

# ***ЯДЕРНЫЕ СТЕПЕНИЯ СВОБОДЫ В АТОМНОЙ ФИЗИКЕ***

Е.В. Грызлова

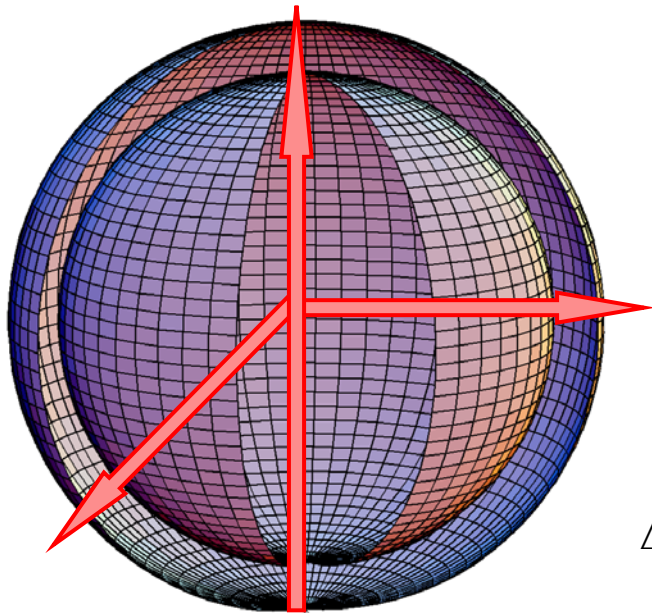
НИИЯФ МГУ  
Весенний семестр 2020 г.

- «Разминка»
- Спектры систем со сферической симметрией
- **Сжатые атомы и резонансы формы**
- **Двухуровневая система с сильно связанными состояниями**
- **Атомная спектроскопия антипротония**
- **Поляризация излучения и дихроизм**
- **Плоская волна и волновой пакет – волна вещества.**
- **Нобелевская премия по физике 2012 года.**  
**Изучение одиночной квантовой системы**
- **Ионные ловушки**
- **Когерентные и сжатые состояния волновых пакетов**
- **Начала теории рассеяния**
- **Особенности резонансного рассеяния и неэкспоненциальный распад**

## о Начала теории рассеяния

- а) сферические волны, падающие и расходящиеся.
- б) разложение сферической волны по плоским волнам.
- в) Борновское приближение.
- г) рассеяние тождественных частиц.
- д) формула Резерфорда.

# Сферически симметричная система



## Разделение переменных в системах со сферической симметрией

$$-\frac{1}{2}\Delta\varphi(\vec{r}) + V(r)\varphi(\vec{r}) = E \cdot \varphi(\vec{r})$$

Исключаем угловые переменные

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$V(r) = \begin{cases} U, & R_1 < r < R_2 \\ 0 \end{cases}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \tilde{\varphi}(r) Y_{lm}(\vec{r}/r)$$

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2 \cdot \partial}{r \cdot \partial r} \right) \tilde{\varphi}(r) + V(r) \tilde{\varphi}(r) + \frac{l(l+1)}{2 \cdot r^2} \tilde{\varphi}(r) = E \cdot \tilde{\varphi}(r)$$

$$\psi(r) = r \cdot \tilde{\varphi}(r)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r) + V(\vec{r}) \cdot \psi(r) + \frac{l(l+1)}{2 \cdot r^2} \psi(r) = E \cdot \psi(r)$$

# Сферически симметричная система

## Свойства сферических гармоник

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \tilde{\varphi}(r) Y_{lm}(\vec{r}/r)$$

Сферические функции 
$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

Оператор пространственной инверсии  $\theta \rightarrow \pi - \theta, \varphi \rightarrow \varphi + \pi$

$$\hat{P} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

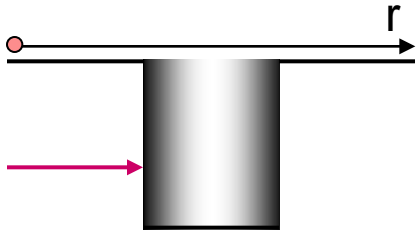
Сферические функции ортогональны и образуют полный набор

$$\int Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) * d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad \frac{2l+1}{4\pi} \int P_l(\cos \vartheta) P_{l'}(\cos \vartheta) * d\Omega = \delta_{ll'}$$

$$\sum_m Y_{lm}(\vartheta_1, \varphi_1) * Y_{lm}(\vartheta_2, \varphi_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) = \sum_{LM} C_{lm'l'm'}^{LM} Y_{LM}(\vartheta, \varphi)$$

# Сферически симметричная система



$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r) + V(\vec{r}) \cdot \psi(r) + \frac{l(l+1)}{2 \cdot r^2} \psi(r) = E \cdot \psi(r)$$

