MULTIPLICATION OF SYMMETRIES AND TRANSFORMATIONS

A. Yu. OL'SHANSKII

This paper introduces the group theoretical point of view of symmetries and transformations. Symmetries of polynomials are used as a definition for permutation's sign, which is applied afterwards to a puzzle. Multiplication of symmetries is quite different from usual numerical operations. Therefore a “calculus” arises which leads to general notions of the group theory.

Статья знакомит с теоретико-групповой точкой зрения на симметрии и преобразования. С помощью симметрий многочленов вводится понятие четности перестановки, используемое для объяснения одной известной игры. Умножение симметрий совсем не похоже на привычные числовые операции. Возникает исчисление, которое в следующей статье приведет к общим понятиям теории групп.

УМНОЖЕНИЕ СИММЕТРИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

А. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

1. ВВЕДЕНИЕ

Изощренная громоздкость алгебраических выражений, приводимых порою в учебниках и задачниках, их отпугивающий вид в некоторых экзаменационных заданиях при поступлении в высшие учебные заведения могут создать впечатление,что математическое искусство должно совершенствоваться именно в исследовании все более запутанных нагромождений формул и уравнений. К счастью, такое представление далеко от реальностей математики, развитие которой связано как с решением известных старых проблем, так и с появлением новых точек зрения, новых понятий, диктуемых и внутренней логикой науки, и ее приложениями.

Исчисление, об элементах которого мы поведем речь, не является числовым и возникло в связи с фундаментальными для математики и естествознания свойствами симметрий и с необходимостью “умножать” преобразования.

Группы преобразований (и просто “группы”) лежат в основании современной алгебры и определяют лицо многих разделов математики и теоретической физики, где симметрия проявляется не всегда столь наглядно, как, скажем, симметрия молекул в строении составленных из них кристаллов.

Цель настоящей статьи, адресованной преимущественно старшеклассникам, — дать представление о преобразованиях множеств и их умножении, свойства которого далеки от привычных свойств операций над числами. Правило четности для произведения перестановок иллюстрируется одной игрой. Каких-либо знаний за пределами школьной программы от читателя не требуется. В следующей статье, следуя истории возникновения “групповых исчислений”, мы предполагаем перейти к общему понятию группы.

2. СИММЕТРИИ

Та или иная группа преобразований часто возникает как группа симметрий некоторого объекта. Например, квадрат симметричнее произвольного прямоугольника, потому что число симметрий квадрата равно восьми, а у прямоугольника их всего четыре. В самом деле, квадрат преобразуется в себя же при зеркальных отражениях относительно любой из двух средних линий AB или CD (рис. 1*а*), при отражениях относительно диагоналей *1* – *3* и *2* – *4* и при

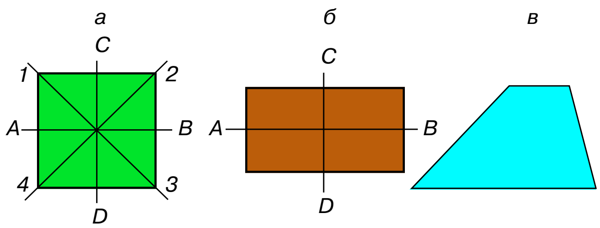


Рис. 1.

поворотах по часовой стрелке на углы 0°, 90°, 180° и 270° вокруг его центра.

Среди этих 8 преобразований “поворот” на 0° называется *тождественным преобразованием* (которое также полезно учитывать, как мы увидим позже). Оно состоит в том, что каждая точка остается неподвижной, то есть отображается в себя. В этом смысле поворот на 360° является тем же тождественным преобразованием, а поворот на 90° совпадает с поворотом на 450°: важен результат, а не проделанный той или иной точкой путь при динамической интерпретации движения.

У прямоугольника (рис. 1*б*) кроме тождественной есть еще 3 симметрии: поворот вокруг центра на 180° и зеркальные отражения относительно AB и CD. У трапеции (рис. 1*в*) группа симметрий включает в себя лишь одно тождественное преобразование. Читатель может сосчитать число симметрий у тетраэдра, куба и других правильных многогранников.

