# О невозможности квантового сверхсветового телеграфа



## Н. В. Никитин

**Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова**

**Кафедра физики атомного ядра и квантовой теории столкновений**


**Научный семинар по ядерной физике НИИЯФ МГУ**

**12 марта 2019 г.**

# Постановка вопроса

**Пусть наблюдатели и измерительные приборы "живут" в макромире, который подчиняется законам релятивистской физики (законам СТО), а изучаемые ими объекты микромира подчиняется законам нерелятивистской квантовой механики (НКМ). Возникает вопрос: можно ли в таком комбинированном мире при помощи квантовых объектов передать информацию быстрее скорости света от одного макроскопического наблюдателя другому?**

**На первый взгляд кажется, что ничего этому не препятствует, ведь в нерелятивистском микромире по определению $c \to +\infty$. Поэтому, например, при измерении положения квантовой частицы редукция ее волновой функции происходит мгновенно во всей Вселенной. Тоже с корреляциями между двумя микрочастицами. Такие корреляции реализуются мгновенно. Естественно возникает предположение, что свойствами НКМ можно воспользоваться для сверхсветовой передачи сигналов от одного макроскопического наблюдателя к другому.**

**На самом деле такую передачу осуществить невозможно, и НКМ НЕ противоречит релятивистскому макроскопическому миру! Иллюстрации этого неочевидного факта будет посвящен настоящий семинар.**

# Базовая структура квантовой механики

**Квантовая механика строится на основе постулатов. Справедливость того или иного набора постулатов может быть проверена только путем сравнения предсказаний теории с результатами экспериментов. Для дальнейшего изложения нам понадобятся два постулата: принцип суперпозиции и проекционный постулат М. Борна.**

**Предположим, что ДО измерения микросистема находилась в чистом состоянии $|\,\psi\,\rangle \in \mathcal{H}$. Измеряется значение наблюдаемой $A$ этой микросистемы. Пусть (для простоты) наблюдаемая $A$ обладает дискретным невырожденным спектром $\{a_i\}$. В квантовой механике наблюдаемой $A$ ставится в соответствие эрмитов оператор $\hat{A}$, собственные значения которого совпадают со спектром наблюдаемой $A$, а собственные векторы $\{|\,a_i\,\rangle\}$ образуют базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.**

**Принцип суперпозиции. Если в результате измерения наблюдаемой $A$ микросистема из состояния $|\,\psi\,\rangle$ переходит в одно из возможных конечных состояний $|\,a_i\,\rangle$, то вектор состояния $|\,\psi\,\rangle$ можно записать в виде линейной комбинации (суперпозиции) по набору состояний $\{|\,a_i\,\rangle\}$:**

$$|\,\psi\,\rangle = \sum_i c_i\,|\,a_i\,\rangle,$$

**где $c_i$ – набор комплексных чисел (и/или функций).**

В силу ортогональности базисных векторов $|\,a_i\,\rangle$, коэффициенты $c_i$ определяются при помощи скалярных произведений

$$c_i = \langle\, a_i \,|\, \psi \,\rangle.$$

Выбор конкретного конечного состояния микросистемы после измерения из набора возможных конечных состояний $\{|\,a_i\,\rangle\}$ абсолютно случаен.

Опр.: проектором (проекционным оператором) на произвольное чистое состояние $|\,\varphi\,\rangle$ называется оператор вида $\hat{P}_\varphi = |\,\varphi\,\rangle\langle\,\varphi\,|$.

Проекторы $\hat{P}_{a_i}$ на чистые базисные состояния $|\,a_i\,\rangle$ реализуют ортогональное разложение единицы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ размерности $d = \dim(\mathcal{H})$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{d} \hat{P}_{a_i} = \sum_{i=1}^{d} |\,a_i\,\rangle\langle\,a_i\,| = \hat{1}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \hat{1}\,|\,\psi\,\rangle &= |\,\psi\,\rangle = \sum_i c_i\,|\,a_i\,\rangle = \sum_i \langle\,a_i\,|\,\psi\,\rangle\,|\,a_i\,\rangle = \\ &= \sum_i |\,a_i\,\rangle\langle\,a_i\,|\,\psi\,\rangle = \left(\sum_i |\,a_i\,\rangle\langle\,a_i\,|\right)|\,\psi\,\rangle = \left(\sum_i \hat{P}_{a_i}\right)|\,\psi\,\rangle. \end{aligned}$$

Важную роль в построении дальнейшего формализма будет играть понятие следа оператора $\hat{A}$.

Рассмотрим (для простоты) конечномерное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ размерности $d$. Выберем в этом пространстве некоторый ортонормированный базис $|\, n_i \rangle$, где $i = \{1, \ldots, d\}$. Любой оператор в этом базисе можно записать в виде матрицы $d \times d$:

$$\hat{A} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & \ldots & \ldots & A_{dd} \end{pmatrix},$$

где $A_{i'i''} = \left\langle n_{i'} \middle| \hat{A} \middle| n_{i''} \right\rangle$. Тогда след оператора $\mathbf{Tr}\,\hat{A}$ можно определить как след соответствующей матрицы, то есть

$$\mathbf{Tr}\,\hat{A} = \sum_{i=1}^{d} A_{ii}.$$

Легко показать, что значение следа оператора не зависит от выбора конкретного базиса.

