

# Микромир и Вселенная 2019

# **Квантовые свойства частиц**

# Строение материи

Вселенная

Галактики

Звезды

Планеты

Вещество

Молекулы

Атомы

Атомные ядра – электрон

Протон, нейтрон

Частицы ( $\pi$ ,  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ...)

Кварки, лептоны

Переносчики взаимодействий ( $\gamma$ ,  $g$ ,  $W^\pm$ ,  $Z$ )

# История квантования

**450 г. до н.э. Демокрит. Атом**

**1811 г. А. Авогадро**

При одинаковых давлениях и температурах в равных объемах любых идеальных газов содержится одинаковое число молекул.

$$P_1V_1 = N_1kT_1 = P_2V_2 = N_2kT_2$$

$$N_1 = N_2$$

**1833 г. М. Фарадей**

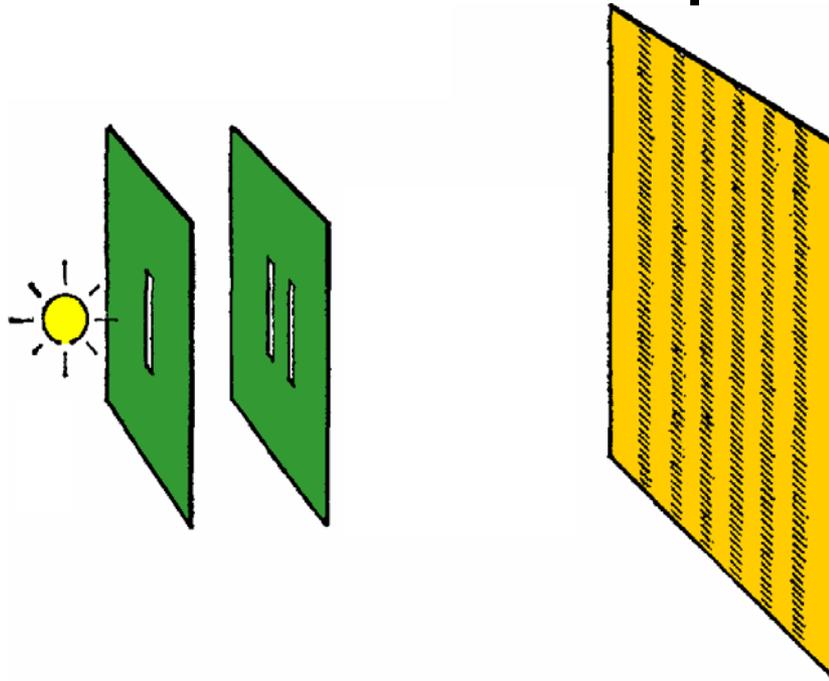
Количество веществ, превращаемых в реакциях электролиза пропорционально количеству прошедшего через гальваническую цепь электричества и химическим эквивалентам (отношение молярной массы к количеству электронов, участвующих в реакциях молекул) каждого вещества.

# Характеристики протона, нейтрона и электрона

Характеристика	Протон	Нейтрон	Электрон
Масса $mc^2$ , МэВ	938.272	939.565	0.511
Электрический заряд (в единицах элементарного заряда)	+1	0	-1
Спин	1/2	1/2	1/2
Изоспин	1/2	1/2	
Проекция изоспина	+1/2	-1/2	
Чётность	+1	+1	
Статистика	Ферми-Дирака		
Магнитный момент (для нуклонов - в ядерных магнетонах, для электрона - в магнетонах Бора)	+2.79	-1.91	+1.001
Время жизни	$> 10^{32}$ лет	$885.7 \pm 0.8$ с	$> 4.6 \cdot 10^{26}$ лет
Тип распада		$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	

# Свет. Волна? Частица?

1801 г. Т. Юнг. Волновая теория света

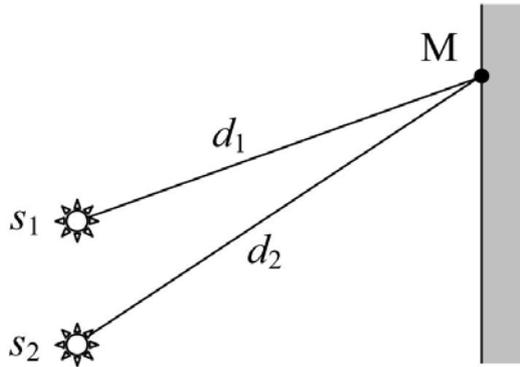


В опыте Юнга свет от источника падал на непрозрачный экран с двумя близко расположенными щелями. Оказалось, что изображение на экране состоит из нескольких интерференционных полос, что наглядно демонстрирует волновую природу света. Интерференционная картина явно зависит от двух щелей порождающих две волны, которые накладываются друг на друга. Если закрыть одну из щелей интерференционная картина исчезнет.

В то же время, если заменить экран детектором, способным к регистрации отдельных частиц (например, фотопластинкой), то обнаружится, что свет, вызывающий почернение фотозмульсии в определённом месте, состоит из отдельных частиц – фотонов.

**В этом проявилась волновая и корпускулярная природа света.**

# Интерференция волн



$$s_1 = a \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right) \quad s_2 = a \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right) - \varphi \right]$$

$$s = s_1 + s_2 = 2a \cos \left( \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_2 + d_1}{\lambda} \right) - \frac{\varphi}{2} \right]$$

Амплитуда  $A$

$$A = 2a \cos \left( \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Интенсивность  $A^2$

$$A^2 = 4a^2 \cos^2 \left( \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

при  $\varphi = 0$  разность фаз  $\psi$  возникает из-за разности хода лучей,

$$\psi = 2\pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = 2\pi m, \quad m \text{ — целое число}$$

$$A^2 = 4a^2 \cos^2 \left( \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} \right) = 4a^2 \cos^2 m\pi$$

# Излучение черного тела

1879 г. И. Стефан, Л. Больцман вывели эмпирическое соотношение

Закон Стефана–Больцмана

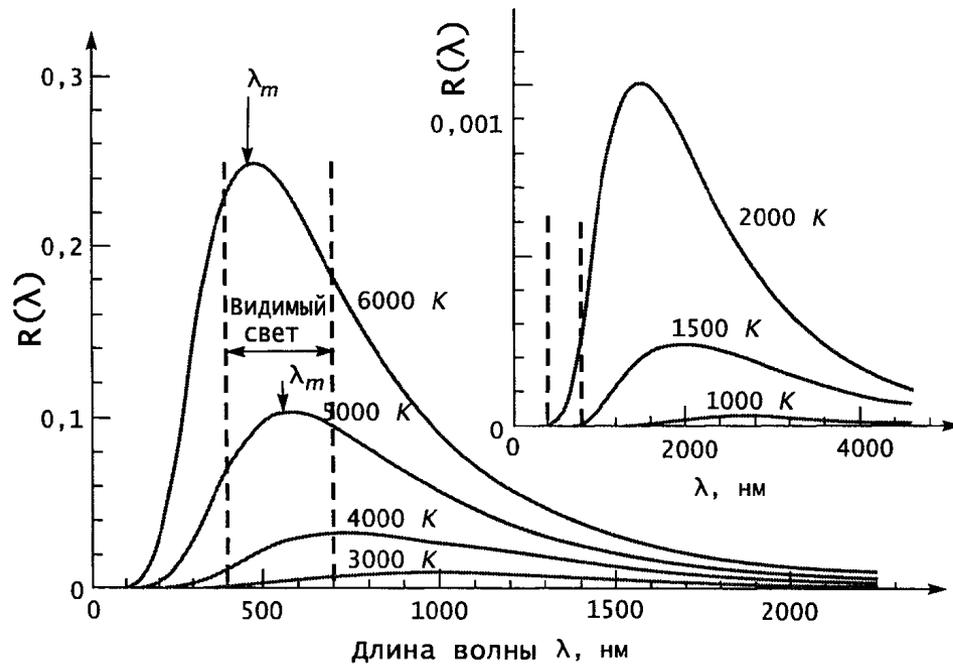
$$R = \sigma T^4$$

$R$  — мощность излучения с единицы поверхности,

$T$  — абсолютная температура,

$\sigma = 5,6705 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$  — постоянная Стефана–Больцмана.