К фигурам с бесконечной группой симметрий (то есть состоящей из бесконечного множества различных преобразований) относятся, например, прямой круговой конус (рис. 2*а*) (любой поворот пространства около его оси есть симметрия), а также бесконечная трехцветная раскраска плоскости (рис. 2*б*), для которой симметриями будут параллельные переносы на векторы $3\vec{a}, 3\vec{b}, 6\vec{a}, 6\vec{b}, \ldots$ и вообще на любой вектор $k\vec{a} + l\vec{b}$, если разность $k - l$ целых чисел k и l делится на 3.

Многочлен $xy + xz + yz$ кажется симметричнее, чем многочлен $xy^2 + yz^2 + zx^2$, который в свою очередь выглядит симметричнее, чем $x + 2y + 5z$. Однако, чтобы “измерить” симметрию многочленов, зависящих от трех переменных, нужно ввести в рассмотрение всевозможные перестановки переменных x, y и z между собой. К примеру, первый и второй многочлены, в отличие от третьего, не меняются при замене переменных $x \longmapsto y$, $y \longmapsto z$, $z \longmapsto x$.

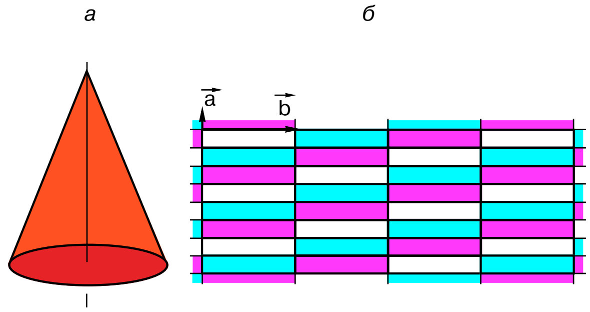


Рис. 2.

Запишем все возможные перестановки трех переменных вместе с тождественной в таблицу 1. Они и составляют группу симметрий первого многочлена, в то время как симметриями второго многочлена оказываются лишь перестановки из второго ряда таблицы 1 (проверьте!), а группа симметрий третьего содержит в себе лишь последнюю, тождественную перестановку переменных.

Таблица 1

$\begin{matrix} x & y & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y & x & z \end{matrix}$	$\begin{matrix} x & y & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ z & y & x \end{matrix}$	$\begin{matrix} x & y & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & z & y \end{matrix}$
$\begin{matrix} x & y & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y & z & x \end{matrix}$	$\begin{matrix} x & y & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ z & x & y \end{matrix}$	$\begin{matrix} x & y & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & y & z \end{matrix}$

Как мы видим, первой важной характеристикой и мерой симметричности фигуры, многочлена и т.д. является число различных симметрий в группе симметрий, которое называется *порядком* группы. Так, первый из трех рассмотренных многочленов имеет группу симметрии порядка 6, а квадрат имеет группу симметрии порядка 8. Но еще важнее понять, как устроена в таких группах операция умножения, к которой мы теперь и переходим.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Каждая симметрия является преобразованием какого-то “множества” (множества, состоящего в рассмотренных примерах из всех точек плоскости, пространства или из всех многочленов от трех переменных с вещественными коэффициентами).

Что такое произвольное преобразование f произвольного множества X? Пусть X состоит из каких-то *точек*. (Вообще нужно говорить о так называемых “точках”. В одном из примеров у нас в качестве точек выступают многочлены от трех переменных!) Говорят, что задано *преобразование* (или взаимно однозначное отображение, соответствие, обратимая функция) f множества X, если для каждой точки a из X ($a \in X$) однозначно задана другая точка из X, которую называют *образом* точки a и обозначают $f(a)$; при этом требуется дополнительно, чтобы каждая точка b из X ($b \in X$) была также образом некоторой, причем единственной, точки $a \in X$. В этом случае точку a называют *прообразом* точки b.

Приведем несколько примеров.

1. Пусть X – плоскость, а f – ее поворот по часовой стрелке на 90° около начала координат. Тогда образом точки (1, 0) будет точка (0, –1), а образом точки (0, –1) будет точка (–1, 0). Проверьте, что вообще образом произвольной точки (x, y) является точка $(y, -x)$, а прообразом для (x, y) служит $(-y, x)$.

