

Дополнительные измерения  
пространства-времени  
и  
физика элементарных частиц

Э. Боос, В. Буничев, М. Смоляков,  
И. В.

## ■ Предыстория

- Бернхард Риман, "О гипотезах, лежащих в основании геометрии" (1854 г.)

Для объяснения природы вопросы о неизмеримо большом – вопросы праздные. Иначе обстоит дело с вопросами о неизмеримо малом. От той точности, с которой нам удастся проследить явления в бесконечно малом, существенно зависит наше знание причинных связей.

Эмпирические понятия, на которых основывается установление пространственных метрических отношений,— понятия твёрдого тела и светового луча, по-видимому, теряют всякую определённую в бесконечно малом. Поэтому вполне мыслимо, что метрические отношения пространства в бесконечно малом не отвечают геометрическим допущениям; мы действительно должны были бы принять это положение, если бы с его помощью более просто были объяснены наблюдаемые явления...

Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке – физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшней день.

- Эрнст Мах, “Познание и заблуждение” (1905 г.)

Ограничение конструкции пространства тремя измерениями совершенно лишено основания, и именно на этот пункт следовало бы обратить преимущественное внимание. По истечении целого столетия именно такие вопросы могли бы получить совершенно новую физиономию.

- Гуннар Нордстрём (1914 г.)

# 1 Теория Калуцы-Клейна (1919 г.)

Пространство-время имеет дополнительное пространственное измерение, которое макроскопически ненаблюдаемо.

В работах Калуцы и Клейна ненаблюдаемость дополнительного измерения объяснялась его компактностью и крайне малым размером, - порядка планковской длины  $l_{P1} = 1/M_{P1}$ .

Исходная модель Калуцы-Клейна: гравитация в пространстве-времени  $E=M^4 \times S^1$

$$S = \frac{1}{16\pi\hat{G}} \int_E \hat{R}\sqrt{-g} d^5 X, \quad X^N = \{x^\nu, y\}, \quad 0 \leq y < L,$$

Где  $\hat{G}$  - пятимерная гравитационная постоянная,  
 $\hat{R}$  - пятимерная скалярная кривизна, сигнатура метрики  $\text{sign } g_{MN} = (-, +, +, +, +)$ ,  $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Пятимерная метрика  $g_{MN}$  может быть представлена в виде

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \phi A_\nu & \phi \end{pmatrix}, \quad \phi = g_{44}, \quad \phi A_\mu = g_{\mu 4}.$$

Если  $g_{MN}$  не зависит от  $y$ , то

$$\begin{aligned} \hat{R} &= R_{(4)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \phi^{-1} - \frac{1}{2} \phi^{-2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \end{aligned}$$

где  $R_{(4)}$  - скалярная кривизна в четырехмерном пространстве  $M_4$  с метрикой  $\gamma_{\mu\nu}$ .

В работах Калуцы и Клейна поле  $\Phi$  полагалось равным константе, а поле  $A_\mu$  отождествлялось с электромагнитным полем.

Соотношение между пятимерной ( $M$ ) и четырехмерной ( $M_{Pl}$ ) массами Планка:

$$M_{Pl}^2 = M^3 L.$$

Любое поле в пространстве-времени  $E=M^4 \times S^1$  можно разложить в ряд Фурье по координате  $y$ .



Для скалярного поля

$$\phi(x, y) = L^{-\frac{1}{2}} \sum_n \phi^{(n)}(x) \exp(i \frac{2\pi n y}{L}).$$

Лагранжиан в пятимерном пространстве-времени

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

и уравнения движения

$$(\partial_M \partial^M - m^2) \phi = 0.$$

Моды  $\Phi^{(n)}$  удовлетворяют уравнению

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m_n^2) \phi^{(n)} = 0, \quad m_n^2 = m^2 + \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}.$$

Так как  $L$  – порядка планковской длины, то наблюдаемые поля должны быть “нулевыми модами”, т.е. не могут зависеть от координаты дополнительного измерения.

- Для каждого четырехмерного поля должна существовать “башня” полей с теми же квантовыми числами и массами порядка  $M_{Pl}$ , которые невозможно наблюдать при доступных в настоящее время энергиях.

