

# ИГРУШЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛЯЦИЙ НЕЙТРИНО В ВЕЩЕСТВЕ

Н. В. МИХЕЕВ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

## TOY MODEL OF NEUTRINO OSCILLATIONS IN A MATTER

N. V. MIKHEEV

*Neutrino oscillations are rare examples of the macroscopic manifestation of an elementary particle having wave properties. The simple mechanical analogue of this microscopic phenomena is demonstrated. Amplitude beatings of coupled pendulums exactly reproduce all neutrino oscillations shapes, including the resonant neutrino transitions in the matter.*

*Осцилляции нейтрино являют собой один из немногих примеров макроскопического проявления волнового характера распространения нейтрино в микромире. Задача статьи – показать, что этот квантово-механический феномен имеет простой аналог в классической механике. Биения амплитуд связанных гармонических осцилляторов в точности воспроизводят все черты нейтринных осцилляций, включая резонансный переход в веществе.*

[www.issep.rssi.ru](http://www.issep.rssi.ru)

## ВВЕДЕНИЕ

В начале 60-х годов экспериментально было доказано, что существуют два разных типа нейтрино: электронное и мюонное, — отличающиеся лептонным зарядом, а позже стало ясно, что существует еще третий тип нейтрино — тауонное [1]. Следует отметить, что в принципе лептонный заряд может быть несохраняющимся квантовым числом, что, в свою очередь, приводит к процессам с нарушением лептонного числа, например к осцилляциям нейтрино, рассмотренным Б. Понтекорво еще в 1958 году. В этом случае нейтрино с определенными лептонными зарядами не являются стационарными состояниями с определенной массой, а представляют собой суперпозицию таких состояний (феномен смешивания нейтрино [2]):

$$\nu_e = \cos\theta \nu_1 + \sin\theta \nu_2,$$

$$\nu_\mu = -\sin\theta \nu_1 + \cos\theta \nu_2. \quad (1)$$

Здесь  $\theta$  — так называемый угол смешивания,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — состояния с определенными массами  $m_1$  и  $m_2$  соответственно. В методических целях здесь рассматривается смешивание только двух типов нейтрино. Обобщение на случай смешивания трех нейтрино не представляет принципиальных трудностей, хотя делает задачу существенно более громоздкой.

Осцилляции нейтрино представляют собой периодический процесс перехода одного типа нейтрино в другой (например,  $\nu_e \longleftrightarrow \nu_\mu$ ), и вероятность  $\mathcal{P}$  обнаружить  $\nu_\mu$ -нейтрино на расстоянии  $x$  от источника  $\nu_e$ -нейтрино описывается формулой

$$\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = \sin^2(2\theta) \sin^2 \frac{\pi \delta m^2 c^2}{2hp} x. \quad (2)$$

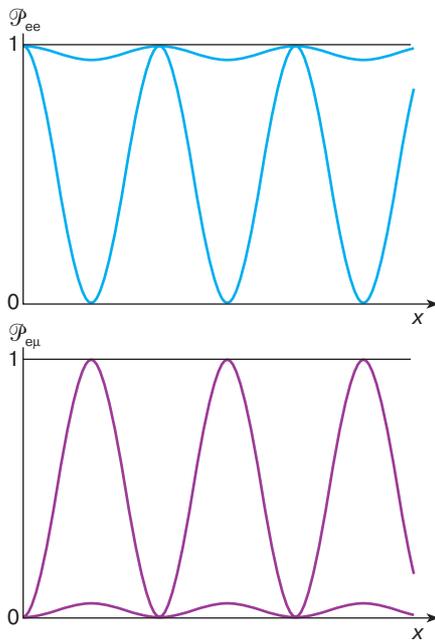
Здесь  $\delta m^2$  — разность квадратов масс нейтрино  $\nu_1$  и  $\nu_2$ ,  $p$  — импульс нейтрино,  $c$  — скорость света,  $h$  — постоянная Планка. Очевидно, что вероятность того, что электронное нейтрино  $\nu_e$  останется таковым, есть разность  $1 - \mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}$ :

$$\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2 \frac{\pi \delta m^2 c^2}{2hp} x. \quad (3)$$