## Сферическая потенциальная яма конечной глубины

$$V(r) = \begin{cases} U, & R_1 < x < R_2 \\ 0 & \end{cases}$$

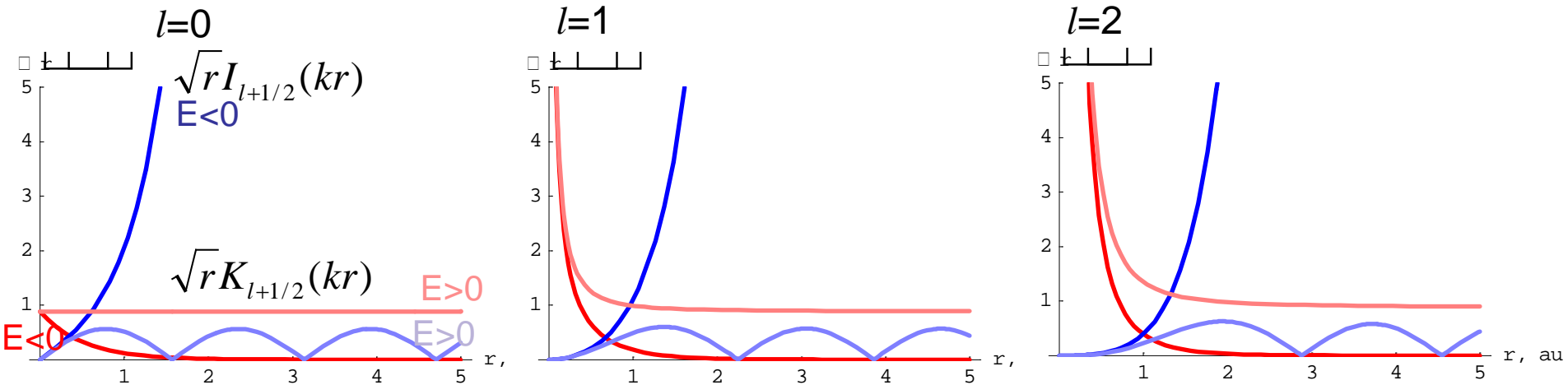
Два линейно независимых решения

$$\sqrt{r} I_{l+1/2}(kr)$$

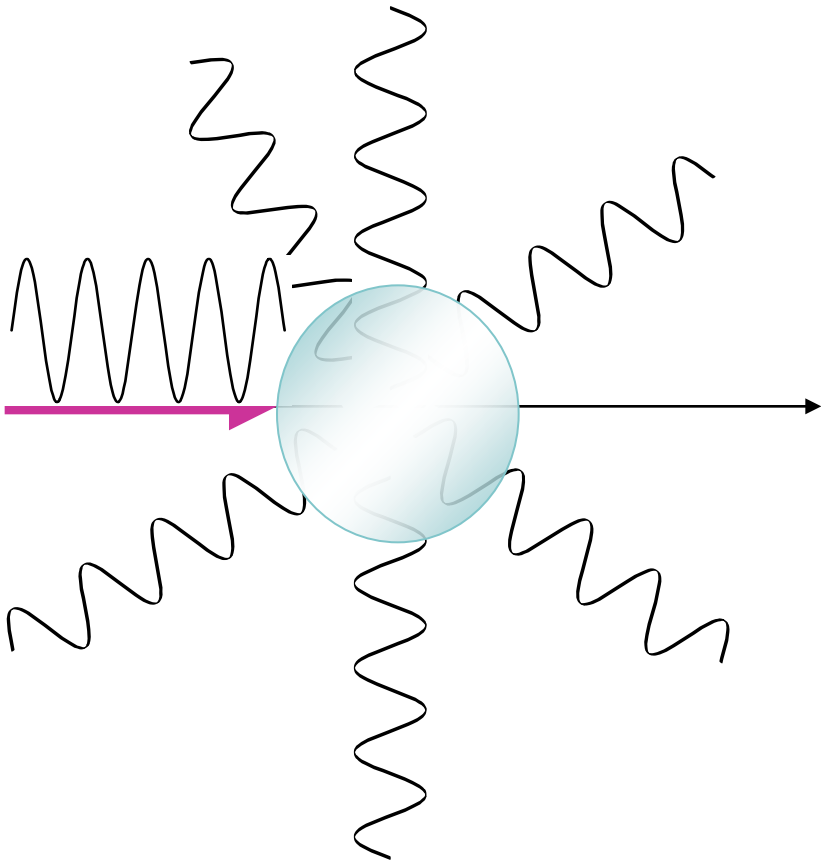
$$\sqrt{r} K_{l+1/2}(kr)$$

модифицированная функция Бесселя первого и второго рода (Инфельда и МакДональда)

Модуль волновой функции вероятности.



# Начала теории рассеяния



## Амплитуда рассеяния

Падающая волна - плоская,  
отраженные - сферические

Асимптотический вид:

$$\sim e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ik\vec{r}}$$

Плотность потока в расходящейся волне

$$j' = v \frac{1}{r^2} |f|^2 dS \rightarrow k |f|^2 d\Omega$$

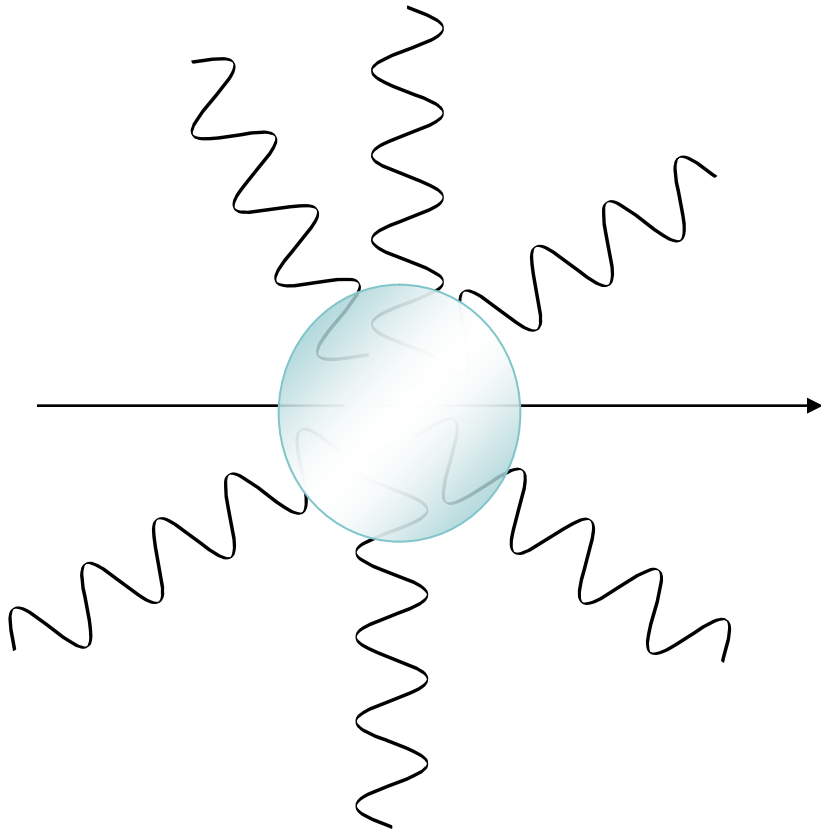
Плотность потока в падающей волне

$$j = v \rightarrow k$$

Сечение

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega$$

# Начала теории рассеяния



Радиальная функция свободной частицы в сферически симметричном потенциале

$$\psi_{kl}(r) = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} J_{l+1/2}(kr) = 2(-1)^l \frac{r^l}{k^l} \left( \frac{d}{rdr} \right)^l \frac{\sin kr}{kr}$$

Асимптотическое поведение на больших расстояниях

$$\psi_{kl}(r) \rightarrow \frac{2}{r} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)$$

Решения, обладающие определенным направлением движения, падающая и расходящаяся волны

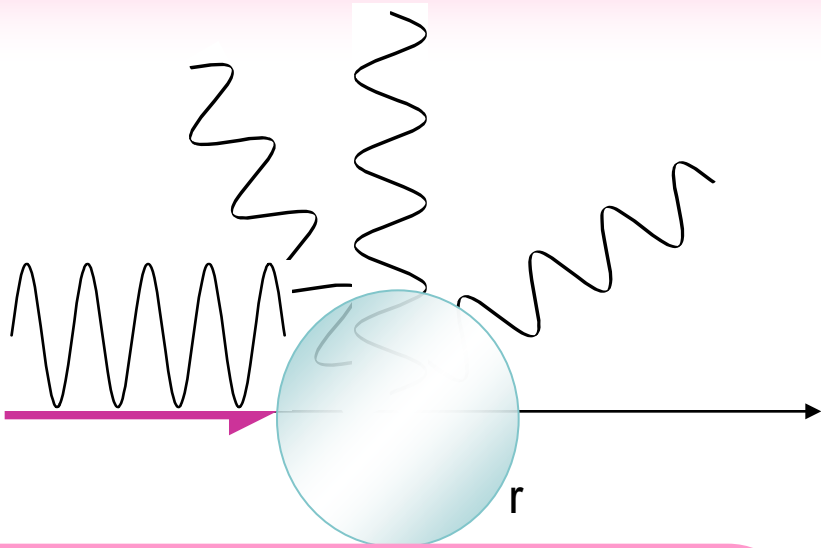
$$\psi_{kl}(r) \rightarrow \frac{2}{r} \exp\left(\pm i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)\right) \quad \leftarrow \quad \psi_{kl}^{\pm}(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} (-1)^l \frac{r^l}{k^l} \left( \frac{d}{rdr} \right)^l \frac{e^{\pm ikr}}{kr}$$

**Разложение плоской волны по сферическим**

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l J_{l+1/2}(kr) P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) P_l(\cos \theta) \left( \frac{r}{k} \right)^l \left( \frac{d}{rdr} \right)^l \frac{\sin kr}{kr}$$



# Начала теории рассеяния



## Матрица рассеяния

Ищем решение, удовлетворяющее

$$\varphi(\vec{r}) \rightarrow e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr},$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_l A_l P_l(\cos \theta) R_{kl}(r)$$

С другой стороны

$$e^{ikz} = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l J_{l+1/2}(kr) P_l(\cos \theta)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2ikr} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) (e^{ikr} + (-1)^{l+1} e^{-ikr})$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_{kl}(r)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{2r^2} \psi_{kl}(r) + U(r) \psi_{kl}(r) = E \psi_{kl}(r)$$

$$R_{kl}(r) = \frac{\psi_{kl}(r)}{r} \rightarrow \frac{2}{r} \sin(kr + \varphi_l) = \frac{2}{r} \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) =$$