2. Пусть опять X – это координатная плоскость, но f – ее параллельный перенос на вектор $\mathbf{v}$ с координатами (v_1, v_2). Образом произвольной точки A с координатами (a_1, a_2) будет точка $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$, а прообраз точки A – точка с координатами $(a_1 - v_1, a_2 - v_2)$.

3. Пусть теперь X – множество всех вещественных чисел. Тогда формула $y = f(x)$ задает преобразование множества X, если в качестве образа y произвольной точки x выбрать $f(x) = 2x - 6$ или $f(x) = x^3$. Однако функция $f(x) = x^2$ уже не будет преобразованием вещественной прямой, так как, например, у точки 4 (то есть числа 4 в данном случае) два прообраза: 2 и –2, а у точки –1 нет ни одного прообраза.

4. Рассмотрим все преобразования какого-нибудь конечного множества X, то есть множества, в котором конечно число "точек". Пусть, например, X состоит из трех букв x, y, z. Тогда преобразование f, для которого $f(x) = y$, $f(y) = z$ и $f(z) = x$, является просто четвертой перестановкой из таблицы 1, а число всевозможных преобразований множества X равно 6, как видно из той же таблицы.

При обобщении этого примера на произвольное конечное множество X, состоящее из n точек, поступают следующим образом. Все точки этого множества нумеруют целыми числами от 1 до n. (В примере выше можно считать, скажем, что x имеет номер 1, y – номер 2, а z – номер 3.) В таком случае всякая *перестановка* f (то есть преобразование конечного множества X) может быть задана двумя строками: в первой мы приводим все точки множества X (а значит, после нумерации – просто числа 1, ..., n), а во второй пишем соответственно их образы при преобразовании f. Так, преобразование f из предыдущего абзаца запишется как $f = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}$, а таблица 1 переписывается в виде таблицы 2.

Таблица 2

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix},$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \quad f_5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}, \quad f_6 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что каждая перестановка f полностью определяется указанием образов всех точек конечного множества X, то есть f задается второй строкой своей стандартной записи. Такая строка всего одна: (1) при $n = 1$, их две: (1, 2) и (2, 1) при $n = 2$ и их шесть: (2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2,), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (1, 2, 3) для $n = 3$.

Естественно предположить, что для всякого n число всех различных перестановок на множестве X, состоящем из n точек, равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$. (Правая часть читается "*n факториал*".) Такое предположение оказывается верным, так как оно подтверждается каждый раз при переходе к следующему значению для n. В самом деле, из любой данной строки, заполненной числами от 1 до n, можно получить $n + 1$ строку, заполненную числами от 1 до $n + 1$, если вставлять число $n + 1$ на любое из возможных мест: в самом начале строки или после первого числа строки, или после второго, ..., или после n-го. Поэтому число всех строк, заполненных числами от 1 до $n + 1$, в $n + 1$ раз больше, чем число строк, составленных из чисел от 1 до n, а значит, оно равно $n!(n + 1) = (n + 1)!$.

4. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Мы придем к "исчислению" симметрий и преобразований после того, как зададим следующую, присущую преобразованиям операцию, называемую их суперпозицией, или просто умножением.

Пусть f и g – два произвольных преобразования какого-то определенного множества X. Тогда их *произведение* fg, обозначаемое сейчас буквой h, определяется так: для всякой точки x из X по определению $h(x) = f(g(x))$. Другими словами, для вычисления $h(x)$ нужно сначала вычислить $y = g(x)$, а потом найти образ $z = f(y)$ точки y при преобразовании f. Пользуясь определениями, читатель без особого труда может убедиться, что h – также преобразование множества X. Мы ограничимся только следующими примерами.

1. Пусть преобразование f вещественной прямой задается функцией $f(x) = 2x + 6$ вещественного переменного x. Пусть также по определению $g(x) = x^3$. Тогда преобразование $h = fg$ является функцией, вычисляемой по правилу

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^3) = 2x^3 + 6,$$

поскольку для получения последнего равенства x заменяется на x^3 в формуле, задающей функцию f. Заметим, что функция $h' = gf$ должна находиться по правилу

$$h'(x) = g(f(x)) = g(2x + 6) = (2x + 6)^3.$$

Этот пример показывает, что умножение преобразований вполне может быть некоммутативным, то есть результат может существенно зависеть от порядка множителей и преобразование fg не обязано совпадать с gf.