Вероятности (2) и (3) являются периодическими функциями  $x$  с периодом (длиной осцилляции)

$$\ell = \frac{2hp}{\delta m^2 c^2}, \quad (4)$$

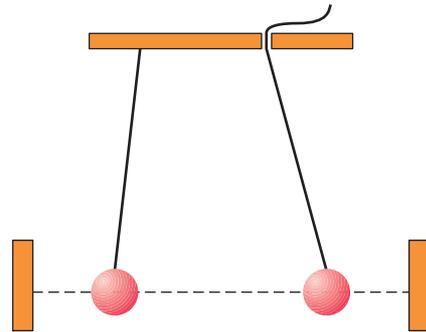
а угол смешивания  $\theta$  определяет глубину осцилляций, которая достигает максимальной величины, равной единице, при  $\theta = \pi/4$  (полное смешивание). На рис. 1 схематически изображены осцилляции для малого угла  $\theta$  и случая полного смешивания. Приведенные формулы описывают нейтринные осцилляции как в вакууме, так и в однородном веществе. В последнем случае  $\theta$  и  $\ell$  зависят от плотности вещества.



**Рис. 1.** Осцилляции нейтрино.  $\mathcal{P}_{ee}$  – вероятность перехода  $\nu_e \rightarrow \nu_e$ ,  $\mathcal{P}_{e\mu}$  – вероятность перехода  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$

### СВЯЗАННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

Почти все представители естественных наук в счастливые студенческие годы выполняли лабораторную работу “Связанные маятники” (рис. 2), исследуя характер колебаний в зависимости от жесткости связи и соотношения собственных частот маятников. Если лаборант был добросовестным и объект изучения был в хорошем состоянии (трение минимально, пружина связи мягкая), то плавные переходы колебаний от одного маятни-



**Рис. 2.** Связанные маятники. Штриховые линии – упругие (резиновые) нити, осуществляющие связь осцилляторов

ка к другому – биения (особенно в режиме резонанса) могли действовать завораживающе. Математическое описание биений достаточно простое. Система уравнений, описывающая колебания связанных осцилляторов, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 + \frac{1}{2} \kappa^2 x_2 &= 0, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 + \frac{1}{2} \kappa^2 x_1 &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $x_{1,2}$  и  $\omega_{1,2}$  – координаты и собственные частоты первого и второго маятников соответственно,  $\kappa$  – параметр связи, имеющий размерность частоты. Систему уравнений (5) можно превратить в два независимых уравнения, если от координат  $x_{1,2}$  перейти к новым переменным  $y_{1,2}$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \theta y_1 + \sin \theta y_2, \\ x_2 &= -\sin \theta y_1 + \cos \theta y_2, \end{aligned} \quad (6)$$

подбирая подходящий угол смешивания  $\theta$ :

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\kappa^2}{\delta \omega^2}, \quad \delta \omega^2 = \omega_2^2 - \omega_1^2. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (5) с учетом (7), можно получить уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \lambda_1^2 y_1 &= 0, & \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \lambda_2^2 y_2 &= 0, \\ \lambda_{1,2}^2 &= \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 \mp \sqrt{(\delta \omega^2)^2 + \kappa^4}), \end{aligned} \quad (8)$$

описывающие два несвязанных гармонических осциллятора с частотами  $\lambda_{1,2}$ , решения которых хорошо известны. Следует отметить, что физический смысл введенных координат  $y_1$  и  $y_2$  состоит в том, что они описывают стационарные состояния с определенной

энергией, в то время как старые координаты  $x_1$  и  $x_2$  описывают нестационарное движение каждого маятника по отдельности. Сравнивая систему уравнений (6) для перехода от нестационарных координат  $x_{1,2}$  к стационарным  $y_{1,2}$  с системой (1), где  $v_{e,\mu}$  представляют нестационарные нейтринные состояния, а  $v_{1,2}$  — стационарные, легко видеть аналогию между  $v_{e,\mu}$  и  $x_{1,2}$ , а также между  $v_{1,2}$  и  $y_{1,2}$ .

Для нахождения решений  $x_{1,2}(t)$ , описывающих движение связанных осцилляторов, зададим следующие начальные условия:

$$x_1(0) = a_0, \quad x_2(0) = \frac{dx_1(0)}{dt} = \frac{dx_2(0)}{dt} = 0. \quad (9)$$

При таких начальных условиях уравнения движения осцилляторов имеют вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_0(\cos^2\theta \cos\lambda_1 t + \sin^2\theta \cos\lambda_2 t), \\ x_2(t) &= a_0 \sin\theta \cos\theta (-\cos\lambda_1 t + \cos\lambda_2 t). \end{aligned} \quad (10)$$

