ЯДЕРНЫЕ СТЕПЕНИЯ СВОБОДЫ В АТОМНОЙ ФИЗИКЕ

Е.В. Грызлова

НИИЯФ МГУ

Весенний семестр 2020 г.

- «Разминка»
- Спектры систем со сферической симметрией
- Сжатые атомы и резонансы формы
- Двухуровневая система с сильно связанными состояниями
- Атомная спектроскопия антипротония
- Поляризация излучения и дихроизм
- Плоская волна и волновой пакет – волна вещества.
- Нобелевская премия по физике 2012 года.
Изучение одиночной квантовой системы
- Когерентные и сжатые состояния волновых пакетов
- Начала теории рассеяния
- Особенности резонансного рассеяния и неэкспоненциальный распад
- Ионные ловушки

o **Когерентные и сжатые состояния волновых пакетов.**

а) фазовая и групповая скорость пакета.

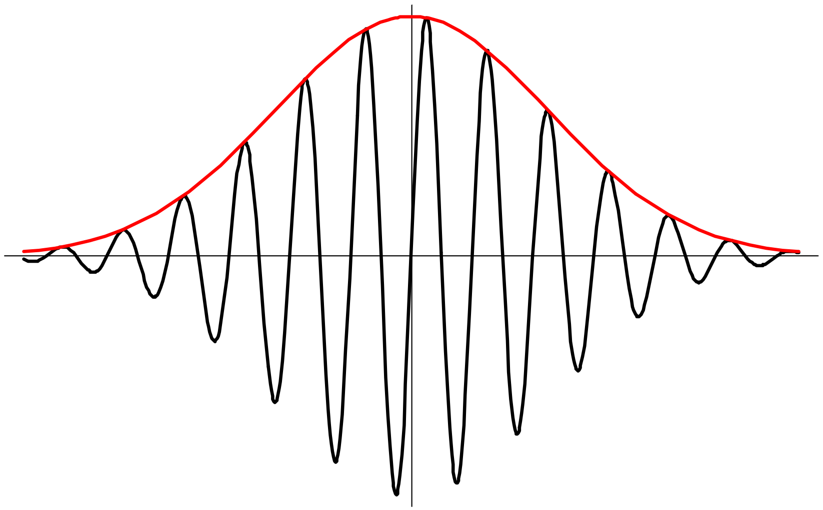
б) принцип неопределенности для волнового пакета.

в) расплывание волнового пакета.

г) гауссовский пакет, свободный и в потенциале.

д) сжатые и когерентные состояния.

Волновой пакет



Свойства волнового пакета

- ✓Фазовая и групповая скорости.
- ✓Эволюция стационарного состояния
- ✓Движение свободной частицы.
- ✓Принцип неопределенности.
- ✓Гауссовский волновой пакет.
- ✓Функция минимизирующая неопределенность.
- ✓Волновой пакет в осцилляторе.

$$E = \frac{E_0}{\delta k}\int_{k-\delta k/2}^{k+\delta k/2} \exp(-i(\omega t - kx))dk = \frac{E_0}{\delta k}\int_{k-\delta k/2}^{k+\delta k/2} \exp(-i(\omega_0 t + \frac{\partial \omega}{\partial k}(k-k_0)t - kx))dk =$$

$$E_0 \frac{\sin(\frac{\partial \omega}{\partial k}t - x)\delta k/2}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}t - x\right)\delta k/2} \exp(-i(\omega_0 t - k_0 x))$$

Движение пакета как целого, групповая скорость

Движение волны, фазовая скорость

Волновой пакет

Принцип неопределенности

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\left|x\psi(x)+\lambda\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right|^2dx=$$ величина, положительно определенная при любом λ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|x\psi(x)\right|^2dx+\lambda\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\psi^*(x)}{\partial x}x\psi(x)+x\psi^*(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right)dx+(\lambda\hbar)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right|^2dx=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\left|x\right|^2\psi(x)dx-\lambda\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx-(\lambda\hbar)^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}dx=$$

