ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ

А. С. КИНГСЕП
Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный Московской обл.

SECONDARY QUANTIZATION

A. S. KINGSEP

A popular introduction to the idea of secondary quantization is given. Annihilation and creation of Bose and Fermi particles are discussed within the framework of this approach; both the general and the classical limit cases are considered. Manifestations of the secondary quantization effects are illustrated by stimulated Brillouin scattering; some other applications of this method are mentioned as well.

На популярном уровне излагается идея вторичного квантования. В рамках данного подхода рассмотрены уничтожение и рождение как бозе-частиц, так и ферми-частиц. При этом обсуждаются как общий случай, так и классический предел. Проявления эффектов вторичного квантования продемонстрированы на примере вынужденного бриллюэновского рассеяния, указаны и другие области применения данного метода.

ВВЕДЕНИЕ

Концепцию, представленную в настоящей статье, обычно связывают с квантовой теорией поля – с формальным описанием взаимодействий элементарных частиц. В действительности область применимости данной системы понятий гораздо шире – она имеет прямое отношение к физике лазеров, комбинационному рассеянию света, физике твердого тела и даже к совершенно классической (то есть неквантовой) физике – турбулентности жидкости, газа или плазмы.

В динамике твердого тела, плазмы и в какой-то мере газа и жидкости существенную роль играют так называемые коллективные возбуждения, когда приходится рассматривать поведение не отдельных частиц, но организованных так или иначе больших ансамблей. Простейшими примерами такого рода являются волновые движения – продольный или поперечный звук в твердом теле или, например, волны в плазме, включающие как движение частиц, так и осцилляторную динамику электромагнитных полей (типов таких волн очень много, даже наиболее часто встречающихся не один десяток).

Оказывается, свойство корпускулярно-волнового дуализма, весьма важное в микромире и по сути дающее основание для квантово-механического описания частиц, проявляется и в макроскопической физике. Если электромагнитную волну частоты ω рассмотреть в рамках квантовой механики, она оказывается представимой в виде ансамбля фотонов (или, что то же, γ-квантов), каждый из которых имеет энергию $\hbar\omega$, где $\hbar \simeq 1{,}055 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с – постоянная Планка. Энергия осцилляций электромагнитного поля заданной частоты может излучаться, поглощаться и как-то передаваться лишь в количествах, кратных $\hbar\omega$. Меньше $\hbar\omega$ порция энергии при данной частоте быть не может. В свою очередь, свободный электрон с энергией E квантовая механика отождествляет с плоской волной частоты $\omega = E/\hbar$.

Теперь представим себе звуковую волну в сплошной среде или, например, поверхностную волну в жидкости. Первую из них мы можем услышать, вторую – увидеть (“бросая в воду камешки, наблюдай круги, ими образуемые"). Пусть частота такой волны равна ω. При надлежащем рассмотрении оказывается, что и эти с детства привычные нам типы волн тоже представляют собой совокупность квантов с энергией $\hbar\omega$. И это не поверхностная аналогия вроде бесхитростного отождествления атома и планетной системы, но отражение фундаментальных законов физики. Впервые это было понято научным сообществом благодаря работам голландского физика П. Дебая, посвященным термодинамическим свойствам твердого тела (см., например, [1, 2]). Дело в том, что в наиболее типичной для твердого состояния форме – кристаллической – атомы либо ионы, пребывающие в узлах кристаллической решетки, могут совершать лишь колебательное движение. Было показано, что теплоемкость и теплопроводность непроводящего кристалла целиком определяются этими осцилляторными движениями, которые представляются как совокупность продольных и поперечных звуковых колебаний, а они, в свою очередь, допускают представление в виде совокупности так называемых квазичастиц – продольных и поперечных фононов. Дальнейшее развитие физики твердого тела, а затем и нелинейной физики плазмы (которая в отношении микродинамики гораздо ближе к твердому телу, нежели к газу или жидкости, см. [3]) способствовало введению понятия квазичастиц в постоянное обращение.