$$\frac{1}{ir} ((-i)^l e^{i(kr+\delta_l)} - (i)^l e^{-i(kr+\delta_l)})$$

Что бы сократились члены, соответствующие падающей сферической волне

$$A_l = \frac{(2l+1)i^l}{2k} e^{i\delta_l}$$

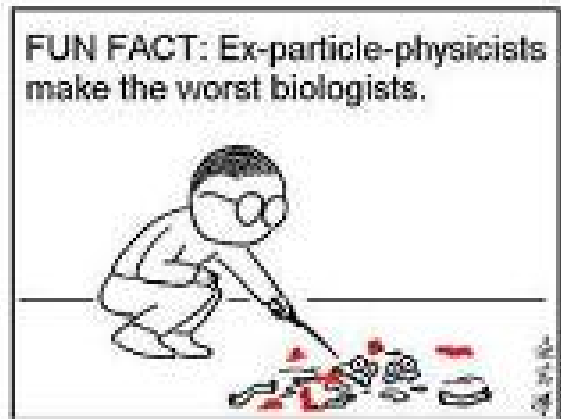
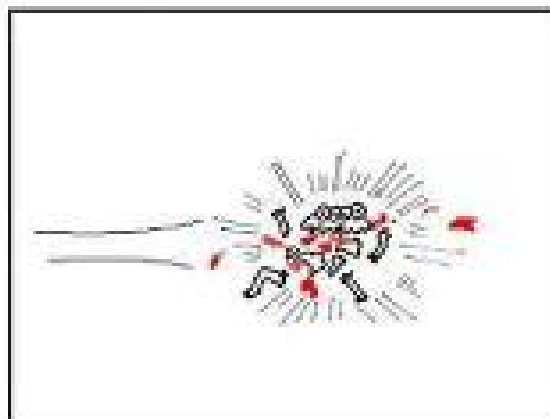
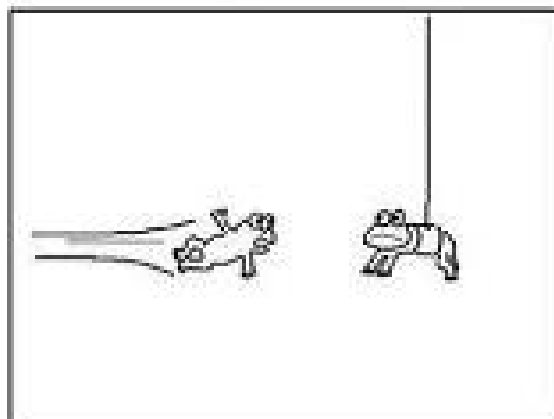
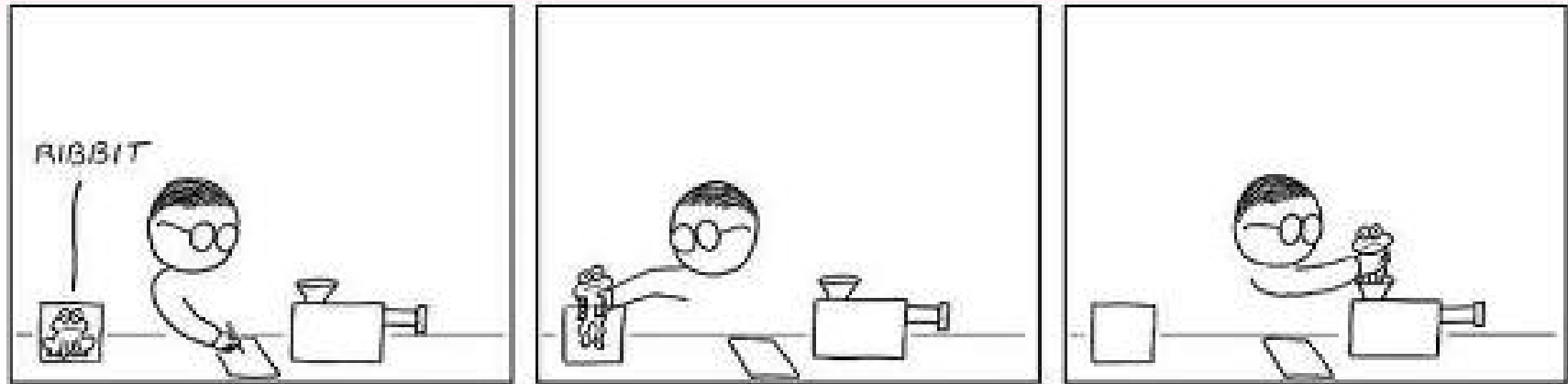
тогда

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1)(S_l - 1) P_l(\cos \theta)$$

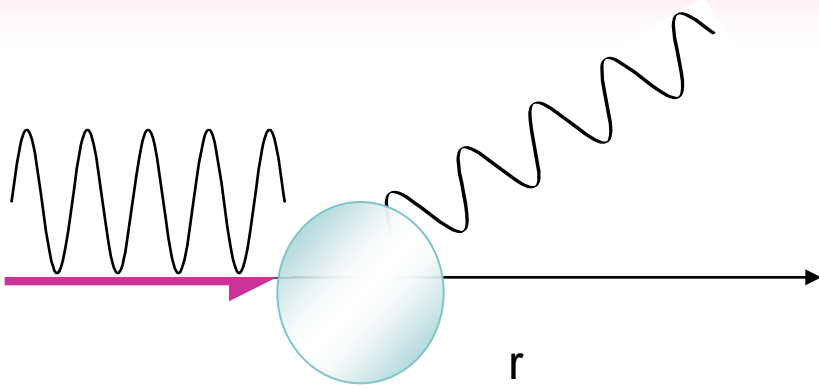
где

$$S_l = e^{2i\delta_l} \text{ - матрица рассеяния}$$

# Начала теории рассеяния



# Начала теории рассеяния



## Некоторые свойства амплитуды рассеяния

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta)$$

$S_l = e^{2i\delta_l}$  - матрица рассеяния

$$\psi(\vec{r}) \rightarrow e^{ikz} + \frac{f(n, n')}{r} e^{ikr},$$

Сечение рассеяния

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

Оптическая теорема для рассеяния

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(n, n))$$

Теорема взаимности

$$f(n, n') = f(-n', -n)$$

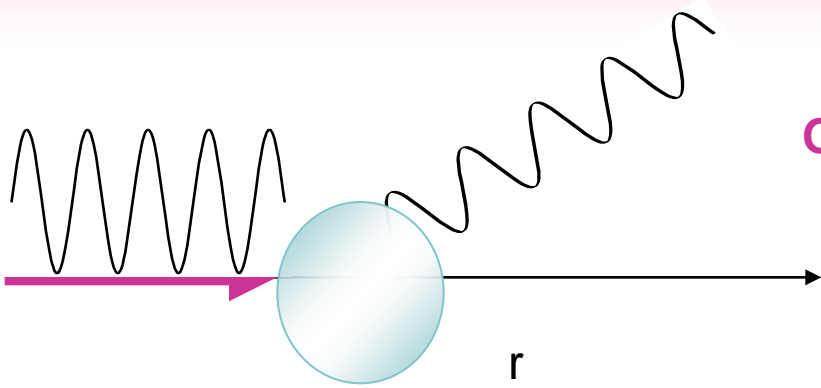
Парциальные характеристики рассеяния

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\theta)$$

$$f_l = \frac{1}{2ik} (S_l - 1) = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} = \frac{1}{k(\text{ctg}\delta_l - i)}$$