Спектральное распределение излучения



1893 г. Закон смещения Вина

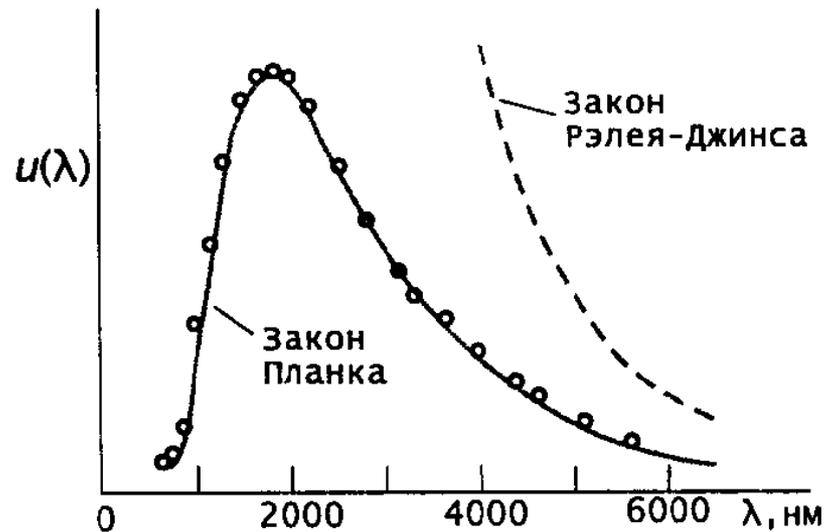
$$\lambda_m T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$$

# Закон излучения Рэля-Джинса

Зависимость плотности энергии  $u(T, \lambda)$  от длины волны излучения  $\lambda$  в классической физике описывается законом Рэля–Джинса.

$$u(T, \lambda) = kT \cdot n(\lambda) = 8\pi kT \lambda^{-4}$$

$$n(\lambda) = 8\pi \lambda^{-4}$$



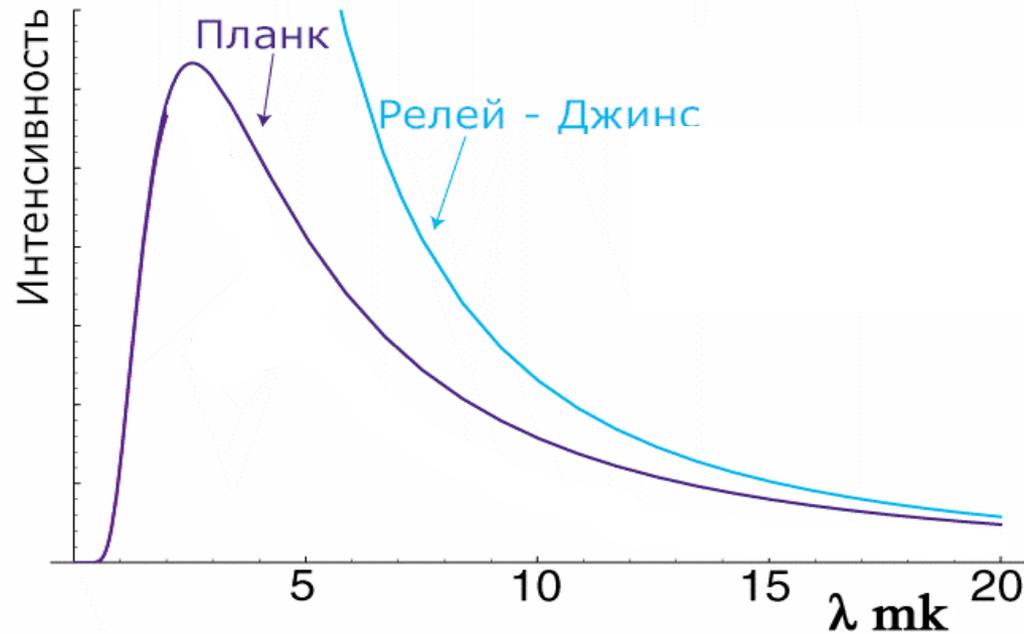
Расхождение между экспериментальной зависимостью  $u(T, \lambda)$  и описанием в классической физике коротковолновой части спектра получило название ультрафиолетовой катастрофы.

# 1900 г. М. Планк. Излучение черного тела

Распределение плотности энергии излучения в полости

$$U(T, \nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad U(T, \lambda) = \frac{8\pi h c \lambda^{-5}}{\exp(hc/\lambda kT) - 1}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$



$$\hbar = 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{с}$$

**Нобелевская премия по физике**

**1918 г. – М. Планк.**

За открытие кванта энергии

# Излучение черного тела

Классическая статистика оказалась не в состоянии описать спектр равновесного излучения в полости. Если рассматривать тепловое излучение как совокупность плоских волн, то плотность энергии излучения описывается формулой Рэлея-Джинса. При малых энергиях излучения формула хорошо согласуется с экспериментом. Однако при высоких частотах плотность энергии  $u(T, \nu) \rightarrow \infty$ . Это происходит потому, что при  $\nu \rightarrow \infty$  число собственных колебаний также стремится к бесконечности, а на каждое из них приходится энергия  $E = kT$ .

Если излучение происходит отдельными квантами  $h\nu$ , то энергия электромагнитной волны с частотой  $\omega$  (собственные колебания электромагнитного поля в полости на данной частоте) не может быть произвольной как считается в классической физике, а должна принимать значения

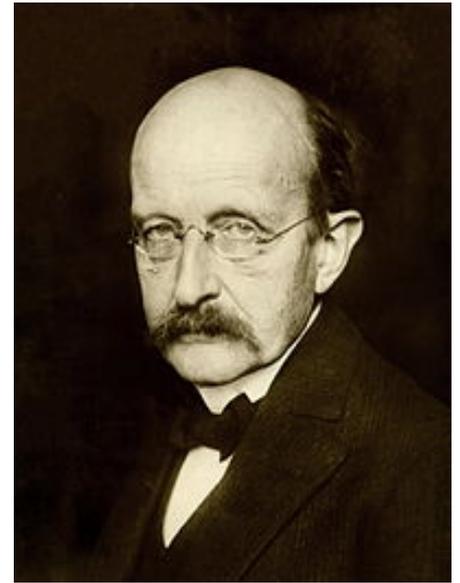
$$E = nh\nu, \quad n = 1, 2, \dots$$

Средняя энергия  $\bar{\varepsilon}$ , приходящаяся на одно собственное колебание системы в случае теплового равновесия, если энергия имеет дискретный спектр, не равна  $kT$ . В случае дискретных значений энергии для возбуждения колебаний с частотой  $\nu$  осциллятору должна быть сообщена энергия  $h\nu$ .

При  $\nu \rightarrow \infty$  она становится бесконечно большой, поэтому при конечном значении температуры колебания такой частоты возникнуть не могут.

При  $h \rightarrow 0$  распределение Планка переходит в классическую формулу Рэлея – Джинса.

# М. Планк



(1858 – 1947)

«Все это делалось от безысходности, поскольку по своей натуре я человек миролюбивый и не склонен пускаться в сомнительные авантюры».

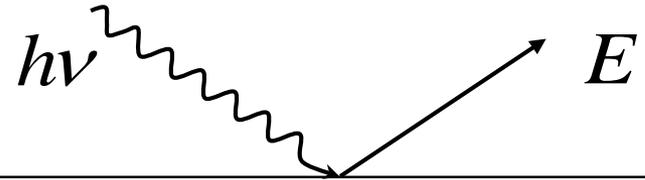
# Фотоэффект

1887 г. Г. Герц, А. Столетов.

$$E = h\nu - W$$

$W$  - работа выхода электронов

1905 г. А. Эйнштейн.