От частицы (электрона, протона, фотона) квазичастица отличается тем, что она не может существовать независимо от среды, поскольку представляет собой квант коллективного возбуждения либо некоторый ансамбль частиц, который только в среде и может существовать (например, так называемые куперовские пары электронов в сверхпроводниках). Таким образом, квазичастицы существуют на фоне взаимодействия большого количества частиц, образующих сплошную среду. Как правило, квазичастицы в меньшей степени связаны всевозможными законами сохранения (хотя, например, и фотон в этом отношении – достаточно свободная частица). В остальном свойства частиц и квазичастиц примерно одни и те же, так что их можно рассматривать в рамках единого подхода.

При исследовании таких сложных систем, как плазма или твердое тело, не слишком реально детальное рассмотрение осцилляторной динамики во всем ее многообразии. Гораздо более рациональным представляется язык функций распределения квазичастиц – классических или квантовых, подобных распределениям Максвелла, Ферми или Бозе для обычных частиц, которые используются в статистической термодинамике. И здесь для описания взаимодействия в сложных системах, включающих как обычные частицы, так и квазичастицы, оказался как нельзя более кстати специальный метод рассмотрения, введенный в квантовой теории поля П. Дираком, Е. Вигнером и П. Иорданом. Его принято называть вторичным квантованием.

ИДЕЯ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ. БОЗОНЫ И ФЕРМИОНЫ

Предположим, что мы научились классифицировать все возможные состояния индивидуальной частицы или квазичастицы в некоторой системе, например состояния электронов проводимости в проводящем кристалле [2] или ленгмюровских колебаний в плазме [3]. Для наглядности наших рассуждений мы их просто перенумеруем: 1; 2; 3; ... Тогда любое состояние системы в целом можно представить в виде чисел заполнения, то есть числа частиц или квазичастиц в каждом из перенумерованных состояний:

$$\{N_1; N_2; N_3; \ldots\}. \qquad (1)$$

Вопрос о правильном выборе таких базовых состояний далеко не тривиален. Например, при рассмотрении фотоэффекта (рис. 1) электрон в конечном состоянии нужно считать свободным, то есть в виде плоской волны, тогда как в начальном состоянии его нужно описывать как связанную частицу, движущуюся в поле ядра. Сам по себе рис. 1 представляет в квантовой электродинамике нечто большее, чем просто картинку, – это так называемая фейнмановская диаграмма, но мы такими диаграммами будем пользоваться лишь в качестве наглядных иллюстраций (в данном случае связанный электрон поглотил фотон и перешел в свободное состояние – это и есть фотоэффект). Описание, представленное формулой (1), будет корректно в том случае, если мы перечислим (или сумеем классифицировать) все возможные состояния, скажем, применительно к диаграмме рис. 1, как свободные, так и связанные.

Если мы с этой задачей справились, то теперь любую реакцию в нашей системе частиц мы сможем представить как совокупность актов рождения и уничтожения частиц в тех или иных состояниях. Например, реакция, схематически представленная на рис. 2, есть результат уничтожения частиц в состояниях *1*; *2*; *3* и од-

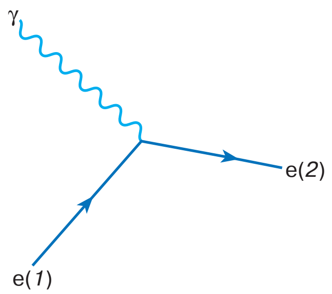

Рис. 1. Фейнмановская диаграмма фотоэффекта

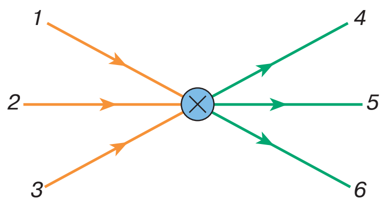

Рис. 2

новременного рождения их в состояниях *4*; *5*; *6*. Это вовсе необязательно одни и те же частицы – наша базовая система состояний должна включать все виды частиц или квазичастиц, участвующих во взаимодействиях.

На рис. 3 представлен еще один пример такого рода, выраженный уже непосредственно в числах заполнения. Здесь два столбца составлены из чисел заполнения, отвечающих начальному и конечному состоянию системы. Если с частицей что-то произошло, так что она из k-го состояния перешла в q-е состояние (например, изменила импульс при рассеянии на каком-то неподвижном центре), то это можно выразить следующим образом: частица уничтожена в состоянии k ($N_k \Rightarrow N_k - 1$) и рождена в состоянии q ($N_q \Rightarrow N_q + 1$). Так мы формализовали процесс перехода.