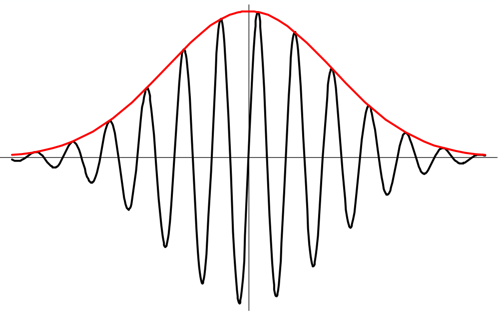
$$\left\langle x^2\right\rangle-\lambda\hbar+\lambda^2\left\langle p^2\right\rangle$$

$$\boxed{\left\langle x^2\right\rangle-\lambda\hbar+\lambda^2\left\langle p^2\right\rangle\geq0}$$

$$\hbar^2-4\left\langle x^2\right\rangle\left\langle p^2\right\rangle\leq0$$

$$\boxed{\sqrt{\left\langle x^2\right\rangle\left\langle p^2\right\rangle}\geq\frac{\hbar}{2}}$$

Волновой пакет



Свободная частица: движение как целого

$$a_0(k) = \frac{1}{2\pi}\int \psi(x,0)e^{-ikx}dx;$$

$$\psi(x,t) = \int a_0(k)e^{i\left(kx-\frac{k^2}{2}t\right)}dk. \qquad \omega(k) = \frac{k^2}{2}.$$

нормировка $\int a(k,t)^* a(k,t)dk = 1/2\pi$

$$\psi(x,t) = \int a(k,t)e^{ikx}dk, \quad a(k,t) = a_0(k)e^{-i\frac{k^2}{2}t}$$

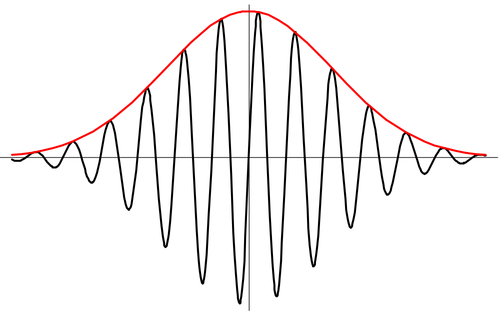
Изменение среднего положения частицы

$$\langle x\rangle_t = \int \psi^*(x,t)x\psi(x,t)dx = 2\pi i\int a_0(k)e^{i\frac{k^2}{2}t}\frac{\partial}{\partial k}\left(a_0(k)e^{-i\frac{k^2}{2}t}\right) =$$

$$2\pi i\int a_0(k)\left(-i\,k\,t\,a_0(k) + \frac{\partial a_0(k)}{\partial k}\right)dx = \langle k\rangle t + \langle x\rangle_0$$

Оператор координаты в импульсном представлении $\hat{x} = i\frac{\partial}{\partial k}$

Волновой пакет



Свободная частица: расплывание пакета

$$\psi(x,t)=\int a_0(k)e^{i(kx-\frac{k^2}{2}t)}dk$$

$$\psi(x,t)=\int a(k,t)e^{ikx}dk,\quad a(k,t)=a_0(k)e^{-i\frac{k^2}{2}t}$$

Дисперсия $\Delta x=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2},$

$\rightarrow\sqrt{\Delta x_t^2-\Delta x_0^2}\,/\,t$ Изменение дисперсии со временем характеризует «расплывание» волнового пакета

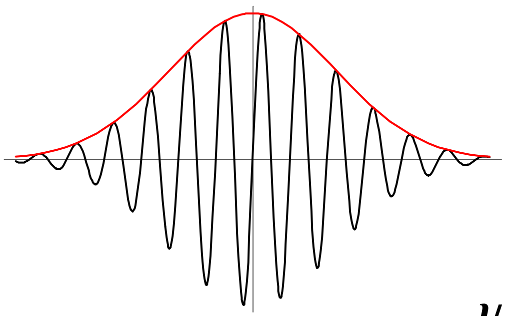
$$\langle x^2\rangle_t=2\pi\int a_0(k)e^{i\frac{k^2}{2}t}\left[-\frac{\partial^2}{\partial k^2}\left(a_0(k)e^{-i\frac{k^2}{2}t}\right)\right]=$$