В определении следа содержится свойство линейности

$$\mathbf{Tr}\left(\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}\right) = \lambda\,\mathbf{Tr}\hat{A} + \mu\,\mathbf{Tr}\hat{B},$$

где $\lambda$ и $\mu$ – произвольные комплексные числа.

**Пример:** вычислим $\mathbf{Tr}\hat{P}_\varphi$. По определению

$$\mathbf{Tr}\hat{P}_\varphi = \sum_{i=1}^{d} \left\langle n_i \middle| \hat{P}_\varphi \middle| n_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle n_i | \varphi \rangle \langle \varphi | n_i \rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle \varphi | n_i \rangle \langle n_i | \varphi \rangle =$$

$$= \left\langle \varphi \middle| \left( \sum_{i=1}^{d} | n_i \rangle \langle n_i | \right) \middle| \varphi \right\rangle = \langle \varphi | \hat{1} | \varphi \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle = 1.$$

В конечномерных пространствах для двух операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ всегда выполняется **свойство перестановочности** под знаком следа

$$\mathbf{Tr}\left(\hat{A}\,\hat{B}\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{B}\,\hat{A}\right).$$

Докажем это свойство:

$$\mathbf{Tr}\left(\hat{A}\,\hat{B}\right) = \sum_{i=1}^{d} \left( \sum_{k=1}^{d} A_{ik}\, B_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} A_{ik}\, B_{ki} =$$

$$= \sum_{k=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} B_{ki}\, A_{ik} = \sum_{k=1}^{d} \left( \sum_{i=1}^{d} B_{ki}\, A_{ik} \right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{B}\,\hat{A}\right).$$

В бесконечномерных пространствах свойство перестановочности выполняется только для ограниченных операторов.

**Проекционный постулат Макса Борна.** Если до измерения квантовая система находилась в состоянии $|\,\psi\,\rangle$, то вероятность того, что измерение наблюдаемой $A$ дало значение $a_i$ (или, что тоже самое, в результате измерения квантовая система перешла из состояния $|\,\psi\,\rangle$ в состояние $|\,a_i\,\rangle$) задается формулой

$$w_i \equiv w\left(a_i|\psi\right) = \left|c_i\right|^2 = \langle\,\psi\,|\,\,a_i\,\rangle\,\langle\,a_i\,|\,\,\psi\,\rangle \equiv \left\langle\,\psi\,\middle|\,\hat{P}_{a_i}\,\middle|\,\psi\,\right\rangle = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_\psi\hat{P}_{a_i}\right).$$

**Проекционный постулат** предлагает **алгоритм сравнения** предсказаний квантовой теории с экспериментом, то есть открывает **возможность количественной проверки** квантовой механики.

Докажем следовую формулу для вероятности. Доказательство лучше всего вести справа налево.

$$\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_\psi\hat{P}_{a_i}\right) = \sum_{j=1}^{d}\langle\,n_j\,|\,\,\psi\,\rangle\left\langle\,\psi\,\middle|\,\hat{P}_{a_i}\,\middle|\,n_j\,\right\rangle = \sum_{j=1}^{d}\left\langle\,\psi\,\middle|\,\hat{P}_{a_i}\,\middle|\,n_j\,\right\rangle\langle\,n_j\,|\,\,\psi\,\rangle =$$

$$= \left\langle\,\psi\,\middle|\,\hat{P}_{a_i}\left(\sum_{j=1}^{d}|\,n_j\,\rangle\,\langle\,n_j\,|\right)\middle|\,\psi\,\right\rangle = \left\langle\,\psi\,\middle|\,\hat{P}_{a_i}\,\hat{1}\,\middle|\,\psi\,\right\rangle = \left\langle\,\psi\,\middle|\,\hat{P}_{a_i}\,\middle|\,\psi\,\right\rangle.$$

Следовая формула для вероятностей более общая. Она может применяться не только для чистых, но и для смешанных состояний.

# Появление POVM–элементов

Рассмотрим описание измерений при помощи положительно определенных операторов (англ. POVMs — Positive Operator–Valued Measures). POVM–элементы $\hat{E}_\alpha$ (англ. “POVM elements”) используются тогда, когда необходимо знать только вероятности измерения, но НЕ состояние микросистемы после измерения.

С физической точки зрения измерение, связанное с POVM–элементом $\hat{E}_\alpha$, можно интерпретировать как измерение состояния вспомогательной системы (по английски ”ancilla”), которая ранее взаимодействовала с интересующей нас квантовой системой ”$S$”. Обозначим вектор состояния квантовой системы через $|\,\psi_S\,\rangle$, а вспомогательной системы – через $|\,\psi_A\,\rangle$. Тогда состоянию ”$S$ + ancilla” отвечает вектор $|\,\Psi\,\rangle = |\,\psi_S\,\rangle \otimes |\,\psi_A\,\rangle$. Проектор $\hat{P}_\Psi = |\,\Psi\,\rangle\langle\,\Psi\,|$ подчиняется унитарной эволюции

$$\hat{P}'_\Psi = \hat{U}\,\hat{P}_\Psi\,\hat{U}^\dagger,$$

поскольку ”$S$ + ancilla” является замкнутой системой.