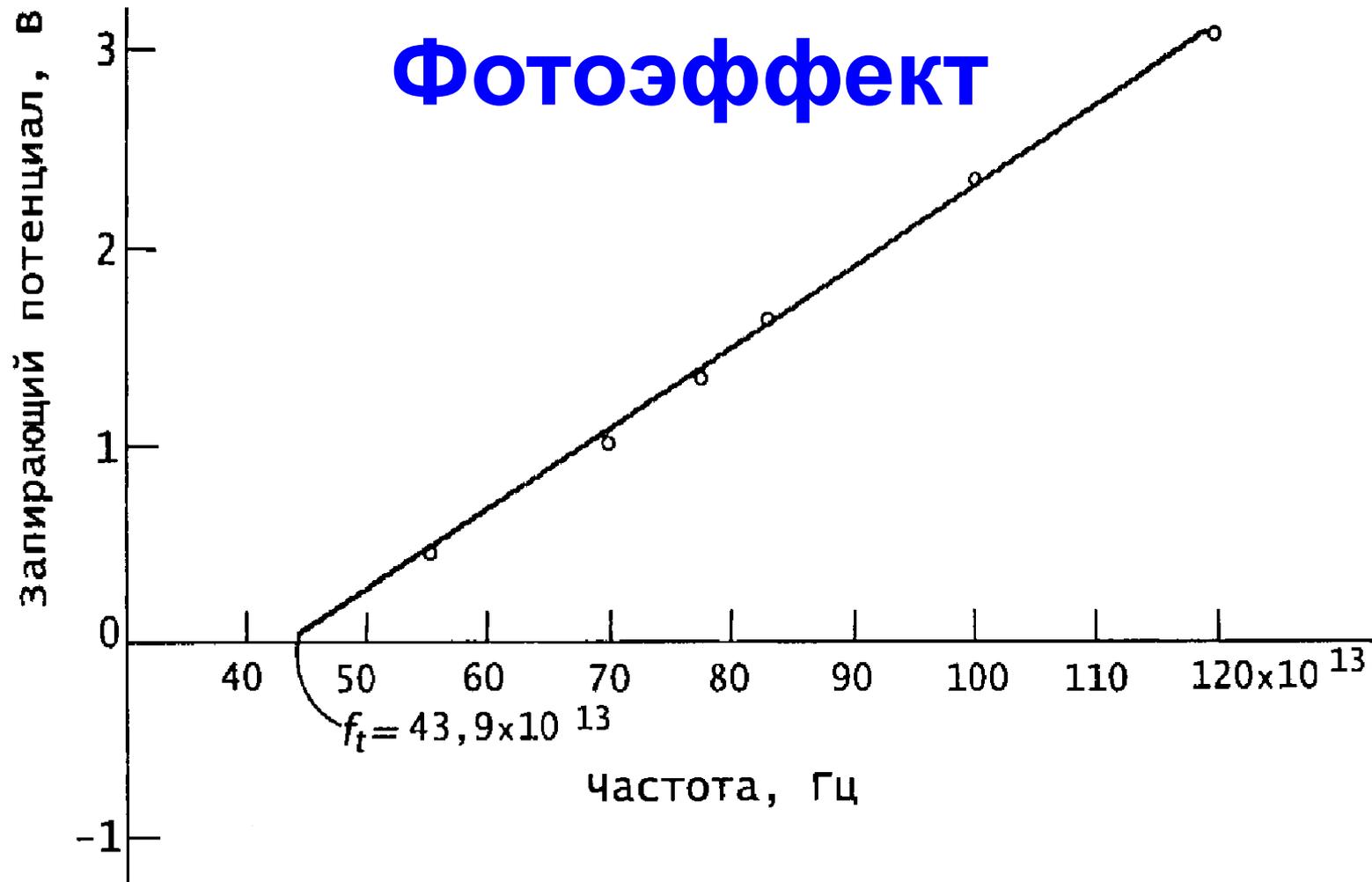
- Число высвобождаемых электронов прямо пропорционально интенсивности падающего света.
- Максимальная кинетическая энергия электронов  $E$  зависит от частоты  $\nu$  и не зависит от интенсивности падающего света.
- Энергия электронов  $E$  является линейной функцией частоты падающего света  $\nu$ .
- Существует граничная частота света  $\nu_0$ , ниже которой фотоэффект невозможен.

**Нобелевская премия по физике**

1921 г. – А. Эйнштейн.

За вклад в теоретическую физику и в особенности за открытие закона фотоэлектрического эффекта

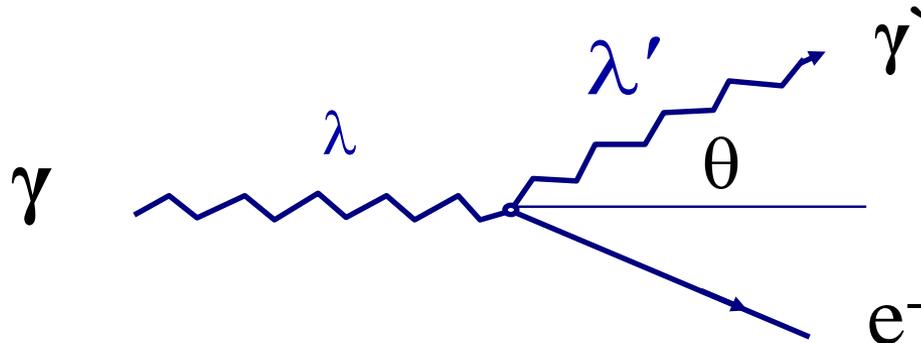
# Фотоэффект



Полученные Милликеном данные о зависимости запирающего потенциала от частоты для фотоэлектрического эффекта. Экспериментальные точки укладываются на прямую с наклоном  $h/e$  в соответствии с предсказанием Эйнштейна, которое он сделал за десять лет до проведения этого эксперимента. Прямая пересекает ось запирающего потенциала в точке  $-\phi/e$ . [R. A. Millikan, *Physical Review*, 7, 362 (1915).]

# 1922 г. А. Комптон. Эффект Комптона

Упругое рассеяние фотона на свободном электроне



- В рассеянном излучении наблюдаются две длины волн — первоначальная длина волны  $\lambda$  и дополнительная  $\lambda'$
- Длина волны  $\lambda'$  всегда больше  $\lambda$
- Длина волны  $\lambda'$  зависит от угла рассеяния  $\theta$  и не зависит от природы рассеивающего вещества

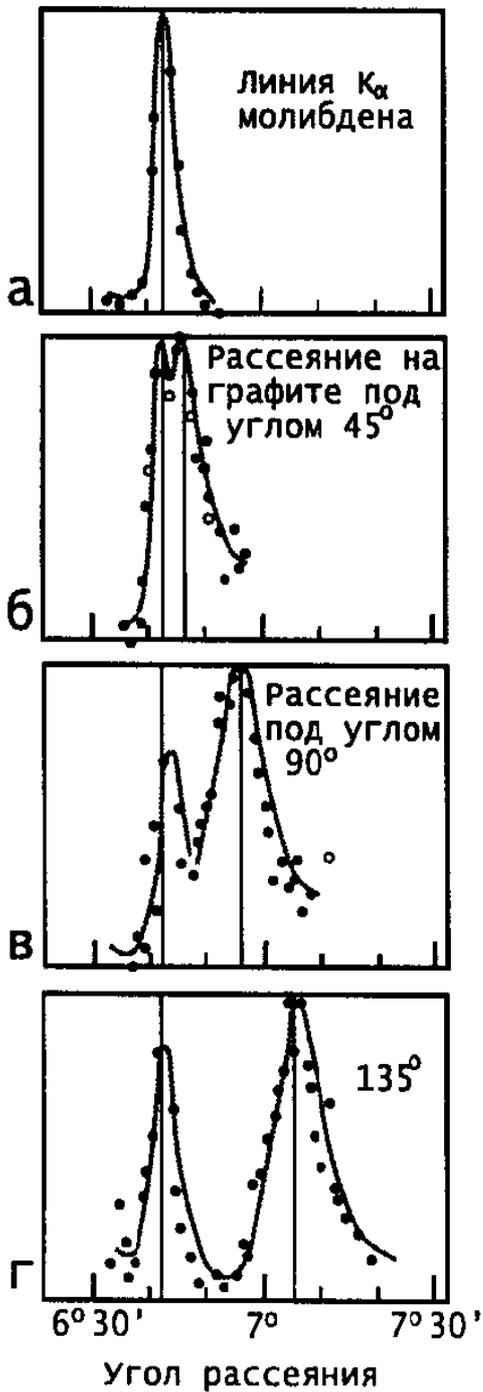
$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)$$

**Нобелевская премия по физике**

**1927 г. – А. Комптон.**

За открытие эффекта, названного его именем

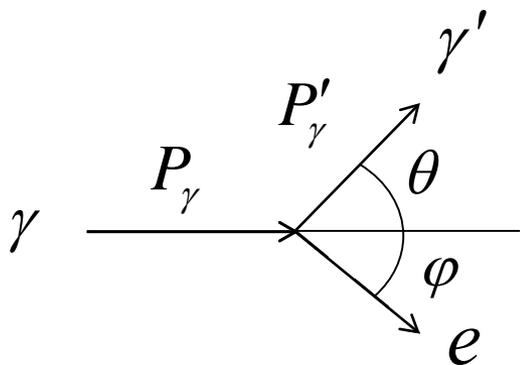
# Эффект Комптона



$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$$

Зависимость интенсивности комптоновского рассеяния от угла рассеяния фотона. Пики слева на всех графиках отвечают фотонам с исходной длиной волны, которые рассеиваются на сильно связанных электронах с эффективной массой, равной массе атома.