## 2 Размерная редукция и спонтанная компактификация

Неабелево обобщение:

R. Kerner, “Generalization of the Kaluza-Klein Theory for an Arbitrary Nonabelian Gauge Group”  
Annales Poincare Phys. Theor. 9 (1968) 143.

Гравитация в пространстве-времени  $E = M^4 \times G$  дает в четырехмерном пространстве-времени калибровочное поле с калибровочной группой  $G$ .

- Спинорные поля СМ нельзя получить из метрики многомерного пространства-времени, поэтому их нужно включать в исходную многомерную теорию.
- Интерпретация теории гравитации, взаимодействующей с полями материи в многомерном пространстве-времени, в терминах четырехмерных полей называется **размерной редукцией**.
- Динамическое объяснение факторизованной структуры многомерного пространства-времени, возникающей вследствие взаимодействия гравитации с полями материи, получила название **спонтанной компактификации**.

## ■ 3 Большие дополнительные измерения

Локализация полей:

V.A.Rubakov and M.E. Shaposhnikov,  
“Do We Live Inside A Domain Wall?”  
Phys. Lett. 125 (1983) 136.

“Extra Space-Time Dimensions: Towards A  
Solution Of The Cosmological Constant Problem”,  
Phys. Lett. 125 (1983) 139.

Поля СМ могут быть локализованы на доменной стенке в многомерном пространстве. Если толщина стенки стремится к нулю, то она превращается в мембрану, или просто брану.

- АДД сценарий

N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G.R. Dvali,  
“The hierarchy problem and new dimensions at a  
millimeter”, Phys. Lett. B 429 (1998) 263

Одна брана без натяжения в пространстве с произвольным числом компактных дополнительных измерений.

Решение проблемы иерархии гравитационного взаимодействия: сильная гравитация в многомерном пространстве и слабая гравитация на бране.

$$M_{Pl}^2 = M^{(2+n)} V_n$$

Приближение нулевого натяжения браны оказывается слишком грубым, при этом гравитационное поле браны нельзя учесть по теории возмущений.

## ■ 4 Модель Рэндалл-Сундрума

L. Randall and R. Sundrum,  
 “A large mass hierarchy from  
 a small extra dimension”,  
 Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 3370

Две браны с натяжением в фиксированных точках  
 орбифолда  $S^1/Z_2$ :

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^4x \int_{-L}^L dy (2M^3 R - \Lambda) \sqrt{-g} - \\
 &- \lambda_1 \int_{y=0} \sqrt{-\tilde{g}} d^4x - \lambda_2 \int_{y=L} \sqrt{-\tilde{g}} d^4x.
 \end{aligned}$$



Решение для фоновой метрики:

$$ds^2 = \gamma_{MN} dx^M dx^N = e^{-2\sigma(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (dy)^2, \quad \sigma(y) = k|y| + c.$$

Параметры  $k$ ,  $\Lambda$  и  $\lambda_{1,2}$  удовлетворяют условиям тонкой настройки:

$$\Lambda = -24M^3 k^2, \quad \lambda_1 = -\lambda_2 = 24M^3 k.$$

Линеаризованная гравитация получается с помощью подстановки

$$g_{MN} = \gamma_{MN} + \frac{1}{\sqrt{2M^3}} h_{MN}$$

и представляет собой калибровочную теорию с калибровочными преобразованиями

$$h_{\mu\nu}^{(l)}(x, y) = h_{\mu\nu}(x, y) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu + 2\gamma_{\mu\nu} \partial_4 \sigma \xi_4)$$

$$h_{\mu 4}^{(l)}(x, y) = h_{\mu 4}(x, y) - (\partial_\mu \xi_4 + \partial_4 \xi_\mu - 2\partial_4 \sigma \xi_\mu)$$

$$h_{44}^{(l)}(x, y) = h_{44}(x, y) - 2\partial_4 \xi_4.$$

Функции  $\xi^M(x, y)$  удовлетворяют условиям симметрии орбифолда

$$\xi^\mu(x, -y) = \xi^\mu(x, y), \quad \xi^4(x, -y) = -\xi^4(x, y).$$

На поле  $h_{MN}$  можно наложить калибровку

$$h_{\mu 4} = 0, \quad h_{44} = \phi(x).$$

Расстояние между бранами вдоль геодезической  
 $x = \text{const}$

$$l = \int_0^L \sqrt{ds^2} \simeq \int_0^L \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{2M^3}} h_{44} \right) dy = L \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{2M^3}} \phi(x) \right).$$