Они явно демонстрируют, что движение связанных осцилляторов носит характер биений — амплитудно модулированных колебаний. Это особенно ярко проявляется, если параметры таковы, что имеет место иерархия  $\omega_1^2, \omega_2^2 \gg \kappa^2, \delta\omega^2$ . При этом периоды колебаний  $2\pi/\lambda_{1,2}$  будут малы по сравнению с периодом биений  $2\pi/(\lambda_2 - \lambda_1)$ . Чтобы выделить амплитудную модуляцию, достаточно произвести усреднение квадрата решения  $x_{1,2}(t)$  по времени, большому по сравнению с периодом собственно колебаний, но малому по сравнению с периодом биений. В результате для квадрата амплитуд получаются следующие простые выражения:

$$\begin{aligned} a_1^2(t) &= 2\langle x_1^2(t) \rangle = a_0^2 \left( 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2 \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)t}{2} \right), \\ a_2^2(t) &= 2\langle x_2^2(t) \rangle = a_0^2 \sin^2(2\theta) \sin^2 \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)t}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Можно видеть, что в случае  $\delta\omega^2 = 0$  имеет место резонанс биений — глубина осцилляций амплитуд маятников достигает максимально возможного значения, так как при этом  $\theta = \pi/4$  (см. формулу (7)). С точностью до буквенных обозначений результат (11) совпадает с формулами (2) и (3), описывающими осцилляции нейтрино. Таким образом, связанные маятники могут играть роль своеобразной механической модели нейтринных осцилляций.

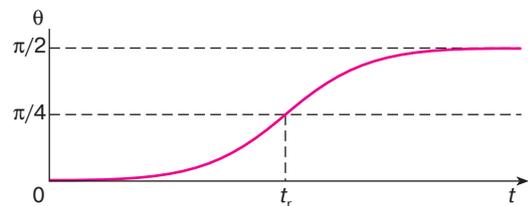
### РЕЗОНАНСНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ

Как уже отмечалось во введении, при распространении нейтрино в веществе параметры, описывающие осцилляции нейтрино, — угол смешивания  $\theta$  и разность квадратов масс нейтрино  $\delta m^2$ , а значит, и длина осцилля-

ций  $\ell$  — зависят от плотности вещества. Если плотность медленно меняется (изменением плотности на длине осцилляции  $\ell$  можно пренебречь) вдоль пути распространения нейтрино так, что угол  $\theta$  изменяется от малого начального значения до величины порядка  $\pi/2$ , то в том месте, где  $\theta = \pi/4$ , имеет место явление резонанса нейтринных осцилляций. В результате нейтрино одного сорта практически полностью перейдут в нейтрино другого сорта (например,  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ) [3, 4]. Это, в свою очередь, может оказаться элегантным решением известной проблемы дефицита солнечных нейтрино [5, 6].

Можно показать, что описанная в предыдущем разделе “игрушечная” модель осцилляций — связанные маятники — полностью воспроизводит также явление резонанса нейтринных осцилляций. Действительно, если длину нити, на которой подвешен один из маятников, медленно изменять, то угол смешивания  $\theta$  и частоты  $\lambda_{1,2}$  будут также медленно меняться так, как меняется одна из частот (для определенности положим, что меняется частота  $\omega_2$ ) в формулах (7) и (8). Пусть в начальный момент времени маятники имеют существенно разные частоты  $\delta\omega^2 \gg \kappa^2$ , так что начальный угол смешивания мал:  $\theta_0 \ll 1$ , как это следует из равенства (7). В момент времени, когда частоты выравниваются ( $\omega_1 = \omega_2$  и  $\delta\omega^2 = 0$ ), имеет место резонанс  $\theta = \pi/4$ . На рис. 3 схематически показано изменение угла смешивания  $\theta$  со временем.

Задача о нахождении характера временной зависимости осцилляций квадратов амплитуд колебаний связанных маятников  $a_{1,2}^2(t)$  относительно легко решается, если длина нити одного из маятников меняется медленно (так называемое адиабатическое приближение). В этом случае при переходе от системы уравнений (5) к (8) с помощью замены переменных (6) можно пренебрегать производными от медленно меняющейся функции  $\theta(t)$ . В результате снова получаются уравнения (8), где  $\lambda_{1,2}$  будут медленно меняющиеся функции времени. Решением этих уравнений в адиабатическом приближении снова будут гармонические функции (синус и косинус). Однако аргументами этих функций будут