В пространстве квантовой системы ”$S$” введем базис $\left\{\left|\,f_i^{(S)}\right\rangle\right\}$, а в пространстве вспомогательной системы определим базис $\{|\,a_\alpha\,\rangle\}$, который связан с измеримыми характеристиками ancilla.

Измерение состояния вспомогательной системы задается при помощи проекционного оператора вида

$$\hat{\mathcal{P}}_{\alpha'} = \hat{1}_S \otimes \hat{P}_{\alpha'},$$

где $\hat{P}_{\alpha'} = |\, a_{\alpha'} \,\rangle \langle\, a_{\alpha'} \,|$ – проектор на чистое состояние $|\, a_{\alpha'} \,\rangle$ вспомогательной системы. Пусть $\hat{P}_S = |\, \psi_S \,\rangle \langle\, \psi_S \,|$ и $\hat{P}_A = |\, \psi_A \,\rangle \langle\, \psi_A \,|$. Тогда $\hat{P}_\Psi = \hat{P}_S \otimes \hat{P}_A$. Тогда вероятность измерения, отвечающая проектору $\hat{\mathcal{P}}_{\alpha'}$, будет

$$\begin{aligned}
w_{\alpha'} &= \mathbf{Tr}\left(\hat{P}'_\Psi \hat{\mathcal{P}}_{\alpha'}\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{U}\left(\hat{P}_S \otimes \hat{P}_A\right)\hat{U}^\dagger \left(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_{\alpha'}\right)\right) = \\
&= \mathbf{Tr}\left(\left(\hat{P}_S \otimes \hat{P}_A\right)\hat{U}^\dagger \left(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_{\alpha'}\right) \hat{U}\right) = \\
&= \sum_{i,\,\alpha} \left\langle f_i^{(S)} \middle| \langle\, a_\alpha \,| \left(\hat{P}_S \otimes \hat{P}_A\right)\hat{U}^\dagger \left(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_{\alpha'}\right) \hat{U} \,|\, a_\alpha \,\rangle \middle| f_i^{(S)} \right\rangle = \\
&= \sum_i \left\langle f_i^{(S)} \middle| \hat{P}_S \left(\sum_\alpha \left\langle a_\alpha \middle| \left(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_A\right)\hat{U}^\dagger \left(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_{\alpha'}\right) \hat{U} \middle| a_\alpha \right\rangle\right) \middle| f_i^{(S)} \right\rangle = \\
&= \sum_i \left\langle f_i^{(S)} \middle| \hat{P}_S \hat{E}_{\alpha'} \middle| f_i^{(S)} \right\rangle = \mathbf{Tr}_S \left(\hat{P}_S \hat{E}_{\alpha'}\right),
\end{aligned}$$

где POVM–элемент

$$\hat{E}_{\alpha'} = \sum_\alpha \left\langle a_\alpha \middle| \left(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_A\right)\hat{U}^\dagger \left(\hat{1}_S \otimes \hat{P}_{\alpha'}\right) \hat{U} \middle| a_\alpha \right\rangle.$$

# Свойства POVM–элементов

POVM–элементы содержат в себе все характеристики измерительного прибора.

Для POVM–элементов проекционный постулат М. Борна формулируется только в следовом варианте

$$w_\alpha = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_\psi \hat{E}_\alpha\right)$$

без всякой связи с принципом суперпозиции и с понятием состояния, в которое квантовая система переходит после измерения.

Отсюда следует, что POVM–элементы эрмитовы, т.е. $\hat{E}_\alpha = \hat{E}_\alpha^\dagger$ и удовлетворяют условию положительной определенности

$$\left\langle \psi \middle| \hat{E}_\alpha \middle| \psi \right\rangle \geq 0.$$

POVM–элементы $\hat{E}_\alpha$ образуют неортогональное разложение единицы

$$\sum_\alpha \hat{E}_\alpha = \hat{1}.$$

Действительно:

$$\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_\psi\,\hat{1}\right) = \mathbf{Tr}\,\hat{P}_\psi = 1 = \sum_\alpha w_\alpha = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_\psi\left(\sum_\alpha \hat{E}_\alpha\right)\right).$$

# Пионерские работы по теории POVM–элементов

**Впервые POVM–элементы были введены в книге**

**1) A. Peres, "Quantum Theory: Concepts and Methods", "Kluwer", 1993.**

**Они оказались крайне полезными в квантовой теории информации. Кроме того, при помощи POVM–элементов можно сформулировать альтернативную (менее наглядную, но более общую!) систему аксиом квантовой механики:**

**2) C. M. Caves and C. A. Fuchs, "Quantum Information: How Much Information in a State Vector?", in "The Dilemma of Einstein, Podolsky and Rosen – 60 Years Later", edited by A. Mann and M. Revzen, Ann. Israel Phys. Soc.12, pp.226–257 (1996);**

**3) C. A. Fuchs, "Quantum Foundations in the Light of Quantum Information", in "Decoherence and its Implications in Quantum Computation and Information Transfer", Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop, Mykonos Greece, June 25–30, 2000, edited by A. Gonis and P. E. A. Turchi (IOS Press, Amsterdam, 2001), pp. 38–82. Also posted at quant-ph/0106166.**