# Упругое рассеяние фотона на электроне



Законы сохранения энергии и импульса

$$E_{\gamma} + E_0 = E'_{\gamma} + E_e,$$

$$\vec{P}_{\gamma} = \vec{P}'_{\gamma} + \vec{P}_e$$

$E_{\gamma} = \frac{hc}{\lambda}$  — энергия налетающего фотона,

$E_0 = mc^2 = 0,511 \text{ МэВ}$  — энергия покоя электрона,

$E'_{\gamma} = \frac{hc}{\lambda'}$  — энергия рассеянного фотона,

$E_e$  — энергия электрона отдачи,

$P_{\gamma} = \frac{h}{\lambda}$  — величина импульса налетающего фотона,

$P'_{\gamma} = \frac{h}{\lambda'}$  — величина импульса рассеянного фотона,

$P_e$  — величина импульса электрона отдачи,

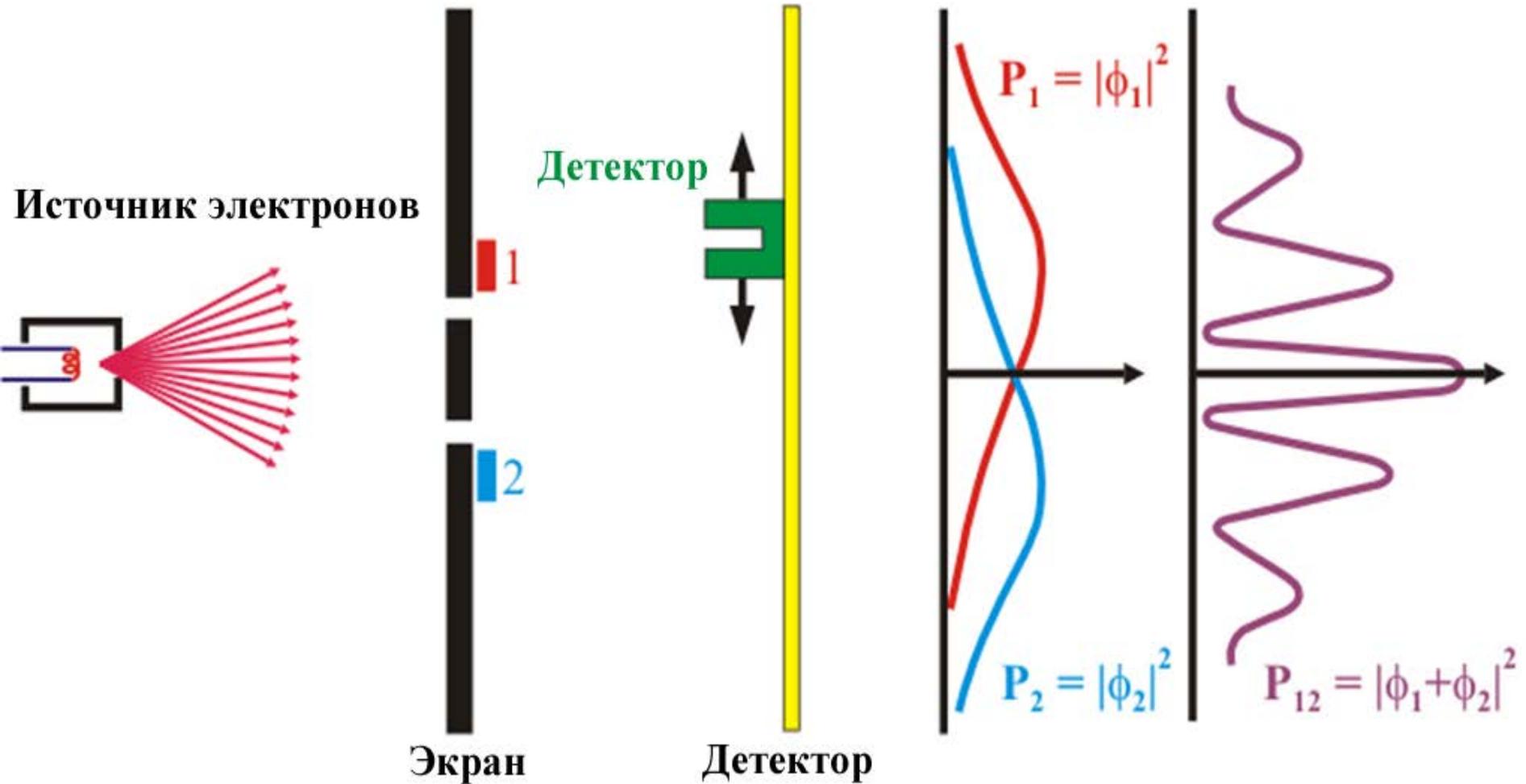
$\theta$  — угол рассеяния фотона,

$\varphi$  — угол рассеяния электрона отдачи

$$\left( \text{tg } \varphi = \frac{\text{ctg } \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{E_{\gamma}}{mc^2}} \right),$$

$$\lambda_0 = \frac{h}{mc} = 2,4 \cdot 10^{-10} \text{ см} = 0,024 \text{ \AA}$$

# Интерференция электронов на двух щелях



**1927 г.**

К. Дэвиссон и Л. Джермер и независимо от них Дж. П. Томсон показали, что для пучка электронов, как и для светового пучка, наблюдается явление интерференции.

# Волновые свойства частиц

1924 г. Луи де Бройль. «Когда закончилась первая мировая война, я много размышлял о квантовой теории и о корпускулярно-волновом дуализме. Именно тогда меня осенила блестящая идея. Корпускулярно-волновой дуализм Эйнштейна носит всеобщий характер и распространяется на все объекты».



**Соотношения де Бройля**

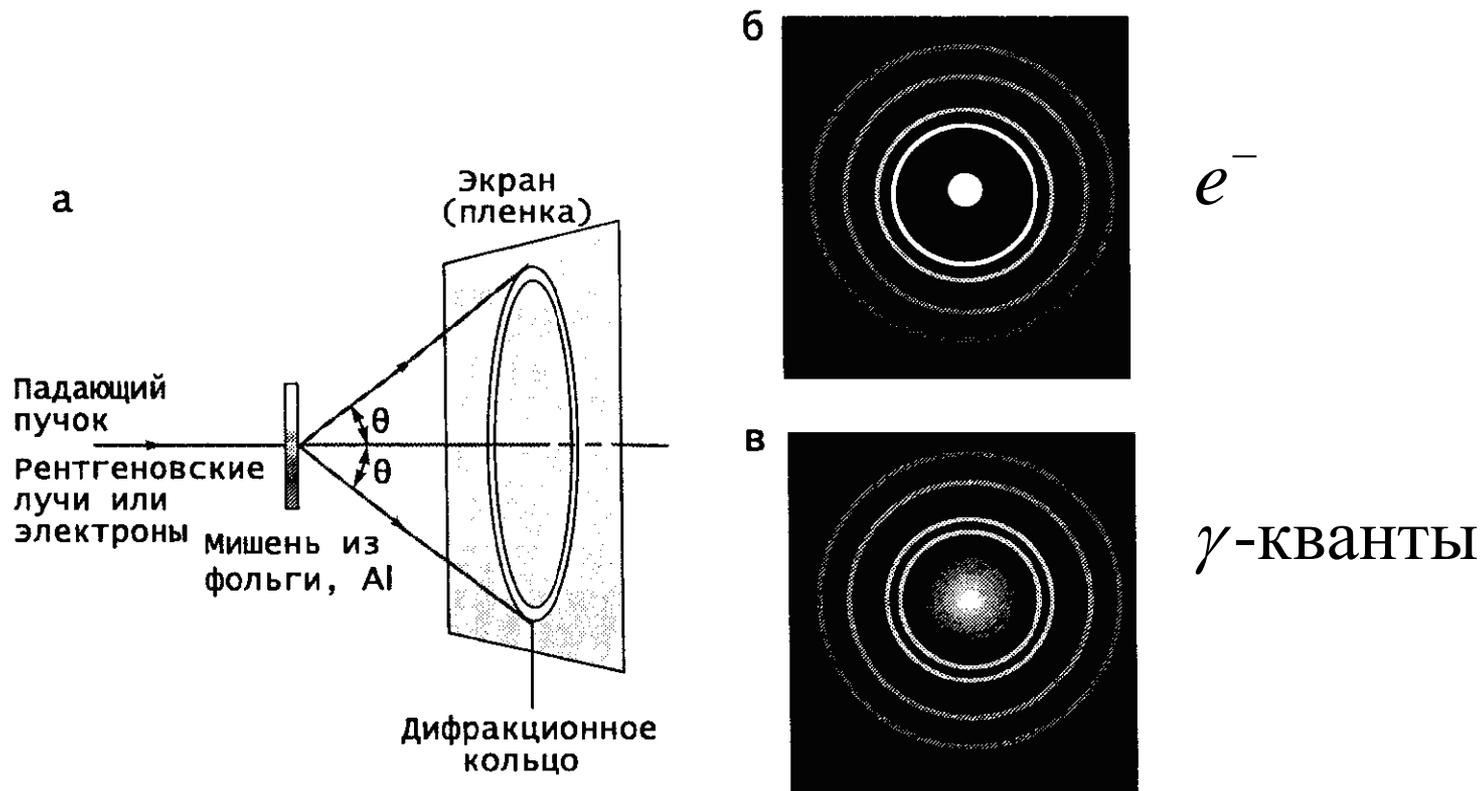
$$\nu = \frac{E}{h} \qquad \lambda = \frac{h}{p}$$