$$2\pi\int a_0(k)\left(-\frac{\partial^2 a_0(k)}{\partial k^2}+k^2t^2a_0(k)-2ikta_0(k)-it\frac{\partial a_0(k)}{\partial k}\right)dk=\langle k^2\rangle t^2+\langle x^2\rangle_0$$

$$\Delta x_t^2-\Delta x_0^2=\langle x^2\rangle_t-\langle x^2\rangle_0-(\langle x\rangle_t^2-\langle x\rangle_0^2)=\langle k^2\rangle t^2-\langle k\rangle^2t^2=\Delta k^2t^2,$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{\Delta x_t^2-\Delta x_0^2}}{t}=\Delta k}$$

Волновой пакет



Гауссовский волновой пакет

Начальный момент времени

$$\psi(x,0)=\int a_0(k)e^{ikx}dk = Ne^{-\Gamma_0 x^2} \qquad a_0(k)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\Gamma_0}}Ne^{-\frac{k^2}{4\Gamma_0}}$$

Эволюция

$$\psi(x,t)=\int a_0(k)e^{i(kx-\frac{k^2}{2}t)}dk,$$

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\Gamma_0}}N\int e^{-\frac{k^2}{4\Gamma_0}+i(kx-\frac{k^2}{2}t)}dk=\frac{N}{2\sqrt{\pi\Gamma_0}}\int e^{-k^2\left(\frac{1}{4\Gamma_0}-i\frac{t}{2}\right)+ikx}dk=$$

$$\frac{N}{\sqrt{1+2i\Gamma_0 t}}e^{-\frac{x^2}{(1/\Gamma_0+2it)}}=Ne^{-\Gamma(t)x^2+i\gamma}$$

Пакет остается Гауссовским

$$\Gamma(t)=\frac{\Gamma_0}{(1+2i\Gamma_0 t)}, \qquad \gamma=\frac{i}{2}\ln\left(1+2i\Gamma_0 t\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2+ibx}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет – минимальная неопределенность

$$a(k)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\Gamma_0}}Ne^{-\frac{k^2}{4\Gamma_0}},\quad \psi(x)=Ne^{-\Gamma_0 x^2}$$

Дисперсия координаты и импульса

$$\left\langle x^2\right\rangle=N^2\int x^2e^{-2\operatorname{Re}(\Gamma)x^2}dx=\frac{1}{4\operatorname{Re}(\Gamma)},$$

$$\left\langle p^2\right\rangle=2\pi N^2\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\Gamma_0}}\right)^2\int e^{-\frac{k^2\operatorname{Re}(\Gamma)}{4|\Gamma|^2}}k^2dk=\frac{|\Gamma|^2}{\operatorname{Re}(\Gamma)}$$

$$\Gamma(t)=\frac{\Gamma_0}{(1+2i\Gamma_0 t)}$$

$$\boxed{\Delta x\Delta p=\frac{1}{2}\sqrt{1+4\Gamma_0^2t^2}}$$

Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе

$$\varphi(x,t) = Ne^{-\Gamma(x-x_0)^2+ik(x-x_0)+i\gamma}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t) + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = i\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$$

Система уравнений для параметров Гауссова импульса

$$\dot{\Gamma} = -2i\Gamma^2 + \frac{i}{2}\omega^2;$$

$$\dot{x}_0 = k;$$

$$\dot{k} = -\omega^2 x_0;$$

$$\dot{\gamma} = \frac{k^2}{2} - \Gamma - \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2$$

Решение

$$x_0 = x_0^{(t=0)}\cos\omega t + \frac{k^{(t=0)}}{\omega}\sin\omega t;$$

$$k = k^{(t=0)}\cos\omega t - \omega x_0^{(t=0)}\sin\omega t;$$

Среднее положение и импульс изменяются по гармоническому закону

Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: когерентное и сжатое состояние

$$\psi(x) = Ne^{-\Gamma(x-x_0)^2 + ik(x-x_0)+i\gamma} \qquad -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t) + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = i\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$$

