результатов, знания студентов получаются фрагментарными.

Использование нашей информационной системы позволяет высвободить интеллектуальные и временные ресурсы, которые сейчас понапрасну тратятся на изучение компонента «как», и направить их на изучение компонентов «что» и «зачем», а в отношении компонента «как» следовать принципу, высказанному Винером: «Отдайте же человеку – человеческое, а вычислительной машине – машинное». Применительно к обучению этот принцип означает, что на каждом этапе нужно определить желательность и возможность использования компьютера, те недостающие функции, которым следует его «обучить» и сформулировать задачи, которые ставятся перед учащимся и компьютером в их двуедином взаимодействии (подробнее см. [11]).

В конечном итоге вместе с существенным, в 2–3 раза, уменьшением времени, отводимого на усвоение технических приемов, а также на выполнение рутинных вычислений и преобразований, возникнет возможность коренного и давно назревшего пересмотра всех учебных программ и включения в эти программы материала из так называемых специальных разделов, столь необходимых для специалистов будущего.

Если еще не поздно (вместо заключения)

Качество населения и качество его жизни взаимосвязаны. Если качество жизни населения становится существенно ниже, чем качество населения, происходит революция, и качество жизни повышается. Это – прогресс. Если качество жизни населения становится заметно выше качества населения, наступает период так называемых экономических кризисов, и качество жизни ухудшается. Это – регресс. Свидетелями такого регресса мы сейчас являемся. И история дает нам примеры того, что вовсе не после каждого периода кризисов наступает период подъема. Бывало и так, что какая-нибудь из стран не находила выхода из череды кризисов и заканчивала свою историю. Что же будет с нами?

В 1977 году Г. Фройденталь предупреждал: «Если наше обучение будет заключаться в том, чтобы вдолбить детям вещи, которые через одно-два десятилетия будет лучше выполнять компьютер, мы сами вызовем катастрофу» [12]. Сейчас мы учим тому, что *уже* прекрасно делает компьютер. Студенты понимают архаичность и нелепость многого из того, чему их сейчас старательно обучают, и теряют интерес к учебе, а преподаватели все никак не могут перестроиться и вместо того, чтобы учить тому, что действительно нужно, ищут методы повышения мотивированности студентов к изучению того, что не нужно.

Так что? Катастрофа на пороге? Кажется, что да, потому что уж очень многие действуют так, как будто готовятся не к прогрессу, а лишь к тому, чтобы по возможности благополучно завершить свою жизнь. Наример, в 7-й рамочной программе ЕС и ее обсуждении на конгрессе ICT-2008 (Лион, 25.11–27.11. 2008) об образовании ничего не сказано, о молодежи – тоже. При этом по двум из одиннадцати главных направлений рамочной программы значительные средства выделяются на решение проблемы удаленного контроля за здоровьем для ранней диагностики инфарктов и инсультов (7-е направление) и проблемы благополучного старения (9-е направление). Понятно, что стареющие специалисты в области информационных и коммуникационных систем имеют право, наконец, подумать и о себе, но в том, что они уже больше ничего не собираются делать для образования есть что-то, не предвещающее ничего хорошего.

Мы полагаем, что катастрофы еще можно избежать и для этого нужно срочно принимать меры по улучшению качества населения путем его всестороннего и качественного образования. Чтобы такое образование было воспринято населением, необходимо усиливать интеллекты индивидуумов и социальных групп. Средствами усиления интеллекта являются компьютеры и мобильный доступ к ним, удовлетворяющие критерию Энгельбарта. Примером информационной системы для усиления интеллекта может быть разработанный нами математический сервер. При всем этом нужно постоянно иметь в виду важное обстоятельство, о котором писал известный российский психолог О.К. Тихомиров: компьютер «создает лишь возможность «усиления» человеческого интеллекта и противоположная возможность – «ослабления» — не отпадает автоматически, напротив, она превращается в реальность при плохой организации использования вычислительной техники... «усиливаться» может и мудрость, и глупость, интеллект ученого и интеллект астролога» [13. С. 39].

Литература

1. *Коменский Я.А.* Избранные педагогические сочинения. – М.: Педагогика, 1982.
2. *Садовничий В.А.* Образование как фактор национальной безопасности // Alma Mater. – 1998. – № 3. – С. 12.
3. *Bush V.* As We May Think // Atlantic Monthly, July 1945. www.theatlantic.com/unbound/flashbks/computer/bushf.htm.
4. *Licklider J.C.R., Taylor R.W.* The Computer As a Communication Device // Science and Technology. – April 1968. (Online republish by Systems Research Center of DEC. – P. 29.)
5. *Биркгофф Г.* Математика и психология. – М.: Сов. радио, 1977.
6. *Венда В.Ф.* Системы гибридного интеллекта: Эволюция, психология, информатика. – М.: Машиностроение, 1990.

7. *Зимина О.В.* Кому адресовано обучение, основанное на информационных технологиях? // Педагогическая информатика. 2004. – № 1. – С. 35–40.

8. *Зимина О.В.* Печатные и электронные учебные издания в современном высшем образовании: Теория, методика, практика. – М.: Изд-во МЭИ, 2003.

9. *Кириллов А.И.* Мой компьютер: Сб. статей «Математика в образовании». – Вып. 4 / Под ред. И.С. Емельяновой. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2008. – С. 230–243.

10. *Зимина О.В., Кириллов А.И.* Инженерное образование в компьютеризированном обществе: преподавание без компьютеров // Проблемы теории и методики обучения. – 2003. – № 8. – С. 81–86.

11. *Зимина О.В.* Дидактические аспекты информатизации высшего образования // Вестник МГУ. Сер. 20. – 2005. – № 1. – С. 17–66.

12. *Фройденталь Г.* Математика как педагогическая задача. – М.: Просвещение, 1982.

13. *Тихомиров О.К.* Философские и психологические проблемы «искусственного интеллекта» // Искусственный интеллект» и психология / Под ред. О.К. Тихомирова. – М.: Наука, 1976.

МНОГОЭТАПНЫЕ ЗАДАНИЕ В ВИДЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ СИТУАЦИИ В ФОРМИРОВАНИИ ТВОРЧЕСКОЙ МАТЕМАТЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Клякля Мачей
профессор, директор Математического Института педагогического университета в Кракове (Польша)

В процессе обучения математике важную роль играет формирование умении и навыков творческой деятельности учащихся, что подчеркивается в работах известных математиков и методистов: В.В. Афанасева, В.А. Гусева, А.С. Крыговской, Л.Д. Кудрявсева, З. Мошнера, С.А. Розановой и других. На основании проведеных нами исследовании была построена концепция формирования творческой математической деятельности учащихся классов с углубленным изучением математики в школах Польши (М. Клякля, 2003_1, 2003_2). Одним с важных компонентов этой концепции являюс многоэтапные задания (МЗ). В этой статии представляем замечания к построению МЗ и один пример такого задания в виде исследовательской ситуации, основанной на проблеме углов Ланглея (М. Клякля, 2006).

1. Подготовка к составлению МЗ

Во работе (М. Клякля, 2003_2) мы определили многозтапные задания (МЗ) как последовательности задач, проблем и дидактических ситуаций, связывающую друг с другом разными видами творческои математическои деятельности (ТМД) в сложных математически-дидактических ситуациях. Мы предположили, что МЗ должны выполнять роль лаборатории ТМД, в которой на соответственным образом подобранных проблемах и содержании, в ситуации подобной той, в какой работает творческий математик, учащиеся имеют возможность применять различные виды ТМД.

Готовое разработанное МЗ, созданное вокруг определённой математической проблематики, должно содержать, как мы уже подчеркнули в выше указанной работе, три следующих элемента:

- разработку обсуждаемых вопросов с математической точки зрения,
- разработку дидактического проекта,
- разработку карты многоэтапного задания.

Используя в преподавании математики готовые МЗ, можно оказаться в ситуации, в которой дидактический проект данного МЗ представлен параллельно с разработкой математического содержания, а также в такой, когда данных два элемента представлены отдельно. Еще до реализации данного МЗ учитель должен познакомиться с разработанной математической проблематикой, а также проанализировать дидактический проект, используя при этом карту. Учитель должен принять решение, как он будет использовать данное задание: на уроках или во внеурочной работе (например, на занятиях математического кружка), либо в индивидуальной работе с отдельными учениками; сразу реализует ли все предложенные вопросы либо решит использовать только некоторые его части. До принятия решения он должен убедиться, что его ученики обладают уже соответствующими знаниями, умениями и способностями необходимыми для того, чтобы успешно браться за отдельные проблемы и вопросы; целесообразность запланированных дидактических ситуаций по отношению к учащимся класса (например, реализовалась ли уже используемая в МЗ проблематика в данном классе). Учитель также должен осознать возможность раздвинуть реализацию МЗ во времени, как в одном годе обучения, так и в следующие годы.

Некоторые МЗ особенно пригодны к использованию при повторении разных разделов программы, главным образом из-за того, что имеющиеся в МЗ дидактические ситуации разнообразны и обычно выступают в другой очерёдности, чем в школьной программе. При конструировании МЗ используются известные ученику элементы математических знаний, это устраняет ту дополнительную трудность, которая связана с творческим действием в математике, которая представляется начинающему как движение в совсем новой для себя отрасли, в которой встречаются новые понятия. При введении учащихся в данные вопросы в рамках действующего школьного курса очерёдность представления данных проблем обычно другая, чем в МЗ. Предлагаемая система дает возможности предпринимать дедуктивные рассуждения, облегчает осознание учащимися взаимоотношений между рассматриваемыми понятиями и представляет собой практическую реализацию локально дедукционной организации преподавания математики (Г. Фройденталь, 1982). Предлагаемые дидактические ситуации представляют собой отдельные «дедукционные острова». Рассматриваемые с данной точки зрения МЗ представляют собой великолепную школу дедуктивных рассуждений и являются хорошей школой процесса математизации, понимаемого как упорядочивание математики математическими средствами, что например, Г. Фройденталь считал одной из важнейших современных творческих профессиональных действий математиков.

2. Примечания к проектированию МЗ

Проектирование МЗ является трудным вопросом, но вместе с тем весьма поучительным, этот процесс очень полезно использовать при подготовке будущих учителей математики. Здесь можно выделить различные виды совместной деятельности ученика и учителя.

2.1. Проект разработанный опытным учителем математики

Очень полезным является опыт учителя в работе с учащимися, использованием которого он руководствуется при оценке реакций учащихся на поставленные перед ними частные проблемы и задания, или при оценке трудностей предлагаемых проблем и задач. Сам проект возникает как своего рода отчётно-антиципационная схема (А.С. Крыговская, 1977), представляя собой резюме опыта учителя в организации занятий с учениками, касающихся избранной тематики. Дидактический проект МЗ, который в данном случае опирается на опыт учителя, может совершенствоваться по мере приобретения опыта в управлении работой учеников.

2.2. Проект разработанный учащимися

Такой проект возникает как попытка описания подлинных поисков решений очередных проблем, предлагаемых ученикам учителем, а также их собственных исследований вокруг предлагаемой проблематики. Этот проект обладает тем достоинством, что основан на описании ситуаций, которые уже встречались в классе и возможно, что в будущем математическая деятельность учащихся может проходить подобным путём. Кроме этого данный проект является ученической попыткой синтетического подхода к итогам, полученным в результате управляемой учителем математической деятельности. В ходе такой работы интересные проекты возникают в результате обмена опытом из работы над данной проблематикой в нескольких отдельных группах учащихся. Часто в результате конечных обсуждений возникают новые проблемы, которые ранее до обмена опытом у учащихся не возникали.

2.3. Проект разработанный студентами – будущими учителями математики

Этот проект является результатом самостоятельной работы студентов, результатом их личных опытов в математической деятельности, сосредоточенной на указанной научным руководителем проблематике. Проект часто сопоставляется в ходе педагогической практики с действительной ситуацией, касающейся преподавания математики (проведённые уроки или проводимые в соответствии с проектом занятия математического кружка). Такая деятельность представляет собой важный элемент подготовки будущего учителя математики, так как часто является единственным шансом лично пережить моменты ТМД. Без такого личного «опыта» невозможно правильно организовать и управлять процессом ТМД учащихся.

В рамках магистерских диссертаций, написанных под маем руководством разработано более 30 работ, посвящённых проектированию многоэтапных заданий и проверке в школьной практике их функционирования. Тематика этих заданий охватывает весь школьный материал, в некоторых случаях, выходя незначительно за пределы программы, что, однако, является необходимым элементом, если эти задания должны сыграть роль «лаборатории ТМД учащихся».

Следует выделить два важных аспекта использования тематики МЗ в подготовке будущих учителей математики:

- МЗ является *самообразовательным элементом* (разработка такого МЗ должна считаться необходимым условием, позволяющим учителю в будущем правильно организовать и управлять работой учащихся над таким МЗ);
- *деятельность по внедрению* МЗ (элементы практической проверки разработок, содержащиеся в магистерских диссертациях в данной тематике) является важной практической предпосылкой положительной оценки дидактического средства, каким является МЗ.

3. МЗ в виде исследовательской ситуации

МЗ можно разработать в виде так называемой «исследовательской ситуации». Это специфическая форма представления дидактического проекта в виде ряда дидактических ситуаций. Проводя учащихся через эти ситуации, приходится отчётливо управлять как очередностью работы над отдельными проблемами, так и выбором способов их решения. Главной целью, какой мы хотим добиться, является расширение опыта учеников в работе над отдельными проблемами, а в меньшей мере развитие умения постановки и формулировки новых вопросов или проблем.

В качестве примера рассмотрим следующий ряд дидактических ситуаций, связанных с геометрической проблемой, которые могут послужить для конструкции МЗ в виде исследовательской ситуации. Обратим внимание на то, что отдельные проблемы формулируются здесь учителем, который чётко указывает очередные задания для выполнения, проводя таким образом учеников через отдельные дидактические ситуации. Представленные после каждой ситуации дидактические комментарии оговаривают существенные аспекты данной ситуации, связанные с формированием творческой деятельности учащихся.

Этап 1. Введение в исходную проблему

Исходной точкой для действий учащихся является рисунок от руки, который учитель делает на доске, предлагая учащимся рисовать одновременно с ним в своих тетрадях. Выполняя рисунок, учитель громко объясняет то, что делает, например, говоря: «Рисую отрезок АВ. Из точки А провожу полупрямую под углом 50° к этому отрезку. Сейчас из точки В проводим полупрямую под углом 60° к отрезку АВ. Эта последняя полупрямая пересекает первую из нарисованных полупрямых в точке С».

Очередные фазы работы учителя представляет серия рисунков от 1 до 6. Таким образом, после окончания рисования, ученики располагают уже готовым рисунком (рис. 6), на котором обозначены как данные углы 50°, 60°, 20° и 80°, так и искомые x и y. Затем учитель формулирует задачу – *прошу найти углы x и y.*

Комментарий. Такой способ введения исходной проблемы обладает своими достоинствами, на которые мы обратим наше внимание. Если бы задача была сформулирована вербально, то с самого начала ученики столкнулись бы с нелёгкой для преодоления трудностью, состоящей в понимании содержания задачи и выполнении правильного рисунка. Ситуация, в какой оказались ученики и в которой задача было сформулирована только после выполнения ими рисунка

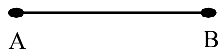

Рис. 1

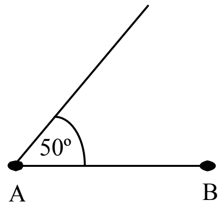

Рис. 2

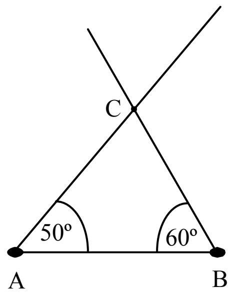

Рис. 3

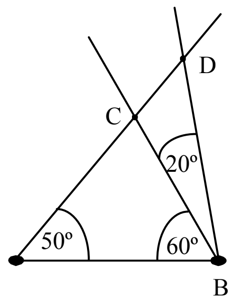

Рис. 4

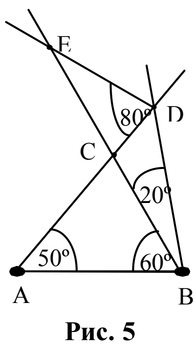

Рис. 5

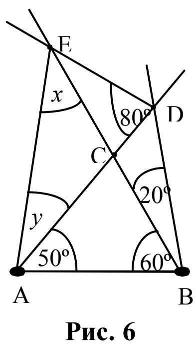

Рис. 6

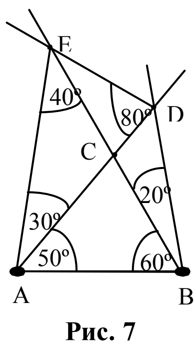

Рис. 7

по очередным указаниям учителя, облегчает им как понимание поставленного задания, так и понимание того, какие углы даны и какие мы ищем. Рисунок 6, который был выполнен учениками в тетрадях, как и рисунок на доске, это рисунки от руки и не должны быть очень точными. Учитель не пользуется приборами (ни линейкой, ни циркулем, ни транспортиром), углы изображаются «на глаз».

Этап 2. Первые попытки поиска решения.

Учитель выступает с инициативой дискуссии, касающейся способов решения проблемы. С этой целью учащиеся должны вспомнить те сведения, которые, принимая во внимание геометрический характер задачи и её формулировку, могли бы использоваться в поисках решения. Сначала речь идёт о том, чтобы вспомнить самые простые сведения, такие как теоремы о сумме углов треугольника, о сумме углов четырёхугольника, теоремы о вертикальных углах и свойства углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой и т.п. Это отличный случай для некоторой мобилизации знаний учеников, касающихся углов. Очередное припоминание сведений может касаться, например, теорем об углах в круге, теоремы о связи между вписанным и центральным углами, опирающимися на ту же самую дугу, теоремы об углах четырёхугольника, вписанного в окружность и т.п. Этот этап работы учеников можно совместить с попытками нахождения искомых углов x и y, которые довольно быстро должны привести учеников к нахождению уравнения $x + y = 70°$. В этой фазе работы дискуссия с учениками позволяет ясно наметить план действий и определить непосредственную цель поисков: найти второе уравнение, связывающее друг с другом неизвестные углы x и y, а затем решить полученную систему уравнений.

Комментарий. Этот этап работы учеников служит повторению различных сведений, касающихся геометрических теорем, связанных с углами. В начале припоминаем самые простые из них, в которых существенным образом выступают только углы, а только потом переходим к припоминанию более сложных теорем, например, касающихся связей между углами в круге или углами многоугольника, вписанного в окружность. Роль учителя состоит здесь в том, чтобы контролировать правильность формулировок припоминаемых учениками теорем и обращать внимание, выполнены ли предпосылки теорем, на которые ученикам хотелось бы сослаться. В качестве последнего элемента этой фазы, хорошо было бы припомнить теоремы, касающиеся отношений между сторонами и углами в треугольнике (теорема синусов и теорема косинусов), признаков конгруэнтности, а также признаков подобия треугольников, однако, обращая внимание учеников на то, что в задаче, которую решают, отсутствует длина сторон. К сожалению, сведения, касающиеся только зависимости между углами обсуждаемой фигуры (рис. 6), не позволят ученикам решить задачу, всяческие попытки использования различным способом вышеуказанных теорем, касающихся углов, должны потерпеть неудачу. Предпринятые учениками разные попытки использования теорем, касающихся углов, всегда ведут их к тому же самому уравнению: $x + y = 70°$. На этот этап работы с учениками учитель может посвятить даже более длительный период времени (например, в течении двух недель ученики могут искать решение на этом пути); в это время учитель может подсказать выполнение дополнительных построений, как например проведение некоторых параллельных прямых или отношение к рисунку 6, как к части большей конфигурации, находя точки пересечения прямых AB и ED, либо же прямых AE и BD. Этот этап можно завершить не слишком оптимистическим выводом о том, что мы не можем решить эту задачу.

Этап 3. Можно ли удовлетвориться приближенным решением?

Учитель ставит вопрос, можно ли одобрить следующий способ решения: один из учеников на миллиметровке выполнил рисунок .6 (так, как в ситуации 1), очень старательно, используя транспортир и линейку, а затем, с помощью транспортира измерил углы x и y так точно, как это было возможно. Снятый с транспортира результат это $x = 40°$ и $y = 30°$. Является ли это решение тем, о котором идёт речь?

Комментарий. Представленное выше решение является приближённым решением и в некоторых очевидных ситуациях такое решение нас устраивает. Однако, формулируя проблему на языке математики, мы ищем точное решение, а не приближённое, кроме этого способ, представленный учеником, может быть не больше чем формулировка гипотезы, что $x = 40°$ и $y = 30°$.

Этап 4. Изменяем содержание задачи.

Ввиду того, что попытки решения задачи потерпели неудачу, учитель предлагает модификацию задачи, состоящую например, в добавлении условия, что известна длина отрезка AB. Дополнительно, учитель обращает внимание на факт, что при выполнении рисунка каждый ученик может выбрать отрезок AB другой длины, следовательно, рисунки разных учеников могут быть разных размеров. Будут ли из-за этого углы x и y также разными? Дело в том, чтобы ученики уяснили себе, что полученные рисунки будут подобными, а что из этого следует то, что соответствующие углы будут равны, а значит, у задачи будет только одно решение, независимо от выбора отрезка AB. После дискуссии ученики принимают решение применить теорему синусов для треугольника ACE, вычисляют отношение $\frac{\sin x}{\sin y}$, выражая длину сторон AC и CE посредством длины отрезка AB и значений тригонометрических функций данных углов. Полученный результат вызывает удивление, т.к. отношение $\frac{\sin x}{\sin y}$ не заключает длины отрезка AB. Ученики констатируют, что намеченное нахождение второго уравнения, связывающего x и y, получено, хотя в этом втором уравнении неизвестные выступают в качестве аргументов тригонометрических функций. В конце концов, на этом этапе, решение исходной проблемы сводится к решению системы уравнений:

$$x + y = 70° \text{ и } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sqrt{3}}{4\sin 20°\sin 70°}.$$

Комментарий. Ввиду того, что при первых попытках не удалось решить исходной задачи, учитель предлагает её модификацию. Изменение состоит в том, чтобы принять дополнительное предположение, что дана длина отрезка AB, что позволяет реализовать первоначально намеченный план решения, который состоял в том, чтобы найти другое уравнение, связывающее неизвестные x и у. Учитывая потребность сравнения результатов расчётов, выполняемых отдельными учениками, учитель должен ввести обозначения длин отдельных отрезков, что облегчает записи и преобразование формул. Введённое дополнительное значение – длина отрезка AB, создаст возможность для применения теоремы синусов, но не входит в конечную формулу, выражающую отношение $\frac{\sin x}{\sin y}$. Такой способ действия, состоящий в принятии дополнительных данных, которые могут не входить в конечную формулу, часто применяется в различных математических рассуждениях и заслуживает внимания. Очень часто ученики в этот момент считают, что исходная проблема уже почти решена, так как мы нашли второе уравнение, связывающее неизвестные x и у.

Этап 5. Знакомство с методом решения системы уравнений вида $x + y = \alpha$ *и* $\frac{\sin x}{\sin y} = k$

Учитель, задавая ученикам соответствующие вопросы, обращает их внимание на факт, что полученная на предыдущем этапе система уравнений не является системой тригонометрических уравнений (в одном из уравнений неизвестные не выступают в качестве аргументов тригонометрических функций) и ввиду этого возникает вопрос, как решить такую систему уравнений. Поступает предложение, чтобы найти способы решения таких систем уравнений в имеющейся литературе, касающейся тригонометрии. Учитель предлагает чтение соответствующей литературы некоторым ученикам, подготавливающим доклад о способе решения системы уравнений рассматриваемого типа, а также учащиеся представляют примеры. Затем ученики применяют вновь изученный способ действия для решения полученной на предыдущем этапе системы. Это ведёт к системе уравнений вида:

$$x + y = 70° \text{ и } tg\frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1} tg\frac{x+y}{2},$$

где $k = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sin 20° \sin 70°}$, которая кажется уже значительно проще, чем предыдущая, так как во втором уравнении, с правой стороны, уже находятся только значения, представленные в задаче.

Комментарий. Системы уравнений которые содержат только одно тригонометрическое уравнение, не предусмотрены для изучения в школьной программе. Значит, это удобный случай для того, чтобы учитель предложил ученикам самостоятельно изучить дополнительную литературу. Это позволит заинтересованным ученикам ознакомиться с методом решения таких систем и представить результаты собственного исследования этой проблемы остальным ученикам. Такого типа системы уравнений появляются в некоторых геодезических проблемах (так называемая задача Потхенота). Приучение учеников к самостоятельному чтению математической литературы, совмещённое с возможностью проверки посредством изложения исследуемой проблематики перед всем классом, является важным элементом приобщения учащихся к научной работе.

Этап 6. Приблизительное решение системы уравнений.

В этой фазе работы над решением исходной задачи учитель ведёт с учениками дискуссии на тему проведения необходимых расчётов, которые нужно выполнить, чтобы решить систему. Внимание учащихся обращается на то, что значения тригонометрических функций углов, выступающих в полученных формулах, являются иррациональными числами и в расчётах нужно будет пользоваться их приближениями. Это станет причиной того, что полученный результат будет неким приближением точного значения. Ученики выполняют расчёты, пользуясь калькулятором и получают приближённое решение, например:

$$x = 39°57`53” \text{ и } y = 30°2`7”.$$

Комментарий. Эта фаза работы с учениками является удобным случаем для припоминания проблем, связанных с применением калькулятора для выполнения численных расчётов, можно также совместить этот фрагмент с использованием логарифмических таблиц, а также обратить внимание на прогресс, который совершился в области численных расчётов за последние тридцать лет. Можно, наконец, с практической стороны, припомнить правила приблизительного расчёта, а с теоретической стороны повторить сведения о подмножествах множества действительных чисел (например, можно ставить вопросы, которое подмножество множества значений функций синус, имеет большую мощность: множество рациональных значений или же иррациональных). После этой фазы работы, ученики должны отдавать себе отчёт в том, что исходная задача, несмотря на всё, не решена, а предпринятые попытки её решения привели к формулировке, по крайней мере, двух гипотез: первая, что искомые углы составляют соответственно 40° и 30°, вторая, что искомые углы составляют соответственно x = 39°57`53” и $y$ = 30°2`7”.

Этап 7. Изучение рисунка при гипотезе, касающейся значений искомых углов.

Учитель сначала задаёт вопрос, следует ли из факта, что меры всех представленных в исходной задаче углов это полные десятки угловых градусов то, что искомые углы также должны обладать этим свойством. Правильный ответ на этот вопрос – отрицательный. Следующий вопрос: если бы искомые углы x и y на рисунке 6 заменить конкретными значениями, например, такими как в первой или второй гипотезе (этап 6), то позволило ли бы нам при изучении таким образом дополненных рисунков открыть что-то новое, например, найти связи, которые мы не могли увидеть раньше, без размещения на рисунке значений конкретных углов? Проводимая дискуссия должна закончиться выводом, что стоит ещё раз проанализировать рисунок 6, заменяя искомые углы x и y соответственно конкретными значениями 40° и 30° . Ученики приступают к изучению.

Комментарий. Целью первого, из поставленных учителем вопросов, является объяснение ученикам того, что градусные меры углов x и y могут и не обладать таким свойством, как данные. Цель второго вопроса – обратить внимание учеников на тот факт, что, вводя новые данные (конкретные значения искомых углов x и y), мы представляем дополнительную информацию об углах, по крайней мере, трёх треугольников: ACE, ADE, ABE. Эта новая информация позволяет, например, решить вопрос, появились ли на рисунке подобные треугольники (раньше, когда мы ничего не знали об углах x и y, таких треугольников не было). Видно также, что если принять например, что меры углов x и y составляют соответственно: x =39°57`53” и $y$ = 30°2`7”, у нас нет никаких шансов на то, чтобы увидеть подобные треугольники, (потому что на соответствующем рисунке, кроме этих двух углов находятся только такие углы, градусными мерами которых составляют полные десятки). Есть шансы на то, чтобы увидеть возможные подобные треугольники, если принять, что

x =40° и y = 30°. Следовательно, мы предлагаем ученикам такие наблюдения.

Этап 8. Если x =40° и y = 30°, то треугольники ADE и EDC подобны. Можно ли это отвернуть? Можно ли доказать подобие этих треугольников без ссылки на предположение, что x =40° и y = 30°?

Предлагая ученикам изучение рисунка 7 учитель надеется, что ученики заметят подобие треугольников ADE и EDC, ввиду наличия у них равных углов. Так как признаки подобия являются необходимыми и достаточными условиями, следовательно, мы немедленно делаем заключение, что подобие треугольников ADE и EDC влечёт за собой равенство соответствующих углов, что в последствии означает, что x = 40° и y = 30°. В этот момент нужно отчётливо представить, что в формулировке исходной задачи мы не предполагали подобия треугольников ADE и EDC, а последнее рассуждение носит гипотетический характер: если бы нам было известно, что треугольники ADE и EDC подобны, то мы могли бы прийти к заключению, что x =40° и y = 30°. Значит, если бы мы, например, получили информацию из другого источника о том, что треугольники ADE и EDC подобны, могли бы сделать вывод, что x =40° и y = 30°. Но пока у нас нет такой информации.

Комментарий. Ситуация очень деликатная, так как рассуждения носят гипотетический характер и, учитель должен спровоцировать учеников поставить вопрос, нельзя ли получить информацию о подобии треугольников ADE и EDC из другого источника, без использования предпосылки, что x =40° и y = 30°. Здесь можно обратиться к ранее припоминаемым (Этап 2) теоремам о подобии треугольников. Если учащиеся не сформулируют такого вопроса, учитель сам его поставит, а в том случае, если учащиеся затрудняются с ответом, учитель подскажет возможность использования признаков подобия треугольников или, наконец, обратит их внимание на факт, что у треугольников ADE и EDC есть общий угол с вершиной D. Ссылка, в этот момент, на соответствующий признак подобия треугольников позволит установить, что достаточно бы было знать, что имеет место равенство $\frac{AD}{DE} = \frac{ED}{DC}$ для того, чтобы суметь прийти к выводу, что треугольники ADE и EDC подобны, а это, в свою очередь, позволило бы заключить, что $x = 40°$ и $y = 30°$.

Этап 9. Как доказать, что $\frac{AD}{DE} = \frac{ED}{DC}$ *?*

Ситуация, в которой сейчас оказываются ученики, похожа на представленную в этапе 4. Используя этот опыт, ученики должны предложить следующий способ действия: поочерёдно выразить длину отрезков AD, DE, ED и DC, посредством длины отрезка AB, а также данные в исходной задаче углы. Если окажется, что имеет место равенство, то задача решена и действительно $x = 40°$ и $y = 30°$.

Комментарий. Часть расчётов, необходимых для доказательства равенства $\frac{AD}{DE} = \frac{ED}{DC}$, была уже выполнена раньше (ситуация 4), остальное не сложно. Так, как и раньше, учитель должен предложить краткие буквенные для обозначения длин отдельных отрезков, чтобы облегчить сравнение результатов расчётов, проводимых отдельными учениками.

Этап 10. Беглый взгляд назад, беглый взгляд вперёд.

Как завершение работ над решением исходной задачи, учитель предлагает краткую редакцию задачи и её решения, а также анализ трудностей, с которыми ученики встретились в ходе решения, и способов их преодоления. После дискуссии, план описания решения мог бы быть следующий:

1. Формулировка задачи.
2. Вывод о том, что достаточно доказать подобие треугольников ADE и EDC, чтобы прийти к заключению, что $x = 40°$ и $y = 30°$.

3. Доказательство (такое, как в ситуации 8), что треугольники ADE и EDC подобны.

Учитель обращает внимание на то, что, при таком способе рассмотрения решения, вообще не видно, откуда было известно, что нужно доказать подобие треугольников. Все это показывает различие между «готовой математикой» и математикой, понимаемой как математическая деятельность. Ставит вопрос о роли данных в исходной задаче углов, конкретные значения которых играют в найденном решении важную роль, о возможных связях и зависимостях между этими углами, которые должны быть осуществлены, если бы нам хотелось, чтобы найденный способ решения исходной задачи был эффективен при наличии других данных.

Комментарий. Беглый взгляд назад, на путь, пройденный во время решения проблемы, является одним из важнейших элементов образования в области эвристических методов (Д. Пойя, 1961), касающихся решения проблемы. В современной дидактике математики не меньше значения придаётся активной рефлексии движения вперед, позволяющей ставить новые вопросы, инспирированные решённой проблемой. Последний оговариваемый этап посвящен этим двум аспектам процесса решения исходной проблемы.

Литература

1. *Фройденталь Г.* Математика как педагогическая задача. – М.: Просвещение, 1982. – Ч. I, II.

2. *Клякля М.* Формирование творческой математической деятельности учащихся классов с углубленным изучением математики в школах Польши Płock, Wyd. Naukowe NOVUM. – 2003_1. – 223 с.

3. *Клякля М.* Многоэтапные задания в формировании творческой математической деятельности учащихся классов с углубленным изучением математики в школах Польши Płock, Wyd. Naukowe NOVUM. – 2003_2. – 189 с.

4. *Клякля М.* Gotowa wiedza i aktywność w matematycznym kształceniu na przykładzie kątów Langleya, w: 36 Annales Academiae

Paedagogicae Cracoviensis, Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I / Red. A. Chronowski, M. Klakla. – Kraków: Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, 2006. – P. 75–93.

5. *Крыговская А.С.* Zarys Dydaktyki Matematyki, WSiP, Warszawa, 1977. – T. I, II, III.

6. *Пойа Д.* Как решать задачу? – М.: Изд-во Учпедгиз, 1961. – 207 с.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ В СИСТЕМЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

С.П. Крекотень, В.В. Панов
Федеральное государственное научное учреждение «Главэкспертцентр»

В настоящее время использование дистанционных образовательных технологий (далее – ДОТ) нашло широкое распространение в практике образовательных учреждений высшего и дополнительного профессионального образования и продолжает охватывать новые вузы и филиалы. Количественные оценки реализации дистанционного образования (далее – ДО) в высших учебных заведениях можно получить, используя материалы, подготовленные при участии Государственного университета – Высшая школа экономики (далее – ГУ-ВШЭ). В частности, в докладе по высшему образованию Российской Федерации [1] приведены данные по общему количеству студентов, обучающихся во всех вузах России в различные годы, анализ которых позволяет рассчитать временную динамику этой величины. Она представлена в следующей таблице.

Студенты/год	1996	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Общая численность, т. человек	2791	4742	5427	5948	6884	6456	7064
Изменение численности за год, т. человек	1994–96 89	390	685	521	428	508	180

Анализ приведенной зависимости с учетом реальных обстоятельств внедрения ДОТ в учебный процесс позволяет сделать вывод о том, что основной прирост количества обучающих в период

2001–2006 гг., более 2 млн студентов, обусловлен расширением области реализации ДО. Полученная оценка подтверждается в докладе ГУ-ВШЭ [2], где число обучающихся с использованием ДОТ в 2008 году оценивается в 49% от общего числа студентов высшего профессионального образования, т.е. около 3 млн человек.

Однако интенсивное увеличение числа пользователей дистанционными образовательными услугами вузов имело негативные последствия – посредственное качество предоставляемых образовательных услуг в целом по системе высшего образования. Этот факт в значительной степени объясняется значительным отставанием ресурсного и кадрового обеспечения ДО от роста количества обучающихся. Например, сравнение данных по изменению численности преподавательского состава и количества студентов за период 1996–2006 гг. из работы [1] говорит о том, что величина, характеризующая количество обучающихся, приходящихся на одного преподавателя, выросла в 2006 г. почти в два раза по сравнению с 1996 г. При этом следует отметить, что и квалификация преподавательского состава в целом по образовательной системе явно не повысилась.

В этом плане отдельного и обстоятельного обсуждения требуют проблемы организации учебного процесса в ДО (в первую очередь, организация взаимодействия обучающихся между собой и преподавателем), на которые федеральные органы управления образованием практически не обращают внимание, а вузы в значительной мере недооценивают их важность.

Согласно Закону Российской Федерации «Об образовании» реализация федерального государственного образовательного стандарта обеспечивается, в частности, применением рабочих программ учебных курсов, разрабатываемых в вузах на основе соответствующих примерных программ, которые создаются учебно-методическими объединениями вузов (далее – УМО) или научно-методическими советами (далее – НМС). При этом, если для традиционных образовательных технологий эти положения Закона в целом выполняются, в случае ДО указанные программы ни УМО, ни НМС не разрабатываются и вузы организуют учебный процесс по своему усмотрению. На практике в значительной части вузов стараются упростить учебный процесс, сводя освоение учебного курса к: самостоятельной работе студентов с учебными материалами, периодическим консультациям по желанию студентов и контрольному тестированию, т.е. по существу к самообучению.

В то же время, если обратиться к опыту стран с развитыми системами ДО, можно увидеть повышенное внимание к вопросам методического обеспечения и контроля организации ДО. В образовательных системах этих стран функционируют организации, которые могут предоставить образовательным учреждениям консультационные услуги и соответствующие материалы, а в документах соответствующих экспертных организаций, регламентирующих проведение аккредитации дистанциионных вузов [3–5], одно из центральных мест занимают разделы, устанавливающие требования к учебным планам и организации учебного процесса.

Указанные выше факторы, негативно влияющие на качество реализации ДО, могли бы быть устранены при наличии действующих регламентирующих подзаконных актов, в первую очередь, нормативных правовых документов, определяющих особенности предмета и содержания лицензионной экспертизы и аккредитационных показателей. Их отсутствие выводит за пределы правового поля образовательной деятельности около 3 млн обучающихся с использованием ДОТ. Создавшаяся с 2005 года «правовая пустота» в системе ДО позволяет некоторым вузам осуществлять учебный процесс без достаточного ресурсного и кадрового обеспечения, игнорируя методические рекомендации и выдавая не подтвержденные знаниями и компетенциями дипломы.

Нельзя сказать, что академическая общественность совершенно не реагирует на сложившееся положение. Вузами периодически представляются проекты соответствующих нормативных правовых документов в федеральные органы исполнительной власти, на конференциях и в журнальных статьях специалистами постоянно обсуждаются правовые проблемы использования ДОТ, реализуются проекты в рамках научно-технических программ, в которых исследуется проблемы нормативно-правового обеспечения ДО. Тем не менее, федеральные органы управления образованием слабо реагирует на призывы академической общественности и образовательных учреждений найти решение проблем, тормозящих развитие инновационных образовательных технологий.

В плане прогнозирования эволюции российской системы ДО представляет интерес упоминавшийся выше аналитический доклад ГУ-ВШЭ [2], в котором предлагается проект для модернизации российского образования. По мнению авторов доклада главной целью модернизации должны стать формирование мотивации и создание условий для осуществления российскими гражданами «образования в течение всей жизни». Поскольку и зарубежная, и российская практики определено говорят о том, что для реализации непрерывного образования (повышение квалификации и переподготовка специалистов, получение первого и второго высшего образования в заочной форме) наиболее эффективно использовать ДОТ, перспективы расширения области применения ДО в новой модели образования представляются весьма благоприятными.

Что же следует предпринять в настоящее время для придания нового импульса развитию ДО? Вероятно, наиболее перспективным является изменение правового статуса ДО. Введение дистанционной формы обучения, прежде всего заставит и федеральные органы управления образованием, и образовательные учреждения в значительной мере изменить в своей деятельности отношение к ДО, а значит, существенно упростит решение обозначенных выше проблем.

Определение ДО в качестве самостоятельной формы образования принято в большинстве стран с развитыми системами ДО и согласуется с положениями Международной стандартной классификации образования ЮНЕСКО, являющейся международной нормативной основой классификации образования. При этом в российском законодательстве наиболее реально ввести ДО в качестве подвида действующих форм получения образования (очной, очно-заочной, заочной и экстерната).

Литература

1. Тематический доклад ОЭСР по высшему образованию «Аналитический доклад по высшему образованию Российской Федерации». – ГУ-ВШЭ, 2007.

2. Аналитический доклад «Российское образование – 2020: модель образования экономики, основанной на знаниях». – ГУ-ВШЭ, 2008.

3. Accreditation and Assuring Quality in Distance Learning. – CHEA Monograph Series. – 2002. – № 1.

4. STANDARDS in open and distance learning. – ODLQC, December 2005.

5. Guidelines on the assurance of distance learning. – QAAHE, March 1999.

ФУНКЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ГЕОДИНАМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТЬЮ ТЕРРИТОРИАЛЬНЫХ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.А. Минаев
доктор технических наук, профессор,
проректор Российского нового открытого университета

А.О. Фаддеев
кандидат физико-математических наук,
доцент Академии ФСИН России, г. Рязань

Работа посвящена вопросам управления геодинамической безопасностью территориальных социально-экономических систем. Предложена методика аналитического построения функции управления геодинамической безопасностью данных систем и представлены некоторые результаты численного синтеза функции управления на примере территориальной социально-экономической системы регионального масштабного уровня.

Work is devoted to questions of management by geodynamic safety of territorial social and economic systems. The technique of analytical construction of management function is offered by geodynamic safety of the given systems and some results of numerical synthesis of function of management are submitted by the example of territorial social and economic system of a regional scale level.

Развитие современного общества является устойчивым, если в нем осуществляется саморегуляция взаимоотношений человека с окружающей средой и обеспечивается удовлетворение его потребностей и современного общества без причинения ущерба для будущих поколений.

Задача обеспечения безопасности человека, общества и природной среды представляет собой сложную многоуровневую и многоаспектную проблему [1], [3], [4], [12] – [16], [18]. В настоящее время в качестве концепции развития общества рассматривается концепция устойчивого (стабильного) развития [1], [2], [4] – [6], [10], [11], [13]. Данная концепция явилась отправной точкой не только для «Декларации по окружающей среде и устойчивому развитию», но и для другого важного документа, подписанного в Рио-де-Жанейро – «Повестка дня на XXI век».

Одной из насущных проблем при претворении в жизнь данной концепции является решение задачи обеспечения безопасности населения и территорий от опасных природных и природно-техногенных явлений и процессов, в частности процессов и явлений геодинамического происхождения.

Для решения указанной задачи на какой-либо территории, называемой нами далее территориальной социально-экономической системой (ТСЭС) необходима четкая стратегия управления природно-техногенной безопасностью геодинамического происхождения (называемая нами далее геодинамической безопасностью), направленная на осуществление устойчивого развития данной системы.

Рассматривая данный вопрос с позиций системного подхода, нами ранее было предложено рассматривать среду ТСЭС как пространство динамических квадруполей, между которыми установлены многозначные вероятностно-детерминированные соответствия, подчиняющиеся синхронизированным периодическим изменениям, а оценка уровня геодинамической безопасности и выбор механизма управления ею сводится к задаче анализа структуры и характера взаимодействий в пространстве динамических квадруполей [9], [17]. При этом очень важным является учет не только природно-техногенного, но и социально-антропологического фактора.

Сама же стратегия управления геодинамической безопасностью ТСЭС должна представлять собой циклическую процедуру, обеспечивающую достаточно высокий уровень регулирования взаимодействий элементов пространства динамических квадруполей.

На основании данного подхода нами предложена методика аналитического построения функции управления геодинамической безопасностью ТСЭС туристско-рекреационного назначения, представляющая собой функцию от нескольких переменных (функций – компонент) $V = f(V_R, V_K, V_N, V_C, V_P)$.

Причем, каждая из функций-компонент представляет собой достаточно сложную функциональную зависимость, например, $V_R = f(V_{R_1}, V_{R_2}, V_{R_3}, V_{R_4}, V_{R_5})$ (табл. 1).