В случае фотонов аналогичные соотношения следуют из условия квантования энергии и релятивистской связи между энергией и импульсом для частиц с нулевой массой покоя.

$$E = cp = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

# Проверка гипотезы де Бройля

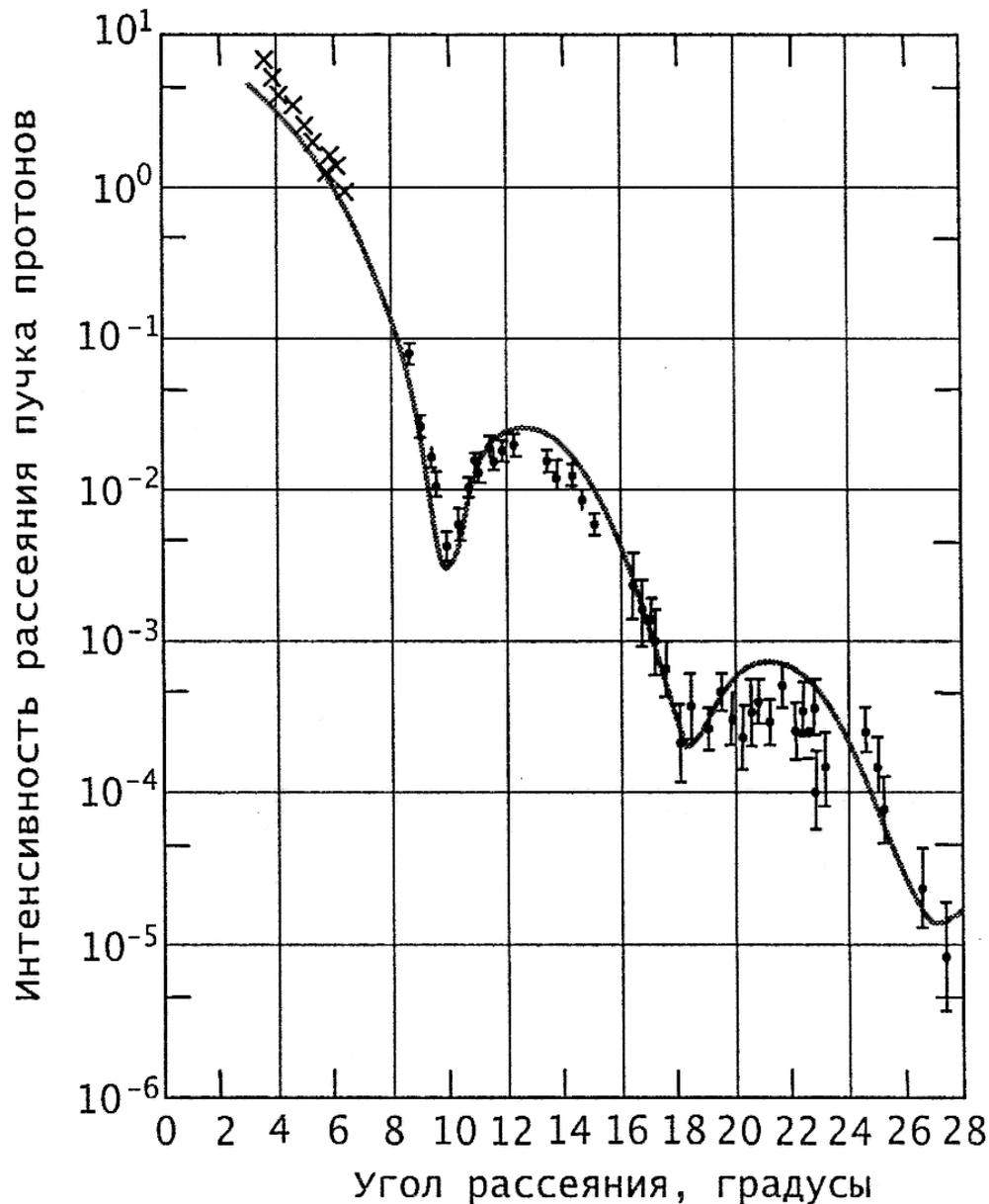
1927 г. Опыты Дж. П. Томсона.



(а) Схема установки для наблюдения дифракции на поликристаллической алюминиевой мишени. (б) Дифракционная картина, полученная при рассеянии рентгеновских лучей с длиной волны 0,071 нм на мишени из алюминиевой фольги. (в) Дифракционная картина, полученная при рассеянии электронов с энергией 600 эВ (длина волны де Бройля равна примерно 0,05 нм) на мишени из алюминиевой фольги. Эта дифракционная картина была увеличена в 1,6 раза для удобства сравнения с (б).

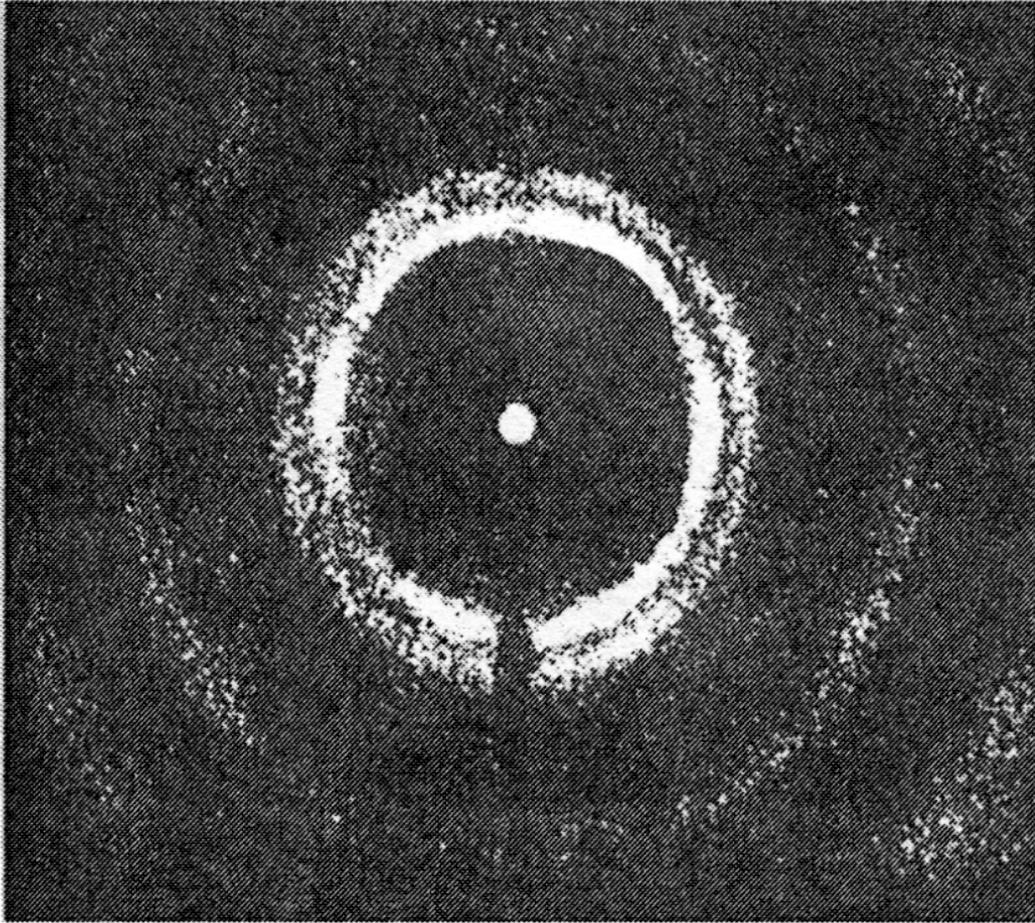
Дж. П. Томсон исследовал прохождение электронов с энергией 10–40 кэВ через тонкую алюминиевую мишень и также наблюдал интерференционную картину, соответствующую волновой природе электронов.