$$x_0 = x_0^{(t=0)}\cos\omega t + \frac{k^{(t=0)}}{\omega}\sin\omega t;$$

$$k = k^{(t=0)}\cos\omega t - \omega x_0^{(t=0)}\sin\omega t;$$

$$\Gamma = (\omega/2)\frac{\Gamma_0\cos\omega t + i(\omega/2)\sin\omega t}{(\omega/2)\cos\omega t + i\Gamma_0\sin\omega t} =$$

$$(\omega/2)\frac{2\Gamma_0(\omega/2) + i((\omega/2)^2 - \Gamma_0^2)\sin 2\omega t}{((\omega/2)^2 + \Gamma_0^2) + \cos 2\omega t(a^2 - \Gamma_0^2)}$$

$$\Gamma_0 = \frac{\omega}{2}, \rightarrow \Gamma = \Gamma_0$$

Когерентное состояние

$$\Gamma_0 \neq \frac{\omega}{2}$$

Сжатое состояние

Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: когерентное и сжатое состояние

$$\psi(x) = Ne^{-\Gamma(x-x_0)^2+ik(x-x_0)+i\gamma}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)+\frac{1}{2}\omega^2x^2=i\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$$

$$x_0 = x_0^{(t=0)}\cos\omega t+\frac{k^{(t=0)}}{\omega}\sin\omega t;$$

$$k = k^{(t=0)}\cos\omega t-\omega x_0^{(t=0)}\sin\omega t;$$

$$\Gamma=(\omega/2)\frac{2\Gamma_0(\omega/2)+i((\omega/2)^2-\Gamma_0^2)\sin 2\omega t}{((\omega/2)^2+\Gamma_0^2)+\cos 2\omega t((\omega/2)^2-\Gamma_0^2)}$$

$$\gamma=\frac{x_0k-x_0^{(t=0)}k^{(t=0)}}{2}+\frac{i}{2}\ln\left(\frac{i\Gamma_0\sin\omega t+a\cos\omega t}{a}\right)$$

$$\gamma=\frac{x_0k-x_0^{(t=0)}k^{(t=0)}}{2}-\frac{\omega t}{2}$$

$$\Gamma_0\neq\omega/2$$

Сжатое состояние

$$\Gamma_0=\omega/2,\to\Gamma=\Gamma_0$$

Когерентное состояние

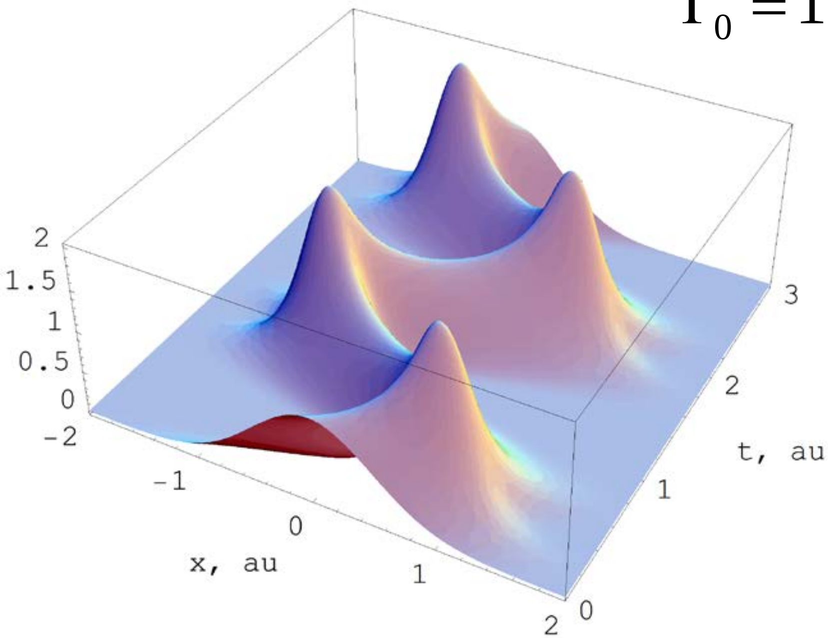
Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: сжатое состояние