# Запутанные состояния

**Пусть квантовая система состоит из нескольких (обычно двух) подсистем. Запутанными состояниями (англ. ”entanglement states”) называются такие состояния, в которых некоторые наблюдаемые, входящие в каждую из подсистем, связаны (”запутаны” или ”сцеплены”) между собой при помощи какого-либо закона сохранения.**

**Простейший пример запутанного состояния: две частицы “1” и “2” со спинами $s = 1/2$ каждая находятся в состоянии с суммарным спином $S = 0$ (синглетное состояние двух спинов $1/2$). Проекция суммарного спина на любую ось, задаваемую единичным вектором $\vec{a}$, есть $S_{\vec{a}} = 0$. Тогда по правилу сложения моментов количества движения:**

$$0 = S_{\vec{a}} = s_{\vec{a}}^{(1)} + s_{\vec{a}}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad s_{\vec{a}}^{(1)} = -\, s_{\vec{a}}^{(2)},$$

**а общий вектор состояния спинового синглета может быть записан в виде:**

$$|\, S = 0,\, S_{\vec{a}} = 0 \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| +_{\vec{a}}^{(1)} \right\rangle \left| -_{\vec{a}}^{(2)} \right\rangle - \left| -_{\vec{a}}^{(1)} \right\rangle \left| +_{\vec{a}}^{(2)} \right\rangle \right),$$

**где введено обозначение $\left| \pm_{\vec{a}}^{(i)} \right\rangle = \left| s^{(i)} = \frac{1}{2},\, s_{\vec{a}}^{(i)} = \pm\frac{1}{2} \right\rangle$. Запутанные состояния можно создать при непосредственном взаимодействии двух квантовых систем или при помощи особых условий постановки эксперимента.**

# Состояния Белла (the Bell states)

**Изучая сложение двух спинов $s = 1/2$ можно найти два запутанных состояния $|\, S = 0,\, S_z = 0\,\rangle$ и $|\, S = 1,\, S_z = 0\,\rangle$. Данные состояния, наряду с двумя им ортогональными, играют центральную роль в квантовой теории информации, при изучении феномена запутанности и квантовых корреляций. Поэтому эти состояния получили специальное название – состояния Белла – по имени выдающегося ирландского физика-теоретика Джона Стюарта Белла, который был одним из пионеров количественного исследования оснований квантовой теории (неравенства Белла).**

**Как правило состояния Белла обозначают следующим образом:**

$$\left|\,\Psi^{+}\,\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+^{(1)}\right\rangle\left|-^{(2)}\right\rangle + \left|-^{(1)}\right\rangle\left|+^{(2)}\right\rangle\right);$$

$$\left|\,\Psi^{-}\,\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+^{(1)}\right\rangle\left|-^{(2)}\right\rangle - \left|-^{(1)}\right\rangle\left|+^{(2)}\right\rangle\right);$$

$$\left|\,\Phi^{+}\,\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+^{(1)}\right\rangle\left|+^{(2)}\right\rangle + \left|-^{(1)}\right\rangle\left|-^{(2)}\right\rangle\right);$$

$$\left|\,\Phi^{-}\,\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+^{(1)}\right\rangle\left|+^{(2)}\right\rangle - \left|-^{(1)}\right\rangle\left|-^{(2)}\right\rangle\right).$$

**Очевидно, что эти состояния образуют базис в пространстве двух спинов $s = 1/2$.**

# Нелокальность НКМ

**На уровне микросистем НКМ нелокальна. Рассмотрим две подсистемы "$A$" и "$B$", которые находятся в запутанном состоянии. Тогда любое изменение в подсистеме "$B$" приводит к мгновенному изменению в подсистеме "$A$" и наоборот.**

**Поясним данное утверждение на простом примере. Пусть подсистемы "$A$" и "$B$" — это два спина $s^{(A)} = 1/2$ и $s^{(B)} = 1/2$, которые находятся в синглетном белловском состоянии**

$$\left|\,\Psi^{-}\,\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\,+^{(A)}\,\right\rangle\left|\,-^{(B)}\,\right\rangle - \left|\,-^{(A)}\,\right\rangle\left|\,+^{(B)}\,\right\rangle\right).$$

**Пусть в подсистеме "$B$" измерено значение спина $s_z^{(B)} = +1/2$. Тогда согласно проекционному постулату М. Борна после измерения в подсистеме "$B$" вектор состояния $\left|\,\Psi^{-}\,\right\rangle$ перейдет в вектор состояния $\left|\,-^{(A)}\,\right\rangle\left|\,+^{(B)}\,\right\rangle$. То есть состояние подсистемы "$A$" сразу после измерения состояния подсистемы "$B$" станет описываться при помощи вектора $\left|\,-^{(A)}\,\right\rangle$. В этом состоянии проекция спина подсистемы "$A$" на ось $z$ будет равна $s_z^{(A)} = -1/2$.**

**Аналогично, если измерение в подсистеме "$B$" дало значение $s_z^{(B)} = -1/2$, то проекция спина подсистемы "$A$" должна быть $s_z^{(A)} = +1/2$. Кажется, что белловские корреляции позволяют передавать информация между наблюдателями из подсистем "$B$" и "$A$" быстрее скорости света.**

# Теорема Эберхарда восстанавливает локальность

Как хорошо известно результат любого измеНения состояния квантовой системы должен быть зарегистрирован макроскопическим прибором. Только при помощи измеРения микросистемы макроприбором наблюдатель может узнать о произошедшем измеНении состояния микросистемы. Поэтому возникает естественный вопрос: распространяется ли нелокальность НКМ, которая имеет место для микросистем, на результаты измерения при помощи макроприборов?