Зачем это нужно? Дело в том, что вероятность любого процесса, к примеру тех, что представлены на рис. 1–3, зависит не только от квантово-механической вероятности перехода (мы будем называть ее элементарной вероятностью), но и от чисел заполнения вовлеченных в процесс базовых состояний. Эта зависимость оказывается весьма различной для двух типов частиц, известных в физике, – фермионов и бозонов.

Фермионы – это электроны, протоны, нейтроны, мюоны и вообще все частицы со спином 1/2 (иногда говорят, что их собственный момент количества движения равен $\hbar/2$). Они подчиняются квантовой статистике Ферми–Дирака (отсюда и название), но для нас важно другое – эти частицы подчиняются принципу Паули: в каждом квантовом состоянии может пребывать лишь одна такая частица. Именно по этой причи-

$$\begin{array}{ccc}
N_1 & & N_1 \\
N_2 & & N_2 \\
\vdots & & \vdots \\
N_k & \Rightarrow & N_k - 1 \\
\vdots & & \vdots \\
N_q & & N_q + 1 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Рис. 3

не электроны в атоме не могут все вместе находиться на нижнем уровне, но заполняют по мере увеличения атомного номера (то есть заряда ядра) один энергетический уровень за другим и, заполняя последовательно оболочку за оболочкой, придают элементам периодические свойства, отраженные в таблице Менделеева.

Бозоны – частицы, подчиняющиеся квантовой статистике Бозе–Эйнштейна, частицы с моментом импульса, кратным $\hbar$ или, что то же, целым спином (0 у π-мезона, 1 у γ-кванта и т.д.). Они свободны от принципа Паули, так что в любом квантовом состоянии может находиться любое число таких частиц. Примером может служить луч света лазера, в котором очень большое число фотонов собрано в одном состоянии. Соответственно и квазичастицы, которые мы используем для конструирования квантового представления классического волнового поля (фононы, плазмоны), должны быть бозонами, поскольку классическая волна не знает такого ограничения на амплитуду, которое следует из принципа Паули.

Важнейшим свойством как частиц, так и квазичастиц, как фермионов, так и бозонов является их неразличимость: в отличие от макроскопических тел два электрона, два протона, два фотона ничем не отличаются друг от друга, если они находятся в одном и том же состоянии.

Пусть система состояний, представленных на рис. 3, отвечает некоторым бозонам. Когда мы сокращаем одну из частиц в состоянии k, то мы при этом частиц не различаем, а следовательно, и не знаем, какую именно частицу мы сократили. Значит, мы обязаны при количественном рассмотрении просуммировать все эквивалентные каналы, то есть умножить элементарную вероятность на величину N_k. Это, впрочем, еще довольно-таки очевидная необходимость. Но теперь давайте посмотрим на конечное состояние. В нем оказалось $N_q + 1$ частиц. Какая из них новая? На этот вопрос ответить невозможно, поскольку и в этом состоянии частицы неразличимы. Отсюда вытекает, что полная вероятность должна быть пропорциональна также и $N_q + 1$. Окончательно, обозначив элементарную вероятность через $w(k, q)$ (она должна вычисляться стандартными методами квантовой механики), получим

$$W(k, q) = w(k, q) \cdot N_k \cdot (N_q + 1); \qquad (2)$$

здесь $W(k, q)$ – полная вероятность, определяющая темп перехода между состояниями.

В случае ферми-частиц (например, электронов) числа заполнения соответствующих состояний могут быть равны либо нулю, либо единице – иного принцип Паули не допускает. Значит, если начальное состояние было занято, переход $k \Rightarrow q$ может произойти, а если оно было свободно, то нет. Если конечное состояние было свободно, переход $k \Rightarrow q$ возможен, а если занято, то принцип Паули его запрещает. Все это вместе можно описать следующим образом:

$$W(k, q) = w(k, q) \cdot N_k \cdot (1 - N_q), \qquad (3)$$

где теперь N_k, N_q могут быть только 0 или 1.

КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Интересно рассмотреть, чему соответствует классический (то есть неквантовый) предел, с которым приходится иметь дело, например когда турбулентное состояние плазмы, газа или жидкости представляется в виде газа квазичастиц [4]. Волны можно рассматривать как классические, если мы можем, как и в электромагнитной волне конечной амплитуды, пренебречь тем обстоятельством, что осцилляторная динамика есть динамика совокупности отдельных квантов, а значит, при условии $N_k \gg 1$. Что же касается фермионов, они становятся классическими тогда, когда перестают "замечать" принцип Паули. Это, например, означает, что разрешенные для электронов состояния заполнены очень редко, так что любые занятые состояния $N_k = 1$ разделены многими свободными $N_i = 0$. Усредняя числа заполнения по многим соседним состояниям, мы получаем то, что в статистической физике и физической кинетике называется функцией распределения, например функцией распределения по скоростям $f(\upsilon)$. Ее и надо подставлять в усредненную вероятность вместо числа заполнения начального состояния. Что же касается незанятого конечного состояния, то оно в классическом пределе всегда найдется, поскольку законы сохранения энергии и импульса допускают возможность маневра, обусловленную соотношением неопределенностей. Итак, вместо (3) получаем примерно следующее:

$$\langle W(k, q)\rangle = \langle w(k, q)\rangle \cdot f(\upsilon). \qquad (4)$$

При всех этих упрощениях квантовые закономерности дают о себе знать и в классическом пределе. Лучше всего это видно на примере формулы (2) – зависимость темпа протекания процесса остается пропорциональной числу частиц в конечном состоянии, для чего в классической физике трудно найти объяснение.

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРАВИЛ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

Проиллюстрируем полученные правила рассмотрением процесса так называемого комбинационного рассеяния. Конкретно, рассмотрим вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна (ВРМБ). На рис. 4 представлен пример такого рода. Пусть в среде возбуждены звуковые колебания частоты Ω (на рисунках соответствующие кванты обозначены буквой S) и пусть в эту "шумящую" среду запущена электромагнитная волна

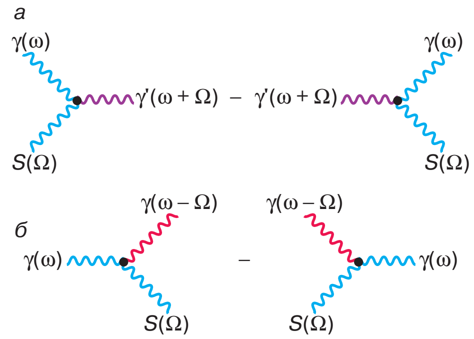

Рис. 4. Комбинационное рассеяние: *а* – генерация коротковолнового сателлита, *б* – генерация длинноволнового сателлита

(квант $\gamma(\omega)$). При слиянии электромагнитного кванта со звуковым (то есть частицы с квазичастицей) образуется волна частоты $\omega' = \omega + \Omega$, которую принято называть фиолетовым сателлитом. Такое значение частоты следует из закона сохранения энергии: $\hbar\omega' = \hbar\omega + \hbar\Omega$.

Одновременно идет и обратный процесс распада фиолетового сателлита на исходную волну и звук. Элементарная вероятность обратного процесса совпадает с таковой для прямого процесса – тем самым соблюдается один из фундаментальных законов физики и химии, принцип детального равновесия. А посему темп генерации фиолетового сателлита может быть выражен следующим образом:

$$\frac{dN^{\gamma}_{\omega+\Omega}}{dt} = w(\omega, \Omega)[(N^{\gamma}_{\omega+\Omega} + 1)N^{S}_{\Omega}N^{\gamma}_{\omega} - N^{\gamma}_{\omega+\Omega}(N^{S}_{\Omega} + 1)(N^{\gamma}_{\omega} + 1)], \qquad (5)$$

где $w(\omega, \Omega)$ – элементарная вероятность, соответствующая процессам, изображенным на рис. 4, *а*. При получении формулы (5) мы учли, что уничтожение и рождение частиц (в данном случае бозонов) в любом процессе должны быть отражены коэффициентами N и $(1 + N)$ соответственно.