Таблица 1

Характеристики функции управления геодинамической безопасностью ТРСЭС туристско-рекреационного назначения

№	Название функции-компоненты	Обозначение функции-компоненты	№	Названия характеристик функций-компонент	Обозначения характеристик
I	Процедура ранжирования уровня безопасности	V_R	1.	Сезонность	V_{R1}
			2.	Вид туризма	V_{R2}
			3.	Территориальный признак	V_{R3}
			4.	Относительная туристская наполняемость ТРСЭС	V_{R4}
			5.	Длительность туристского мероприятия	V_{R5}
II	Процедура определения классов оцениваемых опасностей	V_K	1.	Мониторинг окружающей среды	V_{K1}
			2.	Оценка характеристик среды по данным мониторинга	V_{K2}
			3.	Математическое моделирование опасностей	V_{K3}
			4.	Установление ранее неизвестных характеристик среды по результатам математического моделирования	V_{K4}
III	Процедура разработки рекомендательной документации	V_N	1.	Прогноз состояния оцениваемой ТРСЭС	V_{N1}
			2.	Разработка рекомендаций, норм и правил	V_{N2}
			3.	Разработка стратегии управления	V_{N3}

Окончание табл. 1

№	Название функции-компоненты	Обозначение функции-компоненты	№	Названия характеристик функций-компонент	Обозначения характеристик
IV	Процедура регулирования туристско-рекреационной деятельности	V_C	1.	Инженерная защита	V_{C1}
			2.	Организационно-административное регулирование	V_{C2}
			3.	Информационное регулирование	V_{C3}
V	Процедура оптимизации управленческой деятельности в ТРСЭС	V_P	1.	Мониторинг управления	V_{P1}
			2.	Корректировка прогноза	V_{P2}
			3.	Оптимизация стратегии управления	V_{P3}

Комплексно функции-компоненты описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} V_R(\eta) = a_{11}V_{R_1}(\eta) + a_{12}V_{R_2}(\eta) + a_{13}V_{R_3}(\eta) + a_{14}V_{R_4}(\eta) + a_{15}V_{R_5}(\eta), \\ V_K(\eta) = a_{21}V_{K_1}(\eta) + a_{22}V_{K_2}(\eta) + a_{23}V_{K_3}(\eta) + a_{24}V_{K_4}(\eta), \\ V_N(\eta) = a_{31}V_{N_1}(\eta) + a_{32}V_{N_2}(\eta) + a_{33}V_{N_3}(\eta), \\ V_C(\eta) = a_{41}V_{C_1}(\eta) + a_{42}V_{C_2}(\eta) + a_{43}V_{C_3}(\eta) + a_{44}V_{C_4}(\eta), \\ V_P(\eta) = a_{51}V_{P_1}(\eta) + a_{52}V_{C_2}(\eta) + a_{53}V_{P_3}(\eta), \end{cases} \qquad (1)$$

где a_{ij} – коэффициенты, представляющие собой весовые факторы функций-компонент, η – характеристическое время ($\eta \in [0; 1]$).

Все функции, входящие в систему (1), имеют физический смысл интенсивности и полезности управляющего воздействия для конкретной ТСЭС в заданный момент характеристического времени. В плане оптимизации управляющих воздействий значимым является вопрос оценки коэффициентов a_{ij}, входящих в данную систему.

Методически при аналитическом построении функции управления весь цикл управления разбивается на четыре равных интервала (подцикла) η_I, η_{II}, η_{III}, η_{IV}.

За время функционирования подцикла η_I идет формирование первоначальной структуры управления, собирается информация о системе, над которой осуществляется процедура управления. При значениях параметра $\eta \in [\eta_I; \eta_{II}]$ перед субъектом управления появляются новые задачи, возникающие в ходе анализа исходной информации, которые необходимо разрешить, воспользовавшись либо сбором дополнительной информации наблюдательного характера, либо методами математического моделирования.

За время функционирования подцикла, соответствующего интервалу $[\eta_{II}; \eta_{III}]$, идет нарастание интенсификации процесса управления, выражающееся в прогнозной оценке состояния среды ТСЭС и разработке соответствующих рекомендаций, норм и правил по снижению или предотвращению угроз и рисков, исходящих от опасных природных и природно-техногенных процессов геодинамического происхождения.

Подцикл, соответствующий интервалу $[\eta_{III}; \eta_{IV}]$, характеризуется плавным понижением уровня интенсивности управления, так как на этом этапе осуществляется мониторинг самой системы управления, выполняется корректировка прогноза (прогнозных моделей) и выполняется оптимизация стратегии управления, если это необходимо.

При определении видов функций-компонент необходимо полагать, что они являются определенными, непрерывными и дифференцируемыми на всем интервале характеристического времени $\eta \in [0;1]$.

Исходя из предложенной нами ранее структуры цикла управления геодинамической безопасностью ТСЭС туристско-рекреационного назначения [7] – [9], процедура определения классов оцениваемых опасностей и процедура оптимизации управленческой деятельности должны носить периодический характер. При этом необходимо иметь в виду, что значения компонент $V_K(\eta)$ и $V_P(\eta)$ являются неотрицательными, т.е. они должны определяться в соответствии со следующими функциональными зависимостями:

$$V_K(\eta) = \left| V_{K\max} \sin \frac{2\pi}{T_K} \eta \right|, \quad (2)$$

$$V_P(\eta) = \left| V_{P\max} \sin \frac{2\pi}{T_P} \eta \right|. \quad (3)$$

Величины $V_{K\max}$ и $V_{P\max}$ в соотношениях (2) и (3) имеют физический смысл максимальной «амплитуды колебаний» значений указанных функций-компонент на заданном интервале характеристического времени η. Величины T_K и T_P – периоды «колебаний» функций $V_K(\eta)$ и $V_P(\eta)$ соответственно, причем, согласно схеме цикла управления геодинамической безопасностью ТРСЭС туристско-рекреационного назначения, для функции $V_K(\eta)$ период T_K будет составлять 0,25, для функции $V_P(\eta)$ период $T_P = 0{,}5$.

Процедура выработки рекомендаций, норм и правил $V_N(\eta)$ является постоянно действующей процедурой. В функциональном отношении компонента $V_N(\eta)$ есть неубывающая функция, которая должна достигнуть некоторого предельного для нее значения, имеющего физический смысл «насыщения» поля рекомендаций, норм и правил нормативно-правовой документацией, когда появление новых нормативно-правовых документов не только не облегчает осуществление процедуры управления, но и значительно ее усложняет, а то и вовсе препятствует эффективному управлению геодинамической безопасностью ТСЭС. Поэтому функция-компонента $V_N(\eta)$, на основании изложенного, должна быть представлена следующим соотношением:

$$V_N(\eta) = b_1 \eta e^{-b_2 \eta}, \qquad (4)$$

где b_1 и b_2 – некоторые коэффициенты, определяемые из граничных условий, накладываемых на функцию-компоненту $V_N(\eta)$ на интервале характеристического времени $[0;1]$.

Процедура регулирования туристско-рекреационной деятельности $V_C(\eta)$ также, как и компонента $V_N(\eta)$, является постоянно действующей процедурой на всем интервале характеристического времени η. В функциональном отношении компонента $V_C(\eta)$ является монотонно возрастающей функцией, достигающей на правой границе интервала характеристического времени $[0;1]$ некоторого максимального значения, определяемого на основании реальных данных для конкретной рассматриваемой ТСЭС туристско-рекреационного назначения. Поэтому наиболее оптимальным видом функциональной зависимости для компоненты $V_C(\eta)$, по мнению автора, будет соотношение вида:

$$V_C(\eta) = c_1 \eta e^{c_2 \eta}, \qquad (5)$$

где c_1 и c_2 – некоторые коэффициенты, определяемые из граничных условий, накладываемых на функцию-компоненту $V_C(\eta)$ на интервале характеристического времени $[0;1]$.

Функцию-компоненту $V_R(\eta)$ (ранжирование уровня безопасности) наиболее оптимально с рассматриваемых нами позиций представить в виде полиномиальной зависимости. Примем для определенности степень полинома $n = 6$, т.е.

$$V_R(\eta) = \sum_{n=1}^{6} \alpha_n \eta^n \ . \qquad (6)$$

При подобном подходе компоненты функции управления на протяжении всего цикла управления могут быть представлены в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} V_R(\eta) = \sum_{n=1}^{6} a_n \eta^n, \quad V_K(\eta) = \left| V_{K\max} \sin \frac{2\pi}{T_k} \eta \right|, \quad V_P(\eta) = \left| V_{P\max} \sin \frac{2\pi}{T_p} \eta \right|, \\ V_N(\eta) = b_1 \eta e^{-b_2 \eta}, \qquad V_C(\eta) = c_1 \eta e^{c_2 \eta}. \end{cases} \qquad (7)$$

Численный синтез функции управления геодинамической безопасностью был выполнен нами на примере региональной ТСЭС Рязанской области.

На основании полученных значений функций-компонент $V_R(\eta)$, $V_K(\eta)$, $V_N(\eta)$, $V_C(\eta)$, $V_P(\eta)$, были рассчитаны относительные значения функции управления геодинамической безопасностью $V(\eta)$ ТСЭС Рязанской области и «веса» каждой функции-компоненты в поликомпонентном потоке управляющих воздействий на интервале характеристического времени $[0; 1]$.

Комплексная «весовая» диаграмма функций-компонент представлена на рис. 1, график относительных значений функции управления $V(\eta)$ – на рис. 2.

Анализ построенных графиков позволяет сделать нам следующие выводы.

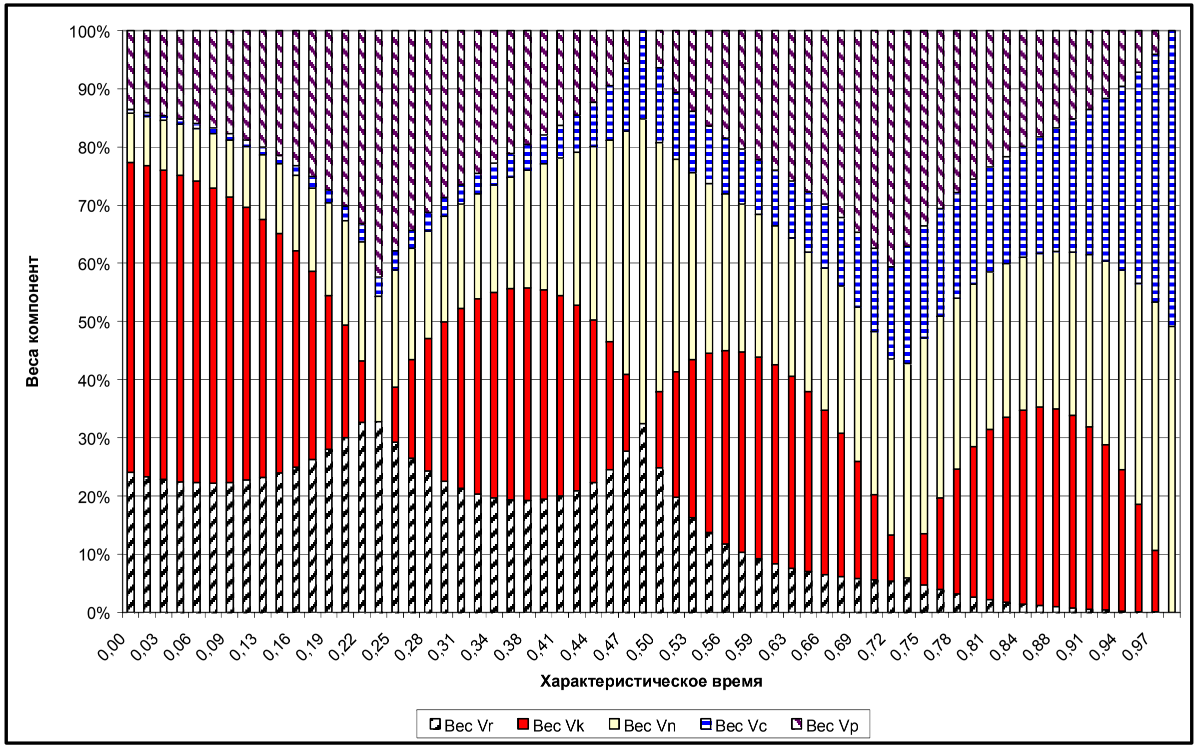

Рис. 1. Суммарное распределение весов функций-компонент функции управления геодинамической безопасностью ТСЭС Рязанской области

Рис. 2. График относительных значений функции управления геодинамической безопасностью ТСЭС Рязанской области

На начальном этапе построения стратегии управления геодинамической безопасностью ТСЭС самое пристальное внимание должно уделяться процедуре определения классов оцениваемых опасностей, соотнесению возможных рисков, исходящих от опасных природных и природно-техногенных процессов геодинамического происхождения и уровнем безопасности, приемлемым для оптимального и эффективного функционирования ТСЭС.

К окончанию подцикла I (т.е. при $\eta \to 0{,}25$) интенсивность управляющего воздействия $V_K(\eta)$ необходимо сводить к минимуму ($V_K(\eta) \to 0$), иначе продолжение работ по выявлению и оцениванию классов опасностей сведет на нет саму процедуру управления, т.е. появление новых задач сверх необходимого, которые также надо решать, «отвлекут» управляющую систему от выполнения уже четко определенных, поставленных перед ней задач.

Начало второго подцикла характеризуется плавным спадом к середине подцикла весового вклада компоненты $V_R(\eta)$. Снижать интенсивность управляющего воздействия $V_R(\eta)$ к середине подцикла крайне необходимо, поскольку после проведения первого этапа процедуры оптимизации управленческой деятельности, обязательно будут выявлены новые классы опасностей, которые затем необходимо вновь соотнести с ранжированием уровня безопасности.

На третьем подцикле величина весового вклада компоненты $V_K(\eta)$ также испытывает циклическое изменение, достигая своего наибольшего значения в середине подцикла и уменьшается до бесконечно малой величины в конце подцикла. Весовой вклад $V_R(\eta)$ в течение подцикла III уменьшается до значения 0,05 (5%), поскольку ранжировать уровень геодинамической безопасности уже не имеет смысла, необходимо выполнять лишь его корректировку, вследствие отслеживания обратных связей, возникающих в ТСЭС.

А вот на четвертом, заключительном подцикле управления вес компоненты $V_P(\eta)$ необходимо постепенно уменьшать до бесконечно малой величины в конце подцикла. Действительно, когда сняты все неопределенности о состоянии управляемой ТСЭС, крайне неэффективно расходовать ресурсы управляющих воздействий на процедуру оптимизации управленческой деятельности.

Таким образом, представляя функцию управления как поликомпонентный поток рассматриваемых нами управляющих воздействий, мы можем численно оценить значения функции управления и ее компонент при задании соответствующих граничных условий, что дает нам возможность определить «вес» каждой компоненты в общем потоке управляющих воздействий в каждый интересующий нас момент характеристического времени.

При этом отметим, что анализ графика функции управления и, в особенности, графиков весовых вкладов функций-компонент функции $V(\eta)$, позволяет достаточно эффективно и обоснованно, опираясь на количественную оценку составляющих функций-компонент, строить стратегию управления геодинамической безопасностью ТСЭС.

Литература

1. *Акимов В.А., Лесных В.В., Радаев Н.Н.* МЧС России. Риски в природе, техносфере, обществе и экономике. – М.: Деловой экспресс, 2004. – 352 с.
2. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Региональные проблемы безопасности с учетом риска возникновения природных и техногенных катастроф. – М.: МГФ «Знание», 1999. – 672 с.
3. *Ваганов П.А.* Человек – Риск – Безопасность. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. – 160 с.
4. *Воробьев Ю.Л., Осипов В.И., Владимиров В.А. и др.* Катастрофы и общество. – М.: Контакт-Культура, 2000. – 332 с.
5. Концепция национальной безопасности Российской Федерации. Указ президента РФ от 17 декабря 1997 г. – № 1300.
6. Концепция перехода РФ на путь устойчивого развития (проект). – М.: Всеросс. съезд по охране природы, 1995. – 24 с.
7. *Минаев В.А., Фаддеев А.О.* Методика оценки геоэкологического риска и геоэкологической безопасности ландшафтно-территориальных комплексов // Мат. XVII науч.-техн. конф. «Системы безопасности» – СБ-2008 Международного форума информатизации 30 октября 2008, Москва. – М.: Академия ГПС МЧС РФ. 2008. – С. 96–102.
8. *Минаев В.А., Фаддеев А.О.* Модели оценки геоэкологического риска на заселенных и промышленных территориях // Мат. XVII науч.-техн. конф. «Системы безопасности» – СБ-2008 Международного форума информатизации 30 октября 2008, Москва. – М.: Академия ГПС МЧС РФ. 2008. – С. 113–118.

9. *Минаев В.А., Фаддеев А.О.* Оценки геоэкологических рисков. Моделирование безопасности туристско-рекреационных территорий. – М.: Финансы и статистика, изд. дом ИНФРА-М, 2009. – 370 с.

10. *Осипов В.И.* Природные катастрофы и устойчивое развитие // Геоэкология. – 1997. – №2. – С. 5–18.

11. *Осипов В.И.* Природные катастрофы на рубеже XXI века // Вестник Российской Академии наук. – М., 2001. – Т. 71. – № 4. – С. 291–302.

12. Оценка и управление природными рисками. Тематический том / Под ред. А.Л. Рагозина. – М.: Изд. фирма «КРУК», 2002. – 248 с.

13. Природные опасности России. Природные опасности и общество. Тематический том / Под ред. В.А. Владимирова, В.Л. Воробьева, В.И. Осипова. – М.: Изд. фирма «КРУК», 2002 а. – 248 с.

14. *Протасов В.Ф., Молчанов А.В.* Экология, здоровье и природопользование в России / Под ред. В.Ф. Протасова. – М.: Финансы и статистика, 1995. – 528 с.

15. *Радаев Н.Н.* Виды защиты и системы безопасности в природе, техносфере и обществе // Экология и безопасность в промышленности. – 2002. – № 4. – С. 47–50.

16. *Топольский Н.Г., Фирсов А.В.* Комплексная безопасность территорий // Мат. XXV науч.-техн. конф. «Системы безопасности» – СБ-2006. – М.: Академия ГПС МЧС РФ, 2006. – С. 98–102.

17. *Фаддеев А.О.* Методика формализованного подхода к оценке геоэкологического риска и геоэкологической безопасности для ландшафтно-территориальных комплексов // Двойные технологии. – 2008. – № 4. – С. 32–38.

18. *Шойгу С.К., Воробьев Ю.Л., Владимиров В.А.* Катастрофы и государство. – М.: Энергоатомиздат, 1997. – 160 с.

НЕПРЕРЫВНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ И ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СОВРЕМЕННОЙ ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

В.Т. Петрова
профессор Московского физико-технического института

Сотри случайные черты, и ты увидишь:
мир математики прекрасен!

Уже несколько лет в России наряду с политическими и социальными изменениями происходит реформа среднего и высшего образования.

В старших классах средней школы углубляется специализация, что приводит к сужению общих фундаментальных знаний современных абитуриентов, в том числе и математических, даже для выпускников так называемых профильных физико-математических классов, лицеев и гимназий.

Вместе с тем в последние годы у специалистов-выпускников высшей школы и студентов, наоборот, потребность в фундаментальных математических знаниях возрастает. Это объясняется очередь проникновением математических методов во все новые области научной и практической деятельности. Так, например, без математического моделирования и статистических методов немыслимы многие физические разработки и эксперименты, медицинские исследования и социологические прогнозы. Очень важными становятся так называемые «смежные знания», чтобы специалисты–не математики имели достаточно ясное представление о необходимых им математических методах исследований и их возможностях, чтобы они могли формулировать достаточно грамотно для специалистов-математиков свои специальные проблемы, т.е. обладали бы достаточным для этого уровнем математической культуры. Без корректной постановки задачи ее математическая модель и анализ результатов не могут быть вполне достоверными и, следовательно, полезными. С другой стороны требуется более узкая и конкретная специализация математиков-прикладников – очевидно, что такой математик должен понимать основный принципы той сферы, в которой он работает, специфику задач в области, в которой он занимается прогнозированием результатов процессов или математическим моделированием.

Несомненно, что таким образом ныне существенно возрастает роль прикладной математики, ее моделей и методов в различных сферах человеческой деятельности.

Столь же очевидно, и исторический опыт развития и достижений математики это показывает, что успешное развитие прикладной математики, как правило, поддерживается фундаментальными математическими исследованиями. Хотя результаты последних далеко не всегда и далеко не сразу находят непосредственное применение в прикладных областях, но, тем не менее, и тому можно привести много примеров (например, возникновение и развитие дифференциального и интегрального исчислений), они оказывают большое влияние на в прикладную математику: развитие и совершенствование ее методов.

Таким образом, развитие фундаментальных исследований в математике более чем актуально, поскольку именно они определяют будущее не только этой науки, но и многих других областей человеческой деятельности.

Отметим также, что «всеобщая компьютеризация» последних лет не только научной, но и практической и бытовой жизни требует от их пользователей для грамотной и более полной реализации возможностей современных компьютеров и даже более общо, современной техники, знаний по крайней мере, основ логики, некоторой практики и умений логического мышления – другими словами определенной математической культуры. Еще десяток лет назад для большинства специалистов этого вовсе не требовалось, а ныне без элементарной компьютерной грамотности и владения основными специальными компьютерными системами работа во многих современных областях оказывается просто неэфективной.

По этим причинам значительно расширен список вузовских специальностей, при обучении по которым введены курсы информатики, теории информации, теории вероятности, статистики, математического моделирования и т.д. Однако ни один из таких курсов не может быть успешно освоен студентами, если они не получат перед этим достаточно качественного представления о фундаментальных разделах и методах классической высшей математики (дифференциальное и интегральное исчисления, аналитическая геометрия и линейная алгебра, элементы высшей алгебры, теории групп, или так называемой «дискретной математики», а иногда и основы теории вероятностей). Именно они закладывают основу специальной математической культуры и тех математических методов, которые потребуются при работе по будущей специальности.

Поэтому во многих современных вузах наряду с курсами информатики, статистики и т.п. должны вводиться и вводятся курсы общей (классической) высшей математики. Причем, практика показывает, что без освоения базовых знаний необходимых разделов классической высшей математики, как правило, ее специальные прикладные разделы студентами не усваиваются, или усваиваются со значительным трудом и большими временными затратами.

Противоречия между объемом и качеством математических знаний выпускника средней школы и требованиям к математической культуре современного специалиста делают актуальными следующие проблемы математического образования в современной высшей школе:

– точно определить содержание общих и специальных математических курсов для различных математических и нематематических специальностей;

– определить объем и необходимую глубину владения основами математических знаниями и математическими методами для каждой вузовской специальности, в которой такие методы используются;

– выработать современные методы, критерии и методики контроля качества математических знаний и владения студентами необходимым математическим аппаратом;

– разработать современные методики преподавания математики в высшей школе, которые, в частности, позволяли бы учитывать различную довузовскую подготовку студентов;

– разработать современные методики преподавания математики, которые позволили бы существенно интенсифицировать обучение студентов математическим дисциплинам;

– разработать современные методики преподавания математики, учитывающие происходящие социологические, культурологические и информационные изменения.

На мотивации последних пунктов остановимся особо. Традиционные методика и практика обучения имеют преимущественно информативный характер, который направлен, в основном на овладение учащимися определенным объемом знаний. Вместе с тем в настоящее время возрастающий поток информации во всех областях человеческой деятельности, в том числе – специальной профессиональной, требует постоянного расширения и обновления знаний. Существенно увеличить время обучения (в вузе свыше 5–6 лет) невозможно по многим естественным причинам, а потому в современной высшей школе экстенсивные методы и методики обучения, требующие, как правило, больших временных затрат, неприемлемы. К тому же информация, полученная в процессе излишне продолжительного обучения, часто устаревает к его концу. Следовательно, такой процесс обучения превращается в бесконечную самоцель, что, естественно, общество не может себе позволить.

Скорость роста потока новой информации требует перехода к интенсивным формам и методам обучения, чтобы за традиционное время обучения студент мог достаточно качественно освоить объем информации, необходимый для будущей профессиональной деятельности. Но ныне и этого недостаточно: по причине обилия новой информации и новой «смежной информации» студента крайне необходимо обучать самостоятельному интенсивному добыванию новых знаний и такому же (самостоятельному и интенсивному) отбору тех знаний, которые будут необходимы ему для решения конкретных задач. – Этому надо учить, и в этом состоит принципиально новая функция современного обучения, особенно в высшей школе. Если за свою вузовскую жизнь студент не овладеет основами самообучения, ему крайне сложно и трудно будет состояться, как специалисту, в частности, адаптироваться в современной быстро меняющейся профессиональной среде.

Из этого следует, что для современной высшей школы должны быть актуальны интенсивные методы и методики обучения, самообучения и самоконтроля.

Дополнительно к отмеченным выше противоречиям между инновациями традициями в обучении надо отметить еще один важный аспект современности. Общество, как отмечают футурологи, во второй половине XX века встало на путь «быстрого развития». Он отличается от предшествующих этапов не только ускорением в информационной и производственной сферах, но и значительно большим динамизмом социальных отношений.

В системе обучения это вносит определенные изменения в понятия и динамику отношений «учитель–ученик». Так часто носителями новой информации (т.е. учителями) становятся ровесники учеников, а иногда и более младшие, которые в состоянии раньше, лучше и быстрее освоить некоторые новые виды и формы информации или деятельности, а затем транслировать собственные знания, умения и навыки другим.

Для примера достаточно указать «компьютерный ликбез» или овладение ресурсами Internet-а. Упрощая ситуацию, можно сказать, что современность характеризуется тем, что старшее поколение начинает учиться у младшего, причем число областей, где это происходит, расширяется. Такого явления в истории человечества не было. Оно влечет изменение статуса и функций учителя и поэтому, конечно, должны по существу измениться методы и методики обучения.

В качестве направлений возможных решений затронутых проблем, по крайней мере, в обучении математике в современной высшей школе, представляется важным следующее:

– необходимо сохранить и соблюдать *фундаментальность математических знаний*;

– в изложении учебного математического материала целесообразно следовать *принципу разумной строгости*;

– изложение учебного математического материала должно быть *системным;*

– современное обучение математике должно быть *дифференцированным;*

– *дифференцированное* обучение математике должно быть *комплексным,* т.е. использовать во взаимодействии разные его формы;

– при обучении математике должна соблюдаться *преемственность знаний* на разных этапах обучения.

В овладении математическими знаниями очень важна их база, четкое знание и понимание основ и принципов математики, как учебного предмета и науки. Пожалуй, математика является чуть ли ни единственной учебной дисциплиной, которую нельзя изучать «с середины», т.е. с произвольного ее раздела. Освоение математических знаний с азов и формирует четкое логическое мышление, а также ту культуру знаний и мышления, без которых нельзя овладеть более тонкими, глубокими и сложными областями математики и многими ее методами. В этом и состоит *принцип фундаментальности* при формировании содержания математических курсов. Поэтому сократить изучение классических разделов математики без резкого падения качества математического мышления и знаний, а также труднопреодолимых сложностей в дальнейшем освоении ее специальных разделов невозможно.

Коротко *«принцип разумной строгости»* состоит в том, что в учебном курсе математике все, что может быть доказано, должно быть доказано, а все вводимые новые понятия и методы (и их содержательность) должны быть разъяснены на достаточном количестве примеров. Таким образом, воспитываются и отрабатываются приемы математического мышления и постигаются ее принципы, идеи и методы.

Системность изложения учебных математических знаний состоит в том, что они должны быть структурированными, взаимосвязными и иерархическими – от простого к более сложному. Поскольку без этого математические знания часто представляются хаотическим набором сложной и малопонятной информации. Подчеркнем, что характерными чертами системы обучения, которая сложилась в отечественной школе, являются фундаментальность знаний, последовательность изложения учебных знаний и проблемные методы изложения учебного материала. В настоящее время актуальной задачей развития системы обучения в высшей школе, в свете требований стандартов третьего поколения [6], выступает усиление осознанной и активной познавательной позиция и деятельности учащихся, в том числе овладением основами учебной деятельности.

Хороший потенциал в этом отношении имеют системность изложения и продуманное и систематическое формирование учебных понятийных структур в учебных курсах математики [2], а вследствие этого, возможно, и блочное изложение учебного материала таких курсов с отчетностью по каждому блоку с оценкой по каждому из них. Обучение познанию или обучению возможно путем практического осознания и реализации студентом под руководством преподавателей математических и учебных целей, приемов учебной и познавательной деятельности в выделенной целостной системе учебных задач. Например, первичного знакомства и усвоения принципиального нового фундаментального математического понятия, систематизации знаний относительно всех изученных систем знаний, связанных с фундаментальным математическим понятием, осуществление взаимосвязи теоретического и практического (в том числе, лекционного и семинарского) материала и т.д.

Несомненно, что поиск путей решения этих проблем при обучении высшей математике должен быть направлен на оптимизацию управления процессами усвоения знаний и воспитания навыков самообучения студентов.

В этом отношении может быть показателен многолетний опыт Московского физико-технического института: система семестровых заданий по основным дисциплинам и отчетности по ним, которую целесообразно было бы, в соответствии с идеями стандартов третьего поколения, пополнить заданиями разных уровней сложности с рейтинговыми баллами за них и, вследствие этого, возможными «коридорами оценок». Все это к тому же должно стимулировать и организовывать регулярную самостоятельную учебную работу студентов.

Дифференцированность в обучении математике в высшей школе следует понимать в двух аспектах. Первый состоит в том, что при обучении по разным специальностям обязательно должна учитываться глубина необходимых математических знаний. То есть при абсолютно четком и однозначном определении и введении новых понятий разъясняться они могут (и должны) с разной степенью глубины, которая, несомненно, должна быть совершенно разной для студента – будущего математика и будущего медика или библиотекаря. Ту тонкость понимания математических коллизий, которую необходимо разъяснять, воспитывать и требовать от первого, совершенно не следует добиваться (и даже объяснять и иллюстрировать) от последних. Другой аспект дифференцированного обучения заключатся в том, что система обучения математике в высшей школе должна позволять быстро адаптироваться к новым для них математическим знаниям способным к этому предмету студентам, в том случае, если они имели недостаточную довузовскую подготовку. Более того – дифференцированное обучение должно развивать интерес студентов к математике, пробуждая, воспитывая и развивая их математические способности независимо от того, по какой специальности происходит обучение.

Решение этих проблем видится в создании так называемых многоуровневых учебных курсов и учебников, когда при четком изложении основной части курса, параллельно с ним ставятся (и комментируются) проблемы различной глубины и сложности для самостоятельного решения и самостоятельного выбора посильного уровня освоения учебного материала студентами. При этом в основную или базовую часть курса включаются важнейшие понятия курса, их разъяснения, а также методы и образцы рассуждений и доказательств. Семинарские занятия в этом случае принципиально меняют характер, теряя «натаскивательный» характер, зачастую свойственный традиционному обучению предмету.

Примером реализации последней может служить система предлагаемых лектором теоретических и практических математических задач. Студентам предлагается оформлять их письменно и сдавать на следующих лекциях, а также рассказывать свои решения на занятиях и консультациях. Наиболее сложным задачам присваивается «вес» в очках (баллах). Закономерно, что в качестве «материального стимула» является допуск студента на досрочную сдачу семестрового экзамена. На досрочном экзамене студент должен подтвердить свой рейтинг, успешным решением нескольких задач. Дальнейшее может проходить по двум сценариям: непосредственная беседа по содержанию учебного курса или традиционно. Студентам предлагается самим выбрать форму экзамена. Интересно, что большинство из них предпочитает нетрадиционную форму, несмотря на то, что это далеко не самый легкий путь к хорошей отметке. Это заслуживает внимания, поскольку самостоятельный выбор студентом более трудной, но интересной формы экзамена показывает, что он уже достаточно адаптировался к системе обучения, имеет представление об учебном материале и структуре курса, достаточно адекватно оценивает свои знания и рассчитывает свои силы [3].

Современная высшая школа в обучении переходит к стандартам третьего поколения. Представляется, что важной, если не основной, инновацией этого нововведения является принципиальный пересмотр методических принципов обучения в высшей школе, по существу – обязательный переход к уровневому диффернцированному обучению, поскольку обучение студентов по стандартам третьего поколения предполагает значительное усиление стимулирования их учебной деятельности. Однако, эта, безусловно, полезная идея пока не подкреплена реальным механизмом ее реализации за исключением указаний необходимых компонент базовых учебных и вариативных курсов, а так же рекомендаций начислять студентам дополнительные баллы за освоения учебного материала вариативных курсов. Стандарты третьего поколения также четко не определяют критерии сложности или «продвинутости» подобных курсов (за исключением их примерного содержания для подготовки по основным специальностям) и оценок учебной работы студентов по таким курсам. Но, вместе с тем формулируют довольно высокие требования к тому, что студент, обучающийся по специальностям с математикой в качестве основного предмета должен в полной мере «владеть навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин; навыками освоения большого объема информации и решения сложных и нестандартных задач; культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов; языком математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов» [6. – С. 23].

Отсутствие четких критериев и методик, как изложения, так и оценок может свести полезную идею на нет. Вряд ли студент, посредственно осваивающий дополнительный (вариативный) курс (за который предполагается начислять дополнительные баллы) заслуживает более высокой абсолютной оценки, чем студент, вполне качественно освоивший только базовый курс. Естественно, это приводит к проблемам организации учебного процесса на дифференцированной основе: либо организации параллельных учебных курсов разного уровня глубины и сложности, либо внутренней перестройки учебных курсов так, чтобы внутри каждого из них можно было четко выделить структуры разных уровней глубины и сложности. Стандартами третьего поколения также не предложен механизм стимулирования студентов к освоению учебного материала на продвинутом уровне. Таким образом, при отсутствии качественных методических разработок и рекомендаций вполне возможно, что полезная по своей идее инновация может, в лучшем случае, оказаться бесполезной. Но, вероятнее всего, может негативно повлиять на качество подготовки студентов, которым будет выгоднее набирать очки и баллы простым отсиживанием на занятиях, чем обдуманно, хотя и с возможными ошибками осваивать более сложный учебный материал.

Современная *проблема преемственности* знаний в математических дисциплинах возникла, в основном, в связи с переходом в России к системе двухступенчатого высшего образования, которая принята в большинстве стран Запада. При этом, к сожалению, проявилась тенденция к поверхностному и описательному изложению многих вопросов учебного математического материала на первой ступени – в бакалавриате. Как правило, подобный подход часто мотивируется, тем, что далеко не все студенты-бакалавры продолжат обучение в магистратуре или выберут будущей специализацией математику, и, следовательно, изложение учебного материала в математических курсах на этой ступени может быть информационно-описательным. А для тех студентов, которые продолжат свое обучение в магистратуре математического, естественнонаучного или технического профилей, будут прочитаны по соответствующим разделам математики достаточно полные и строгие курсы. Такой подход к математическому образованию недопустим, так как любая нечеткость в изложении ведет к неоднозначности в понимании новых математических структур, устойчивым заблуждениям и ошибкам. Попытки их исправлений потребует значительных затрат учебного времени на разъяснения и переобучение. К этому следует добавить, что преподаватели многих вузов столкнулись с большими трудностями в этом «переобучении», а иногда и невозможностью студентов-магистров понять необходимость истинного уровня строгости в математических рассуждениях после поверхностного знакомства с некоторыми разделами математики в бакалавриате. Поэтому изложение учебного материала математических курсов, как для бакалавров, так и для магистров, должно быть вполне строгим и четким. Однако, в соответствии с принципом разумной строгости понятия и разделы математики, изучавшиеся в бакалавриате, могут быть и должны рассматриваться более глубоко и полно.

Математика едина. В том числе и для бакалавров, и магистров.

Таким образом, мы постарались очертить проблемы современного математического образования в высшей школе, наметить и предложить возможные пути их решения.

Литература

1. *Кудрявцев Л.Д.* Мысли о современной математике и ее преподавании. // Избранные труды. – Т. III. – М., 2008.
2. *Петрова В. Т., Иванова С.В.* Формирование системы математических понятий в свете интенсификации обучения математике студентов современного технических вузов // XLII Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии: Тезисы докладов. Секция методики и педагогики. – М., РУДН, 2006.
3. *Петрова В.Т.* Приемы технологий развивающего обучения в учебном курсе высшей математики современного технического вуза: Труды Международного коллоквиума «Des jeux a la creative. Methodes d'education active». – Boulogne-Billancourt, France, 2007. – С. 116–121.
4. *Петрова В.Т.* О проблемах современного математического образования // Труды Международной научной конференции «Education, science and economics at universities. Integration to international area». – Plock, Poland. 2008. – С. 210–215.
5. *Петрова В.Т., Иванова С.В.* Стандарты третьего поколения и дифференцированное обучения высшей математике в современном техническом вузе с использованием понятийных систем: Тезисы докладов Международной научно-образовательной конференции «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования. – М.: РУДН, 2008. – С. 614–617.
6. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 010600 – Прикладные математика и физика/ Proekt_FGOS_18oktqbrq_2007-denq.doc

РАЗРАБОТКА СБОРНИКА ПРОГРАММ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ФГОС ВПО ТРЕТЬЕГО ПОКОЛЕНИЯ (БАКАЛАВРИАТ)

А.С. Поспелов
профессор Московского государственного института электронной техники (технического университета)

С.А. Розанова
профессор Московского института радиотехники, электроники и автоматики (технического университета), академик АПСН

Т.А. Кузнецова
доцент Московского института радиотехники, электроники и автоматики (технического университета)

По заданию Координационного Совета Министерства образования и науки РФ рабочая группа Научно-методического совета по математике разработала проект Сборника программ по математике для ФГОС ВПО третьего поколения (бакалавриат).

При этом предварительно была предложена концепция составления программ, учитывающая следующие основные особенности ФГОС третьего поколения:

- Расширение академических свобод вузов при формировании ООП;
- Модульный принцип разбиения учебных циклов ООП;
- Деление учебных дисциплин на базовые и вариативные части, причем вариативная часть должна составлять не менее одной трети трудоемкости цикла;
- Формирование требований к результатам освоения ООП в виде компетенций;
- Определение трудоемкости учебной нагрузки студентов в зачетных единицах;

- Введение производственных практик, лабораторных, курсовых и научно-исследовательских работ как обязательного компонента ООП.

Концепция составления программы

Для достижения цели подготовки конкурентоспособного современного специалиста (бакалавра) в высших учебных заведениях крайне важны хорошо подготовленные абитуриенты и качественное обучение в вузе, для чего необходимо учитывать следующие моменты:

1. Сохранить реализацию принципа оптимального сочетания фундаментальности и профессиональной направленности математического образования, способствующей успешной подготовке бакалавра и магистра по выбранной специальности. Интенсивная разработка и внедрение новых технологий, быстрое обновление производства выдвигает новые требования к выпускникам вузов. Важнейшим из этих требований становится способность разрабатывать и осваивать новые технологические процессы. В этих условиях фундаментальная подготовка специалистов приобретает первостепенное значение, а оптимальное сочетание фундаментальности и профессиональной направленности математического образования помогает реализации компетентностного подхода в обучении.

2. Укрупнить группы направлений подготовки бакалавров, например, по направлению «Техника и технология»:120000 – Геодезия и землеустройство; 170000 – Оружие и системы вооружений; 220000 – Автоматизация и управление; 220400 – Прикладная математика; 280000 – Техносферная безопасность, природоустройство и гидрометеорология, и 110000 –Сельское и рыбное хозяйство.

3. Выразить трудоемкость предлагаемых дисциплин в зачетных единицах. При этом авторам программ следует исходить из распределения общей трудоемкости Основной образовательной программы, как представлено в табл. 1.

Таблица 1

Код УЦ ООП	Учебные циклы	Трудоемкость (зач. ед.) Общая/Баз. часть
Б.1.	Гуманитарных, социальных и экономических дисциплин (ГСЭ)	30/20
Б.2.	Математических и естественно научных дисциплин (МЕН)	70/45
Б.3.	Профессиональных дисциплин	122/46
	Итого по циклам Б.1–Б.3	222/111

Как видно из табл. 1 суммарная трудоемкость базовых частей учебных циклов ООП Б.1–Б.3 составляет 50% их общей трудоемкости.

Каждый из предлагаемых комплектов программ разбит на две части: базовую и вариативную – с указанием трудоемкости каждой из содержащихся в нем программ математических дисциплин.

4. Использовать модульный принцип построения многоуровневых программ.

Построение на основании этого принципа рабочих программ позволит формировать вузовские программы как набор модулей различного уровня (базовый, повышенный, продвинутый), последние два (для некоторых групп специальностей за счет вариативной части. В результате этого можно избежать заметного произвола в выборе содержания математических дисциплин, учесть логическую последовательность разделов математики и обеспечить мобильность студентов при переходе из одного вуза в другой.

5. Описать математические компетенции, которыми должен обладать выпускник-бакалавр.

Например, бакалавр инженер должен обладать следующими математическими компетенциями:

а) универсальными

– *общенаучными компетенциями (ОНК):*

- способность использовать в познавательной профессиональной деятельности базовые знания в области математики (ОНК-1);

- способность приобретать новые математические знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ОНК-2);
- владеть математической логикой, необходимой для формирования суждений по соответствующим профессиональным, социальным, научным и этическим проблемам (ОНК-3);
- владеть методами анализа и синтеза изучаемых явлений и процессов (ОНК-4).

- инструментальными компетенциями (ИК):

- владеть развитыми учебными навыками и готовностью к продолжению образования (ИК-1);
- обладать способностью к применению на практике, в том числе умением составлять математические модели типовых профессиональных задач и находить способы их решений; интерпретировать профессиональный (физический) смысл полученного математического результата (ИК-2);
- владеть умением применять аналитические и численные методы решения поставленных задач (с использованием готовых программных средств) (ИК-3);

– социально-личностными и общекультурными компетенциями (СЛК);

- обладать математическим мышлением, математической культурой как частью профессиональной и общечеловеческой культуры (СЛК-1);
- владеть способами доказательств утверждений и теорем как основной составляющей когнитивной и коммуникативной функций (СЛК-2);
- обладать способностью к критике и самокритике, умением работать в команде, приверженностью к этическим ценностям, толерантностью к различным культурам (СЛК-3);

б) профессиональными:

– общепрофессиональными компетенциями (в соответствии с видами деятельности):

научно-исследовательская деятельность:

- способность обосновывать правильность выбранной математической модели, сопоставляя результаты экспериментальных данных и полученных решений (ОПК-1);
- способность применять на практике приемы составления научно-технических отчетов, обзоров и пояснительных записок (ОПК-2);

– *производственно-технологическая деятельность:*

- готовность демонстрировать владение математическими методами обработки, анализа и синтеза результатов профессиональных исследований (ОПК-3);

В части *предметно-социальных компетенций* **бакалавр** должен:

1) демонстрировать глубокое знание основных разделов элементарной математики;

2) иметь глубокие знания базовых математических дисциплин и проявлять высокую степень их понимания, знать и уметь использовать на соответствующем уровне (базовом, повышенном, продвинутом):

- теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных, теорию числовых и функциональных рядов, в том числе рядов Фурье и интегралов Фурье, методы теории функций комплексного переменного;
- аналитическую геометрию и линейную алгебру;
- методы исследования основных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики;
- основные понятия и методы дискретной математики;
- основы математической логики;
- методы теории вероятностей и математической статистики;

- методы решения задач оптимизации, теории игр и исследования операций;
- численные методы решения типовых математических задач и уметь применять их при исследовании математических моделей;
- основные тенденции развития современного естествознания, основы математического моделирования и его применения в исследовании социально-экономических, политических и др. процессов общественной жизни современного общества;

3) демонстрировать понимание основных теорем из различных математических курсов и умение их доказывать;

4) уметь проводить доказательства математических утверждений, не аналогичных ранее изученным, но тесно примыкающих к ним;

5) уметь решать математические задачи и проблемы, аналогичные ранее изученным, но более высокого уровня сложности;

6) уметь решать математические задачи и проблемы из различных областей математики, которые требуют некоторой оригинальности мышления; обладать способностью понимать математические проблемы и выявлять их сущность;

7) уметь переводить на математический язык простейшие проблемы, поставленные в терминах других предметных областей, и использовать превосходства этой переформулировки для их решения;

8) уметь формулировать на математическом языке проблемы среднего уровня сложности, поставленные в нематематических терминах, и использовать превосходства этой переформулировки для их решения;

9) знать некоторые языки программирования или программное обеспечение и уметь применять их для решения

математических задач и получения дополнительной информации;

10) демонстрировать способность к абстракции, в том числе умение логически развивать отдельные формальные теории и устанавливать связь между ними;

11) обладать умением читать и анализировать учебную и научную математическую литературу, в том числе и на иностранном языке;

12) уметь представлять математические утверждения и их доказательства, проблемы и их решения ясно и точно в терминах, понятных для профессиональной аудитории, как в письменной, так и устной форме.

Для выпускников вузов по различным группам направлений должен быть сформулирован свой перечень математических компетенций в соответствии с выбранной специальностью и уровнем математической подготовки.

6. Снабдить программы обновленным списком основной и дополнительной грифованной математической литературы.

7. Разработать методические материалы и задания для самостоятельной работы (базовый и повышенный уровни) при подготовке специалистов по различным группам направлений в области математических дисциплин. На основе разработанных программ и методических материалов подготовить ***критерии для оценки уровня компетенций.***

Краткая характеристика проекта сборника программ

Настоящий сборник комплектов программ математических дисциплин предназначен для включения в цикл математических и естественнонаучных дисциплин (М и ЕН) Федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) высшего профессионального образования (ВПО) 3-его поколения. Программы предназначены для подготовки бакалавров. Это накладывает на них определенные особенности, заключающиеся в том, что выпускник должен получить базовое, общее, широкое высшее образование, способствующее дальнейшему развитию личности.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки бакалавров.

Целью математического образования бакалавра является:

- Воспитание достаточно высокой математической культуры;
- Привитие навыков современных видов математического мышления;
- Привитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности.

Воспитание у студентов математической культуры включает в себя ясное понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке бакалавра, выработку представлений о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре, умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений.

Математическое образование бакалавров должно быть широким, общим, то есть достаточно фундаментальным. Фундаментальность математической подготовки включает в себя достаточную общность математических понятий и конструкций, обеспечивающую широкий спектр их применимости, разумную точность формулировок математических свойств изучаемых объектов, логическую строгость изложения математики, опирающуюся на адекватный современный математический язык.