Отрицательный ответ на поставленный выше вопрос дает теорема Эберхарда (Eberhard, P.H., "Bell's theorem and the different concepts of nonlocality", Nuovo Cimento 46B, 392-419 (1978)).

Пусть имеется квантовая система, которая описывается вектором состояния $|\,\Psi\,\rangle$ и соответствующим ему проектором $\hat{P}_{\Psi} = |\,\Psi\,\rangle\,\langle\,\Psi\,|$. И пусть эта система состоит из двух подсистем "$A$" и "$B$". Согласно теореме Эберхарда никакими изменениями состояния макроприбора, который связан только с измерениями в подсистеме "$B$", невозможно повлиять на результат измерения любых наблюдаемых, которые связаны только с подсистемой "$A$", если между макроприборами отсутствует классический канал связи.

Предположим, что в подсистеме "$A$" имеется наблюдаемая $F_A$ с дискретным невырожденным спектром $\{f_i^{(A)}\}$ (для простоты), значения которой измеряются при помощи макроприбора $D_A$. Мы не интересуемся состояниями подсистемы "$A$" и макроприбора $D_A$ после измерения, а только самим фактом измерения некоторого значения $f_{i'}^{(A)}$ спектра наблюдаемой $F_A$ при помощи макроприбора $D_A$. Для описания подобного измерения в рамках квантовой теории можно воспользоваться POVM–элементом $\hat{E}_{i'}^{D_A}$. Рассмотрим подсистему "$B$". Введем наблюдаемую $G_B$ с дискретным невырожденным спектром $\{g_j^{(B)}\}$ и макроприбор $\tilde{D}_B$. Квантовомеханическому описанию измерения значения $g_{j'}^{(B)}$ в подсистеме "$B$" соответствует POVM–элемент $\hat{E}_{j'}^{\tilde{D}_B}$.

Теперь заметим, что для теоремы Эберхарда можно дать эквивалентную формулировку: НКМ **запрещает нелокальные корреляции** между состояниями макроприборов $D_A$ и $\tilde{D}_B$. В терминах условных вероятностей это утверждение можно записать следующим образом:

$$\sum_j w\left(f_{i'}^{(A)}, g_j^{(B)} \middle| D_A, \tilde{D}_B\right) = w\left(f_{i'}^{(A)} \middle| D_A\right),$$

и

$$\sum_i w\left(f_i^{(A)}, g_{j'}^{(B)} \middle| D_A, \tilde{D}_B\right) = w\left(g_{j'}^{(B)} \middle| \tilde{D}_B\right).$$

В более общем контексте изучения корреляций данные условия носят название "No-signaling Conditions" (NS–условий).

Особенностью NS–условий является то, что, например, в первом из них после суммирования по $j$ пропадает зависимость не только от от результата измерения наблюдаемой $G_B$ подсистемы "$B$" (что естественно и ожидаемо), но и от состояния макроприбора $\tilde{D}_B$, который производит измерения в подсистеме "$B$". Во втором условии в процессе суммирования по $i$ уходит зависимость не только от значения наблюдаемой $F_A$ после измерения, но и от состояния макроприбора $D_A$!

Если бы локальность на макроуровне была бы нарушена, то есть имели бы место нелокальные корреляции между состояниями макроприборов $D_A$ и $\tilde{D}_B$ (подобные корреляции должны были бы описываться условными вероятностями $w\left(f_{i'}^{(A)} \,\middle|\, D_A, \tilde{D}_B\right)$), то изменяя, например, состояние макроприбора $\tilde{D}_B$, мы могли бы мгновенно влиять на результат измерения в подсистеме "$A$" и, тем самым, передавать информацию быстрее скорости света.

**Докажем теорему Эберхарда**. Обозначим пространство состояний подсистемы "$A$" через $\mathcal{H}_A$, а пространство состояний подсистемы "$B$" через $\mathcal{H}_B$. Тогда пространство состояний всей системы будет $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ операторы наблюдаемых $F_A$ и $G_B$ имеют вид $\hat{F}_A \otimes \hat{1}_B$ и $\hat{1}_A \otimes \hat{G}_B$, где $\hat{1}_A$ и $\hat{1}_B$ – единичные операторы в пространствах $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ соответственно . Легко видеть, что

$$\left[\hat{F}_A \otimes \hat{1}_B,\, \hat{1}_A \otimes \hat{G}_B\right] = 0.$$

Поэтому пару величин $f_{i'}^{(A)}$ и $g_{j'}^{(B)}$ можно измерять совместно.