$$\sigma_l = 4\pi(2l+1) |f_l|^2$$

# Начала теории рассеяния



## Оптическая теорема для рассеяния

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta)$$

$$\psi(\vec{r}) \rightarrow e^{ikr\vec{n}\vec{n}'} + \frac{f(\vec{n}, \vec{n}')}{r} e^{ikr},$$

$$\int F(\vec{n}) \left( e^{ikr\vec{n}\vec{n}'} + \frac{f(\vec{n}, \vec{n}')}{r} e^{ikr} \right) d\Omega = F(-\vec{n}') 2\pi i \frac{e^{-ikr}}{kr} - F(\vec{n}') 2\pi i \frac{e^{ikr}}{kr} + \frac{e^{ikr}}{r} \int f(\vec{n}, \vec{n}') F(\vec{n}) d\Omega$$

$$\frac{2\pi i}{k} \left[ F(-\vec{n}') \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \hat{S} F(\vec{n}') \right]$$

Оператор (матрица) рассеяния

Сохранение потока  
требует унитарности

$$\hat{S} = 1 + 2ik\hat{f}; \quad \hat{f}F(\vec{n}') = \frac{1}{4\pi} \int f(\vec{n}, \vec{n}') F(\vec{n}) d\Omega$$

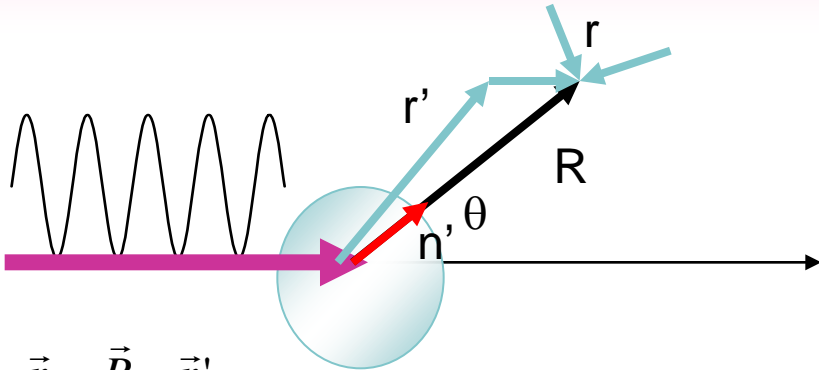
$$\hat{S}\hat{S}^+ = 1$$

$$f(\vec{n}, \vec{n}') - f^*(\vec{n}', \vec{n}) = \frac{ik}{2\pi} \int f(\vec{n}, \vec{n}'') f^*(\vec{n}', \vec{n}'') d\Omega''$$

## Оптическая теорема для рассеяния

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(n, n))$$

# Начала теории рассеяния



## Приближение Борна

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos \theta)$$

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}'$$

$$U \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} \quad \text{или} \quad U \ll \frac{\hbar v}{a} = \frac{\hbar^2}{ma^2} ka$$

$$r = |\vec{R} - \vec{r}'| \approx R - \vec{n}' r', \quad R \gg r'$$

$$\vec{k}' = \vec{n}' k$$

Ищем решение по теории возмущений

$$\psi(r) = \psi^{(0)}(r) + \psi^{(1)}(r), \quad \psi^{(0)}(r) = e^{ikr}$$

$$\Delta \psi^{(1)}(r) + k^2 \psi^{(1)}(r) = 2U(r)\psi^{(0)}(r),$$

$$\psi^{(1)}(\vec{R}) = -\frac{1}{2\pi} \int \psi^{(0)}(\vec{r}') U(\vec{r}') e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{dv'}{r},$$

$$\psi^{(1)}(\vec{R}) = -\frac{1}{2\pi} \int U(r') e^{i(kr'+kr)} \frac{dv'}{r} =$$

$$-\frac{e^{i\vec{k}\vec{R}}}{2\pi R} \int U(r') e^{i(k-k')r'} dv'$$

«Запаздывающий потенциал»

СОПОСТАВИВ С  $\psi(\vec{r}) \rightarrow e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}$

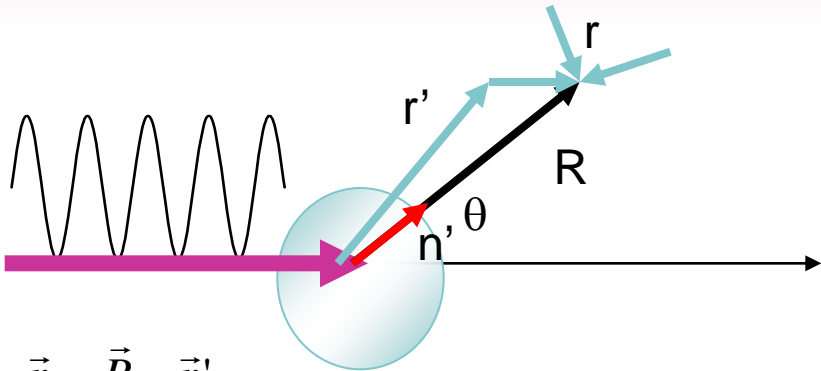
$$f = -\frac{1}{2\pi} \int U(r') e^{-i\vec{q}\vec{r}'} dv', \quad |\vec{q}| = |k - k'| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

$$f(k, k') = f^+(k', k)$$

Для сферически-симметричной системы

$$f = -2 \int U(r') \frac{\sin \vec{q}\vec{r}'}{q} r' dr'$$

# Начала теории рассеяния



## Приближение Борна

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos \theta)$$

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}'$$

$$U \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$$

или

$$U \ll \frac{\hbar v}{a} = \frac{\hbar^2}{ma^2} ka$$

$$r = |\vec{R} - \vec{r}'| = R - \vec{n}r', \quad R \gg r'$$

$$\vec{k}' = \vec{n}'k$$

$$f = -\frac{1}{2\pi} \int U(r') e^{-i\vec{q}r'} dv', \quad |\vec{q}| = |k - k'| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