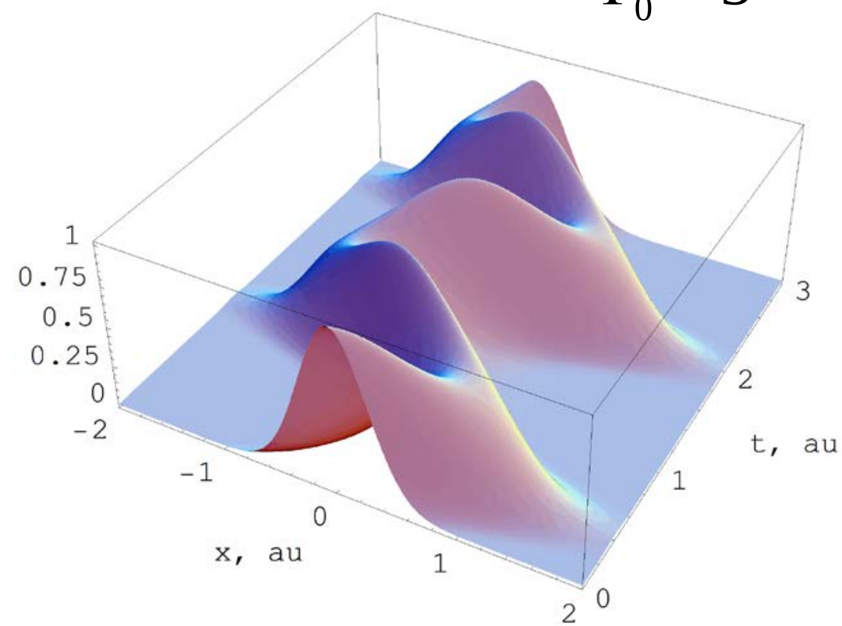
$$x_0^{(t=0)} = 0,\, k^{(t=0)} = 3,\;\; \omega = 4$$

$$\left|\psi(x,t)\right|^2$$

$$\Gamma_0 = 1$$



$$\Gamma_0 = 3$$



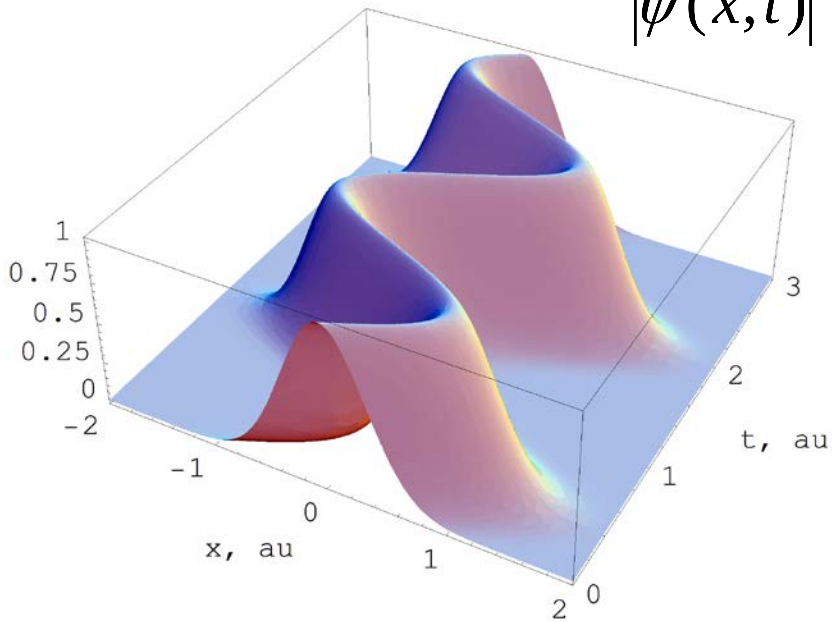
Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: когерентное состояние