Уравнения движения для полей  $h_{\mu\nu}(x,y)$  и  $\Phi(x)$  могут  
 быть расцеплены подстановкой

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(x, y) &= b_{\mu\nu}(x, y) + \gamma_{\mu\nu}(y)(\sigma(y) - c)\phi(x) \\ &+ \frac{1}{2k^2} \left[ \sigma(y) - c + \frac{1}{2} \right] \partial_\mu \partial_\nu \phi(x) + \frac{c}{4k^2} e^{-2\sigma(y)} \partial_\mu \partial_\nu \phi(x), \end{aligned}$$

Уравнение для поперечно-бесследового поля  $b_{\mu\nu}(x,y)$

$$\frac{1}{2} \left( e^{-2\sigma(y)} \square b_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 b_{\mu\nu}}{\partial y^2} \right) - b_{\mu\nu} [2(\sigma')^2 - \sigma''] = 0.$$

Безмассовому гравитону соответствует решение

$$b_{\mu\nu}(x, y) = e^{-2\sigma(y)} \bar{h}_{\mu\nu}(x).$$

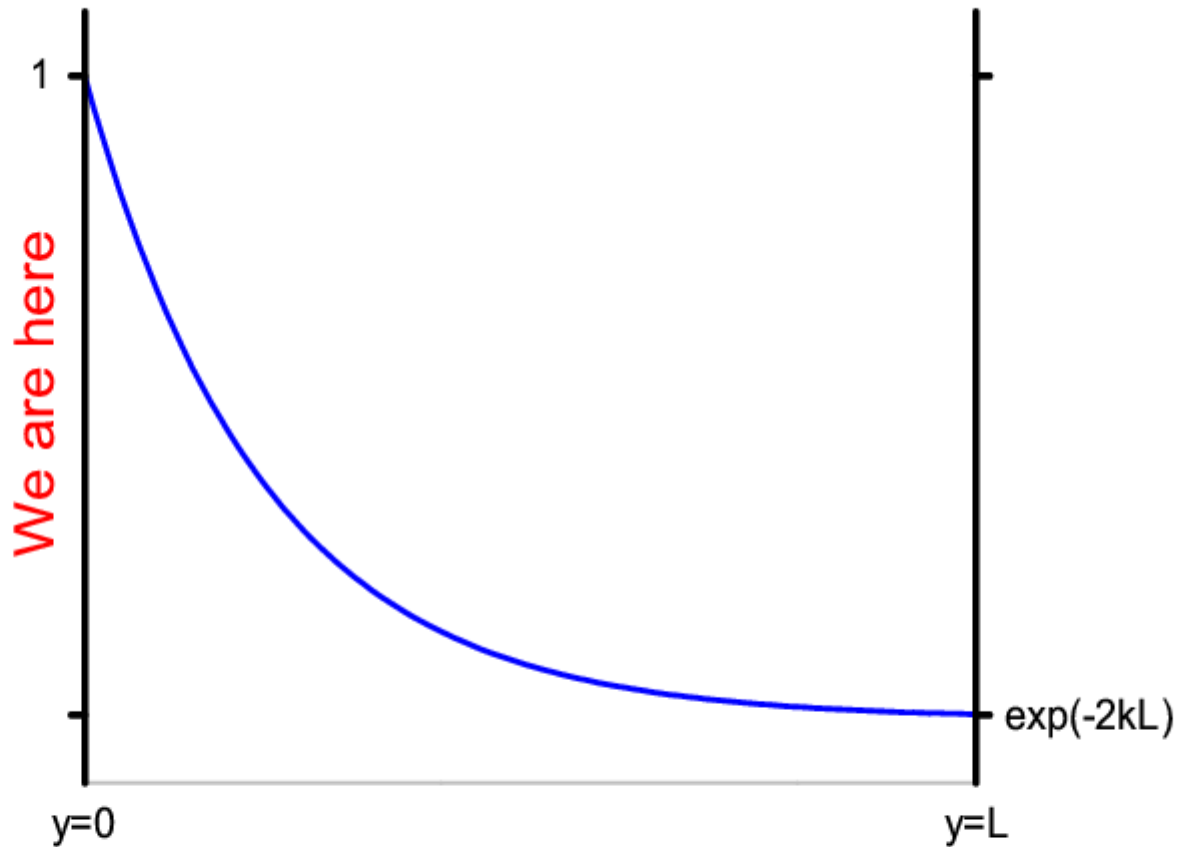
Метрика в приближении нулевой тензорной моды