POVM–элементы $\hat{E}_i^{D_A}$ и $\hat{E}_j^{\tilde{D}_B}$ в пространстве $\mathcal{H}$ также можно доопределить как $\hat{E}_i^{D_A} \otimes \hat{1}_B$ и $\hat{1}_A \otimes \hat{E}_j^{\tilde{D}_B}$. Из этих выражений следует, что

$$\left[\hat{E}_i^{D_A} \otimes \hat{1}_B,\, \hat{1}_A \otimes \hat{E}_j^{\tilde{D}_B}\right] = 0.$$

Поэтому можно говорить о существовании совместных вероятностей вида $w\left(f_{i'}^{(A)},\, g_{j'}^{(B)} \middle|\, D_A,\, \tilde{D}_B\right)$, которые вычисляются по формулам

$$w\left(f_{i'}^{(A)},\, g_{j'}^{(B)} \middle|\, D_A,\, \tilde{D}_B\right) = \mathbf{Tr}\left(\left(\hat{E}_{i'}^{D_A} \otimes \hat{E}_{j'}^{\tilde{D}_B}\right) \hat{P}_\Psi\right).$$

Если каждое отдельное измерение наблюдаемой $G_B$ носит случайный характер, а при измерении какого-то фиксированного значения $f_{i'}^{(A)}$ спектра наблюдаемой $F_A$ наблюдатель в подсистеме "$A$" еще по классическим каналам связи не имеет информации, в каком состоянии находится подсистема "$B$", то наблюдателю подсистемы "$A$" необходимо провести усреднение вероятности своего измерения по всем возможным значениям $g_j^{(B)}$ спектра наблюдаемой $G_B$. Тогда

$$w\left(f_{i'}^{(A)} \,\middle|\, D_A,\, \tilde{D}_B\right) = \sum_j w\left(f_{i'}^{(A)},\, g_j^{(B)} \,\middle|\, D_A,\, \tilde{D}_B\right) =$$

$$= \sum_j \mathbf{Tr}\left(\left(\hat{E}_{i'}^{D_A} \otimes \hat{E}_j^{\tilde{D}_B}\right)\hat{P}_\Psi\right) = \mathbf{Tr}\left(\left(\hat{E}_{i'}^{D_A} \otimes \left(\sum_j \hat{E}_j^{\tilde{D}_B}\right)\right)\hat{P}_\Psi\right) =$$

$$= \mathbf{Tr}\left(\left(\hat{E}_{i'}^{D_A} \otimes \hat{1}_B\right)\hat{P}_\Psi\right) = w\left(f_{i'}^{(A)} \,\middle|\, D_A\right).$$

где в предпоследнем равенстве мы воспользовались неортогональным разложением единицы для POVM–элементов подсистемы "$B$". Из полученной формулы видно, что $w\left(f_{i'}^{(A)} \,\middle|\, D_A,\, \tilde{D}_B\right)$ НЕ ЗАВИСИТ от состояния макроприбора $\tilde{D}_B$. Теорема доказана.

Таким образом из доказательства теоремы Эберхарда следует, что локальность НКМ на макроуровне восстанавливается за счет принципиальной случайности результата каждого отдельного измерения наблюдаемой.

# Сверхсветовые коммуникации в обход теоремы Эберхарда

**Существует алгоритм сверхсветовой коммуникации, который позволяет обойти теорему Эберхарда.**

**Рассмотрим следующую ситуацию. Алиса и Боб договорились и выбрали в пространстве фиксированные оси "$x$" и "$z$". Кроме того они решили, что если Алиса в результате измерения получит ЛЮБУЮ проекцию спина фермиона $s_z^{(A)}$, то это будет означать "1". Если же при измерении будет найдена ЛЮБАЯ проекция $s_x^{(A)}$, то это означает "0". То есть обеспечена потенциальная возможность использовать двоичный код или азбуку Морзе для передачи информации! Затем Боб улетел к Проксиме Центавра (примем за ось "$y$" направление между Землей и Проксимой). Пусть на половине пути от Земли к Проксиме Центавра имеется источник частиц, который рождает два фермиона в состоянии $|\,\Psi^-\,\rangle$. Частицы разлетаются в разные стороны вдоль оси "$y$" с одинаковой по модулю скоростью.**

**Боб активирует источник. Таким образом, когда один из фермионов от источника прилетает на Проксиму, то соответствующий ему второй фермион достигает Земли.**

**Пусть Боб хочет передать Алисе информацию о своей успешной высадке в системе Проксимы Центавра. Предположим, что для этого ему надо послать Алисе цифру "1".**

**Чтобы это сделать, Боб измеряет спин своего фермиона вдоль оси "$z$". Предположим, он получил значение проекции спина $s_z^{(B)} = -1/2$. Тогда он знает, что в тоже самое время Алиса стала обладательницей фермиона с $s_z^{(A)} = +1/2$. Однако, в полном согласии с теоремой Эберхарда Алиса ничего не знает не только о величине самой проекции, но даже и о том, на какую ось эта проекция была сделана!**

**Пусть теперь Алиса многократно клонирует полученное ей состояние. Тогда у нее на руках окажется ансамбль одинаково приготовленных систем в неизвестном для нее состоянии $\left| s_?^{(A)} \right\rangle$.**

Следующим шагом Алиса должна разделить ансамбль на две группы. Над первой группой выполняется измерение проекции спина вдоль оси "$x$". Для второй группы — аналогичное измерение вдоль оси "$z$".