2. Найдем произведение каких-нибудь двух перестановок из таблицы 2, например $f_1 f_2$. Здесь множество X состоит из трех чисел: $X = \{1, 2, 3\}$. Значит,

для вычисления $h = f_1 f_2$ мы должны сначала найти $h(1) = f_1(f_2(1))$. Из таблицы 2 видим, что $f_2(1) = 3$, а $f_1(3) = 3$, откуда $h(1) = 3$. Аналогично находим последовательно: $h(2) = 1$ и $h(3) = 2$. Это означает, что произведение $f_1 f_2$ преобразует числа точно так же, как перестановка f_5 из таблицы 2, то есть, $f_1 f_2 = f_5$. Читатель тем же способом подсчитает, что $f_2 f_1 = f_4$, то есть f_1 и f_2 не коммутируют, а, к примеру, f_4 и f_5 коммутируют: $f_4 f_5 = f_5 f_4$.

3. Проверьте, пожалуйста, самостоятельно, что произведение зеркальных симметрий квадрата относительно прямых 2 – 4 и AB (рис. 1*а*) есть поворот на 90° вокруг его центра по часовой стрелке, а произведение тех же преобразований в обратном порядке – поворот на 270° по часовой стрелке. Для такой проверки достаточно проследить за образами только вершин квадрата. В качестве упражнения можно порекомендовать провести умножения для выбранных каким-либо образом симметрий других правильных многоугольников: тетраэдра, куба и т.д.

5. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Выделим теперь общие свойства групп симметрий. Во-первых, симметрии выбираются среди преобразований какого-то множества X. При этом уже заранее к рассмотрению могут допускаться не обязательно все преобразования множества X. Так, при определении группы симметрий квадрата мы с самого начала ограничивались только движениями плоскости, то есть преобразованиями, сохраняющими длины отрезков (хотя допускали как “собственные” движения, при которых сохраняется еще и ориентация, так и “несобственные” движения, меняющие ориентацию, такие, как зеркальные симметрии). Затем среди движений плоскости выбирались *симметрии* квадрата, то есть те преобразования, при которых каждая его точка отображается в некоторую точку того же квадрата.

Во-вторых, определено произведение преобразований, которое опять-таки является преобразованием. Произведение симметрий – симметрия: если, например, преобразования f и g каждое переводят некоторую фигуру в себя, то и произведение fg, конечно же, переводит эту фигуру в себя, так как оно сводится к последовательному выполнению g и f. Следовательно, для симметрий фигуры всегда имеется операция умножения.

Отметим далее, что умножение преобразований (в том числе симметрий) ассоциативно. Это значит, что для любых трех (не обязательно различных) преобразований f, g, h произвольного множества X всегда $(fg)h = f(gh)$ (здесь скобки указывают на порядок выполнения умножений). Для проверки убедитесь просто, пользуясь определением умножения преобразований, что как произведение, стоящее в левой части этого равенства, так и произведение из правой части, отображают произвольную точку x из X в точку $f(g(h(x)))$. Это наблюдение позволяет далее опускать скобки, то есть писать fgh, так как результат не зависит от их расстановки.

Нами было замечено также, что среди преобразований и симметрий всегда можно выделить тождественное преобразование e. Оно оставляет каждую точку x на месте: $e(x) = x$, а выбранное для него обозначение обусловлено тем, что e является “единичным” (или нейтральным) сомножителем при умножении преобразований: $ef = fe = f$ для любого преобразования f, так как всегда $e(f(x)) = f(x)$ и $f(e(x)) = f(x)$ по определению преобразования e. В таблице 2 $e = f_6$.

Наконец для каждого преобразования f имеется *обратное преобразование* g со свойством: $fg = gf = e$; для него используется обозначение $g = f^{-1}$. Чтобы задать преобразование f^{-1}, нужно его определить правилом $f^{-1}(b) = a$, если $f(a) = b$, то есть образ и прообраз меняются ролями при переходе от f к f^{-1}. Очевидно, что $(f^{-1})^{-1} = f$. Проверьте, что в таблице 2

$$f_1^{-1} = f_1, \quad f_2^{-1} = f_2, \quad f_3^{-1} = f_3, \quad f_4^{-1} = f_5, \quad f_6^{-1} = f_6.$$

Обратными в этом смысле к функциям вещественного переменного $f(x) = x^3$ и $f(x) = 2x + 6$ являются соответственно $g(x) = \sqrt[3]{x}$ и $g(x) = \frac{x}{2} - 3$. (Проверьте!)