$$ds^2 = e^{-2\sigma(y)} (\eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}(x)) dx^\mu dx^\nu + dy^2 = e^{-2\sigma(y)} \bar{g}_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + dy^2.$$

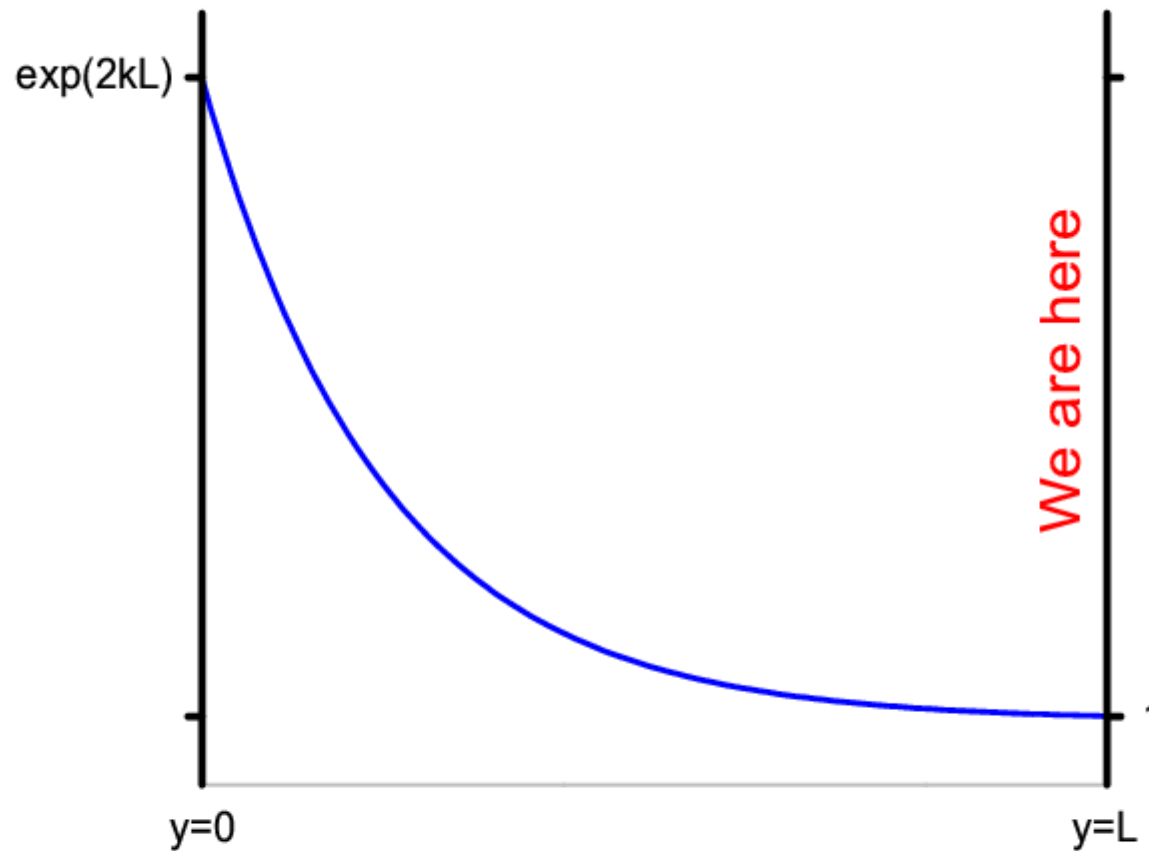
Подставляя эту метрику в действие и интегрируя по координате дополнительного измерения, получим эффективное действие

$$S_{eff} = 2M^3 e^{-2c} \frac{1 - e^{-2kL}}{k} \int d^4x R_4(\bar{g}) \sqrt{-\bar{g}}.$$

Галилеевы координаты:  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .



Координаты  $\{x^\mu\}$  Галилеевы при  $c = 0$ ,  $M_{Pl}^2 = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2kL})$ .



Координаты  $\{x^\mu\}$  Галилеевы при  $c = -kL$ ,  $M_{Pl}^2 = \frac{M^3}{k} (e^{2kL} - 1)$ .

Проблема иерархии решается, если  $M \sim k \sim 1 \text{ TeV}$  и  $kL \sim 35$ .

Появляется "башня" тензорных полей на бране, наименьшая масса порядка  $M$ , константа связи порядка  $1/M$ .

Браны в модели Рэндалл-Сундрума могут колебаться относительно друг друга, что проявляется в существовании безмассового скалярного поля, -- поля радиона.

Константа связи радиона с материей на бране слишком велика, что противоречит экспериментальным ограничениям даже на уровне классической гравитации.



- Закон Ньютона и отклонение света: наблюдатель и масса находятся на бране 2

$$V = -G_{(4)} \left( 1 + \frac{e^{2kR}}{3} \right) \frac{m}{r},$$

$$\Delta\varphi = \frac{4mG_{(4)}}{r_0} \left( \frac{1}{1 + \frac{e^{2kR}}{3}} \right).$$

Модель Рэндалл-Сундрума нужно стабилизировать!

## ■ 5 Стабилизированная модель Рэндалл-Сундрума

Механизмы стабилизации:

W. D. Goldberger and M.B. Wise,  
“Modulus stabilization with bulk fields”,  
Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4922

O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser and A. Karch,  
“Modeling the fifth dimension with scalars and gravity”,  
Phys. Rev. D **62** (2000) 046008

Более последовательной является вторая модель. Мы рассматриваем такие значения параметров модели, что фоновая метрика стабилизированной модели близка к фоновой метрике нестабилизированной модели.

Физические степени свободы модели в линейном приближении выделены в работе

E.E. Boos, Y.S. Mikhailov,  
M.N. Smolyakov and I.P. Volobuev,  
“Physical degrees of freedom  
in stabilized brane world models”,  
Mod. Phys. Lett. A **21** (2006) 1431

Это:

- тензорные поля  $b_{\mu\nu}^n(x)$ ,  $n=0,1, \dots$  с массами  $m_n$  ( $m_0 = 0$ ) и волновыми функциями в дополнительном измерении  $\psi_n(y)$ ,
- скалярные поля  $\varphi_n(x)$ ,  $n=1,2, \dots$  с массами  $\mu_n$  и волновыми функциями в дополнительном измерении  $g_n(y)$ .

Лагранжиан взаимодействия с полями СМ

$$L_{int} = -\frac{1}{\sqrt{8M^3}} \left( \psi_0(L) b_{\mu\nu}^0(x) T^{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(L) b_{\mu\nu}^n(x) T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(L) \varphi_n(x) T_{\mu}^{\mu} \right),$$

где  $T_{\mu\nu}$  - тензор энергии-импульса СМ.

При низких энергиях это взаимодействие приводит к контактному взаимодействию полей СМ

$$L_{eff} = \frac{1.82}{\Lambda_\pi^2 m_1^2} T^{\mu\nu} \tilde{\Delta}_{\mu\nu,\rho\sigma} T^{\rho\sigma},$$

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \left( \frac{1}{3} - \frac{\delta}{2} \right) \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma},$$

$m_1$  и  $\Lambda_\pi$  - масса и константа связи первой тензорной моды,  $\delta$  - константа, определяющая вклад скалярных мод.