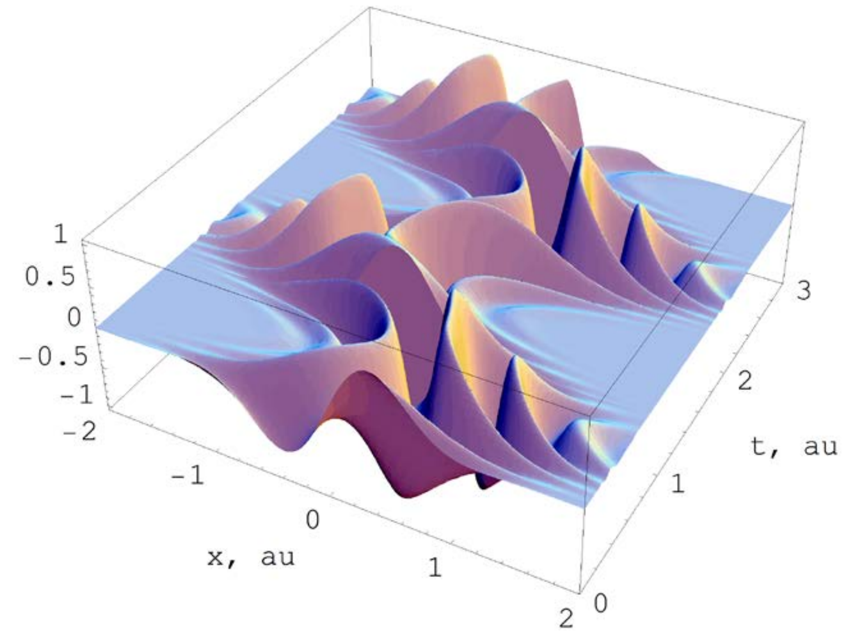
$$x_0^{(t=0)} = 0, k^{(t=0)} = 3, \ \omega = 4$$