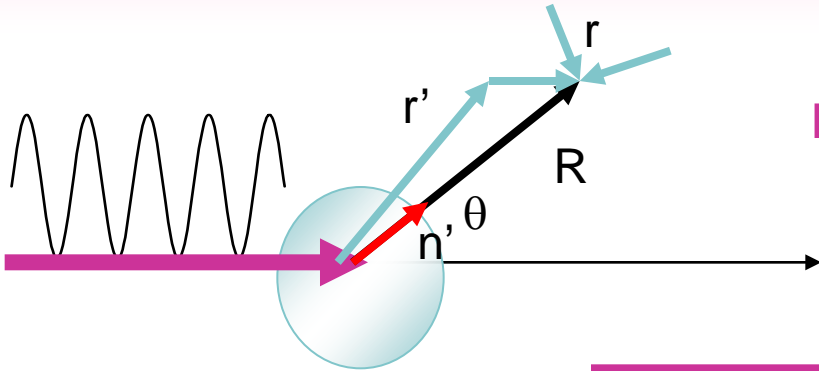
Малые скорости, рассеяние изотропно

$$f = -\frac{1}{2\pi} \int U(r') dv'$$

Большие скорости, рассеяние в угол

$$\delta\theta \sim \frac{1}{ka}$$

# Начала теории рассеяния



Приближение Борна. Рассеяние на сферическом потенциале

$$f = -2 \int U(r') \frac{\sin \vec{q} \vec{r}'}{q} r' dr'$$

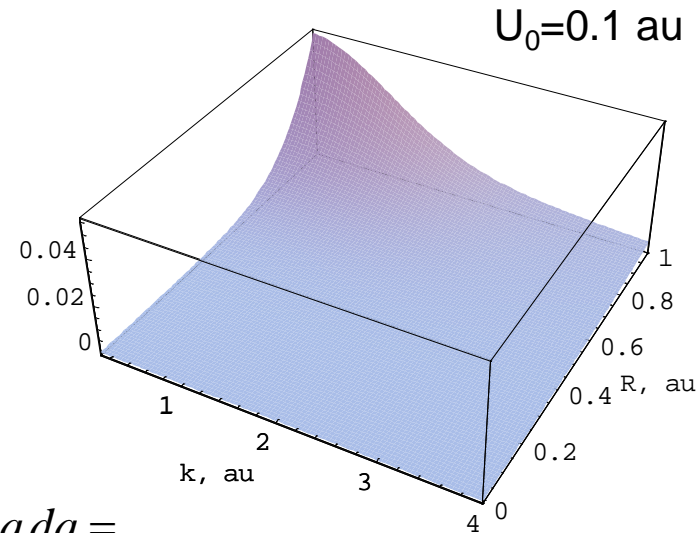
$$f(q(\theta)) = -2 \int U(r) \frac{\sin qr}{q} r dr = -2U \frac{\sin qR_0 - qR_0 \cos qR_0}{q^3}$$

Сечение рассеяния

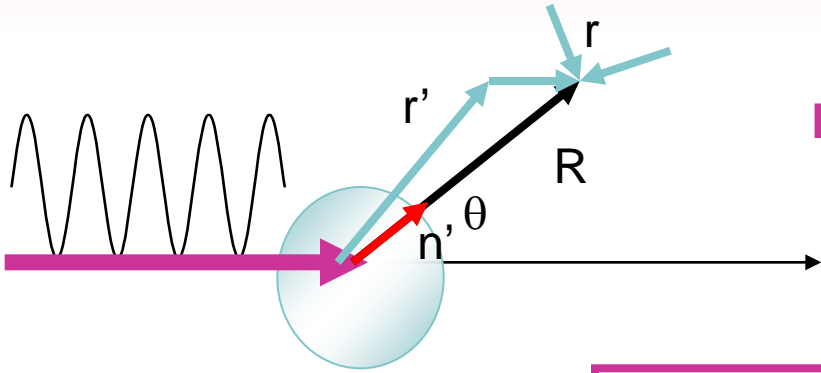
$$\sigma = \int |f(q(\theta))|^2 d\Omega = \int \left( \frac{\sin(qR_0) - qR_0 \cos(qR_0)}{q^3} \right)^2 q dq =$$

$$2\pi(2U)^2 \int \left( \frac{\sin(2kR_0 \sin \theta / 2) - (2kR_0 \sin \theta / 2) \cos(2kR_0 \sin \theta / 2)}{(2k \sin \theta / 2)^3} \right)^2 \sin \theta d\theta$$

$$= 2\pi \frac{U^2 R_0^4}{k^2} \left( 1 - \frac{1}{(2kR_0)^2} + \frac{\sin 4kR_0}{(2kR_0)^3} - \frac{\sin^2 2kR_0}{(2kR_0)^4} \right)$$



# Начала теории рассеяния



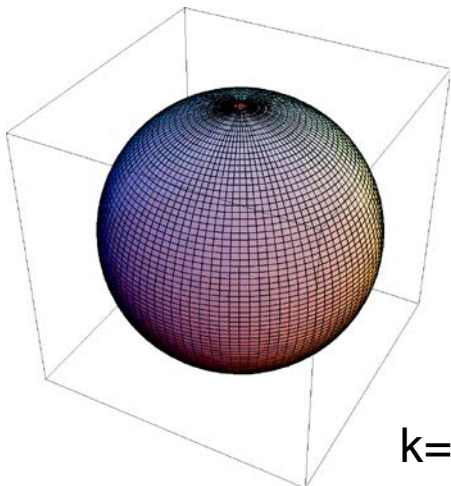
Приближение Борна. Рассеяние на сферическом потенциале