# Рассеяние электронов на атомном ядре



Ядра являются рассеивателями с размерами порядка  $10^{-13}$  см. На данном рисунке показано, что рассеяние протонов с энергией 1 ГэВ на ядре кислорода дает дифракционную картину, сходную с картиной дифракции на щели.

# Рассеяние нейтронов с энергией $E < 1$ кэВ на атомных ядрах



$$\sigma = \pi(R + \lambda)^2$$

Дифракционная картина при рассеянии нейтронов с энергией 0,0568 эВ (длина волны де Бройля составляет 0,120 нм) на поликристаллической мишени из меди. Обратим внимание на сходство дифракционных картин для рентгеновских лучей, электронов и нейтронов.

# 1927 г. В. Гейзенберг

## Соотношение неопределенности

Соотношение неопределенности устанавливает предел точности одновременного определения канонически сопряженных динамических переменных, характеризующих квантовую систему.

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar$$

$$\Delta E \cdot \Delta T \geq \hbar$$

$$\Delta \varphi \cdot \Delta J_z \geq \hbar$$



(1901 – 1976)

# Детерминизм



Пьер Лаплас  
1749 - 1827

**«Мы можем рассматривать настоящее состояние Вселенной как следствие его прошлого и причину его будущего. Разум, которому в каждый определённый момент времени были бы известны все силы, приводящие природу в движение, и положение всех тел, из которых она состоит, будь он также достаточно обширен, чтобы подвергнуть эти данные анализу, смог бы объять единым законом движение величайших тел Вселенной и мельчайшего атома; для такого разума ничего не было бы неясного и будущее существовало бы в его глазах точно так же, как прошлое».**

# Волновая функция

В квантовой физике состояние системы описывается волновой функцией. Так как для квантовой частицы нельзя одновременно точно определить значения ее координат и импульса, то не имеет смысла говорить о движении частицы по определенной траектории в пространстве можно определить только вероятность нахождения частицы в данной точке в данный момент времени, которая определяется квадратом модуля волновой функции —

$$W \sim |\psi(x, y, z, t)|^2 dV$$

**Нобелевская премия по физике**

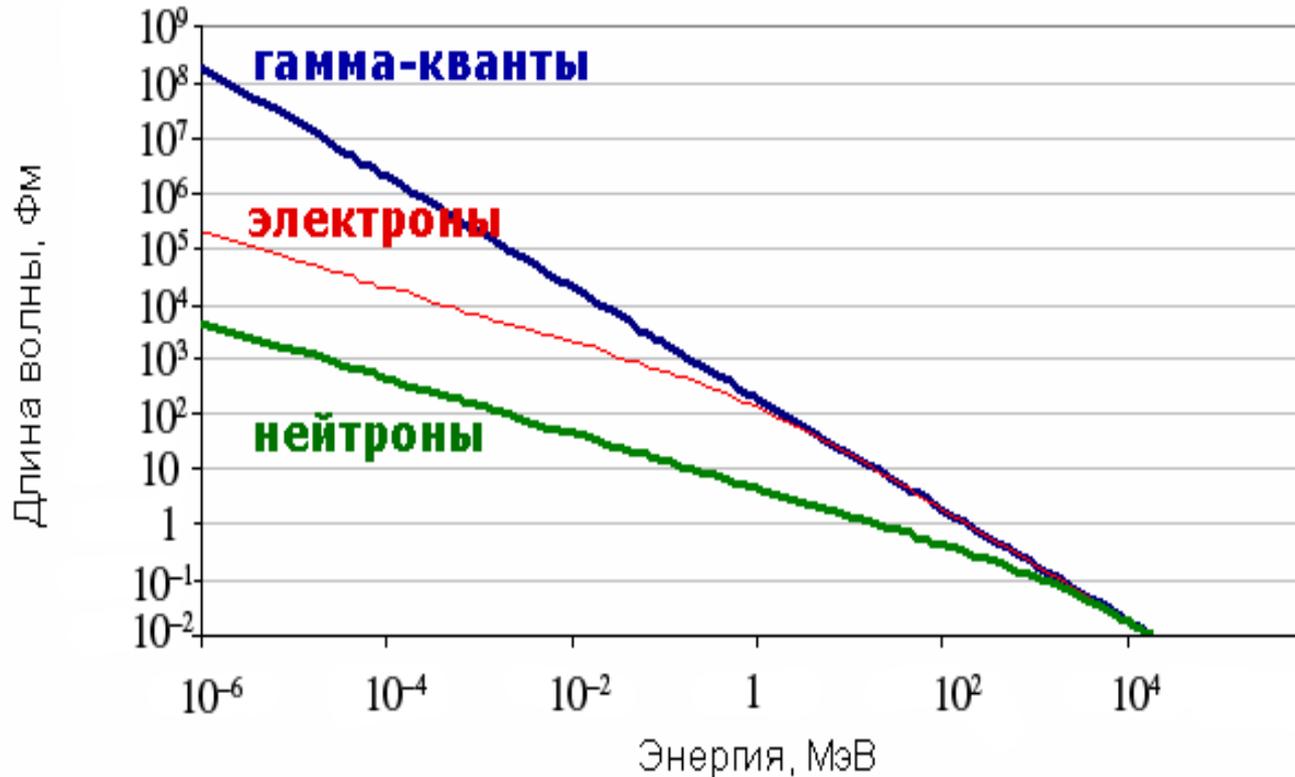
1954 г. – М. Борн.

За фундаментальные исследования в квантовой механике, в особенности за статистическую интерпретацию волновой функции

1924 г . Де Бройль.

Корпускулярно-волновой дуализм

$$E = \hbar\omega, \quad p = \frac{\hbar}{\lambda}$$



Нобелевская премия по физике

1929 г. – Л. де Бройль

За открытие волновой природы электрона

# Операторы

Каждой физической величине  $F$  в квантовой теории сопоставляется линейный оператор  $\hat{F}$ , действующий на волновую функцию  $\Psi(r, t)$ .

Под оператором  $\hat{F}$  понимается правило, по которому одной функции  $\Psi(r, t)$  переменных  $r, t$  сопоставляется другая функция  $U(r, t)$  тех же переменных.

$$U(r, t) = \hat{F}\Psi(r, t)$$

Спектр собственных значений оператора  $\hat{F}$  представляет собой спектр возможных (измеряемых) значений этой величины. С результатами экспериментов сопоставляются средние значения физических величин, которые вычисляются по формуле

$$\bar{F} = \int \Psi^* \hat{F} \Psi dv$$

Например: оператор  $\hat{F}$  может означать дифференцирование по какой-либо переменной.

$$U(r, t) = \hat{F}\Psi(r, t) = \partial\Psi(r, t) / \partial r$$

$$\hat{F} = \partial / \partial r$$

# Основной постулат квантовой механики

Обозначим действие оператора  $\hat{f}$  на волновую функцию  $\psi$  ( $\hat{f}\psi$ ). Определение оператора  $\hat{f}$  состоит в том, что интеграл от произведения ( $\hat{f}\psi$ ) на комплексно сопряженную функцию  $\psi^*$  даёт среднее значение величины  $\bar{f}$ .

$$\bar{f} = \int \psi^* \hat{f} \psi dx$$

Это основной постулат квантовой механики.

Все свойства физической системы полностью определяются заданием её волновой функции.