Разработка программ осуществлялась членами Научно методического совета (НМС) по математике Министерства образования РФ на основе многолетнего опыта реализации Основных образовательных программ (ООП) подготовки специалистов в ведущих вузах Москвы, С.-Петербурга и других регионов РФ. Предлагаемые программы неоднократно обсуждались на заседаниях НМС по математике, в том числе выездных, а структура основных дидактических единиц систематически апробировалась в учебных курсах математических дисциплин государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования 2-го поколения. При составлении программ использовались материалы Сборника программ математических дисциплин (разработанные в 2005 г. НМС по математике) и методические материалы по макроанализу ГОС ВПО 2-го поколения (выполненные отделом педагогических измерений Национального Аккредитационного Агентства в сфере образования).

Авторы постарались максимально сохранить реализацию *принципа оптимального сочетания фундаментальности и профессиональной направленности математического образования*, присущего российской высшей школе. С этой целью:

- Там, где это возможно, даны ссылки в «Дополнительной литературе» на учебные пособия и учебники с прикладными (профессиональными) задачами.
- Предполагается, что каждый лектор дает несколько профессиональных задач, иллюстрирующих применение математических методов к их решению.

Трудоемкость предлагаемых программ выражена в зачетных единицах. При этом авторы исходили из распределения общей трудоемкости ООП, как представлено в табл. 1.

В сборнике представлены 6 комплектов программ:

3.1. Программа математических дисциплин в образовательной области «Техника и технология» (УГС 090000 и 200000–230000, а вторая для УГС 200000–230000;

3.2. Программа математических дисциплин в образовательной области «Техника и технология» совместно с образовательной областью «Сельское и рыбное хозяйство» (УГС 110000–190000 и 240000–280000);

3.3. Программа математических дисциплин в образовательной области «Экономика и управление (менеджмент)» (УГС 080000);

3.4. Единая программа математических дисциплин в образовательной области «Естественные науки» (УГС 020000);

3.5. Единая программа математических дисциплин в образовательной области «Гуманитарные и социальные науки» (УГС 030000, 040000 ,060000, 070000, 100000);

3.6. Единая программа математических дисциплин в образовательной области «Здравоохранение» (УГС 060000).

В результате представленная совокупность Программ математических дисциплин охватывает весь Перечень направлений высшего профессионального образования РФ для ФГОС третьего поколения, за исключением образовательной области «Педагогика» (УГС 050000).

Комплекты программ разбиты на две части: базовую и вариативную – с указанием трудоемкости каждой из содержащихся в нем программ математических дисциплин. Комплект снабжен также обновленным списком рекомендуемой литературы в основном с грифом Министерства образования и науки РФ или грифом НМС по математике Министерства образования и науки РФ.

Комплекты программ математических дисциплин

3.1. Программы математических дисциплин в образовательной области «Техника и технология» (УГС 090000 и 200000–230000)

№	Дисциплина	Семестр	Трудоемкость (в зач. ед)
Базовая часть			
1	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	1, 2	5
2	Математический анализ	1–3	12
3	Дифференциальные уравнения	3	3
4	Дискретная математика	2	2
5	Теория вероятностей и математическая статистика	4	5
6	Методы оптимизации	5	2
7	Основы теории функций комплексной переменной	4	3
8	Численные методы	2–4	3
Вариативная часть			
9	Элементы функционального анализа		3
10	Уравнения математической физики		3

3.2. Программа математических дисциплин в образовательных областях «Сельское и рыбное хозяйство» (УГС 110000) и «Техника и технология» (УГС 120000–190000 и 240000–280000)

№	Дисциплина	Семестр	Трудоемкость (в зач.ед)
Базовая часть			22
1	Аналитическая геометрия с элементами линейной алгебры	1–2	4
2	Основы математического анализа	1–2	4
3	Обыкновенные дифференциальные уравнения	2	2
4	Дискретная математика	3	2
5	Теория вероятностей с элементами математической статистики	4	4
6	Численные методы (на базе МАТЛАБ)	3–4	2
Вариативная часть			
1	Методы оптимизации		2

№	Дисциплина	Семестр	Трудоемкость (в зач.ед)
2	Элементы теории функций комплексного переменного		2
3	Уравнения математической физики		2
4	Элементы функционального анализа		2

3.3. Программы математических дисциплин в образовательной области «Экономика и управление (менеджмент)» (УГС 080000)

Принимая во внимание как вариативность реального объема времени, отводимого учебными планами различных социально-экономических и социально-управленческих ВУЗов на изучение математики, так и «существенную ограниченность» такого объема даже в ведущих вузах, ниже в программах подчеркиванием выделены разделы и темы, которые (при углубленном уровне изучения математики – см. выше) необходимо именно изучить, а *курсивом* выделены разделы и темы, которые (при углубленном же уровне изучения математики – см. выше) *допустимо* излагать на уровне *ознакомления*, а не изучения (разделы и темы, указанные обычным шрифтом – без подчеркивания и без курсива, имеют, таким образом, при углубленном уровне изучения математики, статус желательных для изучения, но допустимых и для простого ознакомления).

Приведенные ниже программы охватывают разделы математики, обеспечивающие в настоящее время ставший уже традиционным современный инструментарий для экономической и менеджериальной проблематики. Изучение студентами указанных разделов в формате шести соответствующих учебных дисциплин является вполне оправданным при углубленном уровне изучения математики (до 800 академических часов общей трудоемкости).

При продвинутом уровне изучения математики (до 600 академических часов общей трудоемкости) возможно укрупнение учебных дисциплин, например, включение п. 4 («Основы теории обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений») в состав п.1 («Основы дифференциального и интегрального исчисления»), распределение содержания п. 3 («Элементы дискретной математики») между п.п. 2, 5, 6. Таким образом, при продвинутом уровне изучения математики студенты могут изучать четыре учебных дисциплины: «Основы дифференциального и интегрального исчисления», «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии», «Вероятность с элементами математической статистики и анализа данных», «Оптимизация и основы теории принятия решений».

При базовом уровне изучении математики (до 400 часов общей трудоемкости) возможно дальнейшее укрупнение учебных дисциплин до следующих трех дисциплин: «Алгебра и анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Методы оптимизации».

№	Дисциплина	Семестр	Трудоемкость (в зач.ед)
	Базовая часть	1–4	22
1	Основы математического анализа	1–2	5,5
2	Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии	1	3
3	Элементы дискретной математики	2	2
4	Основы теории обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений	3	2
5	Теория вероятностей с элементами математической статистики и анализа данных	3–4	5,5
6	Оптимизация и основы теории принятия решений	4	4
	Вариативная часть		
	Дополнительные главы математического анализа		2
	Дополнительные главы линейной алгебры и матричного анализа		2
	Дополнительные главы дискретного анализа		2
	Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления		1
	Элементы теории функций комплексной переменной		1
	Численный анализ		1
	Дополнительные главы стохастического анализа		1
	Дополнительные главы математической статистики и анализа данных		1

№	Дисциплина	Семестр	Трудоемкость (в зач.ед)
	Дополнительные главы оптимизации и теории принятия решений		1
	Математическое моделирование макроэкономических процессов		1
	Математические модели в микроэкономике		1
	Стохастический анализ в финансах		1
	Математические модели эконометрики		1
	Управление инвестиционными, проектными и финансовыми рисками		1
	Математические модели и методы анализа социологических данных		1
	Аналитика маркетинговых исследований		1
	Исследование систем управления и разработка управленческих решений в менеджменте		1
	Имитационное моделирование экономических и менеджериальных процессов и систем		1
	Системная аналитика принятия решений		1

3.4. Единая программа математических дисциплин в образовательной области «Естественные науки» (УГС 020000)

№	Дисциплина	Семестр	Трудоемкость (в зач.ед)
Базовая часть		1–2	16
1	Аналитическая геометрия с элементами линейной алгебры	1–2	6
2	Основы математического анализа	1–2	8
3	Дифференциальные уравнения	2	2
Вариативная часть			
	Элементы теории вероятностей		2
	Прикладная математическая статистика		2
	Уравнения математической физики		2
	Элементы теории функций комплексной переменной		2
	Интегральные преобразования		2
	Методы оптимизации		2

3.5. Программы математических дисциплин в образовательной области «Гуманитарные и социальные науки» (УГС 030000, 040000 ,060000, 070000, 100000)

№	Дисциплина	Семестр	Трудоемкость (в зач.ед)
	Базовая часть	1	3
1	Математика	1	3
	Вариативная часть		
	Алгебра и геометрия		1
	Математический анализ		1

3.6 Единая программа в образовательной области «Здравоохранение» (УГС 060101-060114)

№	Дисциплина	Семестр	Трудоемкость (в зач.ед)
	Базовая часть		
	Математика	1	4
	Вариативная часть		
	Основы высшей математики и статистики	1–2	8

Примечание. «Основы высшей математики и статистики» изучаются в вузах, дающих углубленную математическую подготовку (определяет вуз).

Предложенный Проект Сборника программ по математике обсуждался на заседании НМС по математике 22 декабря 2008 г. Подробные программы по различным разделам математики, одобренные НМС по математике и авторские программы для отдельных направлений ООП помещены на сайте НМС и открыты для широкого обсуждения.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СОЦИОКУЛЬТУРНОЙ СРЕДЫ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ И ЗАРУБЕЖНЫХ ВУЗОВ КАК ОСНОВЫ ВОСПИТАНИЯ И СОЦИАЛИЗАЦИИ СТУДЕНТОВ

В.С. Сенашенко
профессор Российского университета дружбы народов
Г.Ф. Ткач
доцент Российского университета дружбы народов
Е.А. Конькова
аспирант Российского университета дружбы народов

Введение

Формирование социокультурной среды вуза как эффективного средства воспитания и социализации студентов является одной из сложнейших организационно-педагогических проблем дальнейшего развития высшей школы. Социокультурная среда вуза — это основа для создания единого культурно-образовательного, информационного и научного пространства, играющая определяющую роль в воспитании студентов и становлении молодого специалиста, инструмент формирования идеалов, нравственных норм и духовных ценностей, сохранения традиций подготовки специалистов с гражданской и нравственной позицией.

Целью настоящей работы является проведение сравнительного анализа социокультурной среды отечественных и зарубежных вузов как основы воспитания и социализации студентов.

Студенты, находящиеся длительное время в вузовской социокультурной среде, приобретают новые качества и свойства, которыми ранее они не обладали. За годы студенческой жизни происходит не только формирование специалиста, но и становление человеческой личности. Ключевой задачей современного вуза становится воспитание у студентов устойчивого профессионального интереса, стремления к углублению и накоплению знаний, обеспечение развития личностных способностей каждого обучающегося.

Проблемы воспитания студентов в отечественных вузах

Отечественная высшая школа традиционно рассматривает образование как целенаправленный процесс обучения и воспитания в интересах человека, общества и государства. Это положение нашло отражение в преамбуле к закону РФ «Об образовании». В соответствии с ФГОС ВПО общей целью основных образовательных программ высшей школы в области воспитания становится формирование у студентов социально-личностных и общекультурных качеств, развитие общенаучных, инструментальных и профессиональных компетенций. Речь идет о повышении воспитательного потенциала учебных дисциплин как составной части сложнейшей проблемы формирования социально-воспитательной среды вуза, генерирующей атмосферу взаимодействия и сотрудничества преподавателей и студентов, как в учебной, так и во внеучебной деятельности.

Молодежная политика любого вуза, разрабатываемая на основе общих целевых установок и принципов, которые определяются государством, всегда реализуется с учетом его миссии и уровня развития социокультурной среды вуза. Оптимальное сочетание общегосударственного и вузовского подходов при формировании и проведении молодежной политики является одним из непременных условий её эффективности. В свою очередь, возможности каждого из этих подходов находятся в жесткой зависимости от общего состояния культуры, морально-нравственной атмосферы и социально-экономической ситуации в стране, социокультурной среды региона, в котором находится тот или иной вуз.

Таким образом, эффективность воспитательного воздействия социокультурной среды вуза ограничена совокупностью внешних разнородных факторов, которые, как правило, не поддаются непосредственному регулированию, более того, не всегда возможна их однозначная идентификация. Решению такой масштабной задачи следует предпослать анализ работы вузов по формированию внутривузовской социокультурной среды, включая становление и развитие студенческого самоуправления, создание системы социокультурного досуга и воспитания студенческой молодежи. При этом необходимо иметь в виду, что в молодежной политике следует отдавать приоритет гибким моделям и формам, позволяющим учитывать интересы и предпочтения студентов, развивать их инициативу и максимально способствовать расширению студенческого самоуправления.

Организация студенческой жизни в ведущих развитых странах

Проблемы организации студенческой жизни занимают ведущее место в общей проблематике развития высшего образования в развитых странах. Этим вопросам уделяется огромное внимание, как в отдельных странах, где они рассматриваются в общем контексте проблем повышения качества образования, трудоустройства выпускников и социальной стабильности, так и на уровне региональных объединений, для которых, без оптимального решения жизненно важных проблем студенчества, невозможно достижение интеграционных целей не только в области высшего образования, но и всего социально-экономического развития отдельных регионов.

Анализ принципов и организационных форм молодёжной политики в ряде зарубежных стран свидетельствует об отсутствии единых образцов её построения и о существенных различиях, которые во многом обусловлены характерными для отдельных стран традициями организации в вузах учебного процесса и студенческой жизни. Обобщая полученные при проведении данного анализа результаты, можно выделить две основные тенденции, во многом связанные с различиями в формальном и неформальном статусе высших учебных заведений в разных странах и в статусе самих студентов.

Авторы зарубежных и отечественных публикаций, как правило, затрагивают проблематику организации студенческой жизни с точки зрения исследования её политологических последствий или психолого-педагогических аспектов, и весьма редко рассматривают конкретные формы организации студенческой жизни, её содержание и финансирование. Большую ценность в этой связи представляют материалы международных конференций, на которых представители государственных учреждений, ответственных за организацию жизни студенчества, и представители самих студенческих организаций ведущих развитых стран обмениваются опытом решения своих проблем. Среди подобных международных конференций особое место занимает состоявшийся 16–18 апреля 2005 года в Париже Коллоквиум по случаю 50-летия организаций студенческого движения во Франции (CROUS – CNOUS) [1] .

На этом форуме присутствовали студенческие делегации и руководители соответствующих подразделений систем высшего образования многих стран, которые участвовали в обсуждении общих проблем студенческой жизни. Материалы данного коллоквиума, а также состоявшегося в апреле 2009 года в Свободном университете Брюсселя (Бельгия) аналогичного форума по проблемам студенческой жизни были использованы при анализе ситуации в отдельных странах.

По общему мнению представителей студенческих организаций европейских стран, организация студенческой жизни и помощи студентам является составной частью процесса модернизации университетских систем в Европе и, следовательно, представляет собой одно из стратегических направлений их дальнейшего развития. Именно качество организации студенческой жизни может послужить основой, на которой базируется политика привлекательности европейских университетов, как одно из основных направлений формирования Европейского пространства высшего образования, которое, наряду с вопросами оплаты обучения, составляет содержание социального аспекта Болонского процесса.

Организация студенческой жизни и социокультурной среды вузов – это центральный элемент проектов университетской модернизации, условие достижения многих целей университетского развития. Она включает следующие элементы [1]:

- максимально свободный доступ молодежи к обучению в условиях равенства возможностей и социальной помощи;
- борьба с дискриминацией молодёжи по любому признаку;
- психологическое, материальное и педагогическое сопровождение тех студентов, которые в этом нуждаются;
- деятельность по информированию и воспитанию студентов;
- преодоление финансовых трудностей не только при поступлении в вуз, но и возникающих в ходе обучения, включая помощь в размещении студентов и в создании необходимых материальных условий;
- помощь при осуществлении программ академической мобильности.

Улучшение «социального измерения», качества студенческой жизни и её сопровождения во многих странах становится важнейшей составляющей образовательной политики. Как указывает президент французского Совета по развитию международной мобильности Е. Коэн, «несмотря на определенные различия, большинство стран имеют общие проблемы в реализации этой задачи». Это обусловлено, во-первых, тем, что системы образования всех стран находятся в состоянии реформирования: преобразуются системы дипломов, способы оценки результатов обучения, виды помощи студентам и службы, её оказывающие. Во-вторых, для всех стран характерно наличие общих вызовов, на которые должны ответить все системы высшего образования. Это, прежде всего, состояние общей нестабильности, изменения демографической, экономической и социальной ситуации.

Что касается организаций, непосредственно занимающихся социокультурной работой со студентами, то в зарубежных странах функционируют три основные модели таких организаций, которые в отельных странах существуют одновременно:

- публичное учреждение, обладающее автономией по отношению к вузу (французская, немецкая, японская модели);
- частные некоммерческие организации, играющие роль организаторов деятельности и оплаты соответствующих служб (система Фондов в Норвегии);
- сами университеты, управляющие всей помощью студентам и предоставляющие её в виде «социального пакета».

В каждой стране организация студенческой жизни имеет свою особенную историю, с которой связаны ее специфические черты и статус. Анализ развитых стран показывает, что, как правило, страны продолжают придерживаться национальной модели, сохраняя определенную историческую преемственность и следуя традициям. Ниже рассмотрим наиболее характерные примеры организации социокультурной среды в высших учебных заведениях различных развитых стран.

Организация работы студенческих служб в Германии

Студенческие службы Studentenwerk (SW), занимающиеся работой со студентами, появились в Германии после первой мировой войны по инициативе студентов крупных университетов. В настоящее время 61 служба предлагает услуги более чем 2 млн студентов, обучающихся в 300 высших учебных заведениях 180 университетских городов страны [2]. Каждая служба SW организует социокультурную работу в университетах определенного региона, что способствует её экономической эффективности.

Службы SW созданы на основе нормативных актов региональных (земельных) парламентов и правительств и обладают правовым статусом публично-правового учреждения. С одной стороны, такой статус подчеркивает тот факт, что службы делят ответственность за выполнение своих задач с государством, а, с другой стороны, этот статус является необходимым условием для осуществления их экономической деятельности. Службы SW оказывают услуги студентам в решении вопросов проживания, питания. Услуги предназначены для всего контингента студентов, принимая во внимание потребности разнородных групп студенчества и учитывая особые проблемы студентов-инвалидов, больных-хроников, иностранных студентов и студентов, имеющих детей.

Главной целью работы служб объявляется предоставление всем студентам одинаковых возможностей доступа и достижение успеха в высшем образовании путем сопровождения их в каждодневной жизни. Предлагая свои услуги, службы SW вносят вклад в эффективность обучения и в формирование профиля университета. В национальном масштабе все региональные службы SW объединены в единый национальный центр Deutsch Studentenwerk (DSW), координирующий их работу. Партнерами DSW являются представители различных социальных групп, в том числе представители государства, регионов, университетов, студенческих ассоциаций, ассоциаций, действующих внутри высшего образования, работодателей, профсоюзов, политических партий и членов немецкого парламента.

В составе всех отделений служб SW насчитывается около 16 000 сотрудников. Общепризнано, что, занимаясь организацией социокультурной среды студенчества, службы SW выполняют общественную миссию. Поэтому они получают дотации или финансовую помощь от регионов, что составляет примерно 15% их бюджета. Около 6% дают субсидии федерального правительства, которые предназначены для администрации публичной системы учебных стипендий Bafuk, являющейся составной частью DSW. Более 63% бюджета служб SW составляют доходы от университетских столовых и кафе, а также университетских общежитий. Около 12% бюджета служб SW покрывается в результате участия студентов; этот вклад не является прямым взносом, а вычитается из общего вступительного взноса каждого студента, что составляет в среднем 40 евро за семестр на каждого студента.

Службы SW располагают примерно 180 000 помещениями, большая часть которых является индивидуальными комнатами для проживания студентов. Кроме того, 50 000 помещений предоставляются студентам другими организациями, например, католическими или протестантскими миссиями. В настоящий момент только 12% немецких студентов проживают в студенческих общежитиях. В зависимости от размеров и благоустроенности помещения плата за проживание составляет от 140 до 250 евро в месяц, что в среднем составляет 169,32 евро за помещение. При этом 75% помещений имеют доступ в интернет, большая часть общежитий располагает помещениями для инвалидов, а также для студентов, имеющих детей. По данным DSW в Германии на настоящий момент в студенческих общежитиях не хватает 20 000 мест и требуется их диверсификация с учётом особенностей групп студентов, всё в больших масштабах прибывающих из зарубежных стран.

Студенческие столовые имеются в 180 университетских городках Германии. В целом на федеральном уровне функционируют 700 студенческих столовых на 20 000 мест. Вопрос цены студенческих обедов решает каждая служба SW в отдельности. Многие службы SW заключили контракты с поставщиками и установили систему контроля качества продуктов.

Службы SW занимаются также вопросами публичной системы учебных стипендий BAFUK. По этой системе студенты имеют право получать стипендию от государства, если доходы семей недостаточны для финансирования их образования. Половина суммы предоставляется в качестве стипендии, а другая половина – в виде дара (present interet). Более 330 000 из 2 млн студентов в Германии получают сегодня такие стипендии. Известно, что при обучении внутри Европейского Сообщества студенческая стипендия выдается вплоть до получения иностранного диплома, если студент, пройдя год подготовки в своей стране, продолжил обучение за границей, т.е. студент может покинуть свою страну после года обучения и продолжать при этом получать стипендию за счёт Германии.

Важным направлением деятельности служб SW является проведение социокультурной и воспитательной работы среди студентов. В них для поддержки самостоятельного развития студентов и помощи им в трудных ситуациях имеются специализированные консультационные службы: 39 из них предлагают психологическую поддержку, 42 – дают рекомендации по социальным вопросам, 28 оказывают содействие и дают рекомендации по мерам социальной поддержки студентам-инвалидам и больным студентам-хроникам. Кроме того, в 29 службах SW имеются юридические консультации для студентов.

Продуманная и чётко отлаженная организация студенческой жизни в ФРГ положительно сказывается на привлекательности немецких университетов для иностранных студентов, которая продолжает возрастать. За последние 10 лет число иностранных студентов в Германии практически удвоилось. В 2002/2003 уч. году в стране обучались 227 000 иностранных студентов, что составляло 11,7% от общего числа студентов в вузах Германии. Из них 30,5% приехали учиться из стран Западной Европы, а 30% составляли студенты из стран Азии. Своей деятельностью службы

SW вносят важный вклад в процесс интернационализации университетов. Они предлагают иностранным студентам специальные пособия и услуги. Так, 40 служб SW дают иностранным студентам базовые пособия, включающие оплату расходов на поселение, прием, талоны на питание, что составляет от 205 до 375 евро в месяц.

Кроме того, в 50 службах SW иностранным студентам предлагаются услуги, называемые программой тьюторства (programme de tuteurs). Немецкие студенты-тьюторы вносят вклад в интеграцию студентов-иностранцев в новые для них условия и помогают им преодолеть трудности, связанные с общежитием и каждодневной жизнью.

Чтобы поддержать деятельность региональных служб SW, в 2002 г. была открыта общенациональная Служба межкультурной компетенции, финансируемая Федеральным министерством образования и исследований. Целью этой службы было расширить знание и понимание сотрудниками SW межкультурных проблем, связанных с обучением иностранных студентов и с их адаптацией к новой социокультурной среде.

Следует отметить, что вопросы размещения иностранных студентов не входят в компетенцию сети служб SW, ими занимается Немецкое бюро университетских обменов (Deutscher Akademischer Austauschdienst – DAAD). DAAD финансируется непосредственно Федеральным Министерством иностранных дел и Федеральным министерством образования и исследований. Однако в большинстве регионов именно службы SW создают условия для реализации культурных инициатив, в том числе иностранных студентов. Они предоставляют залы и техническое оборудование в распоряжение студентов, субсидируют культурные проекты и предлагают различные дополнительные курсы. Формы этой поддержки весьма различаются в разных службах SW.

Национальный центр DSW регулярно проводит важные мероприятия в общегосударственном масштабе. Прежде всего, в течение последних 50 лет DSW публикует результаты социального анкетирования, которые служат основой для принятия многих решений в политической жизни и в области высшего образования. Это анкетирование по экономической и социальной ситуации в образовании служит основой государственной политики в данной области. Например, в мае 2005 г. доклад об интернационализации образования был представлен как результат совместной работы Федерального министерства образования и исследований и DSW.

В декабре 2004 г. Генеральная ассамблея служб SW приняла решение об обеспечении качества своей работы за счёт установления одинаковых стандартов качества для всех служб студенческой жизни в сети служб SW. За истекший период решения Ассамблеи были конкретизированы и проводятся в жизнь. В этой связи национальный центр DSW занимается постоянной подготовкой кадров для сети региональных служб SW. Для повышения квалификации и профессионализации сотрудников сети ежегодно проводится около 60 семинаров и конференций.

В настоящее время наиболее острые дискуссии среди студентов и в академическом сообществе в Германии, в которых активно участвуют службы SW, ведутся по двум основным вопросам. Первый касается введения платы за обучение, второй – последствий преобразований, осуществляемых в ходе Болонского процесса.

По мнению Конституционного совета ФРГ, правомерность введения платы за обучение в вузах находится в зависимости от выполнения двух условий: обеспечение регионами гарантий равенства шансов на получение качественного образования и соблюдение принципа социального государства, который провозглашён на законодательном уровне в основном законе страны.

Конституционный совет, однако, позволяет федеральным властям вмешиваться в вопросы введения платы за обучение с тем, чтобы установить единообразный регламент, исключающий нарушение равенство условий жизни студентов (требование сохранения юридического и экономического единства в Германии). Речь идёт о введении платы в 500 евро за семестр. Несмотря на то, что земли с консервативными правительствами высказываются за введение этой платы, позиция DSW состоит в поддержании системы Bafuk, т.е. системы финансовой поддержки студентов, поскольку введение платы за обучение усилит социальное расслоение студентов. По крайней мере, те, кто получает стипендии Bafuk, а это студенты из менее обеспеченных семей, по мнению DSW, должны быть освобождены от платы за обучение. DSW также озабочен положением студентов из семей среднего класса, которые не всегда располагают достаточными средствами для обучения своих детей в вузе и в то же время не имеют прав на субсидию со стороны государства.

Социальная помощь зависит от доходов родителей, но имеет верхний предел. Если годовой доход семьи не превышает 500 000 евро, то помощь может составлять от 585 евро в месяц до 32 000 евро в целом на весь курс обучения. Эти параметры одинаковы для всех студентов во всех регионах, т.к. эта финансовая помощь предоставляется от имени федерального правительства. Однако фактически она формируется совместно из бюджета федерального правительства и бюджета земель.

Особым вопросом, дискутируемым в Германии в настоящий момент, является сотрудничество и взаимодействие служб SW с университетами. В частности был проведен конгресс, на котором некоторые представители университетов предложили интегрировать социальную и экономическую инфраструктуру студенческой жизни в университеты. Но в стране имеется 61 служба SW и 300 университетов. Если бы произошла интеграция, то это увеличило бы расходы на инфраструктуру и были бы нарушены единые подходы и стандарты организации студенческой жизни, достаточно успешно действующие в настоящее время. Поэтому система служб

SW продолжает функционировать по прежней схеме, но постепенно налаживается сотрудничество с университетами. В административные советы служб SW входят представители университетов. Это имеет большое значение для улучшения координации деятельности служб SW и усилий университетов по организации студенческой жизни. Однако участие университетов недостаточно для решения коренных проблем студенчества, которые имеют экономический характер. В этом отношении успешность деятельности рассмотренных выше студенческих служб в значительной степени зависят от общей экономической ситуации в стране.

Организация студенческой жизни во Франции

Из всех стран Западной Европы Франция обладает наиболее развитой, наиболее структурированной, формализованной и институционализованной службой организации студенческой жизни и поддержки студентов. Ее осуществляют 28 Региональных Центров Студенческих и Школьных Служб (CROUS), руководимых Национальным Центром Студенческих и Школьных Служб (CNOUS)[8].

История CROUS начинается еще в 1904–1905 гг., когда были созданы первые столовые для малообеспеченных студентов. В 1907 г. студенчество начинает структурироваться вокруг студенческих профсоюзов. Тогда во Франции было около 40 000 студентов, из них 16 000 в Париже. В настоящее время во многих университетах обучаются сопоставимые контингенты студентов. После войны 1914–1918 гг. студенты-ветераны принимают решение совместно бороться против экономических трудностей, которые могли вынудить многих их товарищей бросить учебу, и объединяются в Ассоциацию студентов. При её участии в большинстве университетов создаются университетские столовые, и вскоре Парламент включает в бюджет кредит на субсидирование Ассоциации студентов. В 1930 г. решением правительства создается Управляющая комиссия (Comission Directeur), рассматривающая распределение этой помощи. Дальнейший импульс развитию во Франции структур, занимающихся проблемами студенчества, даёт принятие в 1946 г. Гренобльской Хартии студенческих профсоюзов, в которой были сформулированы требования о предоставлении студентам права на особую социальную поддержку в физическом, интеллектуальном и моральном плане, право на труд и отдых в благоприятных условиях и материальной независимости как личной, так и социальной, гарантированной свободным исполнением профсоюзных прав. В Хартии, наряду с определением основных обязанностей, было декларировано право студентов «на поиск истины и свободу этого поиска, что является первым условием для молодого интеллектуала». Под воздействием общественного резонанса, вызванного принятием Гренобльской Хартии, правительство в 1946 г. учреждает Высший комитет поддержки студентов и создаёт Региональные центры. Это означало институциональное оформление единой общенациональной сети региональных центров (CROUS), которые начинают функционировать под управлением организации, которая вскоре станет Национальным центром (CNOUS). В 1947 г. в напряженной политической обстановке создается Национальный центр помощи университетской молодежи. С 1949 по 1955 г. продолжалась ожесточенная дискуссия об альтернативах: нужна ли организация в формате публичной Службы по формуле Ассоциаций закона 1901 г. или в необычном для Франции формате Фонда?

За это время поддержка студенческим ассоциациям со стороны государства эволюционировала от чисто эпизодических мер помощи к стабильной структуре специализированного публичного учреждения с чётко установленными функциями.

16 апреля 1955 г. был принят закон о создании CNOUS и CROUS, и тем самым были закреплены правовые основы функционирования оригинальной системы, наследующей черты ассоциаций. Были созданы публичные нацио-

нальные студенческие учреждения, область действия каждого из которых соответствовала территории одной Академии (учебного округа), и все они были подчинены другому публичному учреждению, область действия которого распространялась на всю страну. Для состава руководящих органов этих учреждений законодатели установили асимметричный паритет, что было предусмотрено изначально: и представители студенческой администрации и выборные представители от студентов присутствуют в этих органах, но первые из них в преобладающем числе. Так, в настоящее время в Административном совете CNOUS из 24 членов 7 являются выборными представителями студенчества.

Принятая структура публичного учреждения позволяет четко устанавливать все расходные статьи, поскольку все они отражаются в бюджете CNOUS. Эта эффективная управленческая схема, действующая с самого начала, в настоящее время упрочилась благодаря сетевому взаимодействию посредством Интернета и коллективных солидарных действий директоров региональных центров CROUS. С одной стороны это структура, объединяющая студенческие профсоюзы на условиях ассоциации, и, с другой – это централизованная организация со студенческой администрацией в рамках Административных советов. Таким образом, сеть представляет собой публичное учреждение CNOUS общенационального уровня и 28 учреждений под его контролем, консолидированный бюджет которых составляет около 940 млн евро. В нём работают около 12 000 сотрудников, и его функционирование на две трети обеспечивается за счёт собственных ресурсов.

Головная организация сети исполняет следующие миссии:

- обеспечение соблюдения прав студентов, к какому бы учебному округу они не относились;
- управление сетью, т.е. деятельностью, регулированием, инициативами и координацией действий CROUS.

Региональные центры CROUS – это 150000 собственных жилых помещений, 800 пунктов питания, 515 000 стипендий, 50 000 других жилых помещений, предлагаемых студентам частными арендодателями. Объем стипендий составляет 1,3 млрд евро, что соответствует 1 млн рассматриваемых ежегодно досье. В последнее время появился также Фонд Солидарности с бюджетом в 6 млн евро. Центры CROUS сопровождают всех иностранных студентов, независимо от того, на каких условиях они поступили в вуз. Они также занимаются доверенными им иностранными студентами и помогают им освоиться в педагогическом, социальном и культурном плане.

В региональных центрах CROUS работают 2700 постоянных сотрудников и 8800 рабочего персонала по контракту. Главной задачей их деятельности является социальная помощь студентам с тем, чтобы уравнять шансы и демократизировать высшее образование. Эта необходимость демократизации постоянно отмечается руководством национального образования, поскольку она является тем, что составляет «республиканскую основу данной системы».

Центры CROUS осуществляют помощь прямым и опосредованным способами. Они помогают в размещении студентов, что, как показывают опросы, является одним из ключевых факторов успеха студентов, Содействие в размещении оказывалось с самого начала работы центров, хотя центры CROUS не обязаны поселять всех студентов. Они также гарантируют справедливое отношение и поддержку студентам на всей территории страны, благодаря координации с головной организацией.

С 1985 по 1993 г. резко возросло число помещений для студентов (от 100 000 до 150 000), что было связано со строительством новых и недорогих зданий для массового проживания. В 1993 г. распределение стипендий перешло от университетской администрации к центрам CROUS, что было первым шагом к созданию «единого окна» для студента, для составления и ведения его социального досье. Важным событием стало также учреждение поста Вице-президентства CROUS в 1997 г., резервируемого для представителя студентов.

В настоящее время в вузах Франции обучается около 2,5 млн студентов, из которых 10% составляют иностранцы. Помощь студентам со стороны государства имеет различную форму, она может поступать от Министерства образования, Министерства жилищного фонда, Министерства финансов, а также от местных властей.

Что касается прямой помощи студентам, то это помощь в съеме социального жилья или в его оплате. На эти цели расходуется 1 млрд 86 млн евро в год от Министерства жилого фонда. В целом затраты на стипендии составляют 1 млрд 292 млн евро, при этом прямая университетская помощь – 295 млн евро. Вклад в финансирование режима социального страхования студентов – 436 млн евро. Налоговые льготы, предоставляемые государством, составляют 1 млрд 272 млн евро.

Таким образом, французская система помощи студентам опирается на существенную долю государственного участия. Если в 1995 г. она составляла 3 млрд 130 млн евро, то к 2005 году она выросла до 4 млрд 18 млн евро. При этом соотношение между налоговыми льготами и прямой помощью составляет 1 : 2.

В настоящее время система CNOUS стремится повысить эффективность своей деятельности за счёт двух факторов: упрощение формальных процедур в результате использования модернизированной информационной системы и широкое привлечение творческой инициативы персонала и представителей студенчества.

По мнению работников CROUS, система помощи студентам должна стать частью социально-экономической инфраструктуры каждого города, в котором есть вузы. Она должна соответствовать проектам развития как города, так и самих вузов. Объединение публичных учреждений в сеть приносит дополнительный успех, когда Административные советы, осуществляющие стратегическое руководство, сотрудничают со студенческими Вице-президентами, активными администраторами. Вся эта система гибко реагирует на законодательные изменения и ожидания студентов [8].

Система фондов как основная структура поддержки студентов в Норвегии

Совет норвежских Фондов обслуживания студентов (Studentesamskipnaden) является главной организацией, предоставляющей услуги студентам. В него входят 25 независимых организаций, которые обслуживают 200 000 студентов. Каждая организация предоставляет услуги студентам университетов определенного района страны. Эти организации созданы и управляются как Фонды. Представители студентов играют роль собственников Фонда, что соответствует базовому принципу одновременного участия пользователей и учредителей служб [5].

Формально эти Фонды не связаны с учреждениями высшего образования. Однако представители вузов находятся в административном Совете Фондов, следовательно, вузы тесно сотрудничают с Фондами. Базовые услуги, предоставляемые Фондами, включают обеспечение жильём, кафетерии, библиотеки, спортивные ассоциации, детские сады, а также различные службы поддержки, консультации советников, медицинские центры и службы социальной помощи. Главными источниками финансирования являются оплата услуг, плата за обучение, государственная поддержка и коммерческая деятельность.

Система начала складываться в 1930-х годах. Первый Фонд был создан Университетом Осло в рамках закона 1939 года. В это время студенческие ассоциации боролись с экономическими трудностями. В конце 1940-х годов правительство решило, что Фонд, созданный в Осло, является столь успешным, что его модель надо распространить на другие университеты и другие регионы.

Если вначале Фонд был рассчитан на 4 000 студентов, то теперь существует 25 Фондов, обслуживающих 200 000 студентов. Управление Фондами демократизируется. Начиная с 60–70 годов XX века деятельность Фондов часто оказывается в центре внимания общественности, благодаря чему спектр услуг был существенно расширен. Различные политические группы предлагали свои программы для Фондов, при этом потребности студентов росли и продолжают расти. Работа Фондов направлена, в первую очередь, на удовлетворение потребностей студентов, являющихся пользователями и потребителями.

Что касается финансирования Фондов, то вначале государство было главным вкладчиком в экономику Фондов, и это происходило через прямые дотации. Другим источником была плата за обучение. С увеличением числа студентов расходы Фондов росли, но уже в 1990-е годы финансирование со стороны государства перестало увеличиваться. При этом Фонды стремились расширить ассортимент и увеличить объем оказываемых услуг. Выходом стало расширение коммерческой деятельности: были открыты книжные магазины в кампусах, бакалейные магазины и даже агентства путешествий. Целью было обеспечить студентов дешевыми услугами и одновременно получить доход, который мог бы быть использован для других видов деятельности Фондов.

В настоящее время в 25 Фондах Норвегии работают 2000 сотрудников. Фонды располагают 20 000 жилых помещений для 30 000 студентов. В 2003 г. помощь, полученная от правительства в прямой и непрямой форме, составляла 50 000 евро на одного студента в год. Большая часть Фондов располагает детскими садами и яслями. В коммерческой деятельности Фондов существует конкуренция.

Государство не дает прямых субсидий студенческим кафетериям и столовым, но все виды деятельности Фондов субсидируются государством косвенным образом, поскольку

Фонды не платят арендную плату за помещения, которые они используют.

В Фондах имеется ряд собственных медицинских служб, но большинство студентов использует другие формы медицинского обслуживания, с последующей оплатой за счет Фонда. Существует также службы ориентации и информации студентов, услуги психологической помощи, службы социальной активности.

В настоящее время в Норвегии Министерство образования осуществляет реформу высшего образования, предпринятую в связи с участием страны в Болонском процессе. Одной из целей преобразований является установление более тесной связи студентов с преподавателями. Например, экзамен по окончании учебного года заменяется результатами постоянного контроля в течение каждого семестра. Вводится больше учебных курсов, обязательных для посещения. Таким образом, студенты больше времени проводят в кампусе и нуждаются в большем объеме услуг.

Другим изменением является снижение правительственного финансирования. Раньше строительство жилья для студентов было составной частью государственной образовательной политики. Теперь такое строительство ограничено. Фондам приходится изыскивать новые финансовые возможности. Например, допускать в спортивные центры пользователей, не являющихся студентами, но за большую арендную плату.

В настоящее время плата студентов за обучение составляет от 60 до 80 евро в месяц. Представители студентов считают, что если плата будет увеличиваться, то это поставит студентов в трудное положение.

В высших учебных заведениях Норвегии обучается около 10 000 иностранных студентов, большая часть которых учится в трех главных университетах в Осло. В то же время более 23 000 норвежских студентов учится за границей. Иностранные студенты имеют такой же доступ к услугам Фондов, как норвежские.

Норвежские студенты получают на обучение ссуду из Национального фонда ссуд, максимальная суммарная величина которой составляет 9 750 евро. Для студентов, которым не могут помогать родители, 40% этой суммы предоставляется как стипендия, которую они не обязаны возвращать. Первый возврат ссуды должен произойти не позднее 7 месяцев после получения диплома, и в дальнейшем возврат должен совершаться 4 раза в год. Фонды также финансируют культурные проекты с участием студентов, если они не имеют политического характера.

Что касается участия студентов в управлении Фондами, то следует учесть, что Фонды были учреждены законом и этот закон предусматривает, что при желании студентов они могут составлять большинство в Административном совете Фонда и даже в его президиуме. Поскольку речь идет о Фонде, то формально собственник отсутствует, и если кто-то и должен принять на себя управление, то это должны быть студенты. Таким образом, именно студенты решают, что должен делать Фонд и что будет обсуждаться на Административном совете, поскольку они составляют большинство. Таково положение дел во всех 25 Фондах, начиная с их создания в 1939 г.

В большинстве случаев студенты остаются в университете 5-6 лет и поэтому могут состоять в Административном совете 2–3 года.

Для управления Фондами студенческие ассоциации выбирают своих представителей в Административный совет. Это происходит внутри каждого университета, поскольку речь идет о местном управлении. Количество выборных лиц зависит от размера вуза. Большая часть избранных студентов и, прежде всего, президент Административного совета имеют право пропустить один год обучения и в дальнейшем продолжить учебу. При этом их деятельность в структурах

Фонда засчитывается как общественно-полезная деятельность.

Работа со студентами в США

В Соединенных Штатах Америки работой со студентами занимается Национальная ассоциация административного персонала по студенческим делам (NASPA – Association National des Personnels Administratifs des Affaires etudiantes) [3].

В конце XIX и начале XX веков роль морального авторитета в американских университетах перешла от президентов университетов к новым лицам: деканам для мужчин (dean of men) и деканам для женщин (dean of women). Последняя должность была создана для поддержки и защиты прав женщин-студенток, которые могли подвергаться дискриминации вследствие того, что они обучаются в учреждении, управляемом мужчинами.

До первой половины XX в. студенческие службы оставались отделенными от критериев пола и расы. В дальнейшем особенности, связанные с этими критериями, стали учитываться во вновь создаваемых профессиональных организациях.

Начиная с 1951 г. символ NASPA начал использоваться для обозначения главной организации, объединяющей администраторов-мужчин, занимающихся содействием студентам. В 1961 г. был создан и женский эквивалент этой структуры. В последствии эти две должности были объединены и заменены должностью вице-президента университета по делам студентов.

В настоящее время NASPA – организация, представляющая всех административных работников вузов, занимающихся работой со студентами. Эта организация формально не имеет полномочий для принятия решений по поводу того, что происходит в кампусах в отдельных штатах или над осуществлением контроля за организацией студенческой жизни. Она представляет собой просто сеть, членами которой становятся добровольно. Несмотря на неформальный характер, NASPA является весьма влиятельной организацией, и её мнение всегда учитывается как на уровне штатов, так и на уровне федерального правительства при решении вопросов, относящихся к сфере высшего образования и особенно вопросов, непосредственно затрагивающих условия жизни и интересы студентов.

Как известно, образование в США (за исключением военных учебных заведений) находится в ведении не центральной власти, а в ведении властей штатов. Из 4000 американских высших учебных заведений примерно половина финансируется штатами, а другая половина является частными учебными заведениями. Различные многочисленные службы помощи студентам прикомандированы в каждом университете к администрации ректората или деканата и обычно взаимодействуют с ней независимым образом. Поэтому схемы этих организаций могут быть похожими, но редко идентичны друг другу, что делает затруднительным их сравнительный анализ. В большей части университетов отдельные профессиональные ассоциации, связанные с различными бюро, вместе образуют единую службу студентов.

В настоящее время перед этими службами стоят в основном те же проблемы, что и перед населением всей страны. Студенчество перестало быть однородным. По мнению советника вице-президента Университета Нового Орлеана М. Силливан, «студенческие общежития превратились в подобие кипящих котлов, в которых сталкиваются различия географические, этнические, религиозные, различия музыкальных вкусов и понятий о семье, и все это 24 часа в сутки». Если в начале 1940-х годов в США было 1,400,000 студентов, то сегодня их число составляет более 15 млн.

Между 1976 и 2000 гг. число белых студентов, не испано-говорящих, упало с 82 до 68%. За это же время число черных не испано-говорящих студентов возросло с 9 до 11%. Число испано-говорящих студентов возросло с 3 до 9%, число студентов азиатского происхождения увеличилось с 2 до 6%. Те, кого в Америке определяли как меньшинство и кто составлял в 1976 г. 15% общего числа студентов, к 2000 г. составляли уже 28%. Следует отметить, что в настоящее время среди американских студентов больше женщин, чем мужчин, причем доля женщин постоянно возрастает.

В настоящее время в США учится более 600000 иностранных студентов, из них 57% из стран Азии (из которых 67% находятся на самофинансировании или финансируются семьями, что вносит 12 млрд долл. в американскую экономику).

Приток студентов и возрастающая неоднородность их контингента не сопровождались увеличением финансирования. Между 1986 и 2001 гг., средние расходы на год обучения на первом цикле (бакалавриата) – расходы на вступительный взнос в университет, проживание и питание – увеличились в университетах штатов с 3000 до 7000 евро, а в частных университетах с 8000 до 18000 евро.

Для более продвинутого обучения (магистратура и докторантура) и на некоторых специальностях университетов (например, медицина и право) стоимость обучения ещё более высока. Например, на медицинском факультете частного университета вступительный взнос составляет 29 000 евро, а общая стоимость составляет 92 000 евро.