Полезно заметить, что если некоторое преобразование f рассматривается как симметрия (преобразует некоторую фигуру в себя), то и f^{-1} – тоже симметрия.

6. ЧЕТНОСТЬ ПЕРЕСТАНОВОК

Обобщим сначала пример из раздела 2, рассматривая теперь многочлены с вещественными коэффициентами от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где n – любое целое положительное число. Обозначим S_n группу всех перестановок на символах $1, 2, \ldots, n$, порядок которой равен $n!$ (см. раздел 3). Группу S_n будем также считать группой преобразований множества всех многочленов от n переменных. Точнее, если перестановка f переводит 1 в какое-то число i_1, 2 – в i_2, ..., n – в i_n (то есть $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$), то переменная x_1 заменяется на x_{i_1}, x_2 – на x_{i_2}, ..., x_n – на x_{i_n}. Например, многочлен $x_1 - 2x_2 + 5x_3x_4$ под действием преобразования, заданного перестановкой $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, меняется на $x_2 - 2x_4 + 5x_1x_3$.

При $n = 3$ многочлены второй и третьей степеней от трех переменных $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$ (читатель может сам раскрыть скобки) симметричны, то есть не меняются при любых перестановках переменных. А что можно сказать о многочлене $d_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$? Каждый из его трех множителей под действием любой перестановки, выбранной из таблицы 2, заменяется на другой множитель из этого произведения, но с возможной заменой знака перед ним. (Проверьте!) Поэтому их произведение $d_3(x_1, x_2, x_3)$ либо не меняется, либо меняет свой знак на противоположный. Группу симметрий многочлена $d_3(x_1, x_2, x_3)$ составляют те перестановки, которые его не меняют. Проверьте, что к ним относятся f_4, f_5 и f_6 из таблицы 2. Такие перестановки называют четными, а f_1, f_2, f_3 – нечетные перестановки.

Чтобы определить четность произвольной перестановки

$$f = \begin{pmatrix} 1\ 2\ \dots\ n \\ i_1\ i_2\ \dots\ i_n \end{pmatrix}$$

на числах от 1 до n, нужно ввести многочлен от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$d_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)(x_2 - x_3) \dots \\ \dots (x_2 - x_n)(x_3 - x_4) \dots (x_3 - x_n) \dots (x_{n-1} - x_n). \qquad (1)$$

По определению разность $x_k - x_l$ включается множителем в многочлен $d_n(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $k < l$.

Под действием перестановки f сомножитель $x_k - x_l$ заменяется на $x_{i_k} - x_{i_l}$, то есть либо на другой множитель произведения (1), либо на двучлен, противоположный по знаку одному из множителей в (1) (если $k < l$, но $i_k > i_l$). Значит, многочлен (1) преобразуется в $\pm d_n(x_1, \dots, x_n)$.

Те перестановки из группы всех перестановок S_n, которые составляют группу симметрий многочлена $d_n(x_1, \dots, x_n)$, то есть не меняющие произведения (1), называются четными, а меняющие его знак на противоположный называются нечетными.

Для примера рассмотрим элементарную транспозицию, которая меняет местами только два каких-либо соседних числа k и $k + 1$ в ряду $1, \dots, n$:

$$f = \begin{pmatrix} 1\ 2\ \dots\ k-1 & k & k+1 & k+2\ \dots\ n \\ 1\ 2\ \dots\ k-1 & k+1 & k & k+2\ \dots\ n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Преобразование, заданное перестановкой (2), заменяет множитель $x_k - x_{k+1}$ на $x_{k+1} - x_k = -(x_k - x_{k+1})$. Все же остальные сомножители в (2) могут только остаться без изменения или поменяться местами с другими множителями, не меняя знак. Например, если $k + 1 < l$, то $x_{k+1} - x_l$ превращается в $x_k - x_l$, где опять-таки $k < l$, и т.д. Поэтому перестановка (2) поменяет знак перед многочленом (1), то есть

всякая элементарная транспозиция является нечетной перестановкой.