$$\Gamma_0 = 2$$

$$|\psi(x,t)|^2$$



$$\mathrm{Im}(\psi(x,t))$$

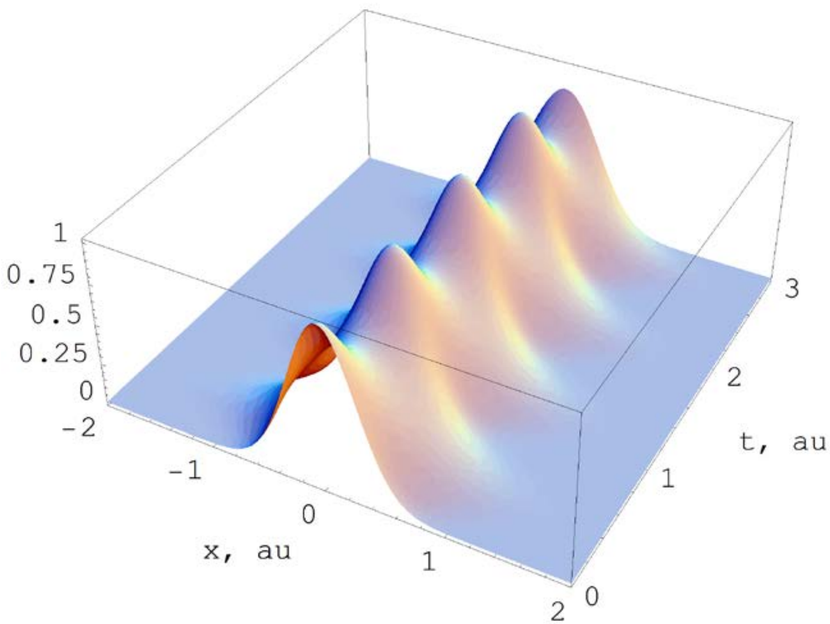


Волновой пакет

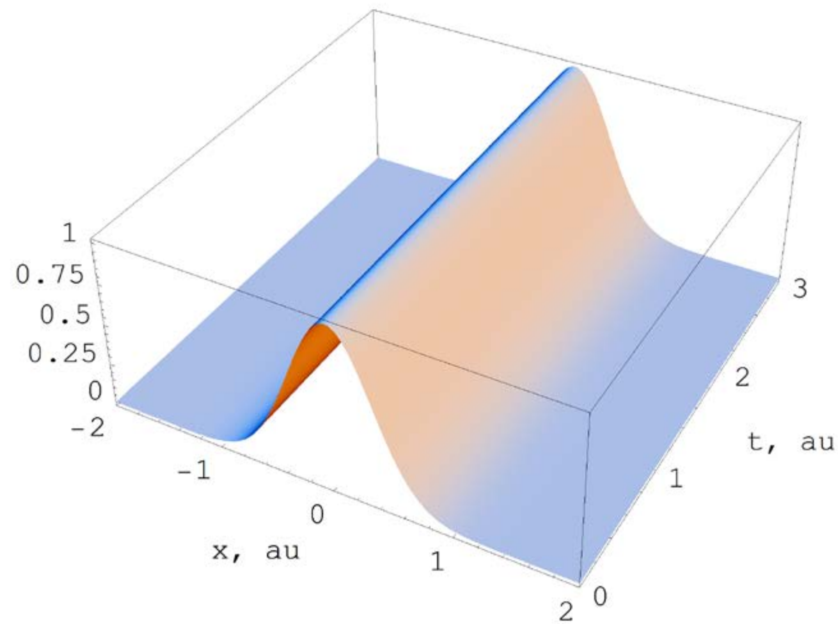
«Покоящийся» Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: когерентное состояние-стационарное состояние