Если семья неспособна оплачивать образование студента, в обучении которого университет заинтересован (американские вузы традиционно стремятся поддерживать талантливых студентов), то ссуду в этом случае может дать федеральное правительство или какой-либо банк.

В 2003 г. 76% американских студентов 1-го цикла и 73% – второго цикла получали финансовую помощь. В среднем полная помощь составляла 8000 евро, из которой 4500 евро равнялась ссуде, полученной студентом. Стипендия (в виде дара), которую не надо возмещать, равнялась в среднем 3000 евро, уменьшение налогов – 417 евро. Такие стипендии в 1975 г. составляли 80% федеральной помощи, а в 2000 г. только 17%. В целом студенты второго и третьего циклов получают всё меньше таких стипендий и вынуждены брать ссуду, что делает их ситуацию очень тяжелой. По мнению М.Силливан, при таком положении студенты выступают в качестве потребителей. Образование более не является целью, а становятся исключительно средством устройства жизни. Сегодня 20% всех выдаваемых дипломов относятся к специальностям бизнеса, 25% – специальностям медицины, в то время как число дипломов по физике и математике убывает, что может иметь серьезные последствия в будущем. Выпускники, прежде всего, стремятся к стабильности своей ситуации и материальной обеспеченности.

В кампусах растет напряжение, что проявляется в усиленной работе дисциплинарных советов. Как считает М. Силливан, свободный доступ в Интернет только усложняет ситуацию. Растет число юридических проблем. Родители всё чаще вынуждены вмешиваться в процесс обучения.

М. Силливан отмечает и несколько положительных моментов. Первый касается новых тенденций в обустройстве кампусов. Чтобы противодействовать всеобщей унификации окружающей среды, университеты теперь обращают повышенное внимание на местоположение, обстановку внутри кампуса и окружающую среду. Речь идёт об общежитиях, ресторанах, площадках для отдыха, библиотеках, кафе, т.е. о тех местах, где встречаются студенты. Удлиняются часы работы всех этих заведений и служб. Организация пространства должна быть продумана так, чтобы позволить иностранному или любому другому студенту лучше интегрироваться в социокультурную среду.

Второй момент касается соседства кампусов и отношений с этим соседством. Только недавно администрация американских университетов стала серьезно задумываться о налаживании отношений университетов с близлежащим городом, в результате чего стали приниматься совместные с городскими властями программы, активными участниками которых должны являться проживающие в кампусах студенты.

Несмотря на доходы, приносимые университетами городским властям, проблемы жилья, дополнительные проблемы транспорта, стоянок и шума, а также различные конфликты с участием студентов могут легко испортить отношения университета с соседями. Этот вопрос только начинает решаться университетами.

Что касается специфических проблем, связанных с академической мобильностью американских студентов, то в этом США далеко отстают от Европы, как по масштабам мобильности, так и по степени разработанности и обеспеченности связанных с мобильностью проблем. Многие деятели американского образования не интересуются тем, что происходит в мире, что, по мнению М.Силливан, является серьезным упущением.

Работа со студентами в Японии

Японская организация содействия студентам (Japan student service organisation) – JASSO является государственным органом или, точнее, независимым административным учреждением, созданным специальным законом в апреле 2004 года. Она не находится под прямым управлением Министерства образования и науки и обеспечивает предоставление услуг, финансируемых из государственных фондов. Государство ограничивается определением задач на среднесрочную перспективу каждые 5 лет и периодической оценкой результатов.

Основными направлениями деятельности JASSO является [4]:

- предоставление стипендий в виде ссуды японским студентам;
- предоставление стипендий иностранным студентам и поддержка международных обменов;
- обеспечение функционирования студенческих общежитий;

- проведение экзаменов для оценки способностей к обучению иностранных студентов, желающих приехать на обучение в Японию, – экзаменов по японскому языку и другим дисциплинам;
- обеспечение сбора и распространения информации о возможностях обучения за границей японских студентов;
- обеспечение стажировок за рубежом японских преподавателей;
- выполнение исследовательских программ и программ анкетирования по проблемам студенчества.

На программы JASSO расходуется ежегодно сумма в 700 млрд иен (около 5 млрд евро), из которой 90% передается в качестве ссуды японским студентам. Эти программы включают, кроме таких ссуд, стипендии иностранным студентам, управление студенческими общежитиями.

JASSO обеспечивает проведение различных тестов, сбор и распространение информации по поводу обучения за границей, предназначенной как для студентов, так и для руководства университетов. Кроме того, университетам оказывается помощь в программах международных обменов между университетами, а также проводятся стажировки преподавателей.

JASSO имеет 12 региональных бюро в стране, масштабы деятельности и функции которых относительно ограничены, поскольку большую часть своей деятельности JASSO осуществляет централизованно. В этих бюро реализуются программы обменов и некоторых видов культурной деятельности для иностранных студентов в пределах города. Региональные бюро оценивают также запросы и потребности университетов.

Содержание ресторанов, студенческих кафетериев в общежитии и помощь в культурной и социальной активности студентов не входят в деятельность JASSO (что отличает ее от функционирования аналогичных иностранных служб, например французской системы CNOUS). В Японии данной деятельностью занимаются студенческие кооперативы внутри каждого университета, т.е. сам университет управляет вопросами общежития и организации студенческой жизни.

Для студентов в Японии в настоящее время одним из наиболее актуальных вопросов является вопрос об увеличении финансовой помощи студентам. В настоящий момент JASSO обеспечивает 90% всего финансирования стипендий в Японии. Существует два вида ссуд на стипендии – процентные и беспроцентные. JASSO дает беспроцентные ссуды в размере 250 млрд иен (1,8 млрд евро) для 440 000 студентов и ссуды с частичной оплатой государства по займу в размере 400 млрд иен (2,9 млрд евро) для 530 000 студентов. В обоих случаях около 20% студентов университетов получают эти стипендии, а для последипломного обучения эта цифра составляет 40%. Невозвратных стипендий для японских студентов не существует. Возврат ссуд должен быть совершен не позже, чем через 20 лет после получения диплома.

По мнению президента JASSO, настоящий период характеризуется рядом трудностей, связанных, в первую очередь, с ухудшением финансовой ситуации в стране. В связи с этим JASSO вынуждено все больше давать займов с небольшими процентными ставками, чтобы обеспечить стипендией всех нуждающихся в ней.

Второй трудностью текущего периода является рост числа студентов, возможности к обучению и моральная зрелость которых оставляют желать лучшего. На этот вызов, считает президент JASSO, должны ответить университеты, для чего необходимы перестройка личного менталитета и улучшение квалификации преподавательского состава. В этой связи важно учитывать оценку, которую дают студенты как проводимым преподавателями учебным курсам, так и самим преподавателям.

Если ещё совсем недавно получение высшего образования в Японии сразу давало доступ к профессиям с высоким статусом, то сейчас ситуация изменилась. Современное молодое поколение Японии, выросшее в обществе изобилия, не имеет точного представления о своем профессиональном будущем. Оно нуждается в помощи для менее болезненного вхождения в реальный мир и в активную жизнь. Действенным средством для этого являются стажировки и поддержка со стороны руководителей и старшего поколения.

Третьей проблемой является увеличение количества студентов с психологическими проблемами. С падением рождаемости молодые люди растут без сестер и братьев, без настоящих друзей. Выросшие в обществе изобилия, они не научились закалять и формировать свою личность. Поэтому университетам следует нанимать специальных советников для работы с ними, а преподаватели должны быть готовы реагировать на подобные проблемы. В этой связи JASSO предлагает различные соответствующие стажировки для профессорско-преподавательского состава.

Четвертая проблема связана с ростом международного обмена студентами. В настоящий момент в Японии учится 120 000 иностранных студентов, 10 000 из них получают дотацию от правительства (в виде дара), а 11 000 получают стипендию. Некоторые университеты желают принять как можно больше иностранных студентов, не организуя при этом соответствующие структуры приема, что создаёт в дальнейшем большие трудности как для университетов, так и для самих студентов. В 2004 г. только 3,2% студентов японских университетов были иностранцами. Это мало по сравнению с другими развитыми странами, поэтому, по мнению президента JASSO, Японии следует предпринять дополнительные усилия по организации приема иностранных студентов и по предоставлению им более полной информации о японских вузах и об условиях обучения в Японии.

Выдвигается задача обеспечить обслуживанию студентов наилучшее качество. Соревнование между университетами за студентов (с учетом уменьшения населения) должно послужить улучшению качества высшего образования.

Что касается общежитий, то обеспечение ими всех желающих является трудноразрешимой задачей. В некоторых небольших публичных университетах, расположенных вдали от больших городов, имеются общежития, но для ограниченного количества (около 10%) студентов. В университетах, находящихся в крупных городах, ситуация ещё менее благоприятная. Обычно студент сам находит жилье, и семья помогает ему его оплачивать. В Японии традиционно считают, что семья должна оплачивать обучение и проживание студентов.

В функции JASSO не входит непосредственное сотрудничество со студентами в организации их студенческой жизни; этими вопросами занимаются сами университеты. По мнению президента JASSO данная служба может только давать советы. JASSO помогает не прямо студентам, а помогает национальным университетам «помогать студентам». В настоящее время со стороны JASSO по вопросам студенчества организуются стажировки для преподавателей и административного персонала не только в государственных, но и в частных университетах. Особенностью японской службы поддержки студентов является практически полное отсутствие студентов в её административных структурах.

Заключение

Для ряда стран континентальной Европы (Франция, Германия, Бельгия, Италия), в которых сохраняется определяющая роль государства в высшем образовании, характерным является наличие общенациональных студенческих организаций, функционирующих на организационных принципах студенческих профессиональных союзов. Эти организации, будучи формально независимыми, в большей или меньшей степени инкорпорированы в общую структуру высшего образования. Их деятельность ориентирована преимущественно на решение вопросов материального содействия студентам и решение их социально-бытовых проблем. Неотъемлемой составляющей социокультурной среды вузов является так называемая концепция «участия», когда представители студентов делегируются на все уровни управления высшим образованием – от вузовского до национального – в соответствии с законодательно закрепленными нормами и процедурами.

Во всех случаях приоритетными направлениями деятельности студенческих активистов стали вопросы социальной поддержки студентов. Наряду с этим европейские студенты, действуя в рамках национальных союзов, все больше внимания уделяют проблемам качества образования и трудоустройства выпускников, ставших особенно актуальными в связи с Болонским процессом и экономическим кризисом.

Вторая основная тенденция формирования социокультурной среды вуза как инструмента воспитательной работы со студентами заключается в инициировании и организации студенческой активности с ориентацией на удовлетворение по максимально широкому спектру индивидуальных запросов молодых людей в области спорта, развлечений, культуры. Эта тенденция характерна для стран с укоренившейся сильной автономией вузов (США, Канада, частично Великобритания), располагающих соответствующей инфраструктурой, организационным опытом и материальными ресурсами для обеспечения внеучебной активности студентов. Студенческие союзы и объединения разных уровней организуются на корпоративной основе и значительно менее политизированы, чем в странах Западной Европы, участие студентов в управлении учебным процессом существенно уже по сравнению с европейскими вузами.

С точки зрения отечественной системы образования рыночная экономика предъявляет к выпускнику высшей школы особые (нетрадиционные) требования. Рынок труда характеризуется высокой динамичностью, совмещением различных видов деятельности в рамках одной профессии, что, в конечном счете, становится источником трансформаций основ культурно-образовательного, информационного и научного пространства вуза.

Распространение новых образовательных технологий, направленных на индивидуализацию учебного процесса ведет к коренным изменениям структуры образовательной среды вуза, изменению поведенческих стереотипов студентов. Происходит становление нового типа социального, ценностно-мировоззренческого, духовного склада молодежи, стремящейся получить высшее образование. Конечно, всё это является отражением системы общественных отношений в социуме и ограничено более или менее утвердившимися в общественном сознании стандартами социального поведения, мировоззренческими ориентирами и ценностями духовного выбора. При формировании социокультурной среды и построении воспитательного процесса вузы не могут больше игнорировать вневузовские формы образования, всё более широкое распространение Интернета, включение значительной части студентов в производственную деятельность, параллельно с освоением ими одной из основных образовательных программ высшей школы. Поэтому перечисленные выше вопросы требуют более широкого обсуждения, не ограничиваясь рамками внутривузовской жизни, воспитательными возможностями социокультурной среды вуза.

Литература

1. www.cnous.fr/_cnous/dossier-8.425.162.htm
2. www.cnous.fr/_cnous_dossier_8.425.160.htm
3. www.cnous.fr/_cnous _dossier_8.425.163.htm
4. www.cnous.fr/_cnous_dossier_8.425.157.htm
5. www.cnous.fr/_cnous_dossier_8.425.161 htm
6. www.ulb.ac.be/homepage.html
7. www.ulb.ac.be/colloque/asue/index 7.html
8. www.cnous.fr/_cnous_dossier_8.425.156.htm

СИНТЕТИЧЕСКИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

В.М. Тихомиров
профессор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Первым синтетическим курсом в университетском образовании был курс «Анализа III». Его программа была разработана А.Н. Колмогоровым в 40–50-е годы прошлого века. Курс «Анализ III» строился на базе первых двух лет университетского образования. Он объединял в себе начала теории множеств, теорию действительных чисел, теорию функций и функциональный анализ, теорию меры и интеграла, теорию интегральных уравнений и вариационное исчисление. Затем появились синтетические курсы по линейной алгебре и геометрии и по дифференциальной геометрии и топологии.

В докладе будет рассказано об опыте построения синтетического курса по всей математике. Он складывается из двух компонентов – конечномерной и бесконечномерной. Конечномерная охватывает основные темы математики, преподаваемой в технических и экономических вузах, бесконечномерная – в вузах с повышенными программами по математике и в университетах в старом значении этого термина. Каждая из компонент базируется на начальных курсах, соответственно, вузовского и университетского преподавания.

Будет сделана попытка мотивировать целесообразность подобного курса.

Программа спецкурса такова:

1. Теория линейных уравнений: альтернатива Фредгольма конечномерная и бесконечномерная и разрешимость линейных уравнений.

2. Метод Ньютона решения нелинейных уравнений в конечномерном и бесконечномерном пространстве и приложения его к теоремам об обратных отображениях в диффе-

ренциальном исчислении, правилу множителей Лагранжа в конечномерном и бесконечномерном случае и к теоремам существования решений задачи Коши в теории дифференциальных уравнений.

3. Геометрическая визуализация теории линейных уравнений, понятие определителя, теория квадратичных форм конечномерная и бесконечномерная (теорема Гильберта).

4. Теория меры и интеграла. Интегрирование дифференциальных форм, теорема Стокса – Пуанкаре.

5. Ряды и специальные функции.

В заключительной части спецкурса предполагается рассказать о приложениях общей теории к алгебре, геометрии, вещественному и комплексному анализу, теории вероятностей и проблемам естествознания.

О ДИСЦИПЛИНЕ ИНФОРМАТИКА В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММАХ ТРЕТЬЕГО ПОКОЛЕНИЯ

В.В. Тихомиров
профессор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

В работе изложен подход к разработке дисциплин для университетских программ, связанных, в той или иной мере, с изучением Информатики.

Первый критерий проверки университетской программы обучения – это соответствие совокупности знаний по информатике. При этом желательно взять за основу рекомендации, изложенные в международных документах Computing Curricula 2001–2005: Computer science. Такой подход (см. табл. 1) будет способствовать возможности сравнения образовательных программ в различных вузах на их соответствие.

Второй критерий относится к уровню компетенций выпускника, изучившего дисциплины Информатики, определяющих квалификационную характеристику выпускника. Вообще говоря, вузы должны формально описывать цели и ожидаемые результаты своих учебных программ, которые должны обеспечивать учащимся возможность изучить широкий спектр разделов информатики, что впоследствии поможет им легче находить пути решения задач в различных областях.

Другой подход – это программы, рассматривающие одну выбранную область информатики и глубоко раскрывающие ее суть, что позволяет выпускникам иметь набор прочных знаний в области, выбранной им специализации. Однако, в любом случае, несмотря на разницу в акцентах и содержании различных программ, существует минимальный набор определенных качеств (компетенций) выпускников вузов, получивших образование в области информатики.

Общие характеристики выпускников факультетов информатики

Хотя характеристики выпускников факультетов информатики связаны с целями обучения обязательным разделам, следует сформулировать ожидания от выпускников большего уровня достижений (компетенции исходящие). Цели обучения, детально рассмотренные в общей образовательной программе, показывают, что именно должны знать студенты после завершения изучения того или иного модуля. Ниже сформулируем конкретные компетенции, которыми должны обладать успешные выпускники. Эти качества включают в себя:

1. *Системный взгляд на модули программы.* Обучающиеся должны развить высокое уровневое понимание систем в целом, преодолевая детали отдельных реализаций отдельных компонент.

2. *Понимание связи теории и практики.* Равновесие между теорией и практикой. Их тесная связь друг с другом.

3. *Твердое владение основными методами информатики.* В процессе обучения студенты сталкиваются со многими общими методами, такими как абстракция, редукция (рекурсия) и эволюционные изменения.

4. *Опыт участия в (большом) проекте.* Такого рода опыт обучает студентов практически использовать приобретенные навыки и заставляет студентов интегрировать материал, изученный на различных курсах.

5. *Адаптируемость.* Одной из основных характеристик информатики является очень быстрый темп изменений в области информационных технологий и систем. Поэтому выпускники должны обладать глубокими фундаментальными знаниями, помогающими им выбрать необходимые навыки для решения новых задач.

Профессиональные качества и способности.

Эти качества можно разделить на три категории:

1. *Когнитивные качества*, относящиеся к специфическим для информатики видам интеллектуальной деятельности.
2. *Практические знания*, связанные с информатикой.
3. *Дополнительные качества*, возможно, развитые в контексте изучения естественнонаучных дисциплин и информатики, но имеющие общий характер.

1. *Когнитивные качества, связанные с информатикой:*

– *Знания и понимание.* Демонстрация знаний и понимания основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с информатикой;

– *Моделирование.* Использование полученных навыков в моделировании и проектировании информационных систем с демонстрацией способности выбора правильных компромиссных решений;

– *Требования.* Выявление и анализ критериев и требований, относящихся к конкретным задачам, планирование стратегий их решения;

– *Критическая оценка и тестирование.* Анализ того, насколько конкретная информационная система отвечает требованиям для использования и будущего развития;

– *Методы и средства.* Использование соответствующих теоретических знаний, практических навыков и инструментов для разработки, реализации и оценки научных результатов и информационных систем;

– *Профессиональная ответственность.* Следование профессиональным, социальным и этическим нормам, касающимся области информатики;

– *Командная работа.* Умение эффективно работать в производственном окружении;

– *Способность к количественному мышлению*. Понимание и объяснение количественных характеристик проблемы;

– *Самоуправление.* Управление собственным обучением и развитием, управление временем и организаторские качества;

– *Профессиональное развитие.* Стремление всегда быть в курсе текущего состояния дел в конкретной области информатике, продолжать свое профессиональное развитие.

2. *Практические навыки, связанные с информатикой:*

– *Проектирование и реализация.* Моделирование различных процессов. Спецификация, проектирование и реализация информационных систем и компьютерных технологий;

– *Оценка.* Оценка систем и их качественных характеристик, возможных компромиссных путей решения конкретной задачи;

– *Управление информацией.* Применение принципов и методов эффективного управления информацией к различным видам информации, включая текстовую, графическую, мультимедийную и др.;

– *Человеко-машинное взаимодействие.* Применение принципов человеко-машинного взаимодействия при оценке и создания широкого диапазона продуктов, включая информационные системы в различных областях информатики, интеллектуальные системы, пользовательские интерфейсы, мультимедийные системы и др.;

– *Оценка риска.* Определение рисков и связанных с вопросами безопасности аспектов эксплуатации компьютерного оборудования и другого оборудования в заданном контексте;

– *Инструменты и средства.* Эффективное использование адекватных средств и инструментов при моделировании различных процессов, при разработке и документировании программного обеспечения, с акцентом на полное понимание процесса решения практических задач с помощью компьютера;

– *Эксплуатация.* Эффективная эксплуатация компьютерного оборудования и программных средств, информационных систем в области информатики.

Совокупность знаний по информатике

Краткий обзор совокупности знаний по информатике представлен в табл. 1, как объединение укрупненных модулей. Для каждого модуля в скобках указано минимальное время его изучения студентами. Модули состоят из разделов, раскрывающих темы и задачи обучения.

Указываемые часы, отводимые на раздел, подразумевают минимальный объем сведений (лекционной нагрузки). Временные показатели, отведенные для каждого раздела, должны пониматься как минимальное количество времени, требуемое студенту для освоения раздела в рамках, требуемых программой. Всегда допустимо и полезно отводить на раздел больше времени, чем обязательный минимум. Минимальное время, отводимое на изучение всей дисциплины Информатика – 278 часов.

Таблица 1

Шифр	Модуль (раздел)
DS	**Дискретные структуры (43):** DS1.Функции отношения и множества (6), DS2.Основы логики (10), DS3. Методы доказательства (12), DS4. Основы вычислений (5), DS5. Графы и деревья (4), DS6. Дискретная вероятность (6)
PF	**Основы программирования (38):** PF1.Основные конструкции программирования (9), PF2.Алгоритмы и решение задач (6), PF3. Фундаментальные структуры данных (14), PF4. Рекурсия (5), PF5.Событийно-управляемое программирование (4).
AL	**Алгоритмы и теория сложности (31 час):** AL1.Основы анализа алгоритмов (4), AL2 Алгоритмические стратегии (б), AL3 Фундаментальные вычислительные алгоритмы (12), AL4. Распределенные алгоритмы (3), AL5. Основы теории вычислимости (6), AL6. Классы сложности P и NP, AL7. Теория автоматов, AL8. Углубленный анализ алгоритмов, AL9. Криптографические алгоритмы, AL10. Геометрические алгоритмы, AL11. Параллельные алгоритмы.

Продолжение табл. 1

Шифр	Модуль (раздел)
AR	**Архитектура и организация ЭВМ (36 часов):** AR1. Цифровая логика и цифровые системы (6), AR2. Представление данных в памяти компьютера (3), AR3. Организация машины на уровне ассемблера (9), AR4.Устройство памяти компьютера (5), AR5. Взаимодействие и коммуникации (3), AR6. Функциональная организация, AR7. Многопроцессорные и альтернативные архитектуры (3), AR8. Улучшение производительности, AR9. Архитектура сетевых и распределенных систем.
OS	**Операционные системы (18 часов):** OS1.Обзор операционных систем (2), OS2. Основы операционных систем (2), OS3. Параллелизм (6), OS4.Планирование и диспетчеризация (3), OS5. Управление памятью (5), OS6. Управление устройствами, OS7. Безопасность и защита данных, OS8. Файловые системы, OS10. Отказоустойчивость, OS11. Оценка производительности, OS12. Языки сценариев.
NC	**Распределенные вычисления (15 часов):** NC1. Введение в распределенные вычисления (2), NC2. Сети и телекоммуникации (7), NC3. Сетевая безопасность (3), NC4. Web как пример архитектуры, NC5. Разработка web-приложений, NC6. Управление сетями, NC7. Сжатие и распаковка данных, NC8. Технологии мультимедиа, NC9. Беспроводные и мобильные компьютеры.
PL	**Языки программирования (21 час):** PL1. Обзор языков программирования (2), PL2. Виртуальные машины (1), PL4. Переменные и типы данных (3), PL5. Механизмы абстракции (3), PL6. Объектно-ориентированное программирование (10), PL7. Функциональное программирование, PL8. Системы трансляции, PL9. Системы типов, PL1O. Семантика языков программирования, PL11. Разработка языков программирования.
HC	**Взаимодействие человека и машины (8 часов):** HC1. Основы взаимодействия человека и машины (6), HC2. Построение простого графического интерфейса (2), HC3. Оценка программного обеспечения, ориентированного на человека, HC4. Разработка программного обеспечения, ориентированного на человека, HC5. Проектирование графического интерфейса пользователя, HC6 аспекты мультимедиа систем, Программирование графического интерфейса пользователя, HC7. Человеко-машинные аспекты мультимедиа систем, HC8. Человеко-машинные аспекты сотрудничества и коммуникации.

Продолжение табл. 1

Шифр	Модуль (раздел)
GV	**Компьютерная графика и визуализация** (**3 часа**): GV1. Фундаментальные методы в графике (2)**,** GV2. Графические системы (1), GV3. Графические коммуникации, GV4. Геометрическое моделирование, GV5. Основы рендеринга, GV6. Углубленное изучение рендеринга, GV7. Более сложные методы, GV8. Компьютерная анимация, GV9. Визуализация, GV10. Виртуальная реальность, GV11. Компьютерное зрение.
IS	**Интеллектуальные системы (10 часов):** IS1. Основные вопросы, связанные с интеллектуальными системами (1), IS2. Поиск решений (5), IS3. Представление знаний и вывод (4), IS3. Углубленное изучение поиска, IS4. Углубленное изучение представления знаний и вывода, IS5. Обработка естественного языка, IS6. Агенты, IS7. Обучение машины и нейронные сети, IS8. Системы искусственного интеллекта с планируемым поведением, IS9. Робототехника.
IM	**Управление информацией (10 часов):** IM1. Информационные модели и системы (3), IM2. Ссистемы баз данных (3), IM3. Моделирование данных (4), IM4. Реляционные базы данных, IM5. Языки запросов к базам данных. IM6. Проектирование реляционных баз данных, IM7. Обработка транзакций, IM8. Распределенные базы данных, IM9. Проектирование физической структуры базы данных, IM10. Извлечение информации, IM11. Хранение и поиск информации, IM12. Гипертекст и гипермедиа, IM13. Мультимедийная информация и системы мультимедиа, IM14. Цифровые библиотеки.
SP	**Социальные и профессиональные вопросы (16 часов):** SP1. История информатики (1), SP2. Социальный контекст информатики (3), SP3. Методы и средства анализа (2), SP4. Профессиональная и этическая ответственность (3), SP5. Недостатки компьютерных систем и риски, связанные с их применением (2), SP6. Интеллектуальная собственность (3), SP7. Конфиденциальность и гражданские свободы (2), SP8. Компьютерные преступления, SP9. Экономические вопросы, связанные с применением компьютеров, SP10.Философские концепции.

Окончание табл. 1

Шифр	Модуль (раздел)
SE	**Программная инженерия** (31 час): SE1. Проектирование ПО (8), SE2. Использование программных интерфейсов приложений (5), SE3. Программные средства и окружения (3), SE4. Процессы разработки ПО (2), SE5. Спецификации и требования к ПО (4), SE6. Проверка соответствия ПО (3), SE7. Эволюция ПО (3), SE8. Управление программными проектами (3), SE9**.** Компонентно-ориентированная разработка, SE10**.** Формальные методы, SE11. Надежность ПО, SE12**.** Разработка специализированных систем.
CN	**Вычислительная математика и численные методы:** CN1. Численный анализ, CN2. Исследование операций, CN3. Моделирование, CN4. Высокопроизводительные вычисления.

Модули разделов. Темы и задачи обучения

Далее для каждого модуля желательно сформулировать рекомендуемые темы и задачи обучения. Такое модульное построение позволяет университетам легко разработать программы самих курсов.

Кроме того, такой подход позволяет университетам самим выбирать ту или иную педагогическую стратегию введения вводных курсов дисциплины Информатика. Модульное представление программы Информатика позволяет дать рекомендации для составления программ дополнительного профессионального образования в области информационных технологий.

В качестве примера приведем описание одного модуля.

Модуль (DS): Дискретные структуры (DS)

Дискретные структуры *(discrete structures)* являются фундаментальной основой информатики. Говоря «фундаментальная», мы подразумеваем, что сравнительно небольшое число ученых будут непосредственно работать в данной области, но при этом многие другие разделы информатики требуют умения работать с концепциями дискретных структур. Дискретные структуры включают важный материал из таких областей как теория множеств, логика, теория графов и комбинаторика (табл. 2).

Таблица 2.

Разделы	Темы	Задачи обучения
DS1. (6 ч.) **Функции, отношения и множества** (обязательный)	• Функции (сюръекции, инъекции, обратные функции, композиция) • Отношения (рефлективность, симметричность, транзитивность, эквивалентность) • Множества (диаграммы Венна, дополнения, декартовы произведения, степенные множества) • Принцип Дирихле • Мощность и счетность.	1. Объяснить основы терминологии функций, отношений и множеств 2. Обучить выполнению операций, связанных с множествами, функциями и отношениями 3. Связать практические примеры с подходящими моделями множеств, функций и отношений, дать в этом контексте интерпретацию соответствующих операций 4. Продемонстрировать основные принципы, включая использование диагонализации и принципа Дирихле.
DS2. (10 ч.) **Основы логики** (обязательный)	• Логика высказываний • Логические связки • Таблицы истинности • Нормальные формы (конъюнктивные и дизъюнктивные) • Обще значимость (тавтология) • Логика предикатов • Кванторы всеобщности и существования • Правила modus pones и modus tulle's • Ограничения логики предикатов	1. Обучить применению формальных методов символической логики высказываний и логики предикатов. 2. Показать использование формальных средств символической логики для моделирования алгоритмов и реальных жизненных ситуаций. 3. Использовать формальные логические доказательства и логическое рассуждение для решения задач 4. Описать применимость и ограничения логики предикатов.

Продолжение табл. 2

Разделы	Темы	Задачи обучения
DS3. **(12 ч.)** **Методы доказательства** (обязательный)	• Понятия импликации, обращения, противопоставления, отрицания и противоречия. • Структура формальных доказательств. • Прямые доказательства, доказательства через контр пример, через противопоставление, через противоречие. • Математическая индукция. Сильная индукция. • Рекурсивные математические определения, вполне упорядоченные множества.	1. Обрисовать основную структуру и дать примеры каждого метода доказательств, описанных выше. 2. Обсудить, какой вид доказательства лучше подходит для данной задачи. 3. Связать идеи математической индукции с понятием рекурсии и рекурсивно определенных структур. 4. Указать различия между математической и сильной индукцией и дать примеры адекватного использования каждого из этих методов.
DS4. **(5 ч.)** **Основы вычислений** (обязательный)	• Правила суммы и произведения • Принцип включения/выключения • Арифметические и геометрические прогрессии • Числа Фибоначчи. • Принцип Дирихле • Перестановки и сочетания. Основные определения. Тождество Паскаля. • Биномиальная теорема. Решение рекуррентных соотношений. • Общие примеры. Основная теорема рекуррентных соотношений.	1. Научиться вычислять перестановки и сочетания множеств, а также интерпретировать их значения в контексте конкретного приложения. 2. Сформулировать основную теорему рекуррентных соотношений. 3. Научиться решать типичные рекуррентные соотношения. 4. Научиться анализировать задачу для того, чтобы построить соответствующие рекуррентные уравнения или выявить связанные с ней вычислитёльные вопросы.

Окончание табл. 2

Разделы	Темы	Задачи обучения
DS5. **(4 ч.)** **Графы и деревья** (обязательный)	• Деревья • Неориентированные графы • Ориентированные графы • Островные деревья • Стратегии обхода графов	1. Проиллюстрировать на примерах основные понятия теории графов, а также их свойства и некоторые специальные случаи. 2. Продемонстрировать различные методы обхода деревьев и графов. 3. Дать примеры моделирования задач информатики с использованием деревьев и графов. 4. Показать связь графов и деревьев со структурами данных, алгоритмами и вычислениями.
DS6. (6ч.) **Дискретная вероятность** (обязательный)	• Конечное вероятностное пространство, вероятностная мера, события • Условная вероятность, независимость событий, теорема Байеса • Целочисленные случайные величины, математическое ожидание.	1. Научиться вычислять вероятности событий и математического ожидания случайных величин для элементарных задач, таких как игра в рулетку и другие 2. Усвоить различия между независимыми и зависимыми событиями. 3. Научиться применять биномиальную теорему для независимых событий и теорему Байеса для зависимых событий. 4. Научиться применять вероятностные методы к решению таких задач, как метод Монте-Карло, анализ среднего случая алгоритмов и хеширование.

Организация и формат описаний курсов

Курсы дисциплины Информатика следует поделить на три уровня сложности: вводные, средние и дополнительные. Целью этого разбиения является создание естественных рамок, в которых развивается составление учебного плана. Например, определяется шесть различных реализаций вводного курса, дается представление о четырех тематических подходах к составлению основных курсов вместе с набором смешанных стратегий, которые сочетают элементы каждого из этих подходов. Стратегии составления учебного плана и их связи показаны в табл. 3.

Таблица 3

Уровни курсов и стратегии обучения

Вводные курсы				
Объектный подход	Функциональный подход	С максим. охватом материала	Алгоритмический подход	Аппаратный подход
Основные курсы				
Тематический подход	Сжатый подход	Системный подход	Web-подход	Гибридный подход
Углубленные курсы				
Углубленные курсы, необходимые для завершения программы				

Названия индивидуальных педагогических подходов выбраны так, чтобы они различались в начальных буквах. Это делает возможным именование (кодирование) курсов по следующему принципу: для курса $\mathbf{CS101_I}$ первые две позиции – **CS** определяют область информатики (компьютерные науки), следующие три позиции характеризуют — уровень (**1хх** – вводный, **2хх** – основной, **3хх** – углубленный, **4хх** – проект), подстрочный (внизу) индекс характеризует один или возможно указание нескольких подходов обучения (например, $\mathbf{CS101_I}$ – означает императивный подход). Эти подходы перечислены в табл. 4.

Таблица 4

Педагогические подходы

– Императивный подход **(I)** – Объектный подход **(O)** – Функциональный подход **(F)** – С максимальным охватом материала подход **(B)** – Алгоритмический подход **(A)**	– Аппаратный подход **(H)** – Тематический подход **(T)** – Сжатый подход © – Системно-ориентированный подход **(S)** – Web-подход **(W)**

Пример построения курса – *CS101$_I$ Основы программирования.*

Курс объясняет основные понятия процедурного программирования. Темы включают типы данных, управляющие структуры, функции, массивы, файлы и механизмы запуска, тестирования и отладки. Курс также содержит введение в исторический и социальный контекст компьютерных наук и обзор информатики как научной дисциплины.

Требования к слушателям:

Никаких знаний в области программирования или информатики не требуется. Студенты должны иметь достаточный объем математических знаний для решения простых линейных уравнений и уметь пользоваться математической нотацией и формализмами.

Таблица 5

Описание курса:
• Компьютерные приложения: обработка текстов, электронные таблицы, файлы и каталоги.
• Базовые конструкции программирования: синтаксис и семантика языка высокого уровня; переменные, типы, выражения и присваивания; простейший ввод/вывод; конструкции ветвления и итеративные конструкции; функции и передача параметров; структурная декомпозиция.
• Алгоритмы и решение задач: стратегии решения задач, роль алгоритмов в решении задач, стратегии реализации алгоритмов, стратегии отладки, понятие алгоритма, свойства алгоритмов.
• Базовые структуры данных: примитивные типы; массивы; структуры; строки и операции над строками.

- Представление данных в памяти компьютера: биты, байты, слова; представление числовых данных и основания систем счисления; представление символьных данных.
- Обзор операционных систем: роль и задачи операционных систем; простое управление файлами.
- Введение в распределенные вычисления: основы и история сетей и Internet; демонстрация и использование таких сетевых приложений как электронная почта, telnet и FTP.
- Взаимодействие человека и машины: введение в вопросы проектирования.
- Методология разработки ПО: основные понятия и принципы проектирования; структурная декомпозиция; стратегии тестирования и отладки; разработка тестовых наборов; среды разработки; инструменты тестирования и отладочные инструменты.
- Социальный контекст программирования: история программирования и компьютеров; эволюция идей и аппаратуры; социальное воздействие компьютеров и Internet; профессионализм, этический кодекс и ответственное поведение; авторские права, интеллектуальная собственность и нарушение авторских прав на программное обеспечение.

Удобным элементом описания курса является ссылка на затрагиваемые разделы с указанием часов, отводимых на каждый раздел (табл. 6).

Таблица 6

Затрагиваемые разделы	**Время**
PF1 Основные конструкции программирования	10 часов (9 осн.+1)
PF2 Алгоритмы и решение задач	3 осн. часа (из 6)
PF3 Основные структуры данных	2 осн. часа (из 14)
AR2 Представление данных в памяти компьютера	1 осн, час (из 3)
AR3 Организация машины на уровне ассемблера	2 осн. часа (из 9)
OS1 Обзор операционных систем NC1	1 осн. час (из 2)
PL3 Введение в трансляцию	1 осн, час (из 2)
PL4 Описание и типы данных	1 осн. час (из 2)
PL5 Механизмы абстракции	3 осн. часа
HC1 Основы взаимодействия человека и машины	1 осн. час (из 6)
GV1 Основы методов программирования	3 осн. часа
SP2 Социальные вопросы программирования	1 осн. час (из 3)
SP4 Профессиональная этическая ответственность	1 осн, час (из 3)
SP6 Интеллектуальная собственность	1 осн. час (из 3)
SE1 Проектирование ПО	2 осн. часа (из 3)
SE4 Процессы разработки ПО. Темы по выбору	1 осн. час (из 2)

Примечания:

Этот курс представляет собой часть альтернативной реализации модели вводного курса с ориентацией на императивное программирование, в которой базовые понятия программирования покрываются за три семестра (а не за два, как в традиционном подходе). В терминах учебного плана это означает, что студенты должны приступать к освоению более сложных курсов после изучения последовательности $CS101_I$–$CS102_I$–$CS103_I$ или двухсеместровой последовательности $CS111_I$–$CS112_I$, излагающей тот же материал в более концентрированной форме.

Хотя преподавание основ программирования за два семестра в течение долгих лет было стандартом при обучении информатике, все большее число тем может со всеми основаниями считаться фундаментальными, создавая тем самым трудности в прочтении полного введения в информатику за один год.

РЕШЁТКА КУБОВ И СУПЕРМОДУЛЯРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

В.Р. Хачатуров
доктор физико-математических наук, профессор,
Вычислительный Центр им. А.А. Дородницына РАН

Р.В. Хачатуров
кандидат физико-математических наук,
Вычислительный Центр им. А.А. Дородницына РАН

В работе определяется и описывается новый тип решёток – решётка кубов. Приводится доказательство того, что число всех суб-кубов куба размерности m равно 3^m. Показано, что множество всех таких суб-кубов при соответствующем выборе для них операций объединения и пересечения образует решётку, названную решёткой кубов. Описывается алгоритм построения такой решётки, доказано, что решётка кубов является решёткой с относительным дополнением, что позволяет решать на ней задачи минимизации и максимизации супермодулярных функций. Приводятся конкретные примеры таких функций. Обсуждаются алгоритмы оптимизации и возможности постановки и решения новых классов задач на решётках кубов.

Введение

Бесконечная красота кубов больших размерностей с давних времён является источником вдохновения для математиков и для получения ими новых красивых результатов, с помощью которых были найдены интересные подходы для постановки и решения разнообразных сложных задач.

Для исследования структуры кубов больших размерностей нами были разработаны алгоритмы и компьютерные программы для различного представления гиперкубов в пространстве и на плоскости. Эти алгоритмы позволяют вращать M-мерный гиперкуб в N-мерном Евклидовом пространстве $(N \geq M)$ вокруг любой из координатных осей и затем проецировать его на плоскость. Кроме того, эти проекции можно изменять, задавая соответствующий набор базисных векторов и получая различные изображения гиперкубов с сохранением их свойств как Булевых решёток.

Приведем примеры проекций и диаграмм кубов различных размерностей, полученные с помощью разработанных алгоритмов и компьютерных программ, одновременно демонстрирующие сложность структуры и красоту многомерных гиперкубов.