**Вопрос**: какой результат получит Алиса?
**Ответ**: при измерении проекции спина на ось "$x$" у Алисы с вероятностью $1/2$ будет появляться проекция $s_x^{(A)} = +1/2$ и с такой же вероятностью проекция $s_x^{(A)} = -1/2$. Измерение же проекции спина на ось "$z$" всегда будет давать значение $s_z^{(A)} = +1/2$.

Зная законы квантовой механики Алиса без труда может заключить, что Боб произвел измерение значения спина вдоль оси "$z$", то есть передал ей код "1", а вместе с ним и информацию о благополучной посадке, которая достигла Земли быстрее скорости света!

Таким образом одной теоремы Эберхарда может оказаться недостаточно, чтобы обеспечить локальность НКМ на макроуровне. Необходимо сочетать эту теорему с теоремой о невозможности клонирования произвольного чистого состояния.

# Теорема о невозможности клонирования произвольного чистого состояния

**Пусть Алиса хочет передать некоторую информацию Бобу при помощи вектора состояния $|\psi\rangle$. Теорема утверждает, что перехватившая это сообщение злобная Ева никогда не сможет создать себе его точную копию так, чтобы о несанкционированном перехвате не узнали Алиса и Боб.**

**Действительно, чтобы Алиса и Боб не догадались о перехвате сообщения, Ева должа уметь из одного ПРОИЗВОЛЬНОГО вектора состояния $|\psi\rangle$ делать как минимум два абсолютно идентичных вектора, чтобы одну копию оставить себе для последующей дешифровки, а другую отослать Бобу, чтобы он не догадался о факте перехвата. Такой процесс называется клонированием вектора состояния. И теорема утверждает, что клонирование произвольного чистого состояния невозможно.**

**Для доказательства предположим, что вектор состояния $|\psi\rangle$ представляет собой суперпозицию двух векторов состояния $|\varphi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle$, то есть**

$$|\psi\rangle = C_1|\varphi_1\rangle + C_2|\varphi_2\rangle.$$

Предположим, что процедура клонирования существует, и пусть эта процедура из произвольного вектора состояния $|\,\phi\,\rangle$ и "пустого" вектора состояния $|\,0\,\rangle$ делает две копии вектора $|\,\phi\,\rangle$, то есть:

$$|\,\phi\,\rangle\,|\,0\,\rangle \to |\,\phi\,\rangle\,|\,\phi\,\rangle.$$

С одной стороны, мы можем применить процедуру клонирования непосредственно к вектору $|\,\psi\,\rangle$. Это дает

$$|\,\psi\,\rangle\,|\,0\,\rangle \to |\,\psi\,\rangle\,|\,\psi\,\rangle = \Big(C_1\,|\,\varphi_1\,\rangle + C_2\,|\,\varphi_2\,\rangle\Big) \times \Big(C_1\,|\,\varphi_1\,\rangle + C_2\,|\,\varphi_2\,\rangle\Big) =$$
$$= C_1^2\,|\,\varphi_1\,\rangle\,|\,\varphi_1\,\rangle + C_2^2\,|\,\varphi_2\,\rangle\,|\,\varphi_2\,\rangle + C_1C_2\Big(|\,\varphi_1\,\rangle\,|\,\varphi_2\,\rangle + |\,\varphi_2\,\rangle\,|\,\varphi_1\,\rangle\Big).$$

С другой стороны, гипотетическую операцию клонирования можно применить к каждому из векторов линейной комбинации. В этом случае:

$$|\,\psi\,\rangle\,|\,0\,\rangle = C_1\,|\,\varphi_1\,\rangle\,|\,0\,\rangle + C_2\,|\,\varphi_2\,\rangle\,|\,0\,\rangle \to C_1\,|\,\varphi_1\,\rangle\,|\,\varphi_1\,\rangle + C_2\,|\,\varphi_2\,\rangle\,|\,\varphi_2\,\rangle.$$

Если операция клонирования самосогласованна, то оба результата должны совпадать. Но из-за наличия дополнительного интерференционного слагаемого в первом случае, совпадение обоих способов клонирования состояния $|\,\psi\,\rangle$ возможно только при условии $C_1 = C_2 = 0$. В остальных случаях операция клонирования **НЕ согласуется** с **принципом суперпозиции**. Теорема доказана.