**Рис. 3.** Изменение угла смешивания  $\theta$  со временем.  $t_r$  — момент резонанса

$$\varphi_{1,2}(t) = \int_0^t \lambda_{1,2}(\tau) d\tau. \quad (12)$$

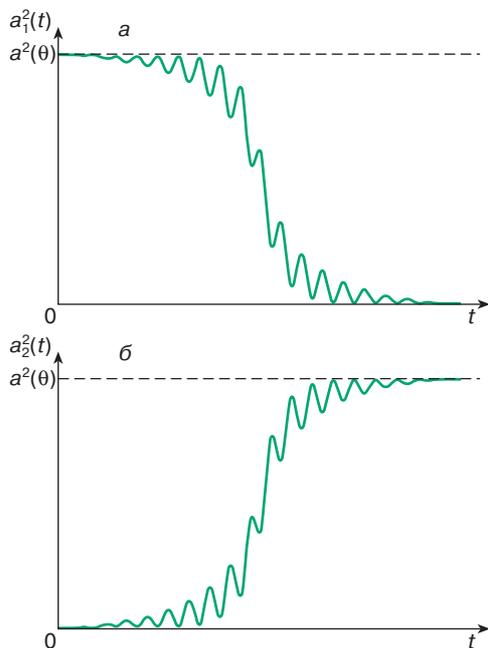
При тех же начальных условиях (9) уравнения движения связанных маятников с переменной частотой одного из них имеют вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_0(\cos\theta \cos\theta_0 \cos\varphi_1 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos\varphi_2), \\ x_2(t) &= a_0(-\sin\theta \cos\theta_0(\cos\varphi_1 + \cos\theta \sin\theta_0 \cos\varphi_2)), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\theta_0$  и  $\theta$  – угол смешивания в начальный и текущий моменты времени  $t$ . Чтобы выделить амплитудную модуляцию, необходимо произвести усреднение квадрата решения  $x_{1,2}(t)$  по времени, как это делалось в предыдущем разделе. В результате для квадрата амплитуд получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} a_1^2(t) &= a_0^2 \left( \cos^2(\theta - \theta_0) - \sin(2\theta) \sin(2\theta_0) \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right), \\ a_2^2(t) &= a_0^2 \left( \sin^2(\theta - \theta_0) + \sin(2\theta) \sin(2\theta_0) \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Зависимость квадратов амплитуд  $a_{1,2}^2(t)$  от времени схематически изображена на рис. 4. Нетрудно видеть, что при прохождении резонанса колебания первого



**Рис. 4.** Изменение квадратов амплитуд колебаний связанных маятников со временем при изменяющейся длине подвеса одного из маятников. Такой же характер носят переходы  $\nu_e \rightarrow \nu_e$  (а) и  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  (б) при распространении нейтрино в Солнце

маятника (возбужденного в начальный момент времени) затухают, в то же время возбуждаются колебания второго маятника. Практически вся энергия передается от первого маятника ко второму. Это в точности воспроизводит черты резонансного перехода  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  в процессе нейтринных осцилляций в веществе с переменной плотностью (например, в Солнце), когда электронные нейтрино почти полностью переходят в мюонные (или тауонные). Таким образом, такая простейшая механическая система, как связанные маятники, является адекватным аналогом процесса нейтринных осцилляций – феномена из области релятивистской квантовой теории поля.

Следует отметить, что такими же аналогами могут быть любые слабо связанные колебательные системы с переменными параметрами (например, связанные электромагнитные колебательные контуры). Такие “игрушечные” модели нейтринных осцилляций доступны в качестве демонстрационных пособий практически в любой школьной лаборатории.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтекорво Б.М.* Страницы развития нейтринной физики // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, № 4. С. 675–709.
2. *Биленький С.М., Понтекорво Б.М.* Смешивание лептонов и осцилляции нейтрино // Там же. 1977. Т. 123, № 2. С. 181–215.
3. *Михеев С.П., Смирнов А.Ю.* Резонансные осцилляции нейтрино в веществе // Там же. 1987. Т. 153, № 1. С. 3–58.
4. *Арбузов Б.А.* Осцилляции нейтрино – “рентген” для небесных тел? // Соросовский Образовательный Журнал. 1998. № 6. С. 86–91.
5. *Герштейн С.С.* Загадки солнечных нейтрино // Там же. 1997. № 8. С. 79–85.
6. *Кочаров Г.Е.* Термоядерный котел в недрах Солнца и проблема солнечных нейтрино // Там же. 1996. № 10. С. 99–105.

*Рецензент статьи С.С. Герштейн*

\* \* \*

Николай Владимирович Михеев, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Ярославского государственного университета. Область научных интересов – электрослабые взаимодействия элементарных частиц, нейтринная физика и астрофизика. Автор и соавтор более 60 научных публикаций.