$$f = -2 \int U(r') \frac{\sin \vec{q} \vec{r}'}{q} r' dr'$$

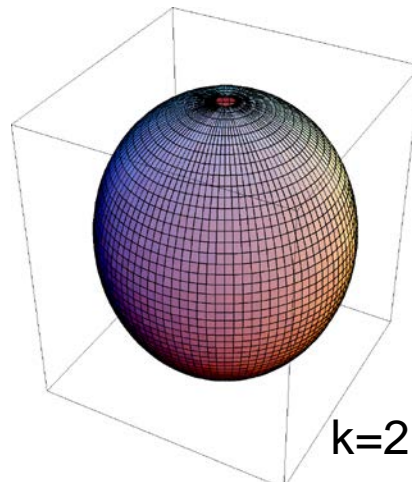
$$f(q(\theta)) = -2 \int U(r) \frac{\sin qr}{q} r dr = -2U \frac{\sin qR_0 - qR_0 \cos qR_0}{q^3}$$

Дифференциальное сечение  $|f(q(\theta))|^2$

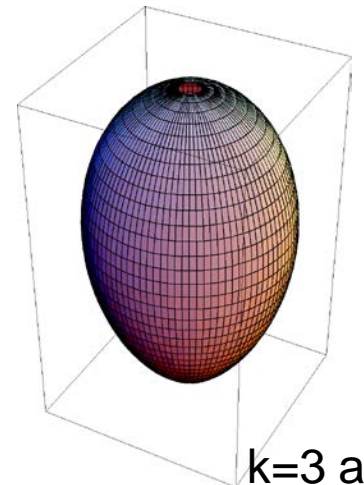
$U_0 = 0.1$  au  
 $R_0 = 1$  au



$k=1$  au



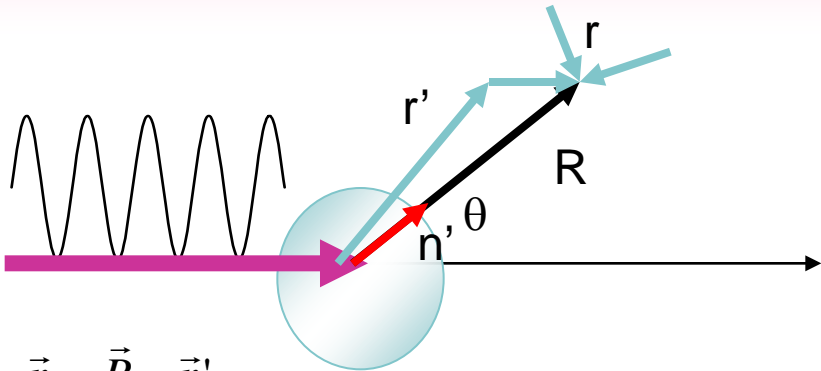
$k=2$  au



$k=3$  au



# Начала теории рассеяния



## Приближение Борна

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos \theta)$$

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}'$$

$$U \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$$

или

$$U \ll \frac{\hbar v}{a} = \frac{\hbar^2}{ma^2} ka$$

$$r = |\vec{R} - \vec{r}'| = R - \vec{n}r', \quad R \gg r'$$

$$\vec{k}' = \vec{n}'k$$

$$f = -\frac{1}{2\pi} \int U(r') e^{-i\vec{q}r'} dv', \quad |\vec{q}| = |k - k'| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

Малые скорости, рассеяние изотропно

$$f = -\frac{1}{2\pi} \int U(r') dv'$$

Большие скорости, рассеяние в угол

$$\delta\theta \sim \frac{1}{ka}$$

# Начала теории рассеяния

## Рассеяние тождественных частиц

Волновая функция системы частиц должна быть антисимметрична (симметрична).

- Для систем, в которых спиновым взаимодействием можно пренебречь координатная и спиновая функции должны быть симметричны/антисимметричны по отдельности.
- В системе центра инерции перестановка двух частиц соответствует инверсии пространства.
- Для системы двух частиц со спином  $1/2$ : симметричный спинор второго ранга соответствует спину 1, а антисимметричный – скаляру, т.е. нулевому полному спину.
- Радиальная часть волновой функции антисимметрична, если спин системы нечетный и симметрична – если четный.
- При четном (нечетном) спине система может обладать только четным (нечетным) угловым моментом.

○ Спин принимает значения от 0 до  $2s$ .

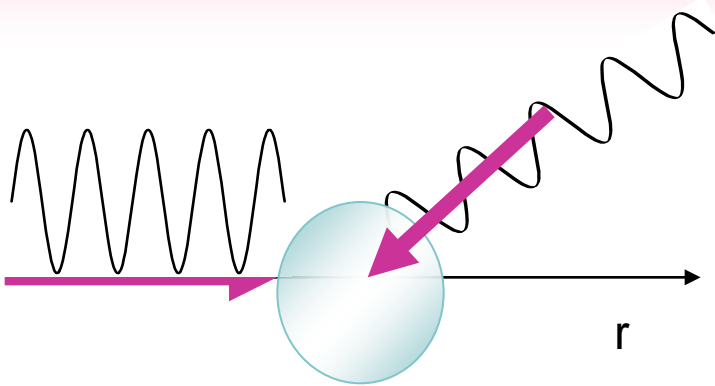
**Пусть  $s$  целое, тогда число состояний с четным  $S$ , с нечетным**

$$\sum_{0,2s} (2S + 1) = (2s + 1)(s + 1) \qquad (2s + 1)s$$

**Пусть  $s$  полуцелое, тогда число состояний с четным  $S$ , с нечетным**

$$s(2s + 1) \qquad \sum_{1,2s} 2S + 1 = (s + 1)(2s + 1)$$

# Начала теории рассеяния



## Рассеяние тождественных частиц

$$\psi(\vec{r}) \rightarrow e^{ikz} \pm e^{-ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \pm \frac{f(\pi - \theta)}{r} e^{ikr},$$