$$x_0^{(t=0)} = 0,\ k^{(t=0)} = 0,\ \ \omega = 4$$

$\Gamma_0 = 3$ $\qquad |\psi(x,t)|^2$

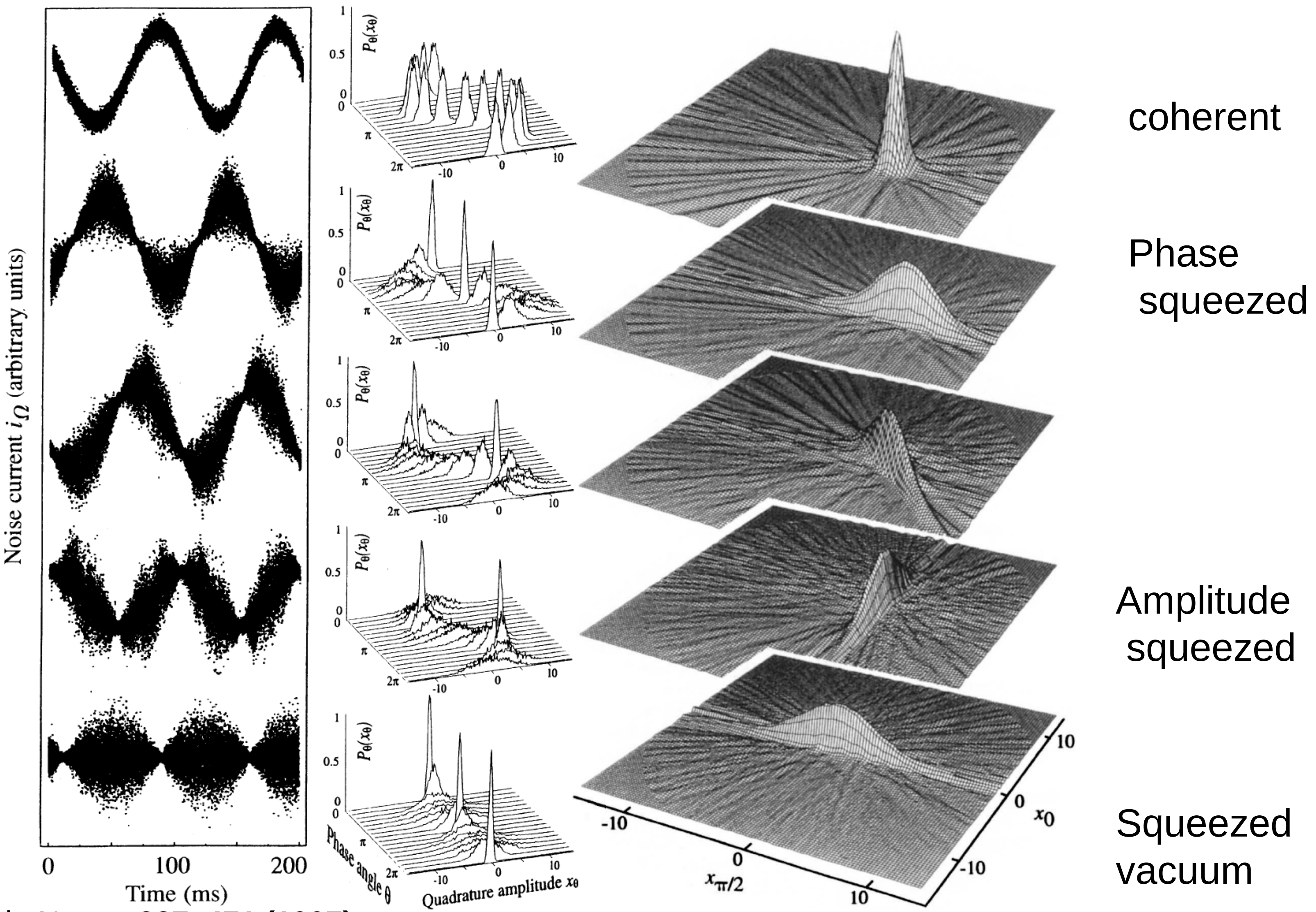


$|\psi(x,t)|^2 \qquad \Gamma_0 = 2$



Волновой пакет

Реализация когерентного и сжатого состояния



Breitenbach et al., Nature **387, 471 (1997)**

Волновой пакет

Реализация когерентного и сжатого состояния

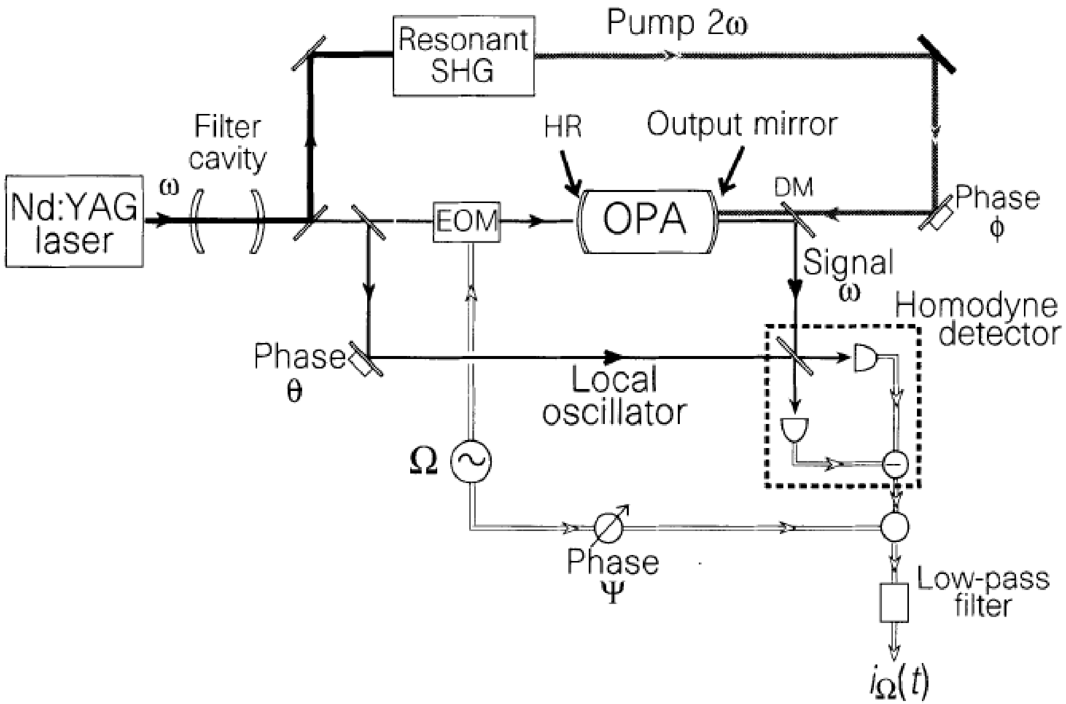


Figure 1 Experimental scheme for generating bright squeezed light and squeezed vacuum with an optical parametric oscillator (OPA). The electric field quadratures are measured in the homodyne detector while scanning the phase θ. A computer performs the statistical analysis of the photocurrent i_Ω and reconstructs the quantum states. EOM, electro-optic modulator; DM, dichroic mirror; SHG, second harmonic generator; HR, high reflector.

Breitenbach et al., Nature **387, 471 (1997)**