Экспериментально измеряемые средние значения любой физической величины  $f$ , характеризующей систему, может быть вычислено по известной волновой функции  $\psi$ .

# Собственные значения. Собственные функции

С каждым оператором  $\hat{F}$  в квантовой механике связывается уравнение

$$\hat{F}\psi_n(x) = F_n\psi_n(x),$$

определяющее его собственные значения  $F_n$  и полную систему ортонормированных функций  $\psi_n$ , подчиняющихся определенным граничным условиям. Совокупность величин  $F_n$  определяет спектр возможных значений физической величины  $F$ .

Функция  $\psi_n(x)$  характеризует состояние системы, в котором величина  $F$  имеет значение  $F_n$ .

# Простейшие операторы квантовой механики

Физическая величина	Оператор
Координата $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} \\ x, y, z \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} \\ x, y, z \end{array} \right.$
Импульс $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} \\ p_x, p_y, p_z \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -i\hbar\nabla \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$
Момент количества движения, или угловой (вращательный) момент $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] \\ L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = zp_x - xp_z \\ L_z = xp_y - yp_x \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{L}} = -i\hbar [\mathbf{r} \times \nabla] \\ \hat{L}_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \hat{L}_y = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{L}_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{array} \right.$
Энергия в нерелятивистском приближении $E = \frac{p^2}{2\mu} + U(\mathbf{r})$	$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + U(\mathbf{r})$

# Уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(r, t)$$
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(r, t)$$

Эволюция квантовой системы в нерелятивистском случае описывается волновой функцией, удовлетворяющей уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$$

$\psi(r, t)$  — волновая функция,

$\hat{H}$  — оператор Гамильтона (оператор полной энергии системы).

**Нобелевская премия по физике**

1933 г. — Э. Шредингер, П. Дирак.

За открытие новых плодотворных формулировок атомной теории

# Стационарное уравнение Шредингера

Если гамильтониан системы не зависит от времени, стационарное уравнение Шредингера имеет вид

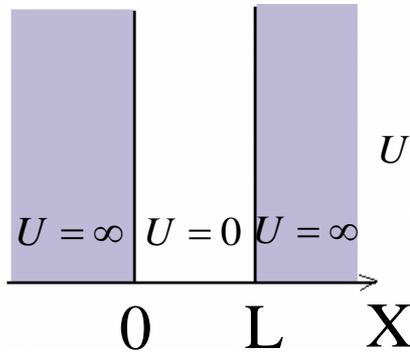
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U \psi(x) = E \psi(x)$$

Величина  $E$  имеет смысл собственного значения энергии системы, а  $\psi(x)$  описывает состояние с заданной энергией.

Оператор Гамильтона может иметь как дискретный так и непрерывный спектр энергий.

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

# Бесконечная прямоугольная яма (1)



$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < L \\ \infty & \text{при } x \leq 0, x \geq L \end{cases} \quad \Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

Частица всегда находится в области  $0 \leq x \leq L$ . Вне этой области  $\psi = 0$ . Запишем уравнение Шредингера для частицы, находящейся в области  $0 \leq x \leq L$ .

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi \quad (2)$$

Волновая функция, являющаяся решением уравнения (2), имеет вид

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx, \quad (3)$$

$k = (2mE / \hbar^2)^{1/2}$ . Из граничных условий  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi(L) = 0$  и условий непрерывности волновой функции имеем

$$A \sin kL = 0. \quad (4)$$

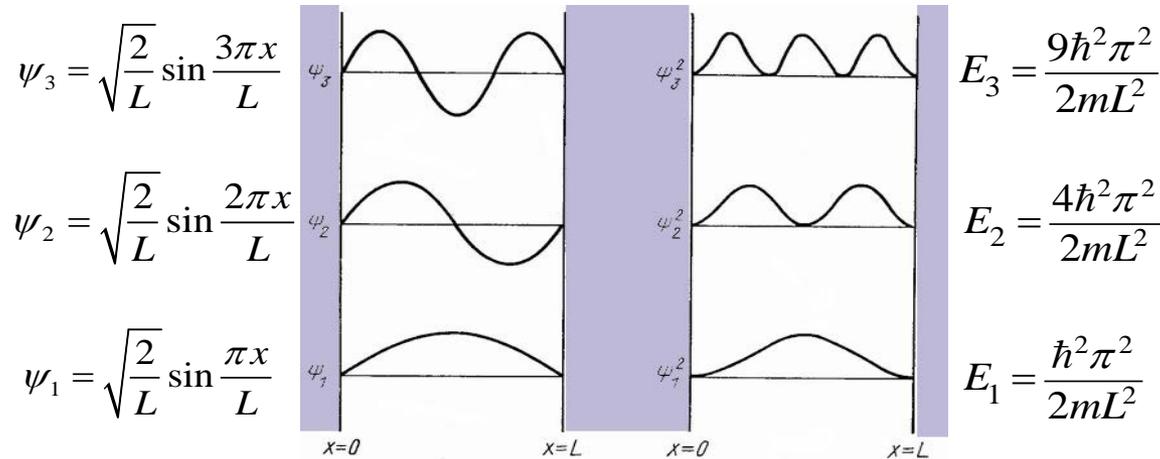
Из (4) следует

$$kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

т. е. внутри ямы устанавливаются стоячие волны, а энергия состояния частиц имеет дискретный спектр значений  $E_n$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}, \quad (6)$$

# Бесконечная прямоугольная яма (2)



Частица может иметь только те значения энергии, которые определяются соотношением (6). Об этой ситуации говорят, что энергия квантуется на дискретные уровни. Частица может находиться в каком-то одном из множества дискретных состояний, доступных для неё. Чтобы частица перешла на другой энергетический уровень, она должна приобрести или потерять некоторое количество энергии, равное разности энергий уровней, между которыми происходит переход.

Энергии состояний растут квадратично в зависимости от квантового числа  $n$ . Каждому значению энергии соответствует волновая функция  $\psi_n(x)$ , которая с учетом условия нормировки

$$\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^L \left| A \sin \frac{\pi n x}{L} \right|^2 dx = 1$$

имеет вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left( \frac{\pi n x}{L} \right).$$

# Гамильтониан

Общий вид:

$$\hat{H} = \hat{E} + \hat{U}$$

Свободная частица:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$$

Частица в одномерной потенциальной яме  $U(x)$ :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{dx^2} \right) + U(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

Гармонический осциллятор:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{dx^2} \right) + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Атом водорода:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r}$$

Атом гелия:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_2 - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}}.$$

Классическая физика

Квантовая физика

1. Описание состояния

$$(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t)$$

$$\psi(x, y, z, t)$$

2. Изменение состояния во времени

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dH}{d\vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{dH}{d\vec{r}}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

3. Измерения

$$x, y, z, p_x, p_y, p_z$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \approx \hbar$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \approx \hbar$$

4. Детерминизм

4. Статистическая теория

Динамическое  
(не статистическое) описание

$$|\psi(x, y, z, t)|^2$$

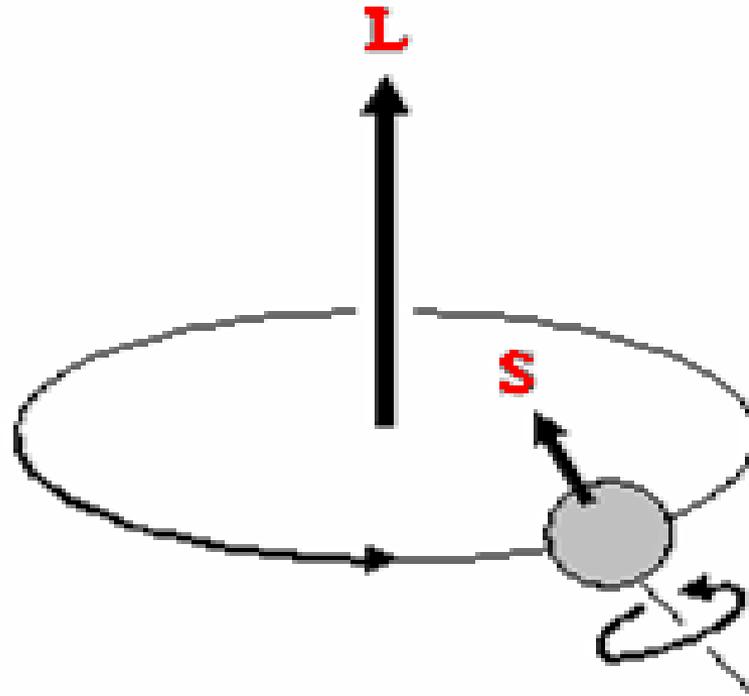
$$\langle F \rangle = \int \Psi^* \hat{F} \Psi dV$$