Волновая функция должна быть симметрична или антисимметрична

**Если частицы медленные, то рассеиваются только с четным суммарным спином**

$$d\sigma_e = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 d\Omega;$$

$$d\sigma_o = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 d\Omega.$$

Если бы частицы были различимы  $d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega + |f(\pi - \theta)|^2 d\Omega.$

Если спин частиц полуцелый

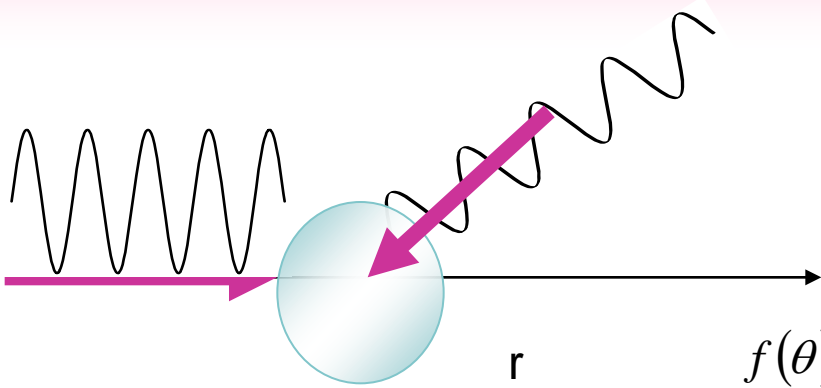
$$d\sigma = \frac{s}{2s+1} d\sigma_o + \frac{s+1}{2s+1} d\sigma_e$$

$$d\sigma = \left\{ |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 - \frac{1}{2s+1} (f(\theta))f^*(\pi - \theta) + (f^*(\theta))f(\pi - \theta) \right\} d\Omega$$

Если спин частиц целый

+

# Начала теории рассеяния



## Кулоновское рассеяние

Амплитуда Кулоновского рассеяния

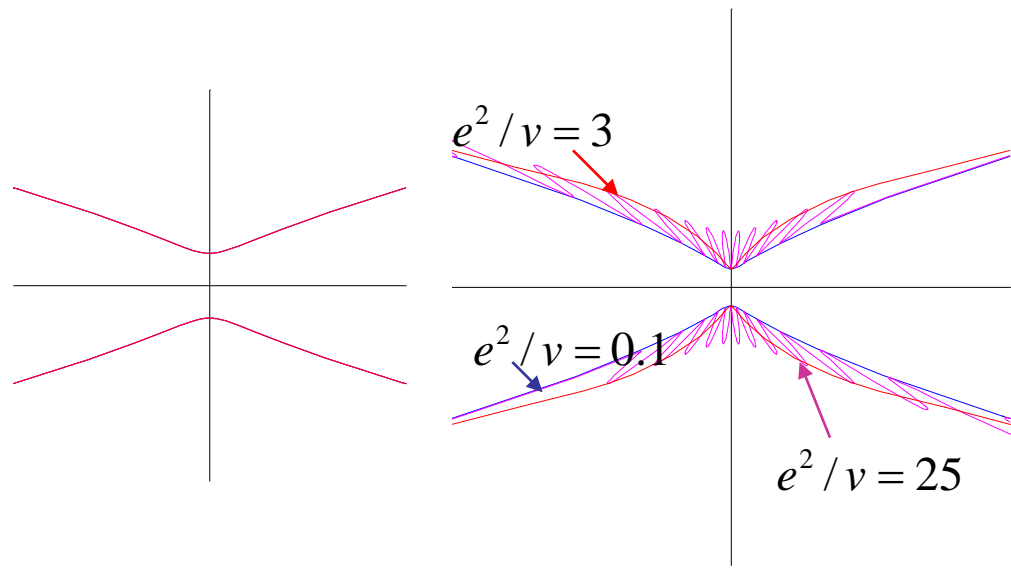
$$f(\theta) = -\frac{1}{2k^2 \sin^2 \theta/2} \frac{\Gamma(1+i/k)}{\Gamma(1-i/k)} \exp\left(-\frac{2i}{k} \ln \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

## Для рассеяния двух электронов

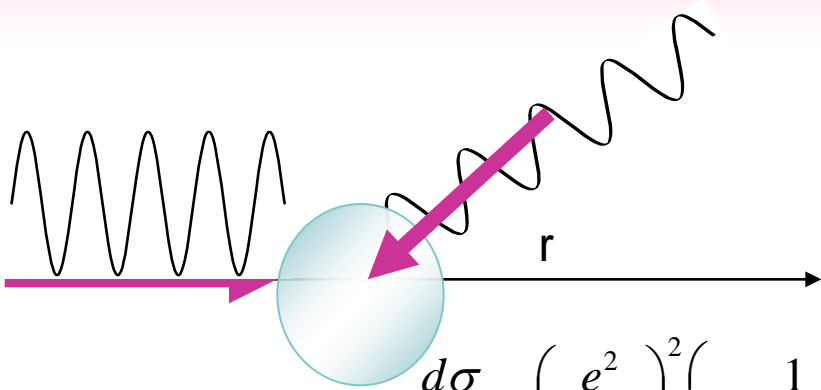
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \left( \frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} - \frac{1}{\sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2} \cos\left(\frac{e^2}{v} \ln \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right) \right)$$

При большой скорости электронов

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{4 - 3\sin^2 \theta}{\sin^4 \theta}$$



# Начала теории рассеяния



## Кулоновское рассеяние

Для рассеяния двух электронов

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \left( \frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} - \frac{1}{\sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2} \cos\left(\frac{e^2}{v} \ln \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right) \right)$$

При большой скорости электронов

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{4 - 3\sin^2 \theta}{\sin^4 \theta}$$