7. ПРАВИЛО ЧЕТНОСТИ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПЕРЕСТАНОВОК

Из свойств произвольной группы симметрий, в частности группы четных перестановок, заключаем, что произведение четных перестановок есть четная перестановка. Впрочем, это видно и непосредственно, поскольку результат действия на какой-либо многочлен произведения fg двух перестановок будет таким же, как и при последовательном применении к нему сначала g, а потом f. Отсюда видно также, что произведение нечетной перестановки на четную (или четной на нечетную) есть нечетная перестановка, так как если g не меняет многочлена (1), а f заменяет $d_n(x_1, \dots, x_n)$ на $-d_n(x_1, \dots, x_n)$, то произведение fg (то есть последовательное применение сначала g, а затем f) преобразует $d_n(x_1, \dots, x_n)$ в $-d_n(x_1, \dots, x_n)$. Точно так же произведение двух нечетных перестановок будет четной перестановкой. Все эти возможности объединяются одним правилом четности произведения:

При умножении перестановок их четности “складываются”. В частности, произведение двух четных или двух нечетных перестановок является четной перестановкой, а произведение четной на нечетную (*или нечетной на четную*) *есть нечетная перестановка.*

Найдем четность произведения произвольной *транспозиции*, то есть перестановки, меняющей местами только два различных (не обязательно соседних, как в случае элементарной транспозиции) числа k и l:

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ \dots\ k\ k+1\ \dots\ l-1\ l\ \dots\ n \\ 1\ 2\ \dots\ l\ k+1\ \dots\ l-1\ k\ \dots\ n \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Для определенности считаем, что $k < l$, а также, что $k + 1 < l$, так как иначе транспозиция (3) является элементарной и, как уже нам известно, нечетной.

Удобно ввести следующую вспомогательную перестановку g, переставляющую только числа $k + 1$ и l:

$$g = \begin{pmatrix} 1\ 2\ \dots\ k & k+1 & k+2\ \dots\ l-1 & l & l+1\ \dots\ n \\ 1\ 2\ \dots\ k & l & k+2\ \dots\ l-1 & k+1 & l+1\ \dots\ n \end{pmatrix}.$$

Для этой перестановки g и элементарной транспозиции f, заданной формулой (2), составим произведение gfg. Оставим читателю его вычисление, которое убеждает, что gfg совпадает с транспозицией (3). (Например, k под действием g переходит в себя, затем под действием f отображается в число $k + 1$, которое при применении g отображается в l. В итоге k преобразуется в l, как и при выполнении одной перестановки (3), и т. д.) Однако нам уже известно, что f – нечетная перестановка. Поэтому двукратное применение правила четности к произведению gfg приводит к выводу, что транспозиция (3) есть нечетная перестановка. Тем самым доказана

Теорема 1. *Всякая транспозиция является нечетной перестановкой.*

Подсчет числа четных или нечетных перестановок в группе S_n может быть при $n > 1$ проведен следующим образом. Предположим, что $f_1, \dots, f_s$ – все различные четные перестановки из S_n, а $g_1, \dots, g_t$ – все нечетные перестановки. Выберем среди последних также какую-нибудь одну транспозицию и обозначим ее h (такая найдется, ибо $n > 1$). Тогда все перестановки $hf_1, ..., hf_s$ различны (равенство вида $hf_i = hf_j$ после умножения слева обеих его частей на h^{-1} привело бы к равенству $f_i = f_j$). Но по правилу четности произведения и теореме 1 все эти s перестановок должны быть нечетными, а значит, содержаться среди перестановок $g_1, ..., g_t$. Такое возможно только, если $s \le t$. Однако тем же способом, но рассматривая уже произведения $hg_1, ..., hg_t$, получаем и обратное неравенство: $t \le s$. Следовательно, $s = t$, а из раздела 3 мы уже знаем, что $s + t = n!$. Значит, доказана

Теорема 2. *При $n > 1$ число четных перестановок в группе S_n совпадает с числом нечетных перестановок и равно $n!/2$.*