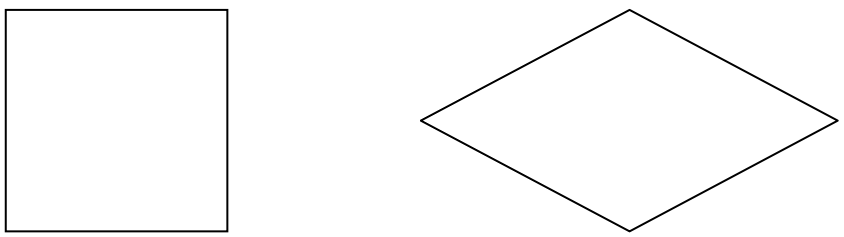

Рис. 1. Представление 2-мерного куба. Проекция и диаграмма

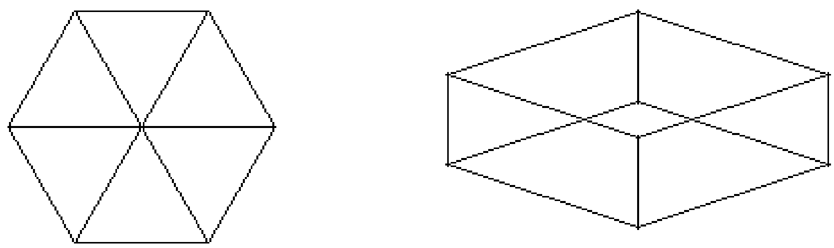

Рис. 2. Представление 3-мерного куба. Проекция и диаграмма

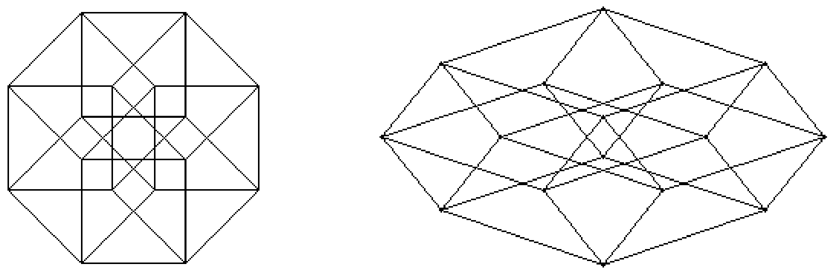

Рис. 3. Представление 4-мерного куба. Проекция и диаграмма

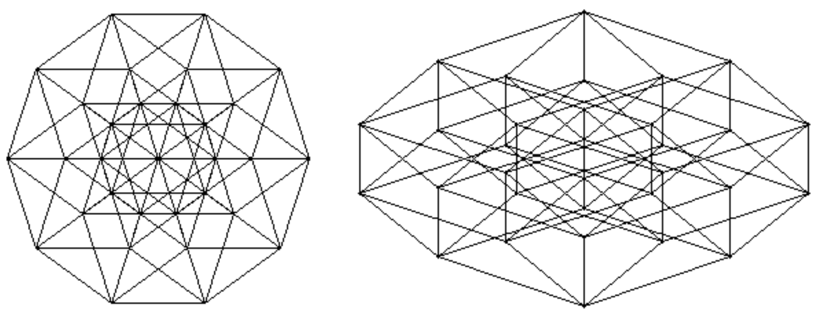

Рис. 4. Представление 5-мерного куба. Проекция и диаграмма

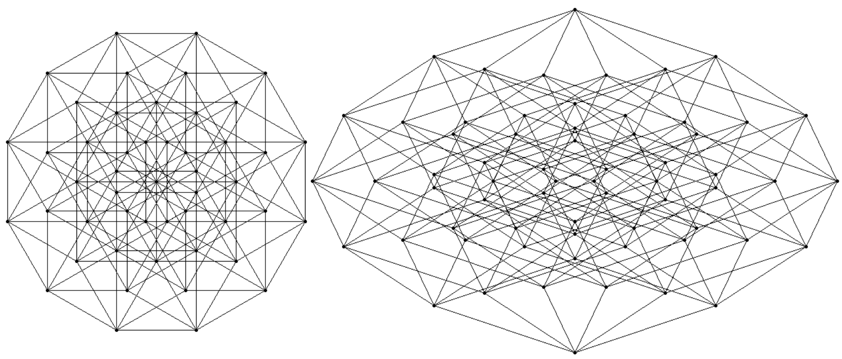

Рис. 5. Представление 6-мерного куба. Проекция и диаграмма

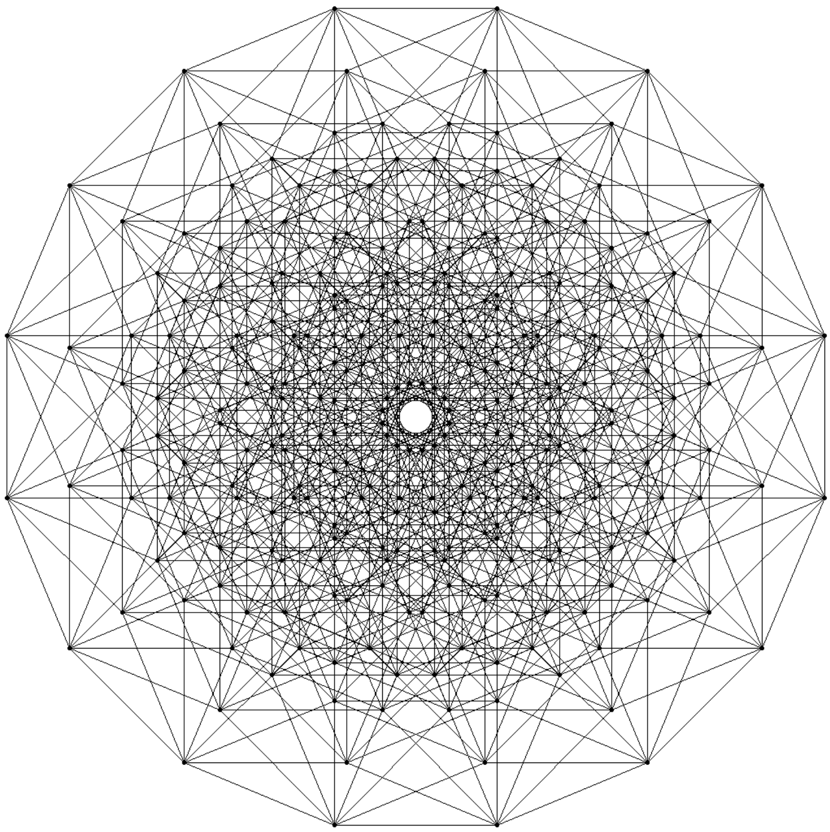

Рис. 6. Представление 8-мерного куба. Проекция

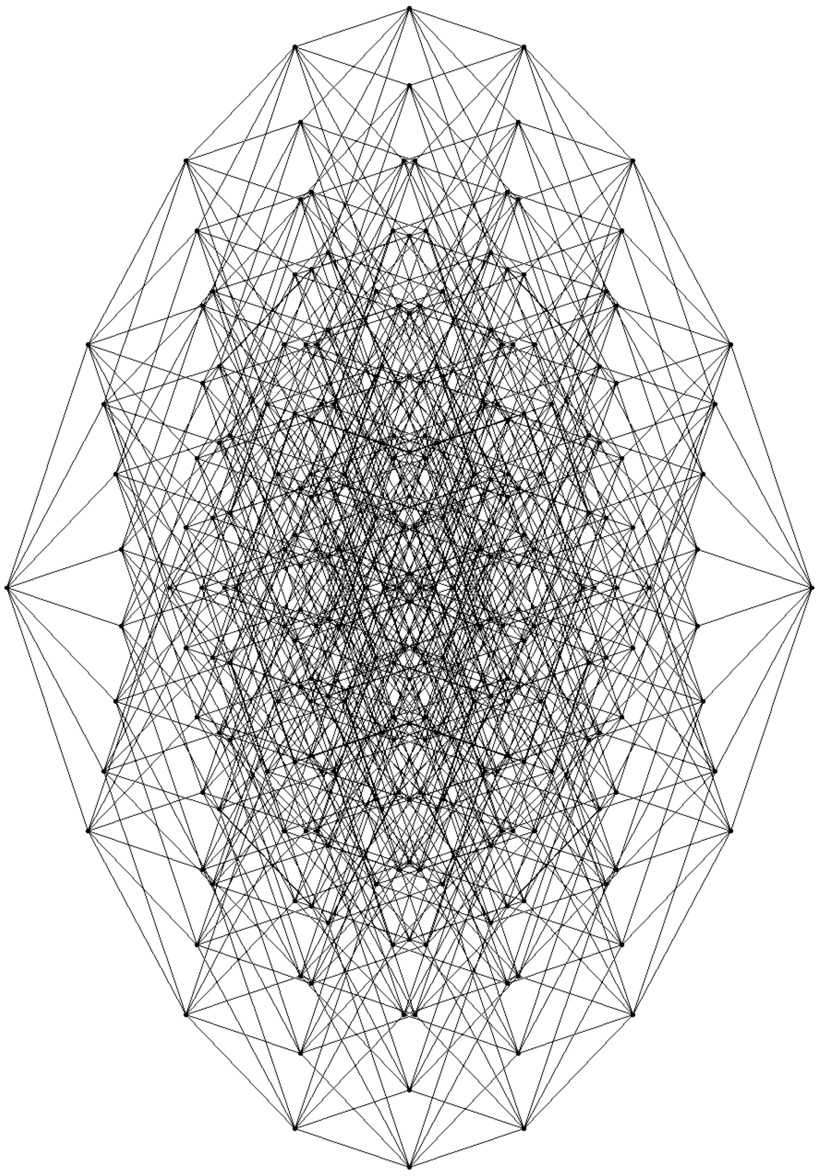

Рис. 7. Представление 8-мерного куба. Диаграмма

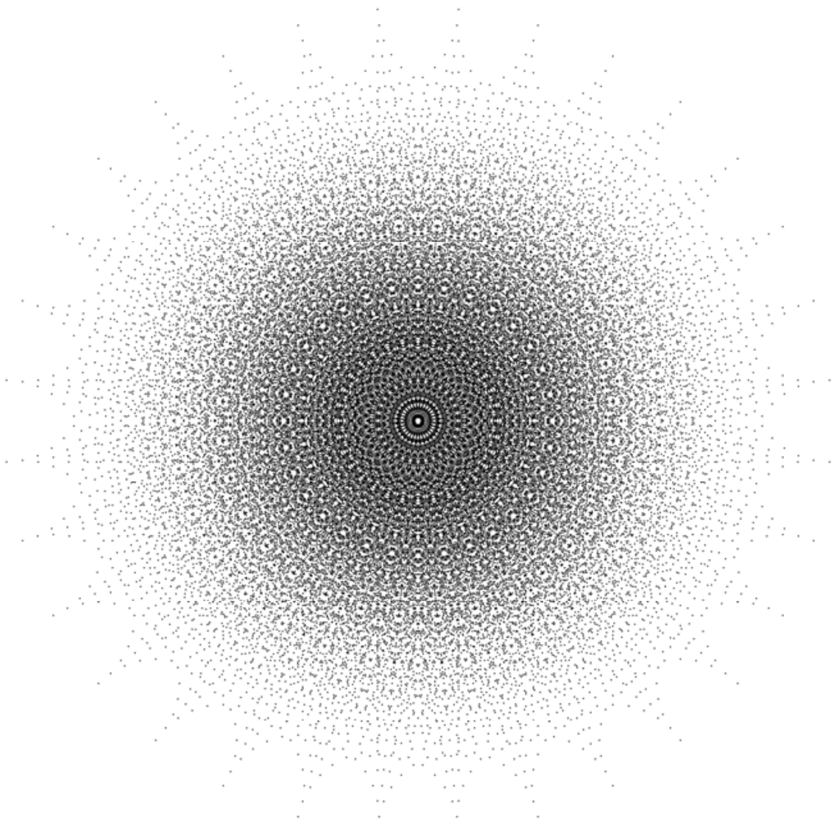

Рис. 8. Ортогональная симметричная проекция 16-мерного гиперкуба (показаны только вершины: 2^{16} = 65536 точек)

Из этого и следующего рисунков видно, что в случае ортогональной симметричной проекции 16-мерного гиперкуба на плоскость ни одна из проекций его вершин не закрывает другую.

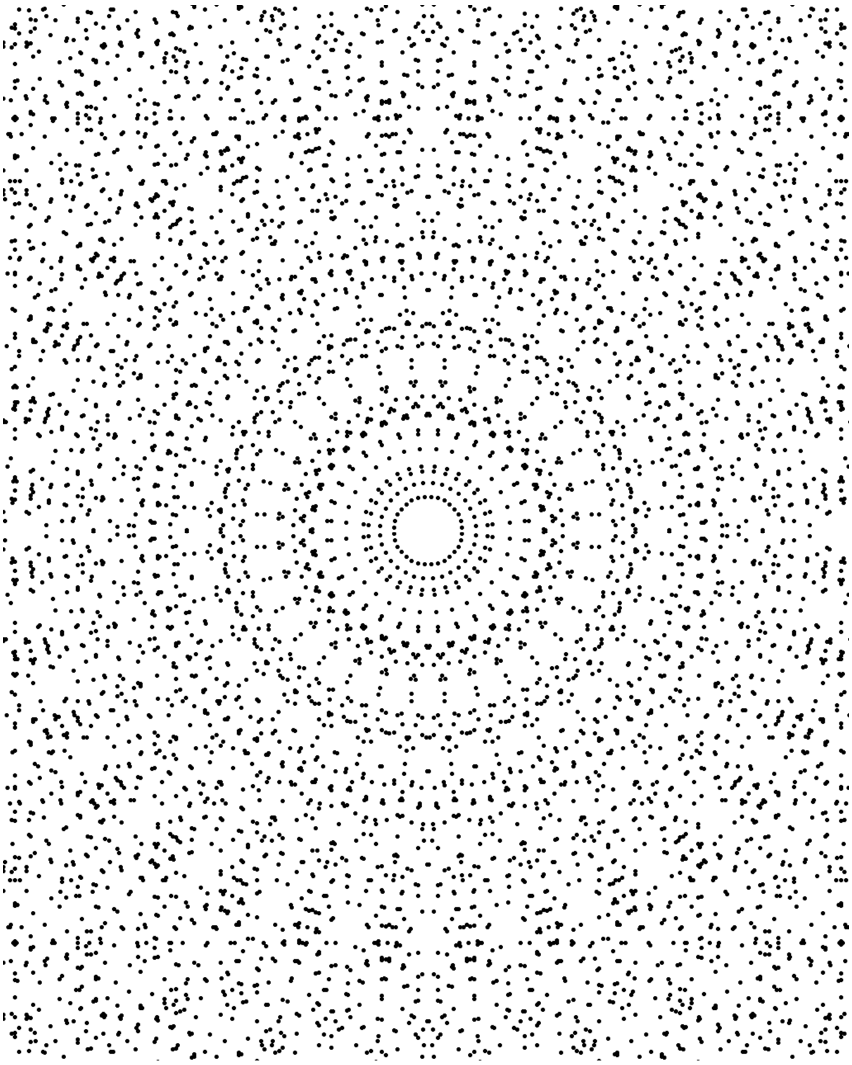

Рис. 9. Центральная часть ортогональной симметричной проекции 16-мерного гиперкуба (показаны только вершины)

В этой работе определяется и описывается новый тип решёток – решётка кубов. Приводится доказательство того, что число всех суб-кубов куба размерности m равно 3^m.

Показано, что множество всех таких суб-кубов при соответствующем выборе для них операций объединения и пересечения образует решётку [1], [2], названную решёткой кубов. Описывается алгоритм построения такой решётки.

Рассматриваются задачи минимизации и максимизации супермодулярных функций на решётке кубов. Приводятся конкретные примеры таких функций. Обсуждаются алгоритмы оптимизации.

Решётки кубов открывают широкие возможности для постановки и решения новых классов задач оптимизации.

Суб-кубы многомерного куба

Пусть C^m – куб размерности m.

Известно, что количество кубов размерности ноль (вершин куба) в кубе C^m равно 2^m.

Сколько суб-кубов различных размерностей (меньших или равных m) содержится в кубе C^m? Ответ на этот вопрос дают следующие Лемма и Теорема.

Обозначим буквой K множество всех суб-кубов куба C^m, их число – $|K|$. Через K_r обозначим множество всех суб-кубов размерности r, их число – $|K_r|$.

Лемма 1. *Количество $|K_r|$ всех суб-кубов размерности r ($0 \le r \le m$) в кубе C^m* равно

$$|K_r| = 2^{m-r} \cdot C_m^r = 2^{m-r} \cdot \frac{m!}{r!(m-r)!} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Количество всех вершин куба C^m равно 2^m.

Количество всех суб-кубов размерности *r*, содержащих в себе какую-либо фиксированную вершину куба C^m, равно числу сочетаний из *m* по *r* $\left(C_m^r\right)$.

Количество вершин в каждом суб-кубе размерности *r* равно 2^r.

Следовательно, чтобы определить число всех суб-кубов размерности *r* в кубе C^m, необходимо умножить 2^m (число всех вершин куба C^m) на C_m^r (число всех суб-кубов размерности *r*, содержащих в себе какую-либо фиксированную вершину куба C^m), и разделить результат на 2^r (число вершин в кубе размерности *r*), чтобы убрать повторение одних и тех же кубов размерности r, так как в величине $2^m \cdot C_m^r$ каждый r-мерный куб учитывается 2^r раз, как содержащий в себе 2^r собственных вершин.

Исходя из этого, получим

$$\left|K_r\right| = \frac{2^m \cdot C_m^r}{2^r} = 2^{m-r} \cdot C_m^r .$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Суммарное число суб-кубов всех размерностей в кубе размерности m равно* 3^m.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из леммы 1 следует, что в кубе C^m число всех суб-кубов $|K|$ равно

$$|K| = \sum_{r=0}^{m} \left|K_r\right| = \sum_{r=0}^{m} 2^{m-r} \cdot C_m^r .$$

С другой стороны, в соответствии с формулой Бинома Ньютона, имеем:

$$(a+b)^m = \sum_{r=0}^{m} a^{m-r} \cdot b^r \cdot C_m^r .$$

Из этой формулы для $a = 2$, $b = 1$ получаем:

$$3^m = \sum_{r=0}^{m} 2^{m-r} \cdot 1^r \cdot C_m^r = \sum_{r=0}^{m} 2^{m-r} \cdot C_m^r \ .$$

Сравнивая первое и третье уравнения, получаем:

$$|K| = 3^m \ .$$

Теорема доказана.

Определения и обозначения полурешеток и решеток кубов и некоторые их свойства.

Обозначим через C, $C \in K$ любой элемент множества K. Элемент C размерности r, обозначим через C^r, $r = 0,1,2,...,m$. Каждый $C \in K$ может описываться двумя подмножествами ω_1, $\omega_2 \subset I$, где $\omega_1 \subset \omega_2$, $I = \{1,2,...,m\}$, ω_1 – «нижняя», ω_2 – «верхняя» вершины множества вершин куба C. Для куба C^m $\omega_1 = \varnothing$, $\omega_2 = I$, $C^m = (\varnothing; I)$. Для каждого конкретного куба C можно определить ω_1 и ω_2, $\omega_1 \subset \omega_2$, и представить C в виде $C = (\omega_1; \omega_2)$. Например, кубы $C^1 = (\omega_1; \omega_2)$, где $\omega_1 \subset \omega_2$ и $|\omega_2 / \omega_1| = 1$, а для любого куба размерности r $C^r = (\omega_1; \omega_2)$, где $\omega_1 \subset \omega_2$ и $|\omega_2 / \omega_1| = r \ (0 \le r \le m)$. Количество вершин в кубе $C = (\omega_1; \omega_2)$ равно $2^{|\omega_2 \setminus \omega_1|}$, а количество всех суб-кубов равно $3^{|\omega_2 \setminus \omega_1|}$.

Введем, для элементов $C \in K$, определения объединения ($\vee$) и пересечения ($\wedge$). Пусть $C_1 = (\omega_1^1; \omega_2^1)$, $C_2 = (\omega_1^2; \omega_2^2)$, $\omega_1^1 \subset \omega_2^1$; $\omega_1^2 \subset \omega_2^2$, тогда

$$C_1 \vee C_2 = C = (\omega_1^1 \cap \omega_1^2; \omega_2^1 \cup \omega_2^2) \qquad (2.1)$$

Объединение верхних множеств вершин кубов всегда включает в себя пересечение нижних множеств вершин:

$$(\omega_2^1 \cup \omega_2^2) \supset (\omega_1^1 \cap \omega_1^2)$$

откуда $C = C_1 \vee C_2 \in K$, т.е. C – куб.

Аналогично вводится определение пересечения:

$$C_1 \wedge C_2 = C = (\omega_1^1 \cup \omega_1^2; \omega_2^1 \cap \omega_2^2), \qquad (2.2)$$

Если $\left(\omega_1^1 \cup \omega_1^2\right) \subset \left(\omega_2^1 \cap \omega_2^2\right)$, то $C = C_1 \wedge C_2 \in K$.

Например:

$$C_1 = (\{3\}; \{1,2,3,4\}), C_2 = (\{2\}; \{2,3,4,5\});$$

$$C_1 \vee C_2 = (\varnothing; \{1,2,3,4,5\});$$

$$C_1 \wedge C_2 = (\{2,3\}, \{2,3,4\}).$$

Но не всегда $\left(\omega_1^1 \cup \omega_1^2\right) \subset \left(\omega_2^1 \cap \omega_2^2\right)$. Например:

$$C_1 = (\{1,2\}; \{1,2,3\}),\ C_2 = (\{2,4\}; \{1,2,4\});$$

$$C = C_1 \wedge C_2 = (\{1,2,4\}; \{1,2\}).$$

Так как $\{1,2,4\} \not\subset \{1,2\}$, то $(\{1,2,4\}; \{1,2\})$ – не куб и не принадлежит K.

Следовательно, множество K – не решетка [1], так как операция пересечения (2.2) на нём не определена. С операцией объединения (2.1) множество K – полурешетка, а именно, K является верхней полурешеткой $\langle K, \vee \rangle$ [2].

Однако, можно ввести другую операцию $\wedge$ для множества K следующим образом:

$$C_1 \wedge C_2 = \begin{cases} C \ \left(\omega_1^1 \cup \omega_1^2; \omega_2^1 \cap \omega_2^2\right), & \text{если } \left(\omega_1^1 \cup \omega_1^2\right) \subset \left(\omega_2^1 \cap \omega_2^2\right) \\ \varnothing, & \text{если } \left(\omega_1^1 \cup \omega_1^2\right) \not\subset \left(\omega_2^1 \cap \omega_2^2\right) \end{cases} \qquad (2.3)$$

Тогда на множестве K выполняются 2 операции $\vee$ (2.1) и $\wedge$ (2.3). Поэтому, при этих условиях, K – решетка [1].

Теорема 2. *Решетка кубов K является решёткой с относительным дополнением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого элемента решётки $C_1 \in K$ найдется хотя бы один элемент $C_2 \in K$ такой, что $C_1 \cup C_2 = (0;I)$, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$.

Действительно, пусть $C_1 = (\omega_1^1;\omega_2^1)$, где $\omega_1^1 \subset \omega_2^1$, а $C_2 = (\omega_1^2;\omega_2^2)$, где $\omega_1^2 \subset \omega_2^2$. Покажем, что элемент решетки C_2, у которого $\omega_1^2 = 0$, а $\omega_2^2 = I \backslash \omega_2^1$, является относительным дополнением к элементу C_1.

Убедимся в этом непосредственной проверкой, используя вышеприведённые определения операций объединения (2.1) и пересечения (2.3) элементов решётки кубов K.

$$C_1 \cup C_2 = (\omega_1^1;\omega_2^1) \cup (0; I/\omega_2^1) = (0;I).$$

$$C_1 \cap C_2 = (\omega_1^1;\omega_2^1) \cap (0; I/\omega_2^1) = (\omega_1^1;0) = \varnothing.$$

Что и доказывает теорему 2.

(Заметим, что число относительных дополнений к каждому элементу быть не единственным.)

Диаграмма решётки кубов

Операция объединения $\vee$ позволяет ввести частичный порядок между элементами $C \in K$.

Определение 1. $C_1 = (\omega_1^1;\omega_2^1) \subset C_2 = (\omega_1^2;\omega_2^2)$, если $C_1 \vee C_2 = C_2$, т.е. когда $\omega_1^1 \supset \omega_1^2$ и $\omega_2^1 \subset \omega_2^2$.

На основании этого определения построим диаграмму множества всех $C \in K$ [2], [3].

На нулевом уровне диаграммы только один элемент – пустое подмножество ($\varnothing$).

На первом уровне расположим все (2^m) суб-кубов, содержащих только один элемент, т.е. кубы $C^1 = (\omega_1;\omega_2)$, где $\omega_1 = \omega_2$, включая суб-куб $C^1 = (0{,}0)$, являющийся нижним элементом куба $C^m = (\varnothing; I)$.

Затем, используя операцию $\vee$, построим элементы второго уровня. На этом уровне расположим только кубы C^2 , и т.д. Этот процесс построения кубов подобен модифицированному алгоритму последовательных расчетов [3], с модификациями, соответствующими операциям $\vee$. В процессе построения следующих уровней диаграммы кубов, мы не строим одновременно все элементы каждого уровня, а только часть элементов, аналогично тому, как это делается в алгоритме последовательных расчетов. Это позволяет экономить память. На рис. 10 показана диаграмма решётки кубов при *m=3*.

Супермодулярные функции на решётках кубов и оптимизация

На решётках кубов можно задавать субмодулярные и супермодулярные функции, т.е. функции, для которых выполняются соответствующие неравенства

$$f(C_1)+f(C_2)-f(C_1\wedge C_2)-f(C_1\vee C_2)\geq 0$$

либо

$$f(C_1)+f(C_2)-f(C_1\vee C_2)-f(C_1\wedge C_2)\leq 0,$$

так как для любых двух элементов $C\in K$ определены две операции $\vee$ и $\wedge$. Этот класс функций не является пустым [5].

Приведём конкретные примеры таких функций, определенных для всех $C\in K$. Субмодулярная функция $f_1(C)$

$$f_1(C)=f(\omega_1,\omega_2)=\sum_{i\in\omega_2}b_i\max_{j\in\omega_1}c_{ij}-\sum_{i\in\omega_1}T_i-a2^{|\omega_2\setminus\omega_1|},$$

супермодулярная функция $f_2(C)$

$$f_2(C)=f(\omega_1,\omega_2)=\sum_{i\in\omega_2}b_i\min_{j\in\omega_1}c_{ij}+\sum_{i\in\omega_1}T_i+a2^{|\omega_2\setminus\omega_1|},$$

где $c_{ij}\geq 0,\ b_i>0,\ a>0,\ T_i\geq 0$.

Доказательства субмодулярности и супермодулярности этих функций дано в работе [5].

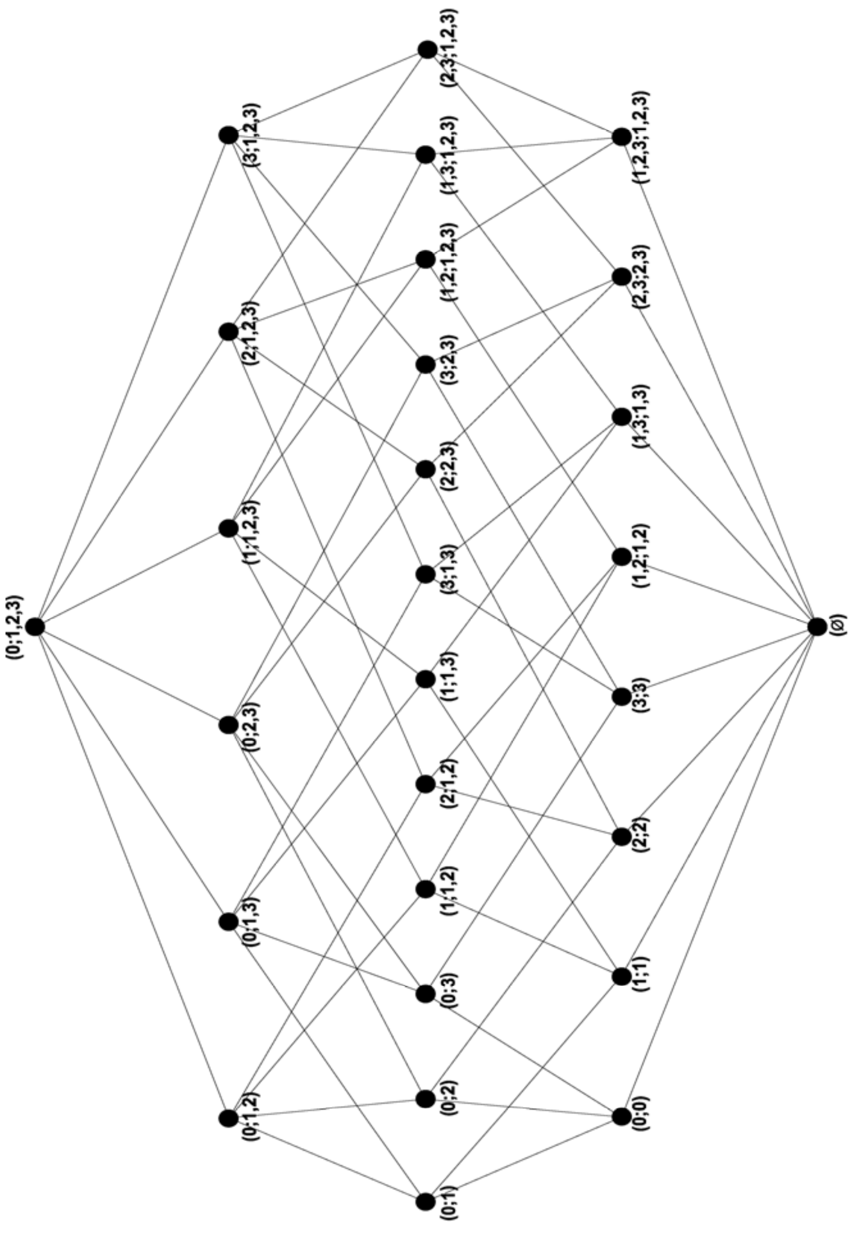

Рис. 10. Диаграмма решётки кубов при *m=3*

Экономический смысл функций $f_1(C)$ и $f_2(C)$ может быть в первом случае – прибыль, во втором – затраты. Задачами оптимизации могут быть в первом случае – максимизация прибыли, во втором – минимизация затрат. Рассматриваемые задачи можно считать обобщением известных многоэкстремальных задач оптимального размещения предприятий.

Мы показали выше, что решётка кубов является решёткой с относительным дополнением (теорема 2). В работах [6, 7] показано, что для всех решёток с относительным дополнением выполняется следующее свойство:

На всех путях диаграммы такой решётки, содержащих локальный минимум супермодулярной функции, эта функция монотонно убывает от пустого множества до локального минимума и монотонно возрастает от локального минимума до вершины диаграммы.

На основании этого свойства разработаны алгоритмы, позволяющие определять глобальные минимумы и максимумы супермодулярных функций, заданных на решётках с относительным дополнением.

Алгоритмы оптимизации супермодулярных и субмодулярных функций на решетках кубов могут осуществляться подобно комбинаторным алгоритмам оптимизации для других решеток [3] с соответствующими правилами отбраковки неоптимальных решений, модифицированных для решеток кубов.

Литература

1. *Birkhoff G.* Lattice Theory. – New York: Revised Edition, 1948.

2. *Gratzer G.* General Lattice Theory. – Berlin: Akademie-Verlag, 1978.

3. *Хачатуров В.Р., Веселовский В.Е., Злотов А.В., Калдыбаев С.У., Калиев Е.Ж., Коваленко А.Г., Монтлевич В.М., Сигал И.Н., Хачатуров Р.В.* Комбинаторные методы и алгоритмы

решения задач дискретной оптимизации большой размерности. – М.: Наука, 2000.

4. *Хачатуров В.Р.* Математические методы регионального программирования. Экономико-математическая библиотека. – М.: Наука, 1989.

5. *Khachaturov V.R., Khachaturov Ruben V.* Lattice of Cubes Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2008. – Vol. 47. – № 1. – P. 40–46.

6. *Khachaturov V.R.* Supermodular Functions on Lattices. // Problems of Application Mathematics and Informatics. – M.: Nauka. – 1987. – P. 251–262.

7. *Khachaturov Vladimir R., Khachaturov R.V., Khachaturov R.V.* Supermodular Programming // First Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chisinau, August 16–18. – 2001. – P. 84–86.

О ПРОБЛЕМАХ ФИЗИЧЕСКОЙ НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ В СОВРЕМЕННЫХ УСЛОВИЯХ

Д.Р. Хохлов
член-корреспондент РАН, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Достижения и проблемы с профессиональной деятельностью в области физики

Достижения:

А) 7 Нобелевских премий по физике.

Достижения российских ученых в области физики общеизвестны. Достаточно отметить, что 10 российских ученых стали лауреатами 7 Нобелевских премий по физике. Таких результатов нет ни в одной другой естественнонаучной или гуманитарной области. Это стало следствием особого внимания, которое уделялось развитию физики во времена Советского Союза. В государственных структурах имелось понимание того, что технический прогресс, сохранение обороноспособности страны, развитие производства невозможны без успехов физики, которая является фундаментом современных представлений об устройстве мира и о способах использования законов устройства мира для целей человека.

Б) Существование общепризнанных в мире научных школ.

Во времена Советского Союза сформировались уникальные в мировой практике сообщества – научные школы. Эти школы, как правило, возглавлялись выдающимися учеными, имеющими общепризнанные научные заслуги. Вокруг руководителей школы формировался устойчивый коллектив единомышленников, способный решать крупные проблемы. Это именно тот случай, когда совокупный интеллект группы людей оказывается существенно выше суммы интеллектов людей, составляющих группу. Важно, что государственная система стимулировала формирование таких школ, что явилось залогом выхода российской физики в лидеры мировой науки.

В) Существование научных центров с мировой известностью и с хорошим техническим оснащением.

Современная физика немыслима без развитой приборной базы. В настоящее время в России существует целый ряд крупных научных центров в Москве, Санкт-Петербурге, Нижнем Новгороде, Новосибирске и в ряде других городов. Эти центры обладают современной приборной базой, позволяющей проводить исследования на мировом уровне. Такие центры пользуются мировой известностью и авторитетом, участвуют в совместных проектах с крупнейшими зарубежными университетами и лабораториями. Ученые из этих центров публикуют свои работы в наиболее авторитетных международных журналах и являются приглашенными докладчиками и организаторами самых крупных международных научных конференций.

Г) Появление возможностей для финансирования перспективных исследований (по крайней мере, до кризиса).

Современная физика является дорогим удовольствием в прямом смысле этого слова. Даже поддержание работы тех научных центров, о которых шла речь, уже не говоря об их развитии, требует значительных средств. В перспективе такие вложения, безусловно, окупаются, поскольку приводят к созданию новых технологий, которые могут быть внедрены в производство. Однако следует понимать, что вложение средств в фундаментальные исследования только в очень редких случаях приводит к быстрому практическому результату. В то же время без такого вложения средств вообще ни на какой практический результат нельзя рассчитывать. Благоприятная финансовая ситуация в России до кризиса и определенное понимание важности финансирования науки со стороны государства привело в последнее время к существенному подъему финансирования научных исследований. В результате появились предпосылки для значительного развития перспективных исследований.

Проблемы:

А) Нобелевские премии получены за работы, выполненные во времена Советского Союза.

К сожалению, все высшие достижения, за которые российские ученые получали Нобелевские премии, были выполнены давно, еще во времена Советского Союза. Конечно, не всегда Нобелевские премии вручаются за «свежие» разработки, но за последние 15–20 лет о выдающихся достижениях российских физиков слышно не было. Это явилось безусловным следствием того факта, что начиная с начала 1990-х годов в российской науке вообще, и в физике в частности, вопрос стоял, в основном, не о развитии, а о выживании.

Б) Многие научные школы прекратили свое существование.

В течение 1990-х годов многие коллективы научных школ фактически распались. Исследования, проводившиеся этими школами, в одночасье оказались невостребованными, финансирование было резко сокращено или вовсе прекращено, квалифицированные кадры, составлявшие ядро этих школ, были вынуждены искать другое место работы. Если во времена Советского Союза физика представляла собой область деятельности, в которой практически по каждому направлению развития имелась одна, или даже несколько конкурирующих научных школ, то после 90-х годов она оказалась фрагментированной. Остались только некоторые «точки роста», но общей могучей структуры, в которой все эти точки роста работали бы коррелированно, уже нет.

В) Количество научных центров, ведущих работу на международном уровне, резко сократилось по сравнению со временами СССР.

Как правило, крупные научные центры в России создавались на основе одной или нескольких научных школ. Распад многих научных школ в 1990-е годы привел к тому, что число научных центров, ведущих работу на хорошем международном уровне, также резко сократилось.

Г) Практически полностью уничтожена в 1990-е годы система отраслевой науки.

В СССР отраслевая наука была призвана обеспечить связь между фундаментальными исследованиями, проводившимися, в основном, в академических институтах и в университетах, и производством, основанным на высоких технологиях. В 90-е годы XX века отраслевые институты фактически были уничтожены. На их основе сначала возникали частные предприятия, которые, как правило, моментально перепрофилировались в многочисленные ООО и тому подобные структуры, приносящие немедленную прибыль в ущерб основному роду деятельности. Естественно, многочисленные квалифицированные кадры были вынуждены искать другое место работы. В современных условиях часто слышатся упреки со стороны государственных органов по отношению к институтам РАН и университетам в том, что они не внедряют свои разработки в производство. Следует, однако, помнить, что государство фактически своими руками развалило это недостающее звено прикладной науки, а практические разработки не являются основной целью работы институтов РАН и университетов. Другое дело, что на основе фундаментальных исследований институты РАН и университеты могли бы создавать малые дочерние предприятия, которые занимались бы внедрением этих разработок, но до последнего времени создание таких предприятий было запрещено.

Д) Значительный отток кадров за границу в 1990-е годы.

Одной из очень больших проблем российской физики стал массовый отъезд на работу за границей как выдающихся физиков старшего поколения, так и талантливой молодежи, только что получившей высшее физическое образование. Этот отъезд был связан со многими причинами, главные из которых – невозможность обеспечить достойный уровень жизни только занятием наукой, малая востребованность высококлассных физических исследований в России, отсутствие ясных жизненных перспектив в России при занятии наукой.

Е) Падение престижности науки.

Престиж науки вообще, и особенно физики, был очень высок в 50–60-е годы XX века. Это было именно то время, когда сформировались основные научные школы, были проведены исследования, за которые впоследствии был получен ряд Нобелевских премий. Однако, начиная с 70-х годов, престижность занятий физикой, внимание к этой науке со стороны государства стали спадать. В 1990-е годы этот процесс стал лавинообразным, на ученых, которые не уехали из страны, а пытались что-то сделать в России, в обществе стали смотреть как на неудачников. Менталитет большой части молодого поколения, взрослевшего в те годы, был связан с крайним индивидуализмом и культом денег. Именно в это время начал формироваться разрыв поколений в физике, о котором речь пойдет дальше. В 2000-е годы ситуация изменилась в другую сторону. Огромный приток нефтедолларов в страну не менее развращающее воздействовал на молодежь, многие представители которой искренне считали, что им должны платить много денег просто за факт их существования, и для этого нет необходимости много работать. Успешные занятия наукой немыслимы без тяжелого труда, поэтому молодежь и этого поколения весьма мало представлена в науке. В этом смысле особенно тяжелой была ситуация в столицах – Москве и Санкт-Петербурге, где соблазны для молодого человека высоки как нигде в других местах. Это обстоятельство также сильно ударило по российской физике, поскольку многие ведущие физические институты сосредоточены именно в этих городах.

Ж) Невозможность обеспечения достойного уровня жизни для молодежи, идущей в науку.

К сожалению, молодежь, которая, несмотря на все трудности, решила заниматься наукой, сталкивается с еще одной проблемой, которая непосредственно отражает отношение государства к науке. Стипендия студентов и аспирантов, зарплата младшего научного персонала такова, что на нее невозможно не только приобрести хотя бы какое-то жилье (это является немыслимой роскошью даже для профессуры), но даже просто физически выживать. Положение несколько спасают всевозможные гранты, в том числе для молодых ученых, но они не делают погоды. Молодые люди просто вынуждены подрабатывать в местах, не связанных с научной деятельностью, особенно когда у них появляется семья и дети. Поскольку деньги, которые они получают в этих других местах, как правило, несопоставимо большие, чем в науке, то рано или поздно им приходится выбирать, и этот выбор, к сожалению, в большинстве случаев не в пользу науки.

Главная проблема

- Разрыв поколений, отсутствие преемственности

Основной проблемой российской физики является отсутствие воспроизводства кадров в необходимом количестве. Как уже говорилось выше, произошло вымывание из науки кадров наиболее продуктивного возраста 30–45 лет. Заметным отличием международных и российских физических конференций является их возрастной состав. На международных конференциях физики возраста 30–45 лет являются, как правило, уже признанными авторитетами в своей области, основными организаторами и приглашенными докладчиками. На российских конференциях этот возрастной диапазон практически отсутствует, участвуют или «старики» старше 50 лет, или студенты и аспиранты до 30 лет. Именно в возрастном слое 30–45 лет должны формироваться лидеры, которые возьмут на себя будущее российской физики, однако из-за малочисленности этого поколения в физике вообще, количество лидеров этого возраста можно пересчитать по пальцам.

Некоторые характерные примеры:

- По данным ВАК, только за 5 лет количество диссертаций по физико-математическим наукам упало в 1,7 раза.
- На физическом факультете МГУ 2 года назад было около 250 докторов наук, из них только 32 – в возрасте до 50 лет. В настоящее время, судя по всему, ситуация еще более усугубилась.
- Если не принять мер, через 10–15 лет некому будет делать науку и учить студентов

Научная и образовательная системы очень инерционны, их трудно разрушить. Но если это все же сделать, то восстановить их будет практически невозможно.

Достижения и проблемы с высшим профессиональным образованием в области физики

Достижения:

А) Уровень российского физического образования – один из лучших в мире.

В 2008 г. в Московском государственном университете был проведен анализ наполнения и качества высшего физического образования в России и в лучших университетах США и Европы – Гарварде, Стэнфорде, Беркли, MIT, Кембридже, Оксфорде и других. Оказалось, что на уровне бакалавриата качество подготовки российских студентов-физиков заметно выше, чем у их зарубежных сверстников. Это проявляется, в частности, и в том, что если российский студент-физик поступает в западный университет в аспирантуру, то, как правило, он быстро становится одним из лучших, что обусловлено хорошей базовой подготовкой в российском вузе. Об этом хорошо знают зарубежные физики. Многие из российских ученых неоднократно получали просьбы от зарубежных коллег о направлении к ним хороших студентов-выпускников в аспирантуру.

Б) Методика преподавания физики великолепно отработана, имеется гигантский опыт преподавания.

Хороший уровень подготовки студентов-физиков в первую очередь связан с отработанной десятилетиями методикой подготовки исследователей высокого уровня. Последовательность чтения курсов, их наполнение, те или иные акценты изменяются с течением времени, подстраиваясь под новые результаты в физике, под традиционные направления исследований конкретного университета, однако основное содержание курсов позволяет сформировать прочную базу физических знаний у студентов.

В) Практически во всех ведущих лабораториях мира есть выпускники российских вузов, которые, как правило, задают тон в исследованиях.

Высокий уровень подготовки физиков в России стал причиной того, что в большинстве ведущих физических лабораторий мира работают выпускники российских вузов, причем они часто являются ведущими сотрудниками зарубежных университетов.

Г) Выпускники с физическим образованием востребованы не только в физике, но и во всех других областях деятельности.

Следует особо отметить, что высшее физическое образование позволяет успешно работать не только в физике, но и в других областях человеческой деятельности, в том числе и в тех, которые, казалось бы, очень далеки от физики. Имеется большое количество философов с физическим образованием, физики становятся известными писателями, работают в компьютерной индустрии, многие физики являются успешными предпринимателями. Обратных примеров, когда человек с гуманитарным образованием стал бы физиком высокого уровня, насколько нам известно, нет.

Проблемы:

А) Совершенно неоправданные для физического образования реформы высшего профессионального образования.

В начале 2000-х годов Россия вступила в Болонское соглашение и стала реформировать свою систему образования, приводя ее к англо-саксонской. Основное преимущество, декларируемое адептами болонской системы, заключаются в росте академической мобильности, которая, в свою очередь, должна обеспечиваться унификацией уровня подготовки в Европе и взаимным признанием дипломов. Не вступая здесь в дискуссию относительно того, насколько это увеличение академической мобильности отвечает российским национальным интересам, отметим лишь, что для физического образования проведение этой реформы является абсолютно бессмысленным. Действительно, благодаря высокому уровню подготовки российские физические дипломы и так признаются во всем мире. Унификация же уровня подготовки со среднеевропейским может привести только к понижению уровня физического образования в России. Отметим только два из отрицательных последствий перехода к болонской системе для физиков.

♦ Бакалавры физики не востребованы.

Работодатели по профилю полученной специальности, к которым относятся академические институты, университеты, ряд закрытых институтов, отмечают, что им не нужны выпускники бакалавриата. Действительно, при высоком уровне теоретической подготовки бакалавры еще практически не приступали к решению практических задач и не имеют необходимого практического опыта работы. Этот опыт давался на 5 курсе при подготовке специалистов, или в магистратуре – при подготовке дипломных работ или магистерских диссертаций. Студентов – выпускников бакалавриата нужно еще многому учить.

♦ Ограничение численности магистратур может привести к гибели многих университетов, в особенности региональных.

Известно, что основной рабочей силой в лабораториях являются студенты старших курсов и аспиранты. Если перейти на систему бакалавр – магистр и ограничить количество бюджетных мест в магистратуре, то научные исследования во многих университетских и академических физических лабораториях просто сойдут на нет. Часто говорят о возможности принимать в магистратуру на платное обучение. Следует, однако, отметить, что контингент студентов, которые идут учиться физике, таков, что они, как правило, не имеют возможности учиться на контрактной основе. В этом смысле физические факультеты университетов не являются «бюджетообразующими», в отличие от юридических и экономических факультетов. В то же время руководство большинства университетов понимает ключевое значение физических и других естественнонаучных факультетов, поскольку они являются «отчетообразующими» – те результаты, которыми университеты могли бы гордиться, как правило, получены на физфаках и других естественных факультетах.

Б) Слабая подготовка абитуриентов по физике.

К сожалению, уровень подготовки абитуриентов по физике в последние годы стал резко падать. Это связано со слабым уровнем школьной подготовки по физике, о чем пойдет речь ниже. В результате многие поступившие абитуриенты имеют значительные пробелы в базовой подготовке, которые приходится преодолевать, в основном, на первых курсах. Для многих даже потенциально талантливых студентов такая работа оказывается непосильной, что приводит к существенному росту отчислений студентов по результатам первых сессий. В то же время университеты не должны снижать планку требовательности к студентам, чтобы остаться конкурентоспособными.

В) Низкий престиж работы в области физики среди молодежи.

Работа в области физики, мягко говоря, является далеко не самой престижной в молодежной среде. Этому есть ряд существенных причин, главная из которых заключается в неясных жизненных перспективах при работе по специальности, о чем говорилось выше. Молодые люди прекрасно понимают, что физике учиться трудно. Поэтому немногие из них готовы тяжело работать 5-6 лет в студенчестве, а потом три года в аспирантуре для того, чтобы стать младшим научным сотрудником академического института.

Г) Снижение уровня требовательности к студентам.

Снижение уровня подготовки абитуриентов и апатия некоторых преподавателей в ряде случаях приводит к уменьшению требовательности при подготовке студентов. Следует в то же время отметить, что если студент ориентирован на то, чтобы получить качественную профессиональную подготовку высокого уровня именно в области физики, он имеет все возможности это сделать, как и 30–40 лет назад.

Д) Отсутствие вступительных экзаменов по физике для естественнонаучных специальностей.

В 1960–1980 годы вступительные экзамены по физике осуществлялись по большинству естественнонаучных специальностей. Начиная с 90-х годов XX века, многие естественнонаучные факультеты стали отказываться от вступительных экзаменов по физике. В то же время физика осталась в числе преподаваемых дисциплин на этих факультетах, что естественно, поскольку физические методы являются одними из основных для практически всех естественнонаучных специальностей. Ситуацию усугубило то, что уровень школьной подготовки по физике в 1990-е годы резко понизился. Физика вообще перестала быть обязательным предметом для изучения в школе. В результате знания многих студентов естественнонаучных специальностей по физике представляют собой «белый лист», и учить их приходится не по университетской, а по школьной программе. Интересен опыт химического факультета МГУ – это один из немногих естественных факультетов МГУ, которые не отказались от вступительных экзаменов по физике (во времена до введения ЕГЭ).

В 1990-е годы в определенный момент на факультете решили отказаться от вступительного экзамена по физике. Выяснилось, что уровень подготовки студентов этого года по химии оказался существенно ниже многолетнего среднего. На следующий год вступительный экзамен по физике восстановили, уровень подготовки по химии немедленно также восстановился. Корреляция стопроцентная.

Достижения и проблемы со школьным образованием в области физики

Достижения:

А) Традиции сильного уровня преподавания физики в школе.

Успехи советской и российской физической науки и высшего образования были немыслимы без хорошей массовой школьной подготовки по физике. В советские времена школьное преподавание физики было поставлено на очень высоком уровне. Была совершенно нормальной и достаточно частой ситуация, когда талантливый школьник, обучавшийся в сельской школе, поступал на физический факультет МГУ или других ведущих вузов. Даже обычные школы могли обеспечить массовый уровень преподавания физики, достаточный для поступления в ведущие физические вузы.

Б) Хорошая методическая проработанность школьной программы.

Безусловно, высокий уровень школьного преподавания физики был связан с хорошей методической проработанностью школьной программы, когда школьники получали представление об основных законах физики, и умели эти законы использовать при решении задач и в практических работах. Стоит особо отметить, что в советские времена школьные физические практикумы, лабораторные работы и демонстрации находились на весьма высоком уровне, позволявшем школьникам получить практическое представление о законах физики.

В) Наличие хороших старых школьных учебников по физике.