5. Гамильтониан

$$H = E + U(x, y, z) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(x, y, z)$$

$$\hat{H} = \hat{E} + \hat{U}(x, y, z) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U}(x, y, z)$$

# Спиновый момент частицы



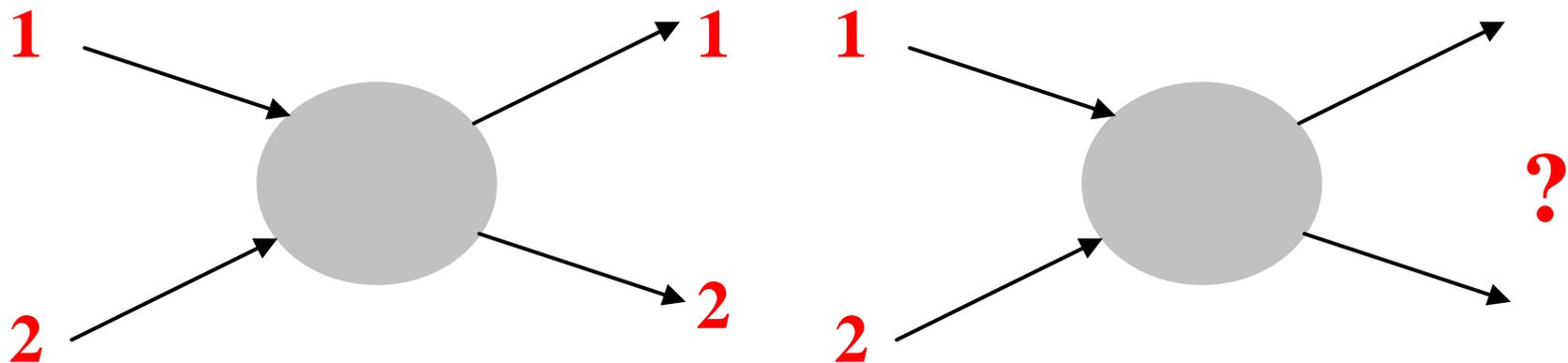
**Спин — собственный момент количества движения частицы. Спин имеет квантовую природу и не связан с какими-либо перемещениями частицы в пространстве. Спин измеряется в единицах постоянной Планка и равен  $s$  — характерное для каждой частицы полуцелое или целое (включая нуль) положительное число**

$$S^2 = \hbar^2 s(s + 1)$$

# Спин

<i>Частица</i>	<i>Кварковый состав</i>	<i>Масса <math>mc^2</math>, МэВ</i>	<i>Спин <math>J</math></i>
Электрон, $e^-$	—	0,511	1/2
Мюон, $\mu^-$	—	105,6	1/2
Нейтрино, $\nu_e$	—	0	1/2
Протон, $p$	$uud$	938,27	1/2
Нейтрон, $n$	$udd$	939,57	1/2
Сигма, $\Sigma^+$	$uus$	1189	1/2
Дельта, $\Delta^{++}$	$uuu$	1232	3/2
Пион, $\pi^+$	$u\bar{d}$	139,57	0
Ро, $\rho^+$	$u\bar{d}$	776	1
Гамма-квант, $\gamma$	—	—	1

# Статистика



## Принцип тождественности частиц

Волновая природа микрочастиц не позволяет установить, какая из возможностей реализуется в ситуации, когда две тождественные частицы оказываются друг от друга на расстоянии де-бройлевской длины волны.

# Фермионы. Бозоны. Принцип Паули.

Частицы с целым (в том числе с нулевым) спином подчиняется статистике Бозе-Эйнштейна ( $\gamma$ -кванты,  $\pi$ -мезоны,  $\alpha$ -частицы и др.). Частицы с целым спином называются **бозонами**. Частицы с полуцелым спином подчиняются статистике Ферми-Дирака (электроны, кварки, нейтрино, протоны, нейтроны, ядра с нечётным числом нуклонов и т.д.). Частицы и ядра с полуцелым спином называются **фермионами**.

Для тождественных фермионов справедлив принцип Паули.

**Принцип Паули: в системах, подчиняющихся статистике Ферми-Дирака и описываемых антисимметричными волновыми функциями, не должно существовать двух тождественных частиц с полностью совпадающими характеристиками.**

Для системы тождественных фермионов

$$\psi(2, 1, \dots, A) = -\psi(1, 2, \dots, A).$$

Если частицы 1 и 2 находятся в одинаковом состоянии, тогда  $\psi(2, 1, \dots, A)$  и  $\psi(1, 2, \dots, A)$  одна и та же функция и  $\psi = -\psi$ ,  $2\psi = 0$ ,  $\psi = 0$ , т. е. такое состояние не существует.

Принцип Паули определяет строение электронных оболочек атомов, заполнение нуклонных состояний в ядрах.

**Нобелевская премия по физике**

**1945 г. – В. Паули.**

За открытие принципа Паули

# Частица в поле с центральной симметрией

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

В поле с центральной симметрией сохраняются:

**E** – энергия,

$\hbar^2 l(l+1)$  - квадрат орбитального момента

$\hbar m$  - проекция орбитального момента

**E, l, m.**

Состояние частицы, находящейся в сферически симметричном поле, полностью описывается тремя квантовыми числами:  $n$ ,  $l$  и  $m$ . При этом предполагается, что частица не имеет внутреннего углового момента, то есть спин  $S$  частицы равен 0.

$$n = 1, 2, 3 \dots$$

$$l = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \pm l$$

# Полный момент количества движения

Полный момент количества движения частицы складывается из его орбитального момента  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  и спинового момента  $\vec{S}$ :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (*)$$

В квантовой теории ситуация аналогичная. Полный момент количества движения также описывается соотношением, аналогичным (\*), в котором величины  $\vec{J}$ ,  $\vec{L}$  и  $\vec{S}$  заменены на операторы полного момента  $\hat{J}$ , орбитального момента  $\hat{L}$  и спинового момента  $\hat{S}$ .

В соответствии с общими правилами для квантовых векторов проекция полного момента на выделенную ось ( $z$ ) может принимать  $2j + 1$  значение:

$$j_z \hbar = \pm j\hbar, \pm (j - 1)\hbar, \pm (j - 2)\hbar, \dots, \pm 1 / 2\hbar \text{ (или } 0)$$

Квантовые вектора (соответствующие им квантовые числа  $l$ ,  $s$  и  $j$ ) не могут принимать непрерывный ряд значений, а всегда обязаны быть либо целыми (возможен и нуль), либо полуцелыми числами.

# Пример

Сложение спинового  $s$  и орбитального  $l$   
моментов

$$\vec{J} = \vec{l} + \vec{s}$$

$$\vec{l} = 2 \qquad \vec{s} = \frac{1}{2}$$

$$\vec{J} = \vec{l} + \vec{s} = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}.$$

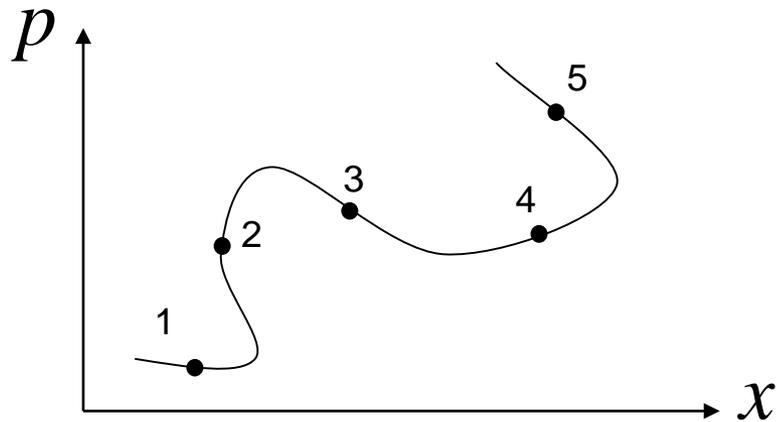
# Классическая физика

$x, p, t$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\frac{dU}{dx} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$H = U + E$$



# Квантовая физика

$\psi(x, t)$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\hat{U} + \hat{E})\psi$$

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \approx \hbar$$

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