# Первооткрыватели “No-cloning theorem”

**W.H.Zurek**

**W.Wootters**

**Хотя вычисления, ведущие к доказательству теоремы о невозможности клонирования (по-английски *“No-cloning theorem”*), доступны любому студенту, но сама теорема была доказана только в 1982 году (больше чем через полвека после создания квантовой механики!) и опубликована в журнале Nature:**
**W. K. Wootters and W. H. Zurek, "A Single Quantum Cannot Be Cloned,"Nature 299, p.802 (1982).**

# Совместное клонирование ортогональных состояний

**В теореме о невозможности клонирования ключевую роль играет то, что вектор состояния НЕИЗВЕСТЕН. Известный вектор клонировать можно!**

**Если известен вектор состояния $|\psi\rangle$, то можно найти ортогональные ему вектора. То есть эти вектора тоже известны и, следовательно, их можно клонировать наряду с вектором $|\psi\rangle$. Более того, клонирование может осуществляться одним и тем же унитарным оператором. Действительно, пусть $\hat{U}$ – искомый унитарный оператор. Рассмотрим два состояния $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$, для которых осуществляется операция клонирования. Тогда:**

$$\hat{U}|\psi\rangle|0\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle$$
$$\hat{U}|\varphi\rangle|0\rangle = |\varphi\rangle|\varphi\rangle$$

**Теперь скалярно умножим одно равенство на другое. Получим:**

$$\langle\psi|\,\varphi\rangle^2 = \langle 0|\left\langle\psi\middle|\hat{U}^\dagger\hat{U}\middle|\varphi\right\rangle|0\rangle = \langle\psi|\,\varphi\rangle\,\langle 0|\,0\rangle = \langle\psi|\,\varphi\rangle.$$

**То есть необходимо решить уравнение $x^2 = x$, где $x = \langle\psi|\,\varphi\rangle$. Имеется два решения. Первое: $x = 1$ ведет к равенству $|\varphi\rangle \equiv |\psi\rangle$. Второе: $x = 0$ означает, что $|\varphi\rangle = \left|\psi^{(\perp)}\right\rangle$. Утверждение доказано.**

**Отсюда следует, что макроскопическую информацию всегда можно копировать, поскольку вектора состояния двух даже одинаковых с виду макрообъектов ортогональны.**

# Можно ли переложить процедуру клонирования на плечи Боба?

**На первый взгляд кажется, что можно. Пусть до отлета Алиса и Боб договорятся, что Боб делает не одно, а миллион измерений вдоль оси "$z$", чтобы передать значение "$1$" Алисе. Тогда Алиса может разделить первый миллион своих событий на две группы. В одной из них она может измерить проекцию спина вдоль оси "$x$", а в другой – проекцию спина вдоль оси "$z$". И кажется, что проблема решена. Ведь в первом наборе с вероятностью $1/2$ будет появляться проекция $s_x^{(A)} = +1/2$ и с такой же вероятностью проекция $s_x^{(A)} = -1/2$.**

**Но во втором наборе нас ждет теперь сюрприз. Поскольку в нем тоже с вероятностью $1/2$ будет появляться проекция $s_z^{(A)} = +1/2$ и с такой же вероятностью проекция $s_z^{(A)} = -1/2$, ведь измерения величины проекции спина $s_z^{(B)}$ Бобом тоже носят случайный характер! Если Боб хочет передать Алисе определенную проекцию спина миллион раз подряд, то Бобу потребуется придумать, как обойти принципиальную случайность каждого отдельного измерения.**

**Первый (простой) вопрос**: что если вместо вектора состояния $|\Psi^-\rangle$ использовать **несимметричный** вектор состояния вида

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|C_1|^2 + |C_2|^2}} \left( C_1 \left| +^{(A)} \right\rangle \left| -^{(B)} \right\rangle + C_2 \left| -^{(A)} \right\rangle \left| +^{(B)} \right\rangle \right),$$

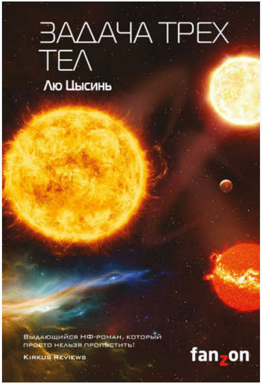
где, скажем, $|C_1| \sim 10\,|C_2|$? Может быть в этом случае станет возможно использовать один из перечисленных в лекции алгоритмов сверхсветовой связи? (**спойлер**: нет)

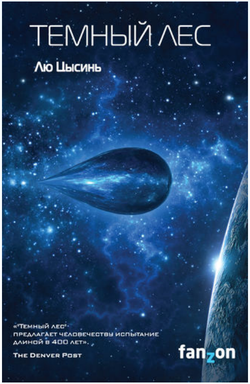
**Второй (интересный) вопрос**: если **НЕ** требовать от Алисы точного клонирования, а удовлетворится приближенным копированием, то можно ли в этом случае попытаться наладить "нечеткую сверхсветовую коммуникацию", которой при соблюдении определенных правил будет вполне достаточно для передачи **осмысленной** информации? (**спойлер**: неизвестно)

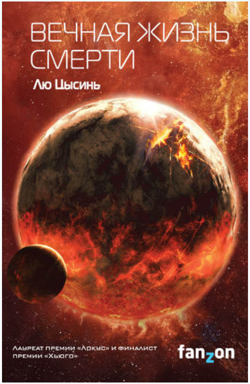
**Третий (совсем интересный) вопрос**: заложено ли что–то фундаментальное в структуру НКМ, что прямо связано с локальностью НКМ на макроскопическом уровне? (**спойлер**: возможно в НКМ неявно включено понятие причинности, **но это уже совсем другая история...**)

# Лю Цысинь, ты не прав!

**Софоны не будут работать и трисоляриане не смогут поработить Землю!**



# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!