Во времена СССР было написано много классических школьных учебников по физике. Основы физики с тех пор не изменились, и поэтому эти учебники вполне можно использовать как основу для преподавания и по сей день.

Проблемы:

А) Сокращение удельного веса физики в школьной программе, исключение астрономии.

Большим ударом по школьной физике стало существенное сокращение числа часов на изучение физики, а также исключение астрономии из школьной программы. Фактически физика стала одним из факультативных предметов. Действительно, теперь выпускнику школы нет необходимости сдавать выпускной экзамен по физике. ЕГЭ по физике также нужно сдавать только тем, кто в дальнейшем планирует поступать на физические специальности. Фактически это привело к тому, что на серьезном уровне физику изучают только в специализированных физико-математических школах. Большой проблемой становится то, что предлагаемые и реализуемые школьные стандарты по физике не обсуждаются ни с исполнителями этих стандартов – школьными учителями, ни с «потребителями» – вузами профильной направленности.

Б) Низкая зарплата учителей.

Падение престижности профессии учителя связано, в том числе, с низкими уровнями зарплат. Справедливости ради надо отметить, что в некоторых регионах, например, в Москве, местные власти осуществляют солидную надбавку к зарплате учителей, благодаря чему зарплата учителя стала вполне достойной. Правда, выпускники педагогических вузов по-прежнему с большой неохотой идут работать в школу, поскольку те же, и даже большие деньги они могут зарабатывать в других местах без той огромной нагрузки, которую несут учителя.

В) Низкий престиж учителя, выпускники педагогических вузов не идут в школы.

Учитель является центральной фигурой в школе. Фактически кадровый состав учителей определяет уровень преподавания. К сожалению, в 1990-е годы престиж профессии учителя, как и научного работника, резко упал. В результате выпускники педагогических вузов шли работать куда угодно, только не в школу. Как следствие, кадровый состав учительского корпуса понес серьезные потери. Особенно это сказалось на учителях-предметниках. К сожалению, нередкими стали ситуации, когда физику ведут (если вообще ведут), например, учителя физкультуры.

Г) Введение ЕГЭ, ученики не учат физику, а натаскиваются на ЕГЭ.

Введение ЕГЭ как основного способа поступления в вузы стало еще одним сильным ударом по уровню школьного физического образования. Изначально основной пафос введения ЕГЭ был связан с якобы исключением коррупционных схем при поступлении в вузы. Однако в данном случае следует существенно разделить естественнонаучные и инженерные специальности, с одной стороны, и гуманитарные специальности, с другой стороны. Не секрет, что основные претензии к вузам по коррупционным схемам при поступлении, как правило, связывались с модными экономическими и юридическими специальностями. На естественнонаучные и инженерные специальностях, как правило, эти схемы практически не работали. Можно смело утверждать, что если школьник хорошо подготовлен, то в подавляющем большинстве случаев он поступает в вуз по результатам приемных экзаменов. Более того, преподаватели вузов, имея большой опыт, на устном экзамене могут выявить и способных студентов, которые по каким-то причинам не получили адекватного образования по физике в школе. ЕГЭ же полностью исключает такую возможность. Преподаватели, принимающие экзамены, больше всего заинтересованы в том, чтобы к ним пришли сильные студенты, которые стали бы через 4–5 лет основной движущей силой в лабораториях. Абитуриенты, которые хотели бы «купить» поступление, на физические факультеты практически не идут, поскольку там учиться очень трудно. Введение ЕГЭ привело к тому, что даже из того небольшого количества часов, которые остались в программе на физику, в двух последних классах основное время уходит на натаскивание к ЕГЭ. Опыт многих учителей говорит, что натаскивание на успешную сдачу тестов и реальное понимание физики – две существенно различающиеся задачи. Поскольку положение учителя зависит от того, насколько успешно его ученики сдадут ЕГЭ, он и занимается не преподаванием физики, а преподаванием приемов, с помощью которых можно успешно сдать ЕГЭ.

Д) Деградация физических демонстраций и практикумов в школе.

Физические демонстрации являются одним из важнейших методов обучения физике. К сожалению, в последнее время такие демонстрации, практикумы и лабораторные работы по физике во многих школах не проводятся. Это связано как с изношенностью старого оборудования, так и с нехваткой компетентного преподавательского состава по физике.

Е) Разобщенность учительского корпуса.

Одной их самых главных проблем учительского сообщества является его разобщенность. Академическое сообщество организовано в рамках РАН, в университетах есть общественные организации – союз ректоров, учебно-методические объединения, которые отстаивают интересы сообщества как целого. В результате власти вынуждены считаться с этими организациями, поскольку другой науки и высшего образования в стране просто нет. А учителя оказались предоставлены сами себе. У них нет организации, которая их объединяла бы и позволяла выступать с общими предложениями, а также отстаивать интересы всего сообщества.

Основные задачи физического сообщества России

Кадры решают все.

Сейчас стало совершенно понятно, что ключ к решению задач инновационной экономике лежит в подготовке квалифицированных кадров. Можно закупить самое лучшее в мире оборудование, но оно ничего не будет стоить, если на нем некому будет работать. На нем некому будет работать, если никто не сможет научить, как на нем работать. Никто не сможет научить, как работать на оборудовании, если некого будет учить. Поэтому задача должна ставиться комплексно. Необходимы:

- Кадры для науки и высшего образования
- Кадры для преподавания в школе
- Кадры – школьники, потенциальные студенты

Начинать нужно с основания пирамиды:

учителя + школьники

Первые шаги, которые необходимо сделать в этом направлении

1. Увеличение удельного веса физики в школьной программе до прежнего уровня.
2. Увеличение зарплаты учителям – предметникам до достойного уровня.
3. Рассмотрение ситуации с ЕГЭ – подготовка к нему не должна превращаться в натаскивание.
4. Стимулирование выпускников педагогических вузов для работы в школе.
5. Широкое олимпиадное движение.
6. Проведение школ и методических семинаров для учителей в каникулярное время.
7. Проведение конференций для школьников.

Каким образом можно добиться решения поставленных задач

Одной из главных задач является объединение физического сообщества. Должна быть создана организация, которая бы формировала и отстаивала интересы физического сообщества на региональном и федеральном уровне, информировала бы физическое сообщество об основных проблемах и достижениях в физической науке и образовании. Такая организация должна была бы опираться на уже существующие структуры: академические структуры, учебно-методические объединения по физике, и стимулировать создание профессионального объединения учителей-физиков.

Что делать:

- Объединение физического сообщества, для начала на региональном уровне.
- Проведение мероприятий, направленных на рост интереса школьников к физике.
- Проведение методических и научных конференций для учителей физики.
- Лоббирование физического образования на региональном и федеральном уровне.

Что сделано:

- В ряде регионов уже имеются аналоги ассоциации учителей-физиков.
- УМС по физике УМО по классическому университетскому образованию принял решение о необходимости создания федеральной ассоциации учителей-физиков.
- Такая работа должна вестись в плотной координации с УМС по физике УМО по техническим наукам, по педагогике, и т.д.
- Имеется понимание о необходимости плотного взаимодействия в этом направлении с РАН

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА МОНОТОННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ЧИСЛАХ ДЕДЕКИНДА

Ю.И. Худак
профессор Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики

В работе приведено алгоритмическое решение проблемы отыскания чисел Дедекинда $\mathbf{d}_n$, выражающих количество монотонных булевых функций (МБФ) от *n* булевых переменных – M_n: $\mathrm{d_n} \overset{\mathrm{def}}{=} |\,\mathrm{M_n}\,|$.

Для описания структуры МБФ используется язык специальных троичных и шестеричных чисел, на котором удобно осуществлять компактную запись значений МБФ. В основе всех построений лежит метод продолжения булевой функции от *n* булевых переменных до булевой функции от (*n* + 1)-го переменного.

В качестве геометрических моделей аналитических объектов выступают треугольники T_n размеров $\mathbf{t}_{\mathbf{d}_n}$ с купюрами общей площадью σ_n, обладающие интересными арифметическими и алгебраическими свойствами.

1. Первые значения последовательности $\mathbf{d}_n$ и аналитическое задание МБФ

Значения первых трех чисел Дедекинда $\mathbf{d}_0 = 2$, $\mathbf{d}_1 = 3$, $\mathbf{d}_2 = 6$ легко получаются из определения МБФ.

Определение 1. *Булева функция* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *от n булевых переменных* $x_1, x_2, ..., x_n$ *называется монотонной, если для любых сравнимых между собой наборов значений булевых переменных*

$$\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \text{ и } \vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

таких, что

$$\vec{a} \le \vec{b} \text{ если } a_j \le b_j \quad (j = 1,2,\dots,n)$$

имеет место неравенство:

$$f(\vec{a}) \le f(\vec{b})$$

Число $d_0 = 2$ отвечает абсолютно «вырожденному» множеству МБФ M_0, состоящему из двух функций – тождественных констант: $\hat{0} \overset{\text{def}}{=} 0$ и $\hat{1} \overset{\text{def}}{=} 1$ входящих во все множества M_n больших размерностей.

Число $d_1 = 3$ отвечает множеству МБФ M_1, состоящему из констант $\hat{0}$ и $\hat{1}$ и монотонной функции: $f(x) \overset{\text{def}}{=} x$.

При геометрической интерпретации множества M_1 можно использовать треугольник T_1, изображенный ниже в виде треугольной таблицы, где каждая клетка соответствует одной булевой функции $f \in M_1$, определяемой набором ее значений:

$$\begin{matrix} (00) & (01) \\ & (11) \end{matrix}, \tag{1}$$

где первая координата определяет номер строки, а вторая координата определяет номер столбца, в котором расположена соответствующая булева функция.

Число Дедекинда $d_2 = 6$ отвечает множеству МБФ M_2, – булевых функций от двух булевых переменных *x*, *y*.

Эти функции могут быть заданы булевыми векторами своих значений:

$$\begin{matrix} (0000) & (0001) & (0011) \\ & (0101) & (0111) \\ & & (1111) \end{matrix}, \tag{2}$$

где первые две координаты определяют номер строки, а вторая пара координат определяет номер столбца, в котором расположена булева функция.

При геометрической интерпретации множества M_2 можно использовать треугольник T_2 в виде приведенной выше таблице (2), где каждая клетка соответствует одной булевой функции $f \in M_2$.

При этом две функции, расположенные в «острых» углах фигуры (2), как и в случае (1), отвечают константам $\hat{0}$ и $\hat{1}$.

Каждая из двух монотонных функций, отвечающих отдельным переменным *x*,*y*, ***несущественно*** зависит от «другой» переменной. При этом функция, отвечающая «старшей переменной» *x* расположена в третьем («прямом») углу фигуры, а функция, отвечающая «младшей переменной» *y*, располагается напротив *x*, на «гипотенузе» треугольника.

Две, оставшиеся не упомянутыми, монотонные функции от двух переменных *x*, *y*, ***существенно*** зависящие от них обоих, – это их конъюнкция $x \wedge y$, расположенная на горизонтальном «катете» треугольника, около функции $\hat{0}$, и дизъюнкция — $x \vee y$, расположенная на вертикальном «катете» треугольника, около функции $\hat{1}$.

«Гипотенуза» треугольника на фигуре (2) получается из ***всех*** клеток треугольника фигуры (1), при прочтении их друг за другом *по строкам* с заменой «старшей» переменной *x* на «младшую» *y*, или при прочтении последовательно ***по столбцам*** (начиная с последнего) с заменой «старшей» переменной *x* на «младшую» *y*.

Поэтому горизонтальный и вертикальный «катеты» треугольника на фигуре (2) естественно назвать ***конъюнктивным*** и ***дизъюнктивным*** соответственно.

Число Дедекинда $d_3 = 20$ указывает количество монотонных булевых функций от трех булевых переменных x, y, z.

При этом ровно девять из них ***существенно*** зависят от всех ***трех*** переменных, а остальные вырожденные: две абсолютные константы, а еще девять имеют одну или две переменные, от которых они зависят ***несущественно***.

Аналогично $n = 1, 2$, функции 3-х переменных могут быть заданы 8-мерными булевыми векторами своих значений, а при геометрической интерпретации M_3 естественно использовать треугольник T_3, изображенный на рисунке (3), где принцип взаимно-однозначного соответствия между булевыми функциями $f \in M_3$ и клетками на фигуре (3) остается аналогичным принятому выше: первая половина – четыре координаты являются номером строки, а оставшиеся четыре координаты – представляют номер столбца, в котором расположен этот вектор.

(0000 0000)	(0000 0001)	(0000 0011)	(0000 0101)	(0000 0111)	(0000 1111)	
	(0001 0001)	(0001 0011)	(0001 0101)	(0001 0111)	(0001 1111)	
		(0011 0011)		(0011 0111)	(0011 1111)	(3)
			(0101 0101)	(0101 0111)	(0101 1111)	
				(0111 0111)	(0111 1111)	
					(1111 1111)	

При этом «гипотенуза» треугольника на фигуре (3) получается из всех клеток треугольника на фигуре (2) при развертывании их друг за другом ***по строкам*** с заменой «старшей» переменной x на «следующую» y, а той, в свою очередь, на «младшую» переменную z или при развертывании их последовательно ***по столбцам*** (начиная с последнего) с заменой «старшей» переменной x на «младшую» z.

В отличие от (1) и (2), ***геометрическая*** симметрия относительно высоты прямого угла на рисунке (3) носит более сложный характер, чем в (1), (2): во всех функциях переменные y и z меняются между собой местами и, кроме того, друг на друга заменяются знаки операций конюнкции и дизъюнкции над соответствующими переменными.

Отметим еще характерное для фигуры (3) «обтекание» «запретной» ячейки $\boxed{00110101}$ однотипными и дополнительными по размерности друг другу формулами, выражающими соответствующие монотонные булевы функции.

Так, например, двойной конюнкции $x \wedge y \wedge z$ отвечает двойная же дизъюнкция этих переменных $x \vee y \vee z$, что на геометрическом языке устанавливает соответствие между «точкой» – вершиной $1,1,1$ булева куба $\mathbf{B}^3$ и объединением трех его граней x, y и z, а три последовательных парных конъюнкции $x \wedge z$, $x \wedge y$ и $y \wedge z$, отвечающих трем ребрам булева куба $\mathbf{B}^3$, приводятся в соответствие с парами соответствующих плоскостей $\mathbf{B}^3$, являющихся носителями соответствующих парных дизъюнкций $x \vee y$, $x \vee z$ и $y \vee z$ в указанном порядке.

Число Дедекинда $d_4 = 168$ может быть получено из различных элементарных соображений. Для него также возможна геометрическая интерпретация в виде треугольника T_4 с купюрами, наподобие рисунков (1) – (3), которую, однако, мы не приводим, ввиду ее громоздкости.

При этом, естественно отметить, что треугольник T_4 получается из треугольника T_3 по тому же самому принципу ($\wedge - \vee$) – «раскладушки» по которому каждый последующий треугольник T_k получался из предыдущего T_{k-1} и серьезную ***геометрическую*** асимметрию треугольника T_4 ввиду геометрически несимметричного расположения в нем купюр.

Для треугольника T_4 справедлива формула:

$$d_4 = t_{d_3} - \sigma_4, \qquad (*)$$

где t_k – k-ое треугольное число, а σ_4 – общее количество запрещенных позиций на рисунке, отвечающем T_4.

При подстановке в формулу (*) соответствующих численных значений: $t_{d_3} = t_{20} = 210$ и $\sigma_4 = 42$, мы получим соответствующее значение числа $d_4 = 168$.

Написанная выше формула для числа d_4 является общей:

$$d_n = t_{d_{n-1}} - \sigma_n, \qquad (**)$$

где, как и выше, t_k – k-ое треугольное число, а σ_n – общее количество запрещенных позиций в конъюнктивно-дизъюнктивном треугольнике ($\wedge - \vee$-треугольнике) T_n, геометрически интерпретирующем множество монотонных булевых функций от n переменных.

Для количества переменных меньших 4 формула для подсчета чисел d_n проверяется непосредственно, т.к. $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, а $\sigma_3 = 1$.

При малых значениях n очень удобно вычислять «небольшое» число σ_n и затем по формуле (**) находить значение чисел d_n.

Однако уже при n = 5 значение σ_n становится равным 6615, что более чем сопоставимо с самим значением $d_5 = 7581$, для которого также возможна геометрическая интерпретация в виде треугольника T_5 с купюрами, но мы не будем приводить эту картинку, т.к. «катеты» треугольника T_5 и его «гипотенуза» содержат 168 16-разрядных двоичных вектора.

2. Дихотомия монотонных булевых функций

Решение проблемы Дедекинда состоит в предъявлении регулярного способа вычисления чисел d_n при любом натуральном $n \in N$.

Ниже эта проблема будет решена при помощи метода правильного продолжения МБФ с булева куба B^n на булев куб B^{n+1}.

Всякая булева функция f может быть задана 2^n-мерным вектором ее значений:

$$f = (\gamma_0\ \gamma_1 \cdots \gamma_{2^n-1}) \tag{4}$$

на всех векторах булева куба B^n, упорядоченных арифметическим образом.

Определение 2. *Для заданной булевой функции* (4) *ее* ***первой дихотомией*** (*относительно старшей переменной* x_1) *и*, *соответственно*, *ее первыми* **парциальными** *подфункциями будем называть разбиение f на две булевы функции* $f_0 = (\gamma_0 ... \gamma_{2^{n-1}-1})$ *и* $f_1 = (\gamma_{2^{n-1}} ... \gamma_{2^n-1})$ *от n*–1 *булевой переменной* $x_2,...,x_n$.

Далее, по индукции, легко определяются дихотомии порядка *k* заданной булевой функции *f* и все ее 2^k парциальных подфункций порядка *k*:

$$f_{\vec{0}_k} = (\gamma_0 ... \gamma_{2^{n-k}-1}),...,f_{\vec{1}_k} = (\gamma_{2^n-2^{n-k}},...\gamma_{2^n-1}),$$

где $\vec{\mathbf{0}}_k = \overbrace{(0,...,0)}^{k}$ и $\vec{\mathbf{1}}_k = \overbrace{(1,...,1)}^{k}$, а каждая подфункция $f_{\vec{a}_k}$ функции *f* однозначно выделяется из вектора значений исходной функции *f* – (1) булевым вектором $a_k = (a_1,...,a_k)$ от *k* фиксированных первых последовательных значений булевых переменных $x_1, x_2,..., x_k$.

Самое детальное подразбиение заданной функции f – (1) осуществляется при дихотомии порядка n. При этом возникает 2^n парциальных подфункций:

$$f_{\bar{\mathbf{0}}_n} = \gamma_0, \ldots, f_{\bar{\mathbf{1}}_n} = \gamma_{2^n - 1}.$$

Замечание 1. Из принципа дихотомии вытекают следующие ***необходимые*** условия монотонности произвольной булевой функции:

1°. Всякая парциальная часть k-го порядка от МБФ (1) сама является МБФ от n–k булевых переменных.

2°. Все парциальные булевы функции одного порядка дихотомии от заданной МБФ упорядочены естественным образом: для всяких сравнимых между собой булевых векторов $\vec{\alpha}_k \leq \vec{\beta}_k$ выполнено также неравенство $f_{\vec{\alpha}_k} \leq f_{\vec{\beta}_k}$, $\forall$ векторов $\vec{x}_{n-k} \in \mathbf{B}^{n-k}$.

Оказывается, что сформулированные в замечании свойства дихотомии в совокупности являются также и достаточными условиями монотонности произвольной булевой функции.

Теорема 1. *Для того, чтобы булева функция* (4) *была* ***монотонной*** *необходимо и достаточно*, *чтобы*

1°. *Всякая парциальная часть k-го порядка от МБФ* (1) *сама была МБФ от n–k булевых переменных.*

2°. *Все парциальные булевы функции одного порядка дихотомии от заданной булевой функции были упорядочены следующим образом: для всяких сравнимых между собой булевых векторов* $\vec{\alpha}_k \leq \vec{\beta}_k$ *выполнено также неравенство* $f_{\vec{\alpha}_k} \leq f_{\vec{\beta}_k}$, $\forall$ векторов $\vec{x}_{n-k} \in \mathbf{B}^{n-k}$ *Доказательство.* Достаточность условий **1°**–**2°** докажем от противного.

Пусть выполнены оба условия теоремы, но рассматриваемая функция не является монотонной, т.е. для нее существуют два сравнимых между собой булевых вектора: $\vec{\alpha} \le \vec{\beta}$ таких, что $f_{\vec{\alpha}} = 1 > 0 = f_{\vec{\beta}}$.

Легко сообразить, что указанные векторы $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ можно считать соседними, т.е. различающимися лишь в одной позиции.

Пусть номер соответствующей позиции s, т.е. $\alpha_s = 0$ в то время как $\beta_s = 1$ и $\alpha_j = \beta_j$ при $j = 1,...,n,\ j \ne s$.

Рассмотрим булев вектор $\vec{\alpha}_{s-1}$ все координаты которого совпадают с первыми s–1 общими координатами векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ и соответствующую вектору $\vec{\alpha}_{s-1}$ парциальную функцию $f_{\vec{\alpha}_{s-1}}(x_s, x_{s+1},...,x_n)$.

Очевидно, что эта функция не может быть монотонной, т.к. существуют сравнимые между собой векторы $\vec{\alpha}_{n-(s-1)} \le \vec{\beta}_{n-(s-1)}$ такие, что

$$f_{\vec{\alpha}_{n-(s-1)}}(\vec{\alpha}_{n-(s-1)}) = 1 > 0 = f_{\vec{\alpha}_{n-(s1-)}}(\vec{\beta}_{n-(s-1)}),$$

где векторы $\vec{\alpha}_{n-(s-1)}$ и $\vec{\beta}_{n-(s-1)}$ получаются из упомянутых выше векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ и имеют вид: $\vec{\alpha}_{n-(s-1)} = (0, \alpha_{s+1},...,\alpha_n)$ и $\vec{\beta}_{n-(s-1)} = (1, \alpha_{s+1},...,\alpha_n)$ соответственно.

Полученное противоречие завершает доказательство достаточности. □

Ниже нами будет использована

Лемма 1. *Для того, чтобы булева функция* $f(x_1,...,x_n)$ *от n булевых переменных* $x_1,...,x_n$ *была монотонной необходимо и достаточно, чтобы она была* ***цепочечно монотонной****, т.е. чтобы вдоль* ***всякого правильного*** *маршрута из вершины* $\vec{\mathbf{0}}_n \in \mathbf{B^n}$ в вершину $\vec{\mathbf{1}}_n \in \mathbf{B^n}$ — *цепочки векторов, удовлетворяющих условиям*

$$\vec{\mathbf{0}}_n = \vec{\alpha}_0 \le \vec{\alpha}_1 \le \vec{\alpha}_2 \le \ldots \le \vec{\alpha}_n = \vec{\mathbf{1}}_n,$$

– выполнялось неравенство

$$f(\vec{\alpha}_i) \le f(\vec{\alpha}_j) \text{ при } i \le j$$

Доказательство. Необходимость условия леммы **1** очевидна, доказательство же достаточности ее условий вытекает из леммы **2**. □

Лемма 2. *Всякий вектор* $\vec{\alpha} \ne \vec{\mathbf{0}}$ *можно соединить* ***правильной*** *цепочкой с вершиной* $\vec{\mathbf{0}}$.

Всякий вектор $\vec{\beta} \ne \vec{\mathbf{1}}$ *можно соединить* ***правильной*** *цепочкой с вершиной* $\vec{\mathbf{1}}$.

Доказательство. Пусть у вектора $\vec{\alpha}$ – p ненулевых координат.

Тогда требуемая цепочка имеет вид:

$$\vec{\alpha}_0 = \vec{\mathbf{0}}_n \le \vec{\alpha}_1 \le \vec{\alpha}_2 \le \ldots \le \vec{\alpha}_p$$

где у векторов $\vec{\alpha}_j$ на каждом шаге процедуры построения цепочки добавляется ровно по одной новой ненулевой координате. При этом количество подходящих правильных цепочек определяется только количеством различных способов добавления ненулевых координат в исходный вектор.

Аналогично проводится построение и во втором случае леммы **2**. □

Следствие 1. *Всякую пару соседних булевых векторов* $\vec{\alpha}' \le \vec{\alpha}'' \in \mathbf{B}_n$ *можно включить в правильную цепочку.*

Доказательство. Для получения такой цепочки достаточно построить правильную цепочку от вектора $\vec{\mathbf{0}}$ до вектора $\vec{\alpha}'$, затем добавить в эту цепочку вектор $\vec{\alpha}''$ и продолжить ее правильным образом до вектора $\vec{\mathbf{1}}$. □

Следствие 2. *Ввиду указанного следствия для любой цепочечно монотонной булевой функции* f ∄ *соседних* (*а, потому, и любых несоседних*!) *векторов* $\vec{\alpha} \le \vec{\alpha} \in \mathbf{B}_n$ *таких,* *что* $f(\vec{\alpha}) > f(\vec{\beta})$. *Последнее же означает, что цепочечная монотонность и обычная монотонность, определенная в начале статьи, понятия эквивалентные.*

3. Правильное продолжение монотонных булевых функций

Для получения регулярным образом новых МБФ, от большего чем n числа переменных, из заданной МБФ f – (4), может быть использована ***обратная*** по отношению к дихотомии операция продолжения булевой функции.

Определение 3. *Булева функция* $g(x_0, x_1, ..., x_n)$ *от* $n + 1$ *булевой переменной* $x_0, x_1, ..., x_n$ *называется продолжением булевой функции* $f_0(x_1, ..., x_n)$, *если*

$$g_0(x_1, ..., x_n) \overset{def}{=} g(0, x_1, ..., x_n) = f_0(x_1, ..., x_n) \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{B}^n.$$

Всякая заданная булева функция $f_0(x_1, ..., x_n)$ может быть продолжена 2^n различными способами, отвечающими различным функциям $g_1(x_1, ..., x_n) \overset{def}{=} g(1, x_1, ..., x_n)$.

Но даже при монотонной исходной функции f_0 далеко не все возможные ее продолжения будут монотонными булевыми функциями от (n + 1)-ой булевой переменной.

Ниже будут указаны необходимые и достаточные условия при выполнении которых ***продолжение*** монотонной булевой функции f_0 будет монотонной булевой функцией.

Определение 4. *Продолжение МБФ* $f_0(x_1, ..., x_n)$ – $g(x_0, x_1, ..., x_n)$ *назовем* ***правильным***, *если* $f_1(x_1, ..., x_n) = g_1(x_1, ..., x_n)$ – *монотонная функция и* $\forall \vec{x} \in \mathbf{B}^n$ *выполнено неравенство*:

$$f_0(x_1, ..., x_n) \le f_1(x_1, ..., x_n), \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{B}^n \qquad (5)$$

При выполнении условия (5) мы будем говорить, что булева функция f_1 ***согласована*** с булевой функцией f_0.

Лемма 3 (О правильном продолжении). *Для того, чтобы булева функция $g(x_0, x_1, ..., x_n)$ была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы она была правильным продолжением МБФ $f_0(x_1, ..., x_n)$.*

Доказательство. Необходимость условий леммы отмечалась выше.

Достаточность. Пусть $g_0(x_1,...,x_n) = g(0, x_1,...,x_n) = f_0(x_1,...,x_n)$, где $f_0(x_1,...,x_n)$ принадлежит множеству M_n монотонных функций от n переменных и $g_1(x_1,...,x_n) = g(1, x_1,...,x_n) = f_1(x_1,...,x_n)$, где $f_1(x_1,...,x_n)$ также принадлежит множеству M_n и удовлетворяет условию согласования (5).

Покажем, что в этом случае функция $g(x_0, x_1,...,x_n)$ принадлежит множеству M_{n+1}.

Рассмотрим любую последовательность соседних векторов булева куба $\mathbf{B}^{n+1}$ правильно соединяющих вершины $\vec{\mathbf{0}}_{n+1} = (0,...,0) \in \mathbf{B}^{n+1}$ и $\vec{\mathbf{1}}_{n+1} = (1,...,1) \in \mathbf{B}^{n+1}$, т.е. чтобы для этой последовательности выполнялась цепочка неравенств:

$$\vec{\mathbf{0}}_{n+1} = \vec{\alpha}_0 \le \vec{\alpha}_1 \le \vec{\alpha}_2 \le ... \le \vec{\alpha}_{n+1} = \vec{\mathbf{1}}_{n+1}.$$

Всякую такую последовательность векторов мы условились называть правильным маршрутом из вершины $\vec{\mathbf{0}}_{n+1} \in \mathbf{B}^{n+1}$ в вершину $\vec{\mathbf{1}}_{n+1} \in \mathbf{B}^{n+1}$.

Для всякого вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{B}^{n+1}$ будем называть его проекцией на $\mathbf{B}^n$ вектор $\vec{\alpha}' = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{B}^n$.

Всякий правильный маршрут содержит единственную пару вершин $\mathbf{B}^{n+1}$ – векторов $\vec{\alpha}_s = (0, \alpha_1^{(0)}, ..., \alpha_n^{(0)})$ и $\vec{\alpha}_{s+1} = (1, \alpha_1^{(0)}, ..., \alpha_n^{(0)})$, причем очевидно, что $\vec{\alpha}'_s = \vec{\alpha}'_{s+1}$.

Часть маршрута от $\vec{\alpha}_0 = \vec{\alpha}_s$ $\overset{®}{\text{а}}_0$ до $\overset{®}{\text{а}}_s$ будем называть левой его частью – ***L***, а оставшуюся часть – от $\vec{\alpha}_{s+1}$ до $\vec{\alpha}_{n+1}$ – будем называть его правой частью – ***R***.

При этом не исключается случай, когда левая часть маршрута ***L*** возможно будет состоять из одной лишь вершины $\vec{\alpha}_0 = \vec{0}_{n+1}$, а также и другой частный случай, когда правая часть маршрута ***R*** возможно будет состоять из одной лишь вершины $\vec{\alpha}_{n+1} = \vec{1}_{n+1}$.

Очевидно, что вдоль левой части маршрута последовательность значений $g(\vec{\alpha}_j) = f_0(\vec{\alpha}'_j)$ монотонно не убывает в силу монотонности функции f_0 вплоть до значения $g(\vec{\alpha}_s) = f_0(\vec{\alpha}'_s) \le f_1(\vec{\alpha}'_{s+1}) = g(\vec{\alpha}_{s+1})$ и далее монотонно не убывает вдоль правой части маршрута, где $g(\vec{\alpha}_j) = f_1(\vec{\alpha}'_j)$.

Поэтому, в силу ***произвольности*** правильного маршрута из вершины $\vec{\mathbf{0}}_{n+1} \in \mathbf{B}^{n+1}$ в вершину $\vec{\mathbf{1}}_{n+1} \in \mathbf{B}^{n+1}$, в силу леммы ***B***, следует монотонность функции $g(x_0, x_1, ..., x_n)$. □

Замечание 2. При продолжении булевых функций удобен экономичный способ записи МБФ в ввиде специальных троичных или шестеричных чисел. При этом появление основания три или шесть связано с самой возможностью правильного продолжения монотонных булевых функций.

4. Критерий монотонности произвольной булевой функции

Возможность последовательной дихотомии любой булевой функции до порядка n–2 и условная запись (кодировка) каждой ее парциальной части в виде шести последовательных чисел 0,1,2,3,4,5:

$0 \overset{def}{=} (0\,0\,0\,0)$ $\quad 1 \overset{def}{=} (0\,0\,0\,1)$ $\quad 2 \overset{def}{=} (0\,0\,1\,1)$

$3 \overset{def}{=} (0\,1\,0\,1)$ $\quad 4 \overset{def}{=} (0\,1\,1\,1)$ $\quad 5 \overset{def}{=} (1\,1\,1\,1)$

справедливая для всех шести монотонных булевых функций от двух булевых переменных, позволяет записывать значения произвольных МБФ в виде специальных многоразрядных шестеричных чисел.

Аналогично (4), с использованием дихотомии и шести чисел: 0,1,2,3,4,5, произвольную монотонную булеву функцию можно записать в виде вектора ее значений:

$$f = (\aleph_0 \; \aleph_1 \ldots \aleph_{2^{n-2}-1}), \tag{6}$$

где $\aleph_j =$ 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Так всевозможные двузначные шестеричные комбинации с учетом условия правильного продолжения (5) представляют собой все 20 монотонных булевых функций от трех переменных.

При этом, естественно, учтена ***немонотонность*** единственной булевой функции, формально записываемой в виде «правильно» построенного (2< 3) двузначного шестеричного числа, для которого нарушено необходимое условие (5):

$$23 \overset{def}{=} (0\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1). \tag{7}$$

Приведенная функция, рассматриваемая как булева функция от трех булевых переменных, является единственным примером неправильного продолжения монотонной булевой функции двух переменных, обозначенной выше, как 2, до монотонной булевой функции трех переменных, при условии того, чтобы функция f_1 тоже была монотонной.

Указанный факт означает, что естественное упорядочение используемых для записи монотонных булевых функций шести символов, является необходимым элементом конструкции правильного продолжения, но не достаточным.

Описание структуры всех монотонных булевых функций от *n* переменных дает

Теорема 2. *Для того, чтобы запись* (6) *представляла собой монотонную булеву функцию от n булевых переменных необходимо и достаточно, чтобы*:

1°. *Все функции* $f_{\vec{\alpha}_{n-2}}(x_{n-1}, x_n)$ *были монотонны* $\forall\ \alpha_{n-2} \in \mathbf{B}^{n-2}$, *т.е. принимали бы указанные выше значения* 0, 1, 2, 3, 4, 5.

2°. $\forall \vec{\alpha}_{n-2} \le \vec{\beta}_{n-2} \in \mathbf{B}^{n-2}$ *выполнялось условие регулярности* $\aleph_{\vec{\alpha}_{n-2}} \le \aleph_{\vec{\beta}_{n-2}}$.

3°. *В* $\mathbf{B}^{n-2} \nexists \vec{\alpha}_{n-2} \le \vec{\beta}_{n-2}$ *не существует таких*, *что* $\aleph_{\vec{\alpha}_{n-2}} = 2$ и $\aleph_{\vec{\beta}_{n-2}} = 3$.

Доказательство. Необходимость условий **1°**, **2°** теоремы очевидна, а необходимость условия **3°** продемонстрирована выше на примере – (7).

Покажем их достаточность. Пусть выполнены условия **1°**–**3°** теоремы.

Покажем, что отвечающая записи (6) при дихотомии *n*–2 порядка булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от *n* булевых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ является монотонной.

Рассуждение проведем от противного.

Пусть функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ немонотонна. Тогда в $\mathbf{B}^n \exists \vec{\alpha}_n \le \vec{\beta}_n$, такие что

$$f(\vec{\alpha}_n) = 1 > 0 = f(\vec{\beta}_n) \tag{8}$$

При этом очевидно, что «начальные» части $\vec{\alpha}_{n-2}$ и $\vec{\beta}_{n-2} \in \mathbf{B}^{n-2}$ соответствующих векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ будут связаны тем же неравенством, что и исходные векторы: $\vec{\alpha}_{n-2} \le \vec{\beta}_{n-2}$.

Заметим также, что таким же неравенством будут связаны и «конечные» части исходных векторов.

Рассмотрим две вспомогательные функции: $f_{\vec{\alpha}_{n-2}}(x_{n-1},x_n)=\aleph_{\vec{\alpha}_{n-2}}$, и $f_{\vec{\beta}_{n-2}}(x_{n-1},x_n)=\aleph_{\vec{\beta}_{n-2}}$, двух булевых переменных x_{n1} и x_n.

В силу $\mathbf{1}^{\circ}$ обе указанные функции монотонны и потому, в силу $\mathbf{2}^{\circ}$, будет выполнено условие:

$$0\le\aleph_{\vec{\alpha}_{n-2}}\le\aleph_{\vec{\beta}_{n-2}}\le 5\,. \tag{9}$$

Кроме того, в силу (8):

$$f_{\vec{\alpha}_{n-2}}(a_{n-1},a_n)=1\text{, а }f_{\vec{\beta}_{n-2}}(b_{n-1},b_n)=0\,,$$

что, легко видеть, возможно при выполнении (9) только в случае, когда:

$$\aleph_{\vec{\alpha}_{n-2}}=2\text{ , а }\aleph_{\vec{\beta}_{n-2}}=3,$$

что противоречит условию $\mathbf{3}^{\circ}$ теоремы. □

Следствие 3. *Числа Дедекинда* $\mathbf{d}_n\overset{def}{=}|M_n|$ *можно находить регулярным образом, как количество различных правильных шестеричных чисел* (6), *в записи которых не встречается символов* 2 *и* 3 *в сравнимых* (*в смысле* $\mathbf{B}^{n2}$) *позициях.*

В качестве примера удобства использования формы записи монотонных булевых функций в виде шестеричных чисел (6) мы приведем доказательство принципа ***двойственности*** монотонных булевых функций.

Теорема 3. *Если булева функция*

$$f=(\gamma_0\ \gamma_1\ \cdots\ \gamma_{2^n-1}) \tag{4}$$

является монотонной, то монотонной также будет ***двойственная*** *к ней функция*:

$$f^*=(\bar{\gamma}_{2^n-1}\ \bar{\gamma}_{2^n-2}\cdots\bar{\gamma}_0)\,, \tag{10}$$

где $\bar{\gamma}_j=0$, *когда* $\gamma_j=1$ *и наоборот,* $\bar{\gamma}_{0j}=1$, *когда* $\gamma_j=0$.

Доказательство. Ввиду монотонности булевой функции (4) при ее дихотомии порядка n–2 можно перейти к записи этой функции в форме:

$$f = (\aleph_0\ \aleph_1 \ldots \aleph_{2^{n-2}-1}), \qquad (6)$$

где $\aleph_j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

При этом двойственная к ней функция (10), являющаяся зеркально противоположной, окажется записанной при помощи тех же шести основных символов $\aleph_j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, что и основная функция, ввиду того, что при переходе от функции f к функции f^*, т.е. замене каждого двоичного символа $\gamma_j = 0, 1$ на противоположный ему: $\bar{\gamma}_j = 1, 0$ (с учетом обратного порядка получаемых двоичных символов) происходит следующая подстановка символов $\aleph_s$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

выражающая двойственность соответствующих булевых функций от двух переменных.

При этом из таблицы соответствия видна самодвойственность символов 2 и 3, отвечающих монотонным булевым функциям, совпадающим с самими булевыми переменными.

Монотонность функции f^* в шестеричной записи вытекает из того, что, во-первых, секционная структура этой функции аналогична секционной структуре функции f и, во-вторых, в силу монотонности исходной функции f ее шестеричная запись (6) в силу теоремы 2 не содержит символов 2 и 3 в сравнимых позициях и, наконец, того обстоятельства, что выписанная выше подстановка меняет порядок всех шести символов на противоположный, за исключением единственной траспозиции символов 2 и 3 в нижней строке подстановки, которая не влияет на правильность записи получаемой при этом монотонной функции f^*. □

Использование шестеричных чисел для записи значений монотонных булевых функций является не единственным способом их упрощенного (по сравнению с двоичным) представления.

Для такого представления удобно использовать специальные числа по любому основанию q, являющемуся некоторым числом Дедекинда $\mathbf{d}_n$.

В частности, отметим удобную возможность представления значений произвольной монотонной булевой функции в виде специальных троичных чисел, основанную на указанной ниже теореме.

Возможность последовательной дихотомии любой булевой функции до порядка n–1 и условная запись каждой ее парциальной части в виде трех последовательных чисел 0, 1, 2:

$$0 \overset{def}{=} (0\,0)\,; \qquad 1 \overset{def}{=} (0\,1)\,; \qquad 2 \overset{def}{=} (1\,1)\,,$$

справедливая для всех трех монотонных булевых функций от одной булевой переменной, позволяет записывать значения произвольных МБФ в виде многоразрядных троичных чисел.

Аналогично (1), (3) с использованием дихотомии и трех чисел: 0,1,2 всякую монотонную булеву функцию можно записать в виде вектора ее значений:

$$f = (\aleph_0\ \aleph_1 \ldots \aleph_{2^{n-1}-1}), \tag{11}$$

где $\aleph_j = 0, 1, 2$.

Так четырехзначные троичные комбинации с учетом их естественного упорядочения и условия правильного продолжения (5) представляют собой все 20 монотонных булевых функций от трех переменных.

При этом, в отличие от шестеричных чисел, автоматически оказывается учтенной ***немонотонность*** указанной выше единственной булевой функции, формально правильно записываемой в виде «правильно» построенного $(2 < 3)$ двузначного шестеричного числа (4), для которого нарушено необходимое условие (5).

Описание структуры всех монотонных булевых функций от *n* переменных в троичной записи дает

Теорема 4. *Для того, чтобы запись* (11) *представляла собой монотонную булеву функцию от n булевых переменных необходимо и достаточно, чтобы*:

1°. *Все функции* $f_{\vec{\alpha}_{n-1}}(x_n)$ *были монотонны* $\forall \vec{\alpha}_n \in \mathbf{B}^{n-1}$, *т.е. принимали бы указанные выше значения*: 0, 1, 2.

2°. $\forall \vec{\alpha}_{n-1} \le \vec{\beta}_{n-1} \in \mathbf{B}^{n-1}$ *выполнялось условие регулярности*: $\aleph_{\vec{\alpha}_{n-2}} \le \aleph_{\vec{\beta}_{n-2}}$.

Доказательство теоремы в основных чертах повторяет доказательство теоремы о представлении в виде шестеричных чисел. □

5. Секционно упорядоченные числа по произвольному основанию

Из предыдущих построений вытекает полезность изучения некоторых специальных классов чисел, которые могут быть взаимно-однозначно соотнесены монотонным булевым функциям.

Такие числа мы будем называть ***секционно-упорядоченными*** или для краткости *su*-числами.

Ниже приведено их индуктивное определение.

Определение 5. *Пусть*

$$S_0^{(q)} = \{0, 1, 2, ..., q-1\}$$

– множество основных символов, записанных в их естественном порядке.

Далее определяем $S_1^{(q)}$ *как упорядоченное множество чисел* $\alpha^{(1)} \overset{def}{=} \alpha_0\alpha_1$, *причем* $\alpha^{(1)} \in S_1^{(q)}$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия*:

1°. *Состав*: $\forall\alpha^{(1)}$ *его компоненты* $\alpha_0, \alpha_1 \in S_0^{(q)}$.

2°. *Треугольность*: $\alpha_0 \le \alpha_1$.

3°. *Секционная упорядоченность*: $\forall\alpha^{(1)}, \beta^{(1)} \in S_1^{(q)}$ $\alpha^{(1)} = \alpha_0\alpha_1 \le \beta^1 = \beta_0\beta_1$ *тогда и только тогда, когда одновременно* $\alpha_0 \le \beta_0$ *и* $\alpha_1 \le \beta_1$.

И, наконец, определяем $S_{n+1}{}^{(q)}$ — *как упорядоченное множество чисел* $\alpha^{(n+1)} \overset{def}{=} \alpha_0^{(n)}\alpha^{(n)}$, *причем* $\alpha^{(n+1)} \in S^{(q)}$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия*:

1°. *Состав*: $\forall\alpha^{(n+1)}$ его компоненты $\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)} \in S_n^{(q)}$.

2°. *Треугольность*: $\alpha_0^{(n)} \le \alpha_1^{(n)}$.

3°. *Секционная упорядоченность*: $\forall\alpha^{(n+1)}, \beta^{(n+1)} \in S_{(n+1)}^{(q)}$ $\alpha^{(n+1)} = \alpha_0^{(n)}\alpha_1^{(n)} \le \beta_1^{(n+1)} = \beta_0^{(n)}\beta_1^{(n)}$ *тогда и только тогда, когда одновременно* $\alpha_0^{(n)} \le \beta_0^{(n)}$ *и* $\alpha_1^{(n)} \le \beta_1^{(n)}$.

Замечание 3. Если рассматривать векторы значений булевых функций (6) как двоичные числа, что естественно при дихотомии пордка *n*, то, очевидно, что при таком подходе множества $\mathbf{M_n}$ и $S_n^{(2)}$ находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии.

Если рассмотреть все булевы функции, получаемые из одной заданной монотонной булевой функции от *n* переменных, при дихотомии порядка *n*–1 и использовать троичные обозначения для нумерации возможных значений этих парциальных компонент, то, рассматривая весь набор возникающих троичных компонент, как единое троичное число, легко заметить, что множества $\mathbf{M}_n$ и $S_{n-1}^{(3)}$ находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии.

Аналогично предыдущему, выбрав в качестве q подходящее число Дедекинда $\mathbf{d}_k$, проведя дихотомию булевой функции от n переменных подходящего порядка $n–k$ и рассматривая результат дихотомии как единое q-ичное число, легко заметить, что множества M_n и $S_{nk}^{(q)}$ находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии, если из множества $S_{n-k}^{(q)}$ удалить некоторое множество чисел в количестве $\mathbf{s}_n^{(q)}$, полностью определяемое n и используемым основанием системы счисления q.