8. ИГРА В “ПЯТНАДЦАТЬ” И ПЕРЕСТАНОВКИ

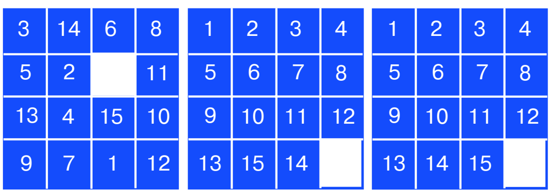
Покажем теперь, как свойства перестановок помогают объяснить одну давно известную головоломку. Это так называемая игра в “пятнадцать”. Для нее предназначена коробка, заполненная фишками с номерами от 1 до 15. При этом шестнадцатое место в четырех рядах и четырех колонках остается пустым (рис. 3*а*). За один ход разрешается передвинуть на пустое место любую из соседних фишек, находящихся слева, справа, выше или ниже пустого места (место, занимаемое фишкой ранее, наоборот, становится пустым). В позиции рисунка 3*а*, например, можно передвинуть только одну из фишек с номерами 2 (вправо), 11 (влево), 6 (вниз) или 15 (вверх).

Спрашивается, можно ли от произвольной позиции перейти за несколько ходов к другой, скажем, от показанной на рисунке 3*б* к рисунку 3*в*.

Для математического анализа игры можно считать, что на пустом месте как бы находится дополнительная фишка с номером 16, которую только и разрешается менять с соседними (слева, справа, сверху или снизу). В этом случае каждая позиция однозначно характеризуется перестановкой

$$f = \begin{pmatrix} 1\ 2\ \dots\ 16 \\ i_1\ i_2\ \dots\ i_{16} \end{pmatrix},$$

где i_1 — номер фишки, стоящей в левом верхнем углу, i_2 — номер фишки из первого ряда и второй колонки, ..., i_5 — из второго ряда и первой колонки и т. д.



а *б* *в*

Рис. 3.

Например, позиция рисунка 3*а* задается перестановкой

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 3 & 14 & 6 & 8 & 5 & 2 & 16 & 11 & 13 & 4 & 15 & 10 & 9 & 7 & 1 & 12 \end{pmatrix},$$

позиция рисунка 3*в* — тождественной перестановкой, а позиция рисунка 3*б* — элементарной транспозицией, меняющей местами 14 и 15.

Делая один ход, игрок меняет позицию и перестановку, ее характеризующую. Так, если в позиции рисунка 3*а* фишку с номером 6 опустить на пустое место (то есть поменять ее местами с фиктивной фишкой 16), то в нижней строке выписанной выше перестановки f числа 6 и 16 поменяются местами. Но тот же результат достигается, если перестановку f умножить слева на такую транспозицию g, которая меняет местами числа 6 и 16. (Проверьте умножением, что перестановка gf задает новую позицию.) Точно так же при перемещении на пустое место фишки с номером 2 (с номером 11 или 15) перестановка f умножится слева на транспозицию, переставляющую 2 и 16 (11 и 16 или 15 и 16 соответственно).

В соответствии с теоремой 1 и правилом четности произведения можно заключить теперь, что каждый ход меняет четность перестановки, характеризующей определенную позицию, на противоположную.

Перестановки, задающие позиции рисунков 3*б* и 3*в*, имеют разные четности. Поэтому от позиции рисунка 3*б* к позиции рисунка 3*в* можно было бы перейти, только сделав нечетное число ходов.

С другой стороны, в позициях рисунков 3*б* и 3*в* “фишка” 16 занимает одно и то же место. Значит, при существовании какой-то последовательности ходов, ведущих от позиции рисунка 3*б* к 3*в*, она бы в итоге столько же раз поднялась вверх, сколько и опустилась вниз, и столько же раз передвинулась налево, сколько и направо. Но это значит, что число ходов при преобразовании позиции рисунка 3*б* в 3*в* может быть только четным.

Полученное противоречие показывает всю тщетность попыток прийти от позиции рисунка 3*б* к стандартной позиции рисунка 3*в* (если, конечно, играть по правилам!). Читателю, заинтересованному в объяснении других игр (таких, например, как “кубик Рубика”) с помощью групп перестановок, мы рекомендуем следующую элементарную книгу:

Калужнин Л.А., Сущанский В.И. Преобразования и перестановки. М.: Наука, 1985.

* * *

Александр Юрьевич Ольшанский, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, входит в состав редколлегий нескольких международных математических журналов. Автор более 50 научных работ, им и его учениками найдены решения многих известных старых вопросов теории групп.