При значениях параметров  $M \approx 2 \text{ TeV}$ ,  $k \approx 1 \text{ TeV}$ ,  $k L = 35$  и массе первой скалярной моды порядка  $2 \text{ TeV}$  эти параметры оказываются равными

$$\Lambda_\pi \simeq 8 \text{ TeV}, \quad m_1 \simeq 3.83 \text{ TeV}.$$

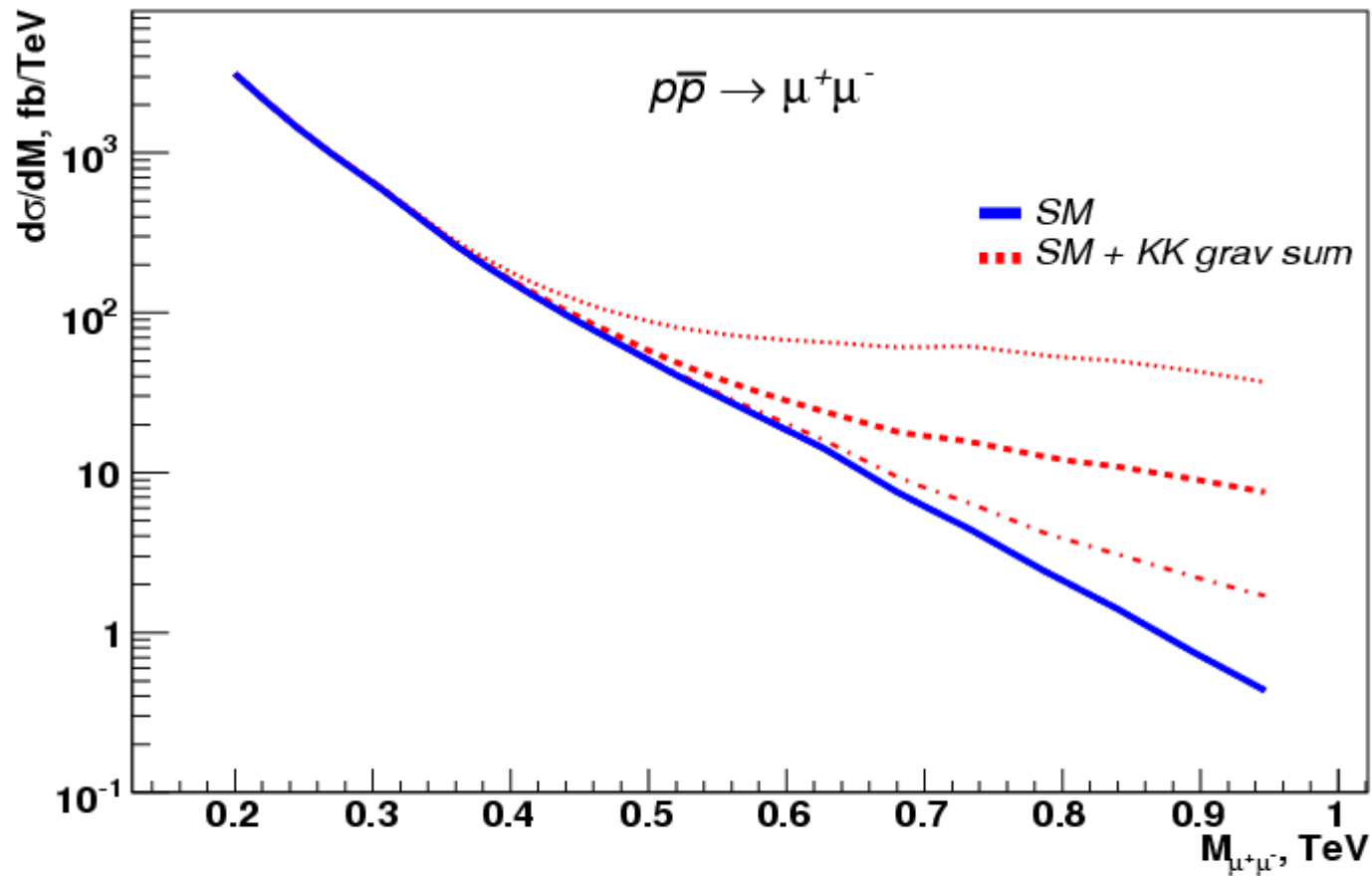
## ■ 6 Процессы с Калуца-Клейновскими гравитонами

В низшем приближении эффективный лагранжиан взаимодействия содержит сумму различных 4-частичных эффективных операторов (не только 4 фермиона, но и 2 фермиона - 2 бозона, 4 бозона), которые калибровочно-инвариантны по калибровочной группе  $SM$  и приводят к хорошо определенной феноменологии.