В частности, при $k = 2$ $\mathbf{d}_k = 6$ и соответствующий результат о естественном взаимно-однозначном соответствии множеств M_n и $S_{n-2}^{(6)}$ с необходимыми купюрами в количестве $\mathbf{s}_n^{(6)}$, является непосредственным следствием доказанной выше теоремы 2 о необходимом и достаточном условии монотонности булевой функции от n переменных.

Секционно упорядоченные числа позволяют значительно сократить записи при работе с МБФ.

После определения *su*-чисел в общем случае произвольного n можно представлять себе множество M_n в виде прямоугольного $(\wedge - \vee)$-треугольника T_n, каждая клетка которого отвечает ровно одному *su*-числу, первая половина – L, – которого является одновременно номером строки i матрицы, отвечающей треугольнику T_n, а другая часть – R, является номером столбца j той же матрицы.

Размеры треугольника T_n при заданном n определяются предыдущим числом Дедекинда $\mathbf{d}_{n-1}$.

При этом «гипотенуза» треугольника отвечает полному набору *su*-чисел, отвечающих всем монотонным булевым функциям от n–1-ой младшей булевой переменной. Таким образом, *su*-числа, расположенные на гипотенузе обладают свойством: номер строки i совпадает с номером столбца j, т.е. левая и правая части числа в точности совпадают между собой.

Соответствующие диагональным *su*-числам булевы функции будем называть ***цилиндрическими*** относительно старшей переменной, т.к. ни одна из них не зависит существенным образом от старшей булевой переменной x_1 и в этом смысле все они являются вырожденными.

Горизонтальный, $\wedge$-катет треугольника T_n отвечает нулевой строке: $i = 0$, т.е. для всех *su*-чисел в этой строке их левая часть L является нулем (все, входящие в состав рассматриваемых чисел разряды равны 0) и числа в этой строке отличаются друг от друга только их правой частью R – значением номера столбца: $j = 0, 1, ..., \mathbf{d}_{n-1}$.

При этом во все соответствующие монотонные булевы функции с номером j старшая переменная x_1, занимающая на этом катете последнюю позицию $j = \mathbf{d}_{n1}$ – вершину прямого угла, входит существенно – в виде сомножителя в конъюнкции с элементом, стоящим на гипотенузе в столбце с тем же самым текущим номером j.

Аналогично предыдущему, вертикальный, $\vee$-катет треугольника T_n отвечает последнему столбцу: $j = \mathbf{d}_{n1}$, т.е. для всех *su*-чисел в этом столбце их правая часть R является константой (все до одного, входящие в состав рассматриваемых чисел q-ичные разряды равны q–1) и числа в этом столбце отличаются друг от друга только их левой частью L – значением номера строки: $i = 0, 1, ..., \mathbf{d}_{n-1}$.

При этом во все соответствующие монотонные булевы функции с номером i старшая переменная x_1, занимающая на этом катете первую позицию $i = 0$ – вершину прямого угла, входит существенно – в виде слагаемого в дизъюнкции с элементом, стоящим на гипотенузе в строке с тем же самым текущим номером i.

Итог проведенных выше рассуждений мы сформулируем в виде теоремы

Теорема 5 (О представлении МБФ формулой). *Для всякой монотонной булевой функции f, рассматриваемой формально, как булева функция от n булевых переменных при помощи ее si-кода, представляющего вектор ее значений, можно получить ее* ***минимальную*** *ДНФ.*

Для этого необходимо определить положение si-числа в треугольнике T_n и, в зависимости от него, возможны следующие варианты:

1°. *Если f,* ***не зависит существенно*** *от старшей переменной x_1, т.е.* соответствующее ей *si-число расположено на гипотенузе $(\wedge - \vee)$-треугольника T_n, подходящую формулу для ее представления необходимо выбирать из $(\wedge - \vee)$-треугольника T_{n-1}.*

2°. *Если f,* ***существенно*** *зависит от старшей переменной x_1, и соответствующее ей si-число расположено на $\wedge$-катете $(\wedge - \vee)$-треугольника T_n, подходящая формула для ее представления – конъюнкция старшей переменной x_1 и той монотонной булевой функции, которая расположена на гипотенузе непосредственно под ней, т.е. в том же столбце. После раскрытия скобок и необходимых поглощений получится минимальная ДНФ.*

3°. *Если f,* ***существенно*** *зависит от старшей переменной x_1, и соответствующее ей si-число расположено на*

$\vee$-*катете* $(\wedge - \vee)$-*треугольника* T_n, *подходящая формула для ее представления — дизъюнкция старшей переменной* x_1 *и той монотонной булевой функции, которая расположена на гипотенузе непосредственно перед ней, т.е. в той же самой строке.*

4°. *Если соответствующе f su-число* ***не лежит на сторонах*** $(\wedge - \vee)$-*треугольника* T_n, *то можно написать две булевы формулы*:

А) «*Конъюнктивную*», *сомножители которой расположены на* Ъ-*катете в той самой строке, где расположено соответствующее ей su-число и пересечении гипотенузы с тем столбцом, где расположено соответствующее ей su-число*.

В) «*Дизъюнктивную*» *слагаемые которой расположены на* Щ-*катете в том самом столбце*, *где расположено соответствующее ей su-число и пересечении гипотенузы с той строкой*, *где расположено соответствующее ей su-число*.

Однако, *после раскрытия скобок и необходимых поглощений обе формулы приводят к* ***единственной*** *минимальной ДНФ данной монотонной булевой функции*.

НОВЫЕ ФОРМЫ МАТЕРИИ ВО ВСЕЛЕННОЙ

А.М. Черепащук
академик РАН, директор Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга, МГУ им. М.В. Ломоносова

Введение

2009 год объявлен Генеральной Ассамблеей ООН Международным годом астрономии. Тем самым признается выдающееся значение астрономии в жизни человечества. 400 лет тому назад Галилей впервые навел свой телескоп на небо и увидел пятна на Солнце, горы на Луне, спутники Юпитера, это положило начало наблюдательной астрономии. Проведение астрономических наблюдений привело к революционному прорыву в понимании окружающего нас мира. Замечательно то, что и сейчас мы являемся свидетелями новой революции в астрономии, связанной с применением новых средств наземных и космических наблюдений. Земная атмосфера непрозрачна для подавляющего большинства видов излучений, идущих из Космоса. До середины прошлого столетия астрономы наблюдали небо в основном лишь в узком оптическом «окне» прозрачности земной атмосферы, в котором длина волны принимаемого электромагнитного излучения меняется всего в ~2 раза. Запуск первого советского искусственного спутника Земли 4 октября 1957 года положил начало эре космических исследований. Вынос астрономических телескопов за пределы земной атмосферы привел к чрезвычайно сильному расширению исследуемого диапазона электромагнитного излучения. Сейчас астрономы изучают небо не только в оптическом, но и в гамма, рентгеновском, ультрафиолетовом, инфракрасном и радиодиапазонах спектра. При этом диапазон длин волн принимаемых космических излучений меняется не в 2 раза, а в 10^{16} раз (!).

Это привело к тому, что надежность результатов интерпретации современных астрономических наблюдений сравнялось с надежностью результатов лабораторных физических экспериментов. И это несмотря на то, что астрономические объекты удалены от нас на громадные расстояния в тысячи, миллионы и миллиарды световых лет.

Астрономические исследования последних трех десятилетий привели к радикальному пересмотру наших представлений об окружающем мире. Выяснилось, что известная нам форма материи – атомы и молекулы (так называемая барионная форма) – это всего лишь около 4% от полного количества материи Вселенной. 96% количества материи – это в основном так называемый темный сектор, состоящий из двух пока загадочных форм материи: темной материи (~26%) и темной энергии (~70%). Еще одна новая форма материи – это черные дыры, которые в нашей Галактике по массе суммарно составляют ~0.1% от массы барионного вещества, т.е. $\sim 10^8\ M_\odot$. Кроме того, в последние годы астрономы все увереннее говорят о возможности существования так называемых кротовых нор во Вселенной. Это еще одна возможная новая форма материи во Вселенной, которая пока не открыта, но предложены методы наблюдений, позволяющие, в принципе, отличить кротовую нору от черной дыры.

Необычность новых форм материи поражает воображение (подчеркнем, что эти формы материи мы называем новыми ввиду того, что они открыты сравнительно недавно).

Темная материя ничего не излучает и не поглощает, является гравитационно-скучивающейся (т.е. состоит из отдельных темных тел или частиц неизвестной природы) и концентрируется к большим массам барионного вещества, проявляя себя лишь своим гравитационным притяжением.

Темная энергия гравитационно не скучивается, (по-видимому, это поле неизвестной природы); ничего не излучает и не поглощает, равномерно заполняет пространство и проявляется в виде гравитационного отталкивания. По мере накопления наблюдательных данных имеет место удивительная сходимость параметров темной энергии к характеристикам поля, введенного А. Эйнштейном с помощью Λ – члена в уравнения Общей теории относительности (ОТО).

Черные дыры образуются при катастрофическом сжатии (коллапсе) массивных объектов (мы не рассматриваем здесь возможность образования мини – черных дыр при столкновении элементарных частиц очень высоких энергий на современных ускорителях, например, Большом адроном коллайдере). Это идеально симметричные объекты, которые характеризуются всего лишь тремя параметрами: массой, угловым моментом вращения и электрическим зарядом. В центре черной дыры расположена сингулярность (область с формально бесконечной плотностью), куда сколлапсировало падающее вещество (в сопутствующей системе отсчета) и где царят пока неизвестные нам законы квантовой гравитации. Эта сингулярность окружена горизонтом событий – световой поверхностью в пространстве – времени, на которой ход времени с точки зрения далекого наблюдателя останавливается. Следует подчеркнуть, что поскольку центральная квантовая сингулярность расположена в будущем по отношению к горизонту событий, незнание законов квантовой гравитации не мешает исследователям описывать в рамках ОТО свойства горизонта событий, эргосферы и подавляющей части внутренности черной дыры.

Хотя постепенное накопление наблюдательных данных для многих сотен кандидатов в черные дыры дает все больше и больше свидетельств в пользу реальности существования черных дыр во Вселенной, существуют теории гравитации, отличные от ОТО, в которых отвергается существование черных дыр. Например, как следует из работ А.А. Логунова и Л.П. Грищука, если добавить в уравнения ОТО члены соответствующие ненулевой массе покоя гравитона (кванта гравитационного поля), то горизонт событий у массивного коллапсирующего объекта не образуется и черная дыра при этом не формируется. Этот вывод радикально отличается от предсказания ОТО, что делает проблему поиска и исследования черных дыр особенно интригующей и интересной.

Кротовые норы также образуются при коллапсе массивных объектов, но помимо барионного вещества, в процессе коллапса должна присутствовать так называемая экзотическая материя, обладающая отрицательным давлением. Впервые о возможности образования туннелей в пространстве – времени (которые в дальнейшем получили название кротовых нор) писали Эйнштейн и Розен в 1935 году, а в последние годы в нашей стране теорией кротовых нор активно занимаются Н.С. Кардашев, И.Д. Новиков, А.А. Шацкий. В отличие от черной дыры, кротовая нора не имеет сингулярности и не обладает горизонтом событий. Поэтому в принципе, в кротовую нору можно как входить, так и выходить из неё. С кротовыми норами связаны надежды ученых на создание машины времени.

Таким образом, современная астрономия ставит серьезные вызовы перед фундаментальной наукой. Благодаря астрономии человечество в последние годы осознало огромную меру незнания окружающего нас мира. Это является чрезвычайно сильным стимулом для развития науки и, в частности, астрономии. Развитые страны тратят миллиарды долларов на создание новых уникальных наземных и космических телескопов и обсерваторий.

Свойства описанных выше новых форм материи столь экзотичны, что в их существование верится с трудом. И все же, новейшие наблюдательные данные, полученные в различных диапазонах электромагнитного излучения, позволяют судить о реальности существования темной материи, темной энергии и черных дыр во Вселенной. Опишем кратко эти наблюдательные данные.

1. Темная материя

Существует по крайней мере десяток независимых свидетельств существования темной материи во Вселенной. Перечислим некоторые из них.

1.1. Движения галактик в скоплениях

В 1932 году немецкий астроном Ф. Цвикки обратил внимание на то, что галактики в богатом скоплении в созвездии Волосы Вероники, содержащем тысячи звездных систем, подобных нашей Галактике, двигаются с очень большими скоростями ~1000 км/с. Чтобы удержать столь быстро движущиеся галактики в объеме скопления, требуется тяготение, которе неспособны создать одни только видимые массы светящихся галактик. Для этого необходимо более сильное тяготение, и, как подсчитал Цвекки, здесь необходимы дополнительные, невидимые массы, которые примерно в 10 раз больше суммарной видимой массы скопления. Вывод Цвики об аномально больших скоростях движения галактик в скоплениях в настоящее время подтвержден при исследованиях большого числа скоплений галактик. Так что наличие темной материи следует из наблюдений многочисленных скоплений галактик.

Естественно, наряду с гипотезой о темной материи появились также попытки модификации закона тяготения Ньютона на больших расстояниях, с целью объяснить аномально большие скорости движения галактик в скоплениях без привлечения темной материи. Такие же попытки предпринимались и для объяснения аномально больших скоростей вращения периферийных частей галактик (см. ниже). И до сих пор в солидных научных журналах появляются статьи некоторых авторов на эту тему, в которых предлагаются варианты так называемой модифицированной ньютоновской динамики (МОНД). Однако все варианты МОНД страдают общим недостатком: в применении к разным скоплениям и галактикам приходится вводить разные модификации закона тяготения Ньютона, что делает МОНД непривлекательной.

1.2. Вращение спиральных галактик

Если бы темной материи не было, основная масса галактики была бы сосредоточена в её центральных частях, и скорость вращения периферийных частей галактики должна убывать с расстоянием от галактического центра обратно пропорционально корню квадратному из расстояния. Ничего подобного в галактиках не наблюдается. Зависимость скорости вращения спиральных галактик от расстояния до их центров известна к настоящему времени для многих десятков изолированных галактик. Эта зависимость уверенно прослеживается вплоть до расстояний, в 3-10 раз превышающих видимый радиус звездной системы (по движению облаков нейтрального водорода). В области вне видимого диска галактики – там, где доминирует темная материя галактического гало, – кривая вращения становится как правило плоской, так что скорость вращения не зависит от расстояния и составляет весьма большую величину – в сотни км/с. Во всех случаях столь высокие скорости вращения периферийных частей галактик определенно указывают на присутствие темной материи и внутри звездной системы, и вне её, причем масса темной материи в гало галактики в 3÷10 раз превышает массу видимой звездной системы.

1.3. Рентгеновский газ в скоплениях галактик

Богатые скопления галактик наблюдаются в рентгеновском диапазоне спектра с помощью орбитальных обсерваторий. Эти наблюдения позволили открыть горячий ионизованный газ в объеме скоплений; этот разреженный газ и служит источником рентгеновского излучения (он формируется при истечении звездных ветров массивных звезд, при вспышках сверхновых и т.п.). Температура горячего газа близка к ста миллионам градусов, и этой температуре соответствуют средние скорости движения протонов – частиц плазмы, которые составляют, как и скорости галактик, тысячи км/с. Без темной материи этот горячий газ улетучился бы из скопления на бесконечность. Тем самым, рентгеновские наблюдения дают независимый довод в пользу наличия темной материи в скоплениях галактик: горячий газ в скоплениях не разлетается в окружающее пространство потому, что он погружен в глубокую потенциальную яму, создаваемую в основном мощным тяготением темной материи, суммарная масса которой в ~10 раз превышает массу звездных компонент всех галактик скопления.

1.4. Эффект гравитационной линзы

Скопления галактик демонстрируют эйнштейновский эффект отклонения луча света в поле тяготения. Источником света в данном случае служит далекая галактика или квазар. Из-за искривления лучей света от далекого квазара в гравитационном поле более близкого скопления галактик наблюдаются многочисленные изображения («духи») далекой галактики или квазара (эффект сильного гравитационного линзирования). Кроме того, изображения самих далеких галактик, проектирующихся на периферию скопления, могут слегка искажаться из-за эффекта гравитационного линзирования в гравитационном поле переднего скопления (эффект слабого гравитационного линзирования). В обоих случаях эти эффекты гравитационного линзирования дают указание на полную массу скопления галактик. Она оказывается в ~10 раз больше, чем масса всех видимых галактик скопления. Это служит независимым указанием на наличие темной материи в скоплениях.

1.5. Движения галактик в местной группе

Наша Галактика вместе с туманностью Андромеды и несколькими десятками других (более мелких) галактик образует систему, называемую Местной группой. Две основные галактики группы сближаются одна с другой, причем расстояние между ними и их относительная скорость сближения могут иметь наблюдаемые значения лишь в том случае, если в объеме Местной группы имеется темная тяготеющая материя, масса которой примерно в 5–10 раз больше суммарной массы всех видимых галактик.

Кроме перечисленных фактов, имеется еще ряд независимых наблюдательных свидетельств существования темной материи, например, движения спутников нашей Галактики, тройные системы галактик, результаты моделирования крупномасштабной структуры Вселенной и т.п. Во всех этих случаях для объяснения наблюдаемых эффектов с необходимостью приходится привлекать гипотезу о существовании темной материи во Вселенной.

Замечательно то, что все перечисленные независимые результаты находятся в полном количественном согласии друг с другом. Это выглядит так, как если бы десять различных линий пересекались в одной точке! Вот какова прочность эмпирической базы для обоснования гипотезы существования темной материи.

Для объяснения природы темной материи привлекаются, в основном, две гипотезы: либо это тела, связанные с барионной материей (планеты, астероиды, холодные белые карлики, нейтронные звезды, звездные черные дыры и т.п.), либо это пока не открытые слабовзаимодействующие элементарные частицы, подобные нейтрино, но много более массивные (с массой в ~1000 раз больше массы протона). Ученые надеются, что предстоящие эксперименты по столкновению частиц на недавно введенном в строй Большом адроном коллайдере (Швейцария) позволят открыть такие элементарные частицы.

2. Темная энергия

Имеется по крайней мере пять независимых свидетельств существования темной энергии, которая доминирует в общем энергетическом балансе Вселенной (составляет ~70%). Перечислим важнейшее из них.

2.1. Ускорение космологического расширения

В 1998–1999 годах две международные группы наблюдателей, одной из которых руководили Б. Смидт и А. Райсс, а другой – С. Перлмуттер, установили, что наблюдаемое космологическое расширение происходит с ускорением, так что скорости удаления галактик возрастают со временем. Это открытие было сделано с помощью изучения вспышек далеких сверхновых звезд типа Ia, которые, как показал профессор Ю.П. Псковский, астроном из ГАИШ, могут служить «стандартными свечами». Из-за исключительно большой светимости сверхновых в максимуме блеска их можно наблюдать на очень больших расстояниях, в тысячи мегапарсек от нас. Именно на столь больших расстояниях и проявляется эффект ускоренного расширения Вселенной.

Обычное вещество не способно ускорять галактики, а лишь тормозит их разлет, так как взаимное тяготение стремится сблизить галактики. Поэтому открытый астрономами факт ускоренного расширения Вселенной указывает на то, что наряду с обычным веществом, создающим тяготение, во Вселенной присутствует неизвестная нам ранее ни по астрономическим наблюдениям, ни по физическим экспериментам особая космическая энергия, создающая не тяготение, а антитяготение – всеобщее отталкивание тел природы. При этом в космологическом масштабе в нашу эпоху антитяготение оказывается сильнее тяготения. Эта новая необычная форма материи получила название темной энергии.

Вначале феномен ускоренного расширения Вселенной был открыт по наблюдениям нескольких десятков далеких сверхновых звезд. В настоящее время этот удивительный космологический феномен подтвержден данными наблюдений многих сотен далеких сверхновых звезд. Планируются специальные космические эксперименты для детального изучения ускоренного расширения Вселенной и уточнения уравнения состояния новой формы материи – темной энергии.

2.2. Анизотропия реликтового трехградусного излучения

Реликтовое излучение с температурой около трех градусов Кельвина, осталось от Большого Взрыва, приведшего к формированию наблюдаемой Вселенной. Точные измерения слабой ($\Delta T/T$☺10^{-5}) анизотропии реликтового фона, детальное изучение углового распределения его пятнистой структуры указывают на то, что пространство Большого Взрыва является или строго плоским, или практически плоским. Но согласно фридмановской теории, геометрия пространства однозначно связана с соотношением между полной плотностью всех видов материи во Вселенной и так называемой критической плотностью, которая определяется темпом расширения мира и выражается через постоянную Хаббла H (связь между скоростью относительного удаления галактик и расстоянием между ними описывается законом Хаббла: $V=Hr$). В случае плоского пространства полная плотность всех видов материи во Вселенной равна критической. Зная постоянную Хаббла (которая известна сейчас с точностью ~10%), можно оценить современную плотность мира, то есть суммарную космическую плотность всех видов материи во Вселенной. Так как плотности темной материи, барионов, нейтрино и излучения известны из других независимых данных, отсюда можно оценить плотность темной энергии, вклад которой оказывается равным 70%. Эта оценка прекрасно согласуется с оценкой плотности темной энергии, следующей из анализа ускоренного расширения Вселенной.

2.3. Формирование крупномасштабных структур и их эволюция

Компьютерное моделирование процессов формирования и эволюции крупномасштабной структуры Вселенной и прежде всего, скоплений галактик, дает наилучшие результаты, если в нем учитывается не только темная материя, но и темная энергия причем требуемая относительная плотность темной энергии должна иметь как раз ее наблюдаемое значение ~70%.

2.4. Возраст Вселенной

Задолго до открытия темной энергии ученых тревожила одна трудная проблема: в космологических моделях, которые в 1960–1980 гг. считались стандартными, время, протекшее от начала космологического расширения, оказывалось весьма малым – меньше возраста самых старых звезд шаровых звездных скоплений галактик. Уже тогда И.С. Шкловский, Н.С. Кардашев и Я.Б. Зельдович высказывали предположение, что эту проблему можно было бы решить с помощью введения всемирного космологического отталкивания, которое описывается эйнштейновским Λ – членом в уравнениях общей теории относительности. В моделях с отличным от нуля Λ – членом возраст мира получается достаточно большим, и проблема существования старых шаровых скоплений снимается. Так что сам по себе большой возраст самых старых наблюдаемых объектов Вселенной является указанием на существование темной энергии и антитяготения.

2.5. Местный Хаббловский поток

В работах А.Д. Чернина дана оценка локальной плотности темной энергии в скоплениях галактик, которая практически совпадает с глобальной плотностью темной энергии, оцененной из исследований ускоренного расширения Вселенной. Тот факт, что оценки локальной плотности темной энергии, выполненные независимо для трех различных скоплений галактик, хорошо согласуются друг с другом, свидетельствует о надежности этой методики.

Как мы видим, в случае темной энергии имеет место «пересечение» в одной точке, по крайней мере, пяти различных и не зависящих одна от другой линий аргументации. О природе темной энергии мы можем сказать еще меньше, чем в случае темной материи. Известно лишь, что темная энергия – это поле или совокупность полей, обладающее отрицательным давлением, что и приводит, в конечном счете, к гравитационному отталкиванию. Связь между давлением p и плотностью энергии ε в случае темной энергии дается выражением $p = -W\varepsilon$, где W – некоторый коэффициент, близкий к единице и известный в настоящее время с точностью в несколько процентов. Если $|W|=1$, то темная энергия обладает свойствами вакуума, плотность энергии которого одинакова во всех системах отсчета. Поэтому относительно вакуума невозможно различить состояния покоя и движения. Свойства этого вакуума в уравнениях ОТО описываются Эйнштейновским Λ – членом. Если $|W|<1$, то темную энергию называют квинтессенцией, а если $|W|>1$, то темная энергия называется фантомной энергией. Свойства этих видов энергии, особенно фантомной энергии, удивительны. Однако, с повышением точности определения коэффициента W, он все ближе и ближе приближается к единице, что свидетельствует в пользу того, что, скорее всего, темная энергия – это особый вид вакуума. Хотя окончательно судить об этом еще рано, и дело – за дальнейшими наземными и космическими наблюдениями.

3. Черные дыры

Под черной дырой понимается область пространства – времени, для которой вторая космическая скорость равна скорости света в вакууме $c = 300000$ км/с. Парадоксальные свойства черных дыр настолько необычны, что эти объекты с полным основанием можно отнести к новому, особому виду материи. Действительно, свойства внутренних частей черной дыры (расположенных под горизонтом событий) не зависят от типа и характеристик вещества, из которого черная дыра образовалась. Как уже отмечалось, черная дыра однозначно характеризуется всего лишь тремя параметрами: массой, угловым моментом вращения и электрическим зарядом. Поэтому состояние материи внутри черной дыры нельзя называть ни твердым, ни жидким, ни газообразным, ни плазменным. Это особое, сколлапсированное состояние материи с квантовой сингулярностью, которое реализуется при плотности, превышающей некоторую критическую величину. Например, чтобы образовать черную дыру из Земного шара, нужно сжать Землю с помощью некоторого воображаемого сверхмощного сферического пресса до размеров 9 мм. При этом плотность составит чудовищную величину $\sim 2 \cdot 10^{27}$ г/см^3, что на 13 порядков выше плотности атомного ядра. При достижении такой плотности, согласно предсказанию ОТО, материя сама, без помощи пресса, будет сжиматься до сингулярного состояния (в сопутствующей системе отсчета), что приведет к образованию черной дыры с радиусом горизонта событий, равным 9 мм. Заметим, что размер черной дыры характеризуется так называемым гравитационным радиусом $r_g = \dfrac{2GM}{c^2}$, где M – масса тела, G – постоянная тяготения, c – скорость света. Для невращающейся черной дыры гравитационный радиус совпадает с радиусом горизонта событий. Следует отметить, что для очень массивных черных дыр величина критической плотности может иметь не столь экстремально большое значение. Например, для сверхмассивной черной дыры с массой 10 млрд солнечных в ядре галактики радиус горизонта событий равен 200 астрономических единиц (что в пять раз больше радиуса Солнечной системы), а величина соответствующей критической плотности весьма мала $\sim 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ г/см^3, что в несколько раз меньше плотности воздуха у поверхности Земли.

Астрономы с полным основанием могут считать черные дыры новой формой материи, поскольку из наблюдений следует (после учета эффектов наблюдательной селекции), что полное число черных дыр звездной массы в нашей Галактике составляет около 10 млн. Поскольку средняя масса звездной черной дыры составляет ~10 солнечных масс, полная масса, представленная черными дырами в Галактике составляет $\sim 10^8$ масс Солнца или 0,1% от полной массы барионного вещества Галактики (заключенного в звездах, газе и пыли). 0,1% – это немалая величина, что дает основания считать черные дыры в Галактике действительно особой, новой формой материи.

3.1. Черные дыры звездной массы

Массы звездных черных дыр измеряются по движению оптических звезд в рентгеновских двойных системах. Рентгеновская двойная система состоит из оптической звезды – донора вещества, и релятивистского объекта, аккрецирующего вещество соседней звезды. Возможность наблюдений аккрецирующих черных дыр по рентгеновскому «ореолу» вокруг них была предсказана в 1964 г. Я.Б. Зельдовичем и Е.Е. Салпитером (США). Теория дисковой аккреции вещества в двойной системе на черную дыру была развита в 1972–1973 годах в работах Н.И. Шакуры, Р.А. Сюняева, Дж. Прингла, М. Риса, И.Д. Новикова и К. Торна. Рентгеновские наблюдения со спутников и оптические наблюдения с поверхности Земли прекрасно дополняют друг друга. Рентгеновские наблюдения свидетельствуют о наличии в двойной системе очень компактного объекта, причем по быстрой переменности интенсивности рентгеновского излучения можно оценить характерные размеры этого объекта. Оптические наблюдения (спектральные и фотометрические) позволяют изучать движение оптической звезды в гравитационном поле компактного объекта и, с использованием методов небесной механики, измерять массу компактного объекта. Согласно теории эволюции звезд с учетом эффектов ОТО, если масса ядра звезды, вещество которого переработано в термоядерных реакциях, больше 3 солнечных масс, то на поздних стадиях эволюции ядра происходит его коллапс с образованием черной дыры. Для звездных ядер меньших масс в конце эволюции образуется нейтронная звезда или белый карлик. Если измеренная масса компактного объекта в рентгеновской двойной системе оказывается более 3 солнечных масс, а его оцененный размер близок к радиусу горизонта событий (который определяется массой объекта), то мы с полным основанием можем считать изучаемый компактный объект кандидатом в черные дыры.

К настоящему времени измерены массы 23 кандидатов в звездные черные дыры, которые лежат в пределах 4÷20 солнечных масс. Замечательно то, что ни у одного из этих массивных компактных объектов не наблюдаются феномены рентгеновского пульсара или рентгеновского барстера 1-го типа, характерные для аккрецирующих нейтронных звезд. Таким образом, по мере накопления сведений о массах релятивистских объектов, постепенно выкристаллизовывается очень красивый результат: аккрецирующие черные дыры и нейтронные звезды различаются не только по массам, но и по наблюдательным проявлениям в полном согласии с предсказанием ОТО (!). Это сильно укрепляет нашу уверенность в реальном существовании черных дыр звездной массы.

3.2. Сверхмассивные черные дыры в ядрах галактик

Массы сверхмассивных черных дыр (лежат в диапазоне $\sim 10^6 \div 10^{10}$ солнечных масс) измеряются по движению «пробных тел» (звезд, газовых облаков, газовых дисков) в их гравитационном поле. Радиусы сверхмассивных черных дыр можно непосредственно измерять с помощью наземных и космических интерферометров. Например, в центре нашей Галактики расположена черная дыра массой $4 \cdot 10^6$ солнечных. Эта масса надежно измерена по движениям соседних звезд. Радиус горизонта событий, соответствующий этой массе, составляет 17 солнечных. На расстоянии 8 килопарсек (расстояние от Солнца до центра Галактики) эта величина смотрится под углом $\sim 10^{-5}$ угловой секунды. Если же учесть искривление лучей света от ближайших окрестностей горизонта событий (самые внутренние части аккреционного диска), то видимый угловой размер самых внутренних частей аккреционного диска возрастает примерно в ~3 раза. Недавно группа американских ученых выполнила измерения окрестностей горизонта событий сверхмассивной черной дыры в центре нашей Галактики с угловым разрешением $\sim 10^{-5}$ сек., из которых следует, что радиус компактного объекта массой $4{\cdot}10^6$ солнечных масс практически совпадает с радиусом горизонта событий (!). Использовалась техника радиоинтерферометрических наблюдений со сверхдлинной базой на длине волны 1,3 мм. Авторы этой работы планируют уменьшить рабочую длину волны вдвое и значительно увеличить чувствительность аппаратуры, что позволит детально изучить пространственную структуру излучающих областей самых внутренних частей аккреционного диска и исследовать её переменность. Можно надеяться, что в этих наблюдениях будут получены решающие доказательства того, что компактный объект в центре нашей Галактики массой $4{\cdot}10^6\,M_\odot$ является реальной черной дырой. Другой метод оценки радиусов сверхмассивных черных дыр – это изучение быстрой переменности рентгеновского излучения ядер галактик. Недавно от ядра активной галактики REJ1034+396 обнаружена квазипериодическая переменность интенсивности рентгеновского излучения с характерным квазипериодом ~1 час. Отсюда можно заключить, что радиус области аккреционного диска, где формируются эти квазипериодические (но не строго периодические!) рентгеновские осцилляции, всего в 3 раза превышает радиус горизонта событий сверхмассивной черной дыры массой $\sim 10^7$ солнечных масс.

Все эти данные сильно укрепляют нашу уверенность в реальном существовании сверхмассивных черных дыр в ядрах галактик.

К настоящему времени измерены массы многих сотен сверхмассивных черных дыр в ядрах галактик. Появилась новая область астрофизики – демография черных дыр. Обнаружена надежная статистическая связь между массой сверхмассивной черной дыры и массой балджа галактики (балдж – это сферическое сгущение старых маломассивных звезд вблизи ядра галактики). Наблюдается также четкая корреляция между массой сверхмассивной черной дыры и дисперсией скоростей звезд в балдже галактики. Выявляется некоторая корреляция между массой сверхмассивной черной дыры и массой галактического гало, состоящего из темной материи. Все эти зависимости накладывают ограничения на механизмы образования и роста сверхмассивных черных дыр. Открытие ряда квазаров с красными смещениями $z \geq 6$ показывает, что сверхмассивные черные дыры (с массой $\sim 10^8$ солнечных масс) успели сформироваться за время менее миллиарда лет, а недавнее открытие очень массивной черной дыры массой $2.3 \cdot 10^{10}$ солнечных масс в квазаре с красным смещением z☺3,9 показывает, что черная дыра с массой более 20 млрд солнечных масс успела сформироваться за время порядка миллиарда лет. В этой связи, ученые обсуждают вопрос о том, что первично во Вселенной – образование сверхмассивной черной дыры в ядре галактики или образование самой галактики.

Таким образом, черные дыры, как особая, новая форма материи, уже завоевали «права гражданства» среди классических объектов Вселенной – звезд, галактик, галактических скоплений и т.п. На повестке дня – окончательное доказательство того, что многочисленные массивные и компактные объекты, свойства которых очень похожи на свойства черных дыр, предсказываемых ОТО, являются реальными черными дырами. Для этого планируются специальные наземные и космические эксперименты с очень высоким угловым разрешением, порядка 10^{-6} секунды дуги и выше, чтобы наблюдать процессы вблизи горизонтов событий сверхмассивных черных дыр.

4. Кротовые норы

Кротовая нора, как и черная дыра, является очень компактным объектом, с радиусом «горловины», близкой к радиусу горизонта событий черной дыры той же массы. Однако, в отличие от черной дыры, она не имеет горизонта событий и не обладает сингулярностью в центре. Поэтому в пространстве – времени кротовой норы можно перемещаться в прямом и в обратном направлении. Как уже отмечалось, для образования кротовой норы необходимо присутствие экзотической материи с отрицательным давлением. В работах Н.С. Кардашева, И.Д. Новикова и А.А. Шацкого рассматриваются теоретические проблемы, связанные с формированием кротовых нор и проблемы устойчивости этих в высшей степени экзотических объектов при прохождении через них разных видов материи.

Поиск кротовых нор во Вселенной – актуальная задача современной астрофизики. Наблюдаемые свойства черных дыр и кротовых нор очень похожи, поэтому различить их – непростая задача. И тем не менее, астрономы придумали ряд методов, позволяющих отличить кротовую нору от черной дыры. Прежде всего, из-за различия метрики пространства – времени вблизи черной дыры и кротовой норы лучи далекой звезды фона по-разному искривляются в гравитационном поле этих объектов. Это позволяет отличить кротовую нору от черной дыры по эффектам гравитационного микролинзирования (в случае черных дыр и кротовых нор звездной массы). Н.С. Кардашев приводит около десятка наблюдаемых различий черных дыр и кротовых нор. Важнейшая особенность кротовой норы – наличие у неё монопольного магнитного поля. Сложение монопольного магнитного поля с дипольным магнитным полем аккреционного диска приводит к появлению одностороннего коллимированного выброса релятивистской плазмы – джета. Такие односторонние джеты, по-видимому, наблюдаются у некоторых квазаров, например, у знаменитого квазара 3C273.

Еще одна возможность отличить кротовую нору от черной дыры появляется при наличии очень высокого углового разрешения интерферометра. Поскольку кротовая нора не обладает горизонтом событий, в этом случае можно наблюдать наличие сверхтонкой структуры в изображении кротовой норы на размерах, меньших радиуса «горловины» кротовой норы. У черной дыры сверхтонкая структура изображения на масштабах, меньших радиуса горизонта событий, должна отсутствовать. Астрономы активно занимаются поиском кротовых нор, который, в связи с предстоящим вводом в строй новых наземных и космических телескопов и интерферометров, не кажется безнадежным.

Заключение

Галилей наблюдал небо в телескоп с объективом в несколько сантиметров диаметром и совершил революционный прорыв в нашем представлении об окружающем мире. Современные астрономы имеют в своем распоряжении неизмеримо более мощные и разнообразные средства наблюдений, которые позволяют им открывать принципиально новые, ранее неизвестные формы материи.

Современные астрономические наблюдения ведутся в очень широком диапазоне электромагнитных волн – от радиоволн до гамма-излучения. Используются наземные, баллонные и орбитальные инструменты, оснащенные лучшими светоприемниками и другой первоклассной, в том числе, компьютерной аппаратурой. Космологические исследования ведутся на крупнейших инструментах – это телескоп БТА с зеркалом диаметром 6 метров в САО РАН (еще недавно самый большой в мире), дюжина 8–10 метровых оптических телескопов, установленных в Чили, на Гавайских островах, в Испании, Южной Африке, космический телескоп Хаббла, радиотелескоп РАТАН-600, а также космические лаборатории IRAS (ИК-излучение), ROSAT, Chandra, Интеграл, XMM-Ньютон (рентгеновские лучи), COBE, Реликт, WMAR (микроволновое радиоизлучение). В стадии подготовки – новые масштабные проекты, такие, как Радиоастрон, Миллиметрон, Спектр–ультрафиолет, Спектр–Рентген–Гамма, SNAP, JEDM; последние два проекта специально нацелены на изучение темной энергии по регистрации сверхновых звезд на больших расстояниях. В проекте – создание оптического телескопа – гиганта с зеркалом 42 метра диаметром, а также коротковолнового радиотелескопа – интерферометра ALMA и т.п. Уже осуществлен запуск космических аппаратов Гершель и Планк.

Можно быть уверенным, что введение в строй этой уникальной аппаратуры приведет к новым революционным открытиям в такой увлекательнейшей области исследований, как Астрономия.

НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ФИЗИКЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ*

А.Г. Ягола
зам. председателя Президиума НМС по математике, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

В статье изложены общие подходы к решению некорректно поставленных задач. Приведены ссылки на примеры некорректно поставленных задач в астрофизике, колебательной спектроскопии, электронной микроскопии, акустике, исследованию полимерных систем, ядерной физике.

Корректно и некорректно поставленные задачи

Ниже будут изложены основные понятия теории так называемых некорректных (или некорректно поставленных) задач и численные методы их решения при наличии различной априорной информации. Для простоты будут рассмотрены сначала только линейные уравнения в нормированных пространствах, хотя, разумеется, все аналогичные определения могут быть введены и для нелинейных задач в более общих метрических (и даже топологических) пространствах.

В качестве основного объекта рассматривается операторное уравнение:

$$Az = u\ ,$$

где A – линейный оператор, действующий из гильбертова пространства Z в гильбертово пространство U. Требуется найти решение операторного уравнения z, соответствующее заданной неоднородности (или правой части уравнения) u.

Такое уравнение является типичной математической моделью для многих физических, так называемых обратных, задач, если предполагать, что искомые физические характе-

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00160_а, 08-01-97028-р_поволжье_а).

ристики z не могут быть непосредственно измерены, а в результате эксперимента могут быть получены только данные u, связанные с z с помощью оператора A.

Французским математиком Ж. Адамаром были сформулированы следующие условия корректности постановки математических задач, которые мы рассмотрим на примере записанного операторного уравнения. Задача решения операторного уравнения называется корректно поставленной (по Адамару), если выполнены следующие три условия:

1) решение существует $\forall u \in U$;
2) решение единственно;
3) если $u_n \to u$, $Az_n = u_n$, $Az = u$, то $z_n \to z$.

Условие 2) обеспечивается тогда и только тогда, когда оператор A является взаимно однозначным (инъективным). Условия 1) и 2) означают, что существует обратный оператор A^{-1}, причем его область определения $D(A^{-1})$ (или множество значений оператора A, $R(A)$) совпадает с U. Условие 3) означает, что обратный оператор A^{-1} является непрерывным, т.е. «малым» изменениям правой части u соответствуют «малые» изменения решения z. Более того, Ж. Адамар считал, что только корректные задачи должны рассматриваться при решении практических задач. Однако хорошо известны примеры некорректно поставленных задач, к изучению и численному решению которых приходится прибегать при рассмотрении многочисленных прикладных задач. Нужно отметить, что устойчивость и неустойчивость решения связаны с тем, как определяется пространство решений Z. Выбор пространства решений (в том числе и нормы в нем) обычно определяется требованиями прикладной задачи. Задачи могут быть некорректно поставленными при одном выборе нормы и корректно поставленными при другом.

Многочисленные обратные (в том числе и некорректные) задачи можно найти в различных областях физики. Так, астрофизик не может активно воздействовать на процессы, происходящие на далеких звездах и галактиках, ему приходится делать заключения о физических характеристиках весьма удаленных объектов по их косвенным проявлениям, доступным измерениям на Земле или вблизи Земли (на космических станциях). Прекрасные примеры некорректных задач можно найти в медицине, прежде всего, нужно отметить вычислительную (или компьютерную) томографию. Хорошо известны приложения некорректных задач в геофизике (на самом деле, легче и дешевле судить о том, что делается под поверхностью Земли, решая обратные задачи, чем заниматься бурением глубоких скважин), радиоастрономии, спектроскопии, ядерной физике и т.д., и т.п.

Хорошо известным примером некорректно поставленной задачи является интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Пусть оператор A имеет вид;

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad x \in [c,d].$$

Пусть ядро интегрального оператора $K(x,s)$ – функция, непрерывная по совокупности аргументов $x \in [c,d]$, $s \in [a,b]$, а решение $z(s)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Тем самым, можно рассматривать оператор A как действующий в следующих пространствах: $A : C[a,b] \to C[c,d]$. Покажем, что в этом случае задача решения интегрального уравнения является некорректно поставленной. Для этого нужно проверить условия корректности постановки задачи:

1) Существование решения для любой непрерывной на $[c,d]$ функции $u(x)$. На самом же деле, это не так: существует бесконечно много непрерывных функций, для которых решения нет.

2) Единственность решения. Это условие выполняется в том и только в том случае, если ядро интегрального оператора замкнуто.

Первые два условия корректности эквивалентны условию существования обратного оператора A^{-1} с областью определения $D(A^{-1})=C[c,d]$. Если ядро интегрального оператора замкнуто, то обратный оператор существует, однако область его определения не совпадает с $C[c,d]$.

3) Устойчивость решения. Это означает, что для любой последовательности $u_n \to \bar{u}$ ($Az_n = u_n$, $A\bar{z} = \bar{u}$) последовательность $z_n \to \bar{z}$. Устойчивость эквивалентна непрерывности обратного оператора A^{-1} при условии, что обратный оператор существует. Легко показать? Что в данном случае это не так.

Интегральный оператор A является вполне непрерывным при действии из $L_2[a,b]$ в $L_2[c,d]$, при действии из $C[a,b]$ в $L_2[c,d]$ и при действии из $C[a,b]$ в $C[c,d]$. Хорошо известно, что оператор, обратный к вполне непрерывному оператору, не может быть непрерывным.

Поскольку задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода в указанных пространствах некорректно поставлена, то даже при очень малых ошибках в задании $u(x)$ решение может либо отсутствовать, либо как угодно сильно отличаться от искомого точного решения.

Итак, вполне непрерывный инъективный оператор обладает обратным оператором, который не является непрерывным (ограниченным). Более того, при действии в бесконечномерных банаховых пространствах множество значений вполне непрерывного оператора не является замкнутым. Поэтому как угодно близко к неоднородности $u(x)$, для которой решение операторного уравнения существует, найдется неоднородность, для которой решение отсутствует.

Некорректность постановки математической задачи может быть связана с ошибкой в задании оператора. Простейший пример дает задача отыскания нормального псевдорешения системы линейных алгебраических уравнений и возникающая при этом неустойчивость, связанная с ошибками задания матрицы.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$Ax = b\,,\ x \in R^n\,,\ b \in R^m\,,\ A : R^n \to R^m\,.$$

Система может и не иметь решений. Гаусс и Лежандр в начале XIX века ввели метод наименьших квадратов, а именно, вместо решения СЛАУ предложили минимизировать квадратичный функционал (невязку):

$$\varPhi(x) = \left\|Ax - b\right\|^2 = (A^* Ax, x) - 2\cdot(A^* b, x) + (b, b)\,,$$

где A^* – сопряженная (транспонированная) матрица.

Поскольку матрица $A^* A$ неотрицательно определена, то $\varPhi(x)$ – выпуклый функционал. Для выпуклого функционала задача отыскания $\min\limits_{x \in R^n} \varPhi(x)$ эквивалентна отысканию стационарной точки, т.е. решения уравнения $\varPhi'(x) = 0$. Легко видеть, что $\varPhi'(x) = 2\cdot(A^* Ax - A^* b)$, $\varPhi''(x) = 2\cdot A^* A \geq 0$. Из равенства градиента нулю получается система линейных алгебраических уравнений с квадратной неотрицательно определенной матрицей (система нормальных уравнений):

$$A^* Ax = A^* b\,.$$

В конечномерном случае легко доказать, что для любого вектора b система нормальных уравнений всегда имеет решение (для исходного же уравнения это не обязательно), которое называется псевдорешением системы $Ax = b$. Псевдорешение может быть неединственным (если определитель $\det(A^* A) = 0$; если же $\det(A^* A) \neq 0$, то псевдорешение единственно). Множество псевдорешений образует аффинное (или линейное) подпространство и является выпуклым и замкнутым.