Предположим, что мы рассматриваем эффект комбинационного рассеяния в классическом пределе, то есть при условии, что все числа заполнения много больше единицы. Этот случай имеет прямое отношение к лазерному термоядерному синтезу, когда свет лазера, облучающего термоядерную мишень, рассеивается на звуковых волнах в плазменной короне. Из формулы (5) нетрудно усмотреть, что мы не имеем права оставить лишь старший по степеням N член в правой части, поскольку он оказывается в точности равным нулю. Остальные же при условии $N \gg 1$ в сумме дают

$$\frac{dN^{\gamma}_{\omega+\Omega}}{dt} = w(\omega, \Omega)[N^S_{\Omega}N^{\gamma}_{\omega} - N^{\gamma}_{\omega+\Omega}N^S_{\Omega} - N^{\gamma}_{\omega+\Omega}N^{\gamma}_{\omega}]. \qquad (6)$$

Можно видеть, например, что при пренебрежимо малой плотности звуковых шумов ($N^S \ll N^{\gamma}$) существен лишь последний член в правой части (6) — это случай так называемой распадной неустойчивости. Кроме того, в оптически плотной среде возможно стационарное состояние, в котором два процесса, представленные на рис. 4, *а*, полностью друг друга компенсируют:

$$N^S_{\Omega}N^{\gamma}_{\omega} - N^{\gamma}_{\omega+\Omega}N^S_{\Omega} - N^{\gamma}_{\omega+\Omega}N^{\gamma}_{\omega} = 0. \qquad (7)$$

Аналогичный по физике процесс представлен на рис. 4, *б*. Только здесь результатом взаимодействия волн оказывается образование не фиолетового, а красного сателлита. Как правило, поскольку частота звука много меньше частоты световой волны, $\Omega \ll \omega$, ВРМБ приводит просто к уширению спектра зондирующей волны как в фиолетовую, так и в красную сторону, но иногда, при достаточно рафинированной постановке задачи, у зондирующей волны действительно появляются два ярко выраженных сателлита: длинноволновый и коротковолновый. Процесс, представленный на рис. 4, *б*, можно рассмотреть в точности так же, как это сделано выше, и получить следующий результат:

$$\frac{\partial N^{\gamma}_{\omega-\Omega}}{dt} = w(\omega-\Omega, \Omega)[N^S_{\Omega}N^{\gamma}_{\omega} + N^{\gamma}_{\omega-\Omega}N^{\gamma}_{\omega} - N^{\gamma}_{\omega-\Omega}N^S_{\Omega}]. \qquad (8)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы изложили в общих чертах идею вторичного квантования и проиллюстрировали ее элементарным примером. Не столь тривиален, зато, быть может, даже более интересен для читателя был бы другой пример — работа лазера. Из формулы (2) следует, что если частицы или квазичастицы в каком-то состоянии уже накоплены, то в силу действия фактора $1 + N_q$ процесс пойдет преимущественно в сторону приумножения чисел заполнения именно в этом состоянии. В квантовых генераторах таким накопителем является оптический резонатор, что позволяет направить энергию накачки в генерацию очень узкого по частоте и очень хорошо коллимированного в пространстве пучка световых волн.

Как мы уже отмечали, изложенная здесь схема применяется в различных, иногда очень далеких друг от друга областях физики. Это лишний раз свидетельствует, что физика едина — природа не знает, что мы разделили ее изучение по главам и параграфам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борн М.* Атомная физика. М.: Мир, 1967. 493 с.
2. *Гольдин Л.Л.*, *Новикова Г.И.* Введение в квантовую физику. М.: Наука, 1988. 327 с.
3. *Кингсеп А.С.* Плазма как объект физических исследований // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 2. С. 98–104.
4. *Кингсеп А.С.* Введение в нелинейную физику плазмы. М.: МФТИ, 1996. 208 с.

Рецензент статьи А.С. Сигов

* * *

Александр Сергеевич Кингсеп, доктор физико-математических наук, профессор Московского физико-технического института, директор отделения Российского научного центра “Курчатовский институт”, академик РАЕН. Область научных интересов – управляемый ядерный синтез и теоретическая физика плазмы. Автор 130 научных работ, монографии, учебника и пяти обзоров.