Если же система $Ax = b$ имеет решение, то оно совпадает с решением системы $A^* Ax = A^* b$. В этом случае

$\min\limits_{x \in R^n} \Phi(x) = \mu = 0$. Если же $\min\limits_{x \in R^n} \Phi(x) = \mu > 0$, система $Ax = b$ не имеет решений, но, как уже указывалось выше, имеет псевдорешение (возможно, неединственное). Число μ обычно называется мерой несовместности системы $Ax = b$.

<u>Определение</u>**.** Нормальное псевдорешение x_n системы $Ax = b$ – это псевдорешение с минимальной нормой, что является решением задачи отыскания минимума $\min\limits_{x: A^* Ax = A^* b} \|x\|$.

Легко показать, что нормальное псевдорешение существует и единственно. Поэтому можно поставить задачу: дан вектор b, которому можно поставить в соответствие нормальное псевдорешение x_n. Оператор A^+, который осуществляет это соответствие, является линейным и называется псевдообратным к оператору A: $x_n = A^+ b$. Если существует единственное решение исходной системы $Ax = b$ для любого вектора b, то $A^+ = A^{-1}$. Если существует единственное решение задачи $A^* Ax = A^* b$ для любого вектора b (т. е. оператор $A^* A$ обратим), то $A^+ = (A^* A)^{-1} \cdot A^*$. В общем случае выражение для A^+ имеет вид: $A^+ = \lim (A^* \cdot A + \alpha \cdot E)^{-1} \cdot A^*$ при $\alpha \to 0 + 0$.

Если вместо вектора b задан вектор $\tilde{b}$: $\| \tilde{b} - b \| \le \delta$, $\delta \ge 0$, и $x_n = A^+ b$, $\tilde{x}_n = A^+ \tilde{b}$, то $\| \tilde{x}_n - x_n \| \le \| A^+ \| \cdot \delta$ (это доказывает устойчивость решения по правой части). Тем самым, задача отыскания нормального псевдорешения корректно поставлена, если удается точно построить псевдообратный оператор. Однако задача построения псевдообратного оператора A^+ может быть некорректно поставленной, а поэтому задача отыскания $x_n = A^+ b$ может быть неустойчивой по отношению к ошибкам A^+.

Пример. Пусть система имеет вид:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

Очевидно, что существует бесконечно много решений системы, а (1/2, 1/2) – ее нормальное решение.

В данном случае $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пусть имеется ошибка в матрице

$$\begin{cases} (1+\varepsilon)x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}, \ \varepsilon \neq 0,$$

Такая приближенная система имеет единственное решение $x_\varepsilon = 0, y_\varepsilon = 1$, которое не зависит от ε. Более того, при $\varepsilon \to 0$ нет сходимости к нормальному псевдорешению $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Предполагая наличие ошибок во всех четырех элементах матрицы, легко построить примеры сходимости «приближенных» решений к различным векторам при стремлении погрешностей задания элементов к нулю.

Если изменить вектор *b* и рассмотреть систему

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{3}{2} \end{cases},$$

то она не имеет решения, хотя нормальное псевдорешение получается таким же: $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Легко построить примеры неустойчивости его отыскания.

Задачу решения операторного уравнения иногда удобно рассматривать как задачу вычисления значений неограниченного и не всюду определенного оператора A^{-1}: $z = A^{-1}u$. В таком виде обычно рассматривается задача дифференцирования: $z(x) = \frac{du}{dx}$. Очевидно, что если оператор дифференцирования рассматривать как действующий из пространства $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$, то задача вычисления значений этого оператора является некорректно поставленной, поскольку не выполняются первое и третье условия корректности. Если же рассматривать этот оператор как действующий из пространства $C^{(1)}[0, 1]$ в $C[0, 1]$, то задача вычисления значений этого оператора является корректно поставленной.

Понятие регуляризирующего алгоритма

Пусть дано операторное уравнение:

$$Az = u,$$

где A – линейный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U. В 1963 г. А.Н. Тихонов дал знаменитое определение регуляризирующего алгоритма (РА), которое лежит в основе современной теории некорректно поставленных задач.

Определение. Регуляризирующим алгоритмом (регуляризирующим оператором) $R(\delta, u_\delta) \equiv R_\delta(u_\delta)$ называется оператор, обладающий двумя следующими свойствами**:**

1) $R_\delta(u_\delta)$ определен для любых $\delta > 0$, $u_\delta \in U$, и отображает $(0, +\infty) \times U$ в Z;

2) для любого $z \in Z$ и для любого $u_\delta \in U$ такого, что $Az = u$, $\|u - u_\delta\| \le \delta, \delta > 0$ $z_\delta = R_\delta(u_\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} z$.

Задача решения уравнения первого рода называется регуляризируемой, если существует хотя бы один регуляризирующий алгоритм. Непосредственно из определения следует, что если существует хотя бы один РА, то их существует бесконечно много.

В настоящее время все математические задачи можно разделить на следующие классы:

1) корректно поставленные задачи;

2) некорректно поставленные регуляризируемые задачи;

3) некорректно поставленные нерегуляризируемые задачи.

Понятно, что корректно поставленные задачи являются регуляризируемыми, поскольку можно положить $R_\delta(u_\delta) = A^{-1}$. Отметим, что знание $\delta > 0$ в этом случае необязательно.

Далеко не все некорректно поставленные задачи можно регуляризировать, причем это часто зависит от выбора пространств *Z*, *U*. Л.Д. Менихес построил пример интегрального оператора с непрерывным замкнутым ядром, действующего из пространства $C[0,1]$ в $L_2[0,1]$, обратная задача для которого (т.е. решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода) является нерегуляризируемой. Это связано со свойствами пространства $C[0,1]$. Ниже будет показано, что если пространство *Z* гильбертово, а оператор *A* ограниченный и инъективный, то задача решения операторного уравнения первого рода является регуляризируемой. Этот результат справедлив и для некоторых банаховых пространств, но не для всех. В частности, пространство $C[0,1]$ к таким банаховым пространствам не относится.

Можно дать эквивалентное определение регуляризирующего алгоритма и регуляризируемости операторного уравнения. Пусть задан оператор (отображение) $R_\delta(u_\delta)$, причем $R_\delta(u_\delta)$ определен для любых $\delta > 0$, $u_\delta \in U$, и отображает $(0,+\infty)\times U$ в *Z*. Погрешность решения операторного уравнения в точке $z \in Z$ с помощью оператора $R_\delta(u_\delta)$ при условии, что правая часть *u* задана с погрешностью $\delta > 0$, определяется как $\Delta(R_\delta,\delta,z) = \sup\limits_{u_\delta \in U:\|u_\delta - u\| \le \delta,\ Az=u} \| R_\delta u_\delta - z \|$. Оператор $R_\delta(u_\delta)$ называется регуляризирующим оператором, если для любого $z \in Z$ $\Delta(R_\delta, \delta, z) \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$. Легко видеть, что данное определение эквивалентно данному выше.

Аналогично можно дать определение регуляризирующего алгоритма для задачи вычисления значений оператора (см. конец предыдущего параграфа), т.е. для задачи вычисления значений отображения G:

$$D(G) \to Y,\, D(G) \subseteq X$$

при условии, что аргумент задан с погрешностью (X, Y – метрические или нормированные пространства). Разумеется, задача решения операторного уравнения при условии, что A – инъективный оператор, может рассматриваться как задача вычисления значений оператора A^{-1}.

Огромное значение имеет ответ на следующий очень важный вопрос, можно ли решить некорректную задачу, т.е. построить регуляризирующий алгоритм, не зная погрешность δ.

Если задача корректна, то устойчивый метод, очевидно, можно построить и без знания δ. Так, в случае решения операторного уравнения $z_\delta = A^{-1}u_\delta \to z = A^{-1}u$ при $\delta \to 0$. В случае некорректных задач это невозможно. Приведенная ниже теорема принадлежит А.Б. Бакушинскому и была им доказана для задачи вычисления значений оператора. Аналогичная теорема имеет место и для решения операторного уравнения.

Теорема. Если для вычислений значений оператора G на множестве $D(G) \subseteq X$ существует регуляризирующий оператор, не зависящий от δ (явно), то существует продолжение G на X, которое непрерывно на $D(G) \subseteq X$.

Итак, построение регуляризирующих алгоритмов, не зависящих явно от погрешности, возможно только для задач, корректных на своей области определения.

Следующим свойством некорректно поставленных задач является невозможность оценить погрешность решения, даже если известна погрешность задания правой части операторного уравнения или погрешность задания аргумента в задаче вычисления значений оператора. Этот принципиально важный результат был также впервые доказан А.Б. Бакушинским для решения операторного уравнения.

Теорема.

Пусть $\Delta(R_\delta, \delta, z) = \sup_{u_\delta \in U: \|u_\delta - u\| \le \delta,\ Az = u} \| R_\delta u_\delta - z \| \le \varepsilon(\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 0$ для любого $z \in D \subseteq Z$. Тогда сужение обратного оператора на множество AD: $A^{-1}\big|_{AD \subseteq U}$ непрерывно на AD.

Таким образом, равномерная по z оценка погрешности решения операторного уравнения на множестве $D \subseteq Z$ возможна только в том случае, когда обратный оператор непрерывен на AD. Данная теорема справедлива и для нелинейных операторных уравнений, причем в метрических пространствах.

Из определения регуляризирующего алгоритма легко следует, что, если есть хотя бы один регуляризирующий алгоритм, то их может быть сколько угодно. Выбрать же тот, который дает наименьшую ошибку, или сравнивать алгоритмы, сравнивая ошибки полученных приближенных решений, при решении некорректных задач, невозможно при отсутствии априорной информации, которая фактически преобразует такие задачи в корректные. Примеры будут рассмотрены ниже.

Регуляризирующие алгоритмы для операторных уравнений в бесконечномерных банаховых пространствах в случае, если обратный оператор не ограничен, нельзя сравнивать и по скорости сходимости приближенного решения к точному при стремлении погрешности входных данных к нулю. Этот важный результат принадлежит В.А. Винокурову.

В заключение параграфа приведем определение регуляризирующего алгоритма в случае, если и оператор может быть задан с ошибкой, т.е. вместо оператора A дан линейный ограниченный оператор A_h: $A_h : Z \to U$, такой, что $\|A_h - A\| \le h, \quad h \ge 0$. Для краткости пара погрешностей δ, h записывается как η=(δ, h).

Определение. Регуляризирующим алгоритмом (регуляризирующим оператором) $R(\eta, u_\delta, A_h) \equiv R_\eta(u_\delta, A_h)$ называется оператор, обладающий двумя следующими свойствами:

1) $R_\eta(u_\delta, A_h)$ определен для любых $\delta > 0$, $h \ge 0$, $u_\delta \in U$, $A_h \in L(Z,U)$, и отображает $(0,+\infty)\times[0,+\infty)\times U \times L(Z,U)$ в Z;

2) для любого $z \in Z$, для любого $u_\delta \in U$ такого, что $Az = u$, $\|u - u_\delta\| \le \delta, \delta > 0$ и для любого $A_h \in L(Z,U)$ такого, что $\|A_h - A\| \le h, \quad h \ge 0$, $z_\eta = R_\eta(u_\delta, A_h) \underset{\eta \to 0}{\to} z$.

Здесь $L(Z,U)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из Z в U, с нормой, определяемой обычным образом.

Аналогично можно дать определение регуляризирующего алгоритма в случае, когда операторное уравнение рассматривается только на множестве $D \subseteq Z$, т.е. имеется априорная информация о том, что точное решение $z \in D \subseteq Z$.

Невозможность построения регуляризирующих алгоритмов, не зависящих явно от h, для решения некорректно поставленных СЛАУ с приближенно заданной матрицей была впервые отмечена А.Н.Тихоновым.

Некорректные задачи на компактах

Пусть дано операторное уравнение:

$$Az = u,$$

где A – линейный инъективный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U. Пусть $\bar{z}$ – точное решение операторного уравнения,

$A\bar{z} = \bar{u}$, $\bar{u}$ –точная правая часть и задана приближенная правая часть u_δ такая, что $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta, \delta > 0$.

Множество $Z_\delta = \{z_\delta : \|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta\}$ является множеством приближенных решений операторного уравнения. Для линейных некорректных задач $diam Z_\delta = \sup\{\| z_1 - z_2 \| : z_1, z_2 \in Z_\delta\} = \infty$ для любого $\delta > 0$, поскольку обратный оператор A^{-1} не ограничен.

Возникает вопрос: нельзя ли использовать дополнительную априорную информацию для того, чтобы сузить множество приближенных решений, а еще лучше получить корректную задачу. А.Н. Тихонову принадлежит следующая идея: если известно, что множество решений является компактом, то задача решения операторного уравнения корректна при условии, что приближенная правая часть операторного уравнения также принадлежит образу компакта. Для доказательства этого утверждения А.Н. Тихонов применил следующую теорему.

Теорема. Пусть инъективный непрерывный оператор A действует: $D \in Z \to AD \in U$, где Z, U – нормированные пространства, D – компакт. Тогда обратный оператор A^{-1} непрерывен на AD.

Теорема верна и для нелинейных операторов. Таким образом, решение операторного уравнения на компакте является корректной задачей при условии, что приближенная правая часть принадлежит AD. Эта идея позволила М.М. Лаврентьеву ввести понятие задачи, корректной по Тихонову (предполагается существование множества корректности, на котором задача становится корректной), а В.К. Иванову дать определение квазирешения некорректной задачи.

Приведенная выше теорема неприменима, если $u_\delta \notin R(A)$. Поэтому необходимо ее обобщить.

Определение. Элемент $z_\delta \in D$ такой, что $z_\delta = \arg\min\limits_{z\in D} \|Az - u_\delta\|$, называется квазирешением операторного уравнения на компакте D ($z_\delta = \arg\min\limits_{z\in D} \|Az - u_\delta\|$ означает, что $\|A\, z_\delta - u_\delta\| = \min\{\|A\, z - u_\delta\| : z \in D\}$).

Квазирешение существует, но возможно не единственно. Тем не менее, для любого квазирешения имеет место сходимость к точному решению: $z_\delta \to \bar{z}$ при $\delta \to 0$. При этом знание δ не обязательно. Если же погрешность δ известна, то

1) в качестве приближенного решения может быть взят любой элемент $z_\delta \in D$, удовлетворяющий неравенству: $\|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta$ (δ-квазирешение);

2) можно найти погрешность приближенного решения, решив экстремальную задачу:

найти $max\|z-z_\delta\|$ по всем $z \in D$, удовлетворяющим неравенству: $\|Az - u_\delta\| \le \delta$ (очевидно, что точное решение удовлетворяет данному неравенству).

Таким образом, задача отыскания квазирешения практически не отличается от корректной. Не выполняется, вообще говоря, только условие единственности квазирешения.

Если же и оператор A задан с погрешностью, то понятие квазирешения вводится, как и выше, заменой оператора A на оператор A_h.

Определение. Элемент $z_\eta \in D$ такой, что $z_\eta = \arg\min\limits_{z\in D} \|A_h z - u_\delta\|$, называется квазирешением операторного уравнения на компакте D.

В качестве же приближенного решения может быть выбран любой элемент $z_\eta \in D$, удовлетворяющий неравенству: $\|Az_\eta - u_\delta\| \le \delta + h \| z_\eta \|$ (η-квазирешение).

Если Z и U – гильбертовы пространства, то многие численные методы отыскания квазирешений для линейных операторных уравнений основаны на том, что функционал невязки $\|Az - u_\delta\|^2$ является выпуклым и дифференцируемым. Если D – выпуклый компакт, то нахождение квазирешения – задача выпуклого программирования. Записанные выше неравенства, определяющие приближенные решения на компактах, могут быть использованы в качестве критериев остановки минимизации функционала невязки. Задача отыскания погрешности найденного приближенного решения является нестандартной задачей выпуклого программирования, поскольку при решении этой задачи требуется найти максимум, а не минимум выпуклого функционала.

Хорошо известны множества корректности, которые часто встречаются в прикладных задачах. Прежде всего, если известно, что точное решение принадлежит конечно-параметрическому семейству функций, то ставится задача отыскания параметров, которая может быть корректной и в том случае, если задача без этой априорной информации является некорректной.

Если в операторном уравнении неизвестной является функция $z(s)$, $s\in [a, b]$, о которой известно, что она является монотонной и ограниченной, то этой информации оказывается достаточно для выделения компакта в пространстве $L_2[a, b]$. Для отыскания квазирешения после перехода к конечно-разностной аппроксимации могут быть применены известные методы квадратичного программирования, например, метод проекции сопряженных градиентов или метод условного градиента. Аналогичный подход применим и при наличии априорной информации о том, что точное решение является ограниченной и выпуклой, или монотонной и выпуклой, или имеющей заданное число максимумов и минимумов функцией. В этих случаях возможно отыскание и погрешности приближенного решения.

Некорректные задачи в случае истокопредставимости решения

Пусть линейный оператор A инъективный, непрерывный и отображает $Z \to U$; Z, U – нормированные пространства. Пусть также имеется следующая априорная информация, которая встречается при решении многих физических задач. Известно, что точное решение $\bar{z}$ для уравнения $\bar{u} = A\bar{z}$ представимо в виде $B\bar{v} = \bar{z}$, $\bar{v} \in V$; $B : V \to Z$; B – инъективный, вполне непрерывный оператор; V –гильбертово пространство. Предполагается, что известны u_δ – неточная правая часть такая, что $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$, и ее погрешность $\delta > 0$.

Ниже рассматривается метод расширяющихся компактов, идея и обоснование которого принадлежит В.К. Иванову и И.Н. Домбровской.

Сначала номер итерации полагается n=1 и определяется замкнутый шар в пространстве V: $\overline{S_n}(0) = \{v : \|v\| \le n\}$. Его образ при действии оператора B $Z_n = B\overline{S_n}(0)$ является компактом, поскольку B – вполне непрерывный оператор, а V –гильбертово пространство. Далее отыскивается $\min\limits_{z \in B(\overline{S_n}(0))} \|Az - u_\delta\|$, где u_δ – заданная неточная правая часть $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta, \delta > 0$. Существование минимума гарантируется постановкой задачи – компактностью Z_n и непрерывностью A. Если $\min\limits_{z \in B(\overline{S_n}(0))} \|Az - u_\delta\| \le \delta$, тогда процесс прекращается, полагается $n(\delta)=n$, а в качестве приближенного решения выбирается любой элемент $z_{n(\delta)} : z_{n(\delta)} \in B(\overline{S_{n(\delta)}}(0))$ и $\| Az_{n(\delta)} - u_\delta \| \le \delta$. Если же $\min\limits_{z \in B(\overline{S_n}(0))} \| Az - u_\delta \| > \delta$, то нужно расширять компакт, для чего n увеличивается на единицу, процесс повторяется.

Теорема. Описанный выше процесс сходится: $n(\delta) < +\infty$. Существует $\delta_0 > 0$ (которое, вообще говоря, зависит от $\bar{z}$) такое, что $n(\delta) = n(\delta_0)$ $\forall \delta \in (0, \delta_0]$. Приближенное решение $z_{n(\delta)}$ сходится к точному решению $\bar{z}$ при $\delta \to 0$.

Из сказанного выше понятно название метода. Оказывается, этот метод допускает возможность построения так называемой апостериорной оценки погрешности, т.е. существует функция $\chi(u_\delta, \delta)$ такая, что $\chi(u_\delta, \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, и $\chi(u_\delta, \delta) \ge \| z_{n(\delta)} - \bar{z} \|$ по крайней мере, при достаточно малых $\delta > 0$. В качестве апостериорной оценки погрешности можно взять

$$\chi(u_\delta, \delta) = \max\{\| z_{n(\delta)} - z \| : z \in Z_{n(\delta)}, \| Az - u_\delta \| \le \delta\}.$$

Апостериорная оценка погрешности не является оценкой погрешности в полном смысле слова, построение оценки погрешности решений некорректно поставленных задач невозможно. Однако при достаточно малых $\delta > 0$ (а именно $\forall \delta \in (0, \delta_0]$) апостериорная оценка погрешности является оценкой погрешности решения некорректной задачи при наличии априорной информации об истокопредставимости.

Данный подход легко обобщается на случаи, когда операторы A и B заданы с погрешностями, а также на нелинейные некорректные задачи с условием истокопредставимости.

Разработаны численные методы решения линейных некорректных задач при условии истокопредставимости, в том числе и построения апостериорной оценки погрешности. Использование последовательности натуральных чисел в качестве радиусов шаров в пространстве V не обязательно. Может быть взята любая монотонно возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел.

Вариационный подход к построению регуляризирующих алгоритмов

Вариационный подход к построению регуляризирующих алгоритмов был впервые предложен А.Н. Тихоновым. Ниже будет описан регуляризирующий алгоритм Тихонова, основанный на минимизации сглаживающего функционала (или функционала Тихонова).

Пусть дано операторное уравнение:

$$Az = u\,,$$

где A – линейный ограниченный инъективный оператор, действующий из гильбертова пространства Z в гильбертово пространство U. Предполагается, что точное решение $\bar{z} \in D \subseteq Z$, где D – замкнутое выпуклое множество такое, что $0 \in D$. Множество D определяется известными априорными ограничениями; если ограничений нет, то D=Z. В этом параграфе ограничения могут быть не столь сильными, как в предыдущих разделах, и применение метода квазирешений или метода расширяющихся компактов, вообще говоря, невозможно. Тем не менее, рекомендуется при решении практических задач включать все известные ограничения в постановку обратной задачи. К таким ограничениям относятся типичные для очень многих физических задач условия неотрицательности, ограниченности сверху и снизу заданными константами и многие другие.

Пусть точное значение правой части уравнения $A\bar{z} = \bar{u}$ неизвестно, но задано ее приближение u_δ такое, что

$\|\bar{u}-u_\delta\| \le \delta$, и погрешность $\delta > 0$. Пусть оператор A также задан с ошибкой, т.е. задан линейный ограниченный оператор $A_h : Z \to U$; $\|A_h - A\| \le h$; и погрешность $h \ge 0$. Для краткости пара погрешностей обозначается $\eta = (\delta, h)$. Задача построения регуляризирующего алгоритма состоит в следующем: требуется по набору данных $\{u_\delta, A_h, \eta\}$ построить приближенное решение $z_\eta \in D$ такое, что $z_\eta \to \bar{z}$ при $\eta \to 0$, или $z_\eta = R_\eta(u_\delta, A_h) \in D$, $z_\eta \to \bar{z}$ при $\eta \to 0$, где $R_\eta(u_\delta, A_h)$ – регуляризирующий алгоритм.

А.Н. Тихонов предложил следующий подход к построению регуляризирующих алгоритмов. Вводится функционал (функционал Тихонова): $M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|^2 + \alpha \cdot \|z\|^2$, $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, и ставится экстремальная задача: найти $\min\limits_{z \in D} M^\alpha[z]$. При условиях, сформулированных в начале параграфа, существует единственный элемент $z_\eta^\alpha = \arg\min\limits_{z \in D} M^\alpha[z]$.

Численные методы отыскания элемента, на котором функционал Тихонова достигает минимального значения при фиксированном значении параметра регуляризации, основаны, в основном, на двух следующих подходах:

1. Если ограничений нет (D=Z), то необходимым и достаточным условием минимума является обращение в нуль градиента. Таким образом, получается уравнение Эйлера для функционала Тихонова: $(M^\alpha[z])' = 0$. После перехода к конечно-разностной аппроксимации полученная СЛАУ решается на компьютере. Для ряда задач специального вида возможно применение различных преобразований, упрощающих решение получившейся СЛАУ. Так, для уравнений типа свертки (задача, часто встречающаяся при обработке изо-

бражений), в том числе и многомерных, успешно применяется быстрое дискретное преобразование Фурье.

2. При наличии ограничений и при их отсутствии могут применяться прямые методы минимизации функционала Тихонова (метод сопряженных градиентов с ограничениями или без, метод Ньютона и др.).

Если ограничения отсутствует, то задача отыскания экстремали функционала Тихонова сводится к решению уравнения $A_h^* A_h z + \alpha z = A_h^* u_\delta$. В случае положительно определенного самосопряженного оператора A и равенства $Z=U$ регуляризированное приближение может находиться из уравнения $Az + \alpha z = u_\delta$ (метод М.М. Лаврентьева).

Для построения РА необходимо определить способ выбора параметра регуляризации α. Параметр регуляризации при решении некорректно поставленных задач должен явно зависеть от погрешностей. В противном случае, в соответствии с теоремами А.Б. Бакушинского и А.Н. Тихонова, могут решаться только корректные задачи. Как показывают простые примеры, известные методы выбора параметра регуляризации «L-кривой» и “generalized cross-validation” (GCV) (обобщенной перекрестной проверки), в которых параметр регуляризации не зависит явно от погрешностей задания правой части и оператора, не только не могут быть применены для решения некорректно поставленных задач, но и дают неверные результаты при решении простейших корректных задач.

Методы выбора параметра регуляризации условно подразделяются на априорные и апостериорные. Первый априорный способ выбора был предложен А.Н. Тихоновым. Некоторое обобщение приведено ниже. Пусть задана скорость убывания параметра регуляризации:

а) $\alpha(\eta) \underset{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0$;

б) $\dfrac{(\delta+h)^2}{\alpha(\eta)} \xrightarrow[\eta\to 0]{} 0$, то есть $\alpha(\eta)\to 0$ медленнее, чем $(\delta+h)^2$. В этом случае можно доказать, что $z_\eta^{\alpha(\eta)} \xrightarrow[\eta\to 0]{} \bar{z}$. Если оператор A не является инъективным, то имеет место сходимость к решению с минимальной нормой (нормальному решению).

Практическое применение априорных способов выбора параметра регуляризации вызывает большие затруднения, поскольку при решении прикладных задач необходимо найти приближенное решение при фиксированном уровне погрешностей. В качестве примера апостериорного способа ниже описан обобщенный принцип невязки (ОПН), предложенный и обоснованный А.В. Гончарским, А.С. Леоновым, А.Г. Яголой. ОПН является обобщением принципа невязки В.А. Морозова, разработанного для случая точного заданного оператора (h=0).

Определение. Мерой несовместности операторного уравнения с приближенными данными на множестве $D\subset Z$ называется

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z\in D}\|A_h z - u_\delta\|$$

Очевидно, что $\mu_\eta = 0$, если $u_\delta \in \overline{A_h D}$.

Лемма. Если $\|u_\delta - \bar{u}\| \le \delta,\ \bar{u} = A\bar{z},\ \bar{z}\in D, \|A - A_h\| \le h$, то $\mu_\eta(u_\delta, A_h) \xrightarrow[\eta\to 0]{} 0$.

Если мера несовместности вычисляется с погрешностью $k \ge 0$, согласованной с погрешностями h, то вместо $\mu_\eta(u_\delta, A_h)$ известно $\mu_\eta^k(u_\delta, A_h)$, удовлетворяющее неравенствам:

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) \le \mu_\eta^k(u_\delta, A_h) \le \mu_\eta(u_\delta, A_h) + k\,;\ \kappa = \kappa(\eta)\to 0$$

при $\eta\to 0$.

Определение. Функция параметра регуляризации $\alpha > 0$:

$$\rho_\eta^k(\alpha) = \left\|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\right\|^2 - (\delta + h\left\|z_\eta^\alpha\right\|)^2 - (\mu_\eta^k(u_\delta, A_h))^2$$

называется обобщенной невязкой.

Следующий способ выбора параметра регуляризации называется обобщенным принципом невязки. Пусть условие $\| u_\delta \|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$ не выполнено; тогда в качестве приближенного решения выберем $z_\eta = 0$. В противном случае обобщенная невязка имеет положительный корень $\alpha^* > 0$, то есть $\rho_\eta^\kappa(\alpha^*) = 0$, или $\left\|A_h z_\eta^{\alpha^*} - u_\delta\right\|^2 = (\delta + h\left\|z_\eta^{\alpha^*}\right\|)^2 + (\mu_\eta^k(u_\delta, A))^2$.

В этом случае приближенное решение $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*}$ определяется единственным образом. Можно доказать, что $z_\eta \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} \bar{z}$. Если оператор A не является инъективным, то имеет место сходимость к решению с минимальной нормой (нормальному решению).

Для отыскания корня обобщенной невязки необходимо знать следующие ее свойства:

1. $\rho_\eta^\kappa(\alpha\ )$ непрерывна и монотонно не убывает при $\alpha > 0$.

2. $\lim \rho_\eta^\kappa(\alpha) = \| u_\delta \|^2 - \delta^2 - (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$ при $\alpha \to +\infty$.

3. $\lim \rho_\eta^\kappa(\alpha) \le -\delta^2$ при $\alpha \to 0 + 0$.

Из условий 1)–3) в случае, если $\| u_\delta \|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$, сразу же следует существование корня обобщенной невязки, который может быть найден с использованием известных численных методов отыскания корней монотонных непрерывных функций (например, метод секущих).

Для того чтобы выяснить, какое же решение выбирается в соответствии с ОПН, необходимо рассмотреть следующую экстремальную задачу, которая называется обобщенным методом невязки (ОМН):

Найти

$$\inf\|z\|,\ z\in\left\{z : z\in D,\ \|A_h z-u_\delta\|^2\le(\delta+h\|z\|)^2+(\mu_\eta^k(u_\delta,A_h))^2\right\}.$$

Теорема. Пусть A, A_h – линейные ограниченные операторы из Z в U; D – замкнутое выпуклое множество, содержащее точку 0, $D\subseteq Z$; $\|A-A_h\|\le h, \|u_\delta-\bar{u}\|\le\delta, \bar{u}=A\bar{z}, \bar{z}\in D$.

Тогда обобщенный принцип невязки и обобщенный метод невязки эквивалентны, т.е. решение операторного уравнения, выбранное в соответствии с ОПН, и решение экстремальной задачи ОМН совпадают.

Если рассматривать множество $\left\{z : z\in D,\ \|A_h z-u_\delta\|^2\le(\delta+h\|z\|)^2+(\mu_\eta^k(u_\delta,A_h))^2\right\}$ как множество приближенных решений операторного уравнения с приближенными данными (точное решение $\bar{z}$ является элементом этого множества в силу условий теоремы), то в соответствии с ОПН выбирается приближенное решение с минимальной нормой. В частности, если в качестве пространства Z рассматривается пространство $W_2^1[a,b]$ (норма в этом пространстве определяется $\| z \|=\{\int_a^b z^2(s)ds+\int_a^b (z^{'}(s))^2 ds\}^{1/2}$, в определение нормы входит производная), то говорят, что выбирается наиболее гладкое решение.

В случае наличия априорной информации о близости решения к заданному элементу z_0 легко адаптировать ОПН на случай отыскания приближенного решения, ближайшего (по норме) к z_0. Для этого достаточно заменить искомое решение на z–z_0, преобразовав соответствующим образом правую часть уравнения.

Существуют многочисленные модификации ОПН. Так, можно отказаться от вычисления меры несовместности и рассматривать обобщенную невязку в виде: $\rho_\eta^k(\alpha) = \left\|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\right\|^2 - (\delta + h\left\|z_\eta^\alpha\right\|)^2$. В этом случае, однако, не гарантируется существование положительного корня обобщенной невязки. В случае его отсутствия приближенное решение находится как $z_\eta = \lim z_\eta^\alpha$ при $\alpha \to 0+0$. При этом ОПН и соответствующий ОМН, вообще говоря, не эквивалентны.

ОПН не может быть применен непосредственно к решению несовместных задач (отыскания их псевдорешений или нормальных псевдорешений). Тем не менее, его можно модифицировать и для этого случая. Для этого необходимо изменить вид обобщенной невязки и использовать оценку сверху меры несовместности, предложенную А.М. Левиным. Он же разработал и численные методы вычисления этой оценки. Нужно заметить, что задача вычисления меры несовместности может быть некорректно поставленной. Так, пусть дано одно алгебраическое уравнение с одной неизвестной: $0{\cdot}x=1$. Очевидно, что мера несовместности равна 1. Однако, как угодно малое изменение «оператора», т.е. коэффициента при неизвестной, приводит к тому, что мера несовместности становится равной нулю. Оценка А.М. Левина имеет вид: $\hat{\mu}_\eta = \inf(\delta + h\,\|z\| + \|A_h z - u_\delta\|), z \in D$.

Пусть $\bar{z} \in D$ – точное псевдорешение операторного уравнения $Az = u$ на множестве D, соответствующее неоднородности $\bar{u}$, т.е. $\|A\bar{z} - \bar{u}\| = \bar{\mu}$, где $\bar{\mu} = \inf\|Az - \bar{u}\|, z \in D$. Справедлива

Лемма. $\hat{\mu}_\eta \geq \bar{\mu}$, $\hat{\mu}_\eta \to \bar{\mu}$ при $\eta \to 0$.

Обобщенная невязка, предназначенная решения для как совместных, так и несовместных некорректных задач, имеет вид: $\hat{\rho}_\eta^k(\alpha) = \left\| A_h z_\eta^\alpha - u_\delta \right\|^2 - (\delta + h\left\| z_\eta^\alpha \right\| + \hat{\mu}_\eta^k(u_\delta, A_h))^2$. Здесь предполагается, как и ранее, что оценка сверху меры несовместности вычисляется с погрешностью $\kappa = \kappa(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$. ОПН формулируется следующим образом. Пусть условие $\| u_\delta \| > \delta + \hat{\mu}_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)$ не выполнено; тогда в качестве приближенного решения выберем $z_\eta = 0$. В противном случае обобщенная невязка имеет положительный корень $\alpha^* > 0$, то есть $\hat{\rho}_\eta^\kappa(\alpha^*) = 0$, или $\left\| A_h z_\eta^{\alpha^*} - u_\delta \right\| = \delta + h\left\| z_\eta^{\alpha^*} \right\| + \hat{\mu}_\eta^k(u_\delta, A_h)$. В этом случае приближенное решение $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*}$ определяется единственным образом. Можно доказать, что $z_\eta \underset{\eta \to 0}{\longrightarrow} \bar{z}$, где $\bar{z} \in D$ – точное псевдорешение. Если оператор A не является инъективным, то имеет место сходимость к решению с минимальной нормой (нормальному псевдорешению). Понятно, что изложенный метод может быть применен и для разрешимых задач.

Нелинейные некорректные задачи

Теоретическое обобщение изложенных выше результатов может быть перенесено и на случай, когда оператор A нелинейный. В случае точно заданного оператора также может быть введено понятие квазирешения и приближенного решения на компакте. В случае приближенно заданного оператора A_h определение квазирешения не претерпевает изменений, однако для определения приближенного решения необходимо ввести функцию, описывающую степень близости операторов. Обычно в случае приближенно заданного оператора A_h степень его близости к оператору A определяется параметром $h \geq 0$ и функцией $\psi(h,z) \geq 0$ такой, что $\| A_h z - Az \| \leq \psi(h,z)$, $\psi(h,z) \to 0$ монотонно по h при $h \to 0$, при выполнении определенных, зависящих от конкретной задачи свойств по второму аргументу. В линейном случае обычно $\psi(h,z)=h\|z\|$. Наибольшую сложность вызывает минимизация функционала невязки, поскольку в этом случае этот функционал, вообще говоря, не выпуклый. К сожалению, нет общих рекомендаций, как решать эту задачу. Каждый раз должно проводиться отдельное исследование.

Метод расширяющихся компактов в случае нелинейности оператора A исследуется полностью аналогично линейному случаю и допускает обобщение на случай операторов, заданных с ошибками.

А.Н. Тихонов применил вариационный подход, основанный на минимизации сглаживающего функционала, и для решения нелинейных некорректных задач. В этом случае, однако, даже при решении некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах недостаточно предполагать только непрерывность и инъективность оператора A. Необходимо требовать либо усиленную непрерывность оператора A (слабо сходящиеся последовательности в пространстве Z оператор A преобразует в сильно сходящиеся последовательности в пространстве U), либо использовать схему с тремя пространствами (схему компактного вложения): $V \to Z \to U$. Оператор $A: Z \to U$ является непрерывным; пространство V вкладывается в пространство Z, причем оператор вложения B вполне непрерывен. Далее рассматривается функционал Тихонова $M^{\alpha}[v]=\left\|A_h Bv-u_{\delta}\right\|^{p}+\alpha\cdot\left\|v\right\|^{2}$, а интерес представляет $z=Bv$. Такая схема была применена А.Н. Тихоновым в его первых работах по теории регуляризации для пространств $V=W_2^1[a,b]$, $Z=C[a,b]$, $U=L_2[c,d]$. В дальнейшем А.Б. Бакушинский доказал, что при построении РА для линейных некорректных задач достаточно использовать два пространства.

Выбор параметра регуляризации в соответствии с апостериорными принципами потребовал определения не только его значения, но и выбора определенной экстремали, в связи с тем, что функции параметра регуляризации (например, обобщенная невязка) могут быть разрывными, а экстремали неединственными. В линейном случае при условиях, сформулированных выше, экстремаль функционала Тихонова определяется единственным образом. Эти вопросы исследованы в работах А.В. Гончарского, А.С. Леонова, А.Г. Яголы.

В нелинейном случае, возможны РА типа ОМН. При этом также требуется либо усиление требований к оператору, либо использование схемы компактного вложения. Результат об эквивалентности ОПН и ОМН, справедливый в линейном случае, в нелинейном случае, вообще говоря, неверен.

Итеративные и другие методы

Из-за небольшого объема статьи не имеет смысла описывать все возможные подходы к построению РА. Они могут быть изложены в рамках единой схемы поточечной аппроксимации обратного оператора и согласования параметра, определяющего аппроксимацию, с погрешностью входных данных.

В случае если известно (или может быть вычислено) спектральное разложение оператора, возможно применение методов «спектральной срезки», т.е. согласование используемых в вычислениях «высоких частот» с погрешностью задания входных данных.

Для СЛАУ разработаны регуляризированные варианты метода сингулярного разложения, согласовывающие отбрасываемые минимальные сингулярные числа с погрешностями задания матрицы и правой части. Интерес представляет метод минимальной псевдообратной матрицы, предложенный А.С. Леоновым, в котором из множества псевдообратных матриц, соответствующих заданной приближенной матрице и ее погрешности, выбирается матрица, имеющая минимальную норму, после чего отыскивается приближенное нормальное псевдорешение СЛАУ.

В работах М.М. Лаврентьева, О.М. Алифанова, А.Б. Бакушинского, Г.М. Вайникко, В.В. Васина, Х. Энгла и других авторов предложены и развиты так называемые итеративные методы решения некорректных задач. Для этих методов параметром регуляризации является номер итерации, и должно быть сформулировано правило остановки, согласующее число итераций с погрешностью входных данных. Простейший пример итеративного метода дает метод простой итерации. Пусть пространства Z и U гильбертовы, причем $Z=U$, оператор A – самосопряженный, неотрицательно определенный, вполне непрерывный, $||A||<1$, и уравнение $Az=u$ разрешимо. Тогда уравнение можно переписать в виде $z=z-(Az-u)$ и, задав начальное приближение $z^{(0)}$, организовать итерационный процесс, который называется методом простой итерации: $z^{(k+1)}= z^{(k)}-(A\ z^{(k)}-u)$. Процесс сходится к нормальному решению операторного уравнения. Если $||A||\geq 1$, то предварительно следует ввести нормирующий множитель. Если исходное уравнение переписать в виде: $Az+\beta z=\beta z+u$, $\beta>0$, то $z=(A+\beta I)^{-1}(\beta z+u)$, где I – единичный оператор, то далее можно записать итерационный процесс: $z^{(k+1)}=(A+\beta I)^{-1}(\beta z^{(k)}+u)$, который называется неявной итерационной схемой. Она обладает свойством сходимости к нормальному решению операторного уравнения и при невыполнении условия $||A||<1$, Если оператор A не является самосопряженным и неотрицательно определенным, то для построения итерационных процессов, описанных выше, уравнение нужно предварительно преобразовать к виду $A^*Az=A^*u$. В случае приближенно заданных входных данных, если задача некорректно поставлена, должны быть сформулированы правила остановки (например, по невязке или по обобщенной невязке). Описанные выше два итерационных процесса относятся к линейным итерационным процессам. К нелинейным итерационным процессам, применяемым для решения некорректных задач, относятся обобщения методов наискорейшего спуска, минимальных невязок и другие. В соответствии с принципом итеративной регуляризации многие классические методы, предназначенные, в основном, для минимизации функционала невязки (метод Ньютона, метод сопряженных градиентов и другие) с помощью введения регуляризирующих поправок могут быть преобразованы в РА.

Ниже приводится список литературы, состоящий из некоторых основных монографий и учебников, посвященных теории и численным методам решения некорректно поставленных задач и освещающих их различные разделы.

Приложения в физике

Первые приложения автора для решения прикладных задач в физике (совместно с А.М. Черепащуком и А.В. Гончарским) были связаны с интерпретацией кривых блеска двойных затменных систем. Ниже приводится список некоторых основных публикаций по применению методов регуляризации (отыскание квазирешений на компактах, вариационный подход, метод расширяющихся компактов) для численного решения обратных задач в различных разделах физики (астрофизика, колебательная спектроскопия, электронная микроскопия, акустика, исследование полимерных систем, ядерная физика).

Литература

Основные монографии и учебники

1. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988.
2. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1989.
3. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. – М.: Изд-во МГУ, 1989.
4. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986.

5. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. – Екатеринбург, Наука, 1993.

6. *Васин В.В., Еремин И.И.* Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. – Екатеринбург, УрО РАН, 2005.

7. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1994.

8. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978.

9. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск, Сибирское научное издательство, 2008.

10. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

11. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980.

12. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Линейные операторы и некорректные задачи. – М.: Наука, 1991.

13. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987.

14. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. – М.: Изд-во МГУ, 1999.

15. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.

16. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983.

17. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990.

18. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. – М.: Наука, 1995.

19. *Федотов А.М.* Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. – Новосибирск: Наука, 1990.

20. *Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of Inverse Problems. – Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1996.

21. *Groetsch C.W.* Inverse problems in the mathematical sciences. – Braunschweig, Vieweg, 1993.

Астрофизика

22. *Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г.* Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978.

23. *Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г.* Некорректные задачи астрофизики. – М.: Наука, 1985.

24. *Koptelova E., Shimanovskaya E., Artamonov B., Sazhin M., Yagola A., Bruevich V., Burkhonov O.* Image reconstruction techique and optical monitoring of the QSO 2237+0305 from Maidanak Observatory in 2002–2003. – Monthly Notices of Royal Astronomical Society, 2005. – V. 356. – P. 323–330.

Колебательная спектроскопия

25. *Кочиков И.В., Курамшина Г.М., Пентин Ю.А., Ягола А.Г.* Обратные задачи колебательной спектроскопии. – М.: Изд-во МГУ, 1993.

26. *Kochikov I.V., Tarasov Yu.D., Kuramshina G.M., Spiridonov V.P., Yagola A.G., Strand T.G.* Regularizing algorithm for determination of equilibrium geometry and harmonic force field of free molecules from joint use of electron diffraction, vibrational spectroscopy and ab initio data with application to benzene // J. Molec. Structure, 1998. – V. 445. – P. 243–258.

Электронная микроскопия

27. *Русов В.Д., Бабикова Ю.Ф., Ягола А.Г.* Восстановление изображений в электронно-микроскопической авторадиографии поверхности. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – С. 1–216.

28. *Рау Э.И., Сеннов Р.А., Дорофеев К.Ю., Ягола А.Г., Лиу Ю., Пханг Дж., Чан Д.* Основные принципы катодолюминисцентной микротомографии с использованием конфокальной зеркальной оптики // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2002. – № 10. – С. 85–92.

Акустика

29. *Николаева Н.Н., Ручкин С.В., Рычагов М.Н., Ягола А.Г.* Численное моделирование задачи двумерной реконструкции аксиальных осесимметричных профилей скорости // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 9–16.

Исследование полимерных систем

30. *Зотьев Д.В., Усманов С.М., Шакирьянов Э.Д., Ягола А.Г.* Решение обратной задачи самодиффузии в сложных полимерных системах при наличии априорной информации // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. –С. 249–252.

Ядерная физика

31. *Nikolaeva N.N., Rychagov M.N., Yagola A.G.* Error estimation in applied inverse problems // In "5th International Conference on Inverse Problems in Engineering:Theory and Practice" / Ed. D. Lesnic. – V. III, Chapter N 5. – Leeds University Press, Leeds, UK. – 2005. – P. 1–7.

СОДЕРЖАНИЕ

НАУКА В ВУЗАХ: МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА

ПРОБЛЕМЫ ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Труды Международной научно-образовательной конференции

Издание подготовлено в авторской редакции

Технический редактор *Л.А. Горовенко*
Компьютерная верстка *Н.А. Ясько*
Дизайн обложки *М.В. Шатихина*

Подписано в печать 25.11.2009 г. Формат 60×84/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 20,93. Тираж 200 экз. Заказ 1271.

Российский университет дружбы народов
117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41

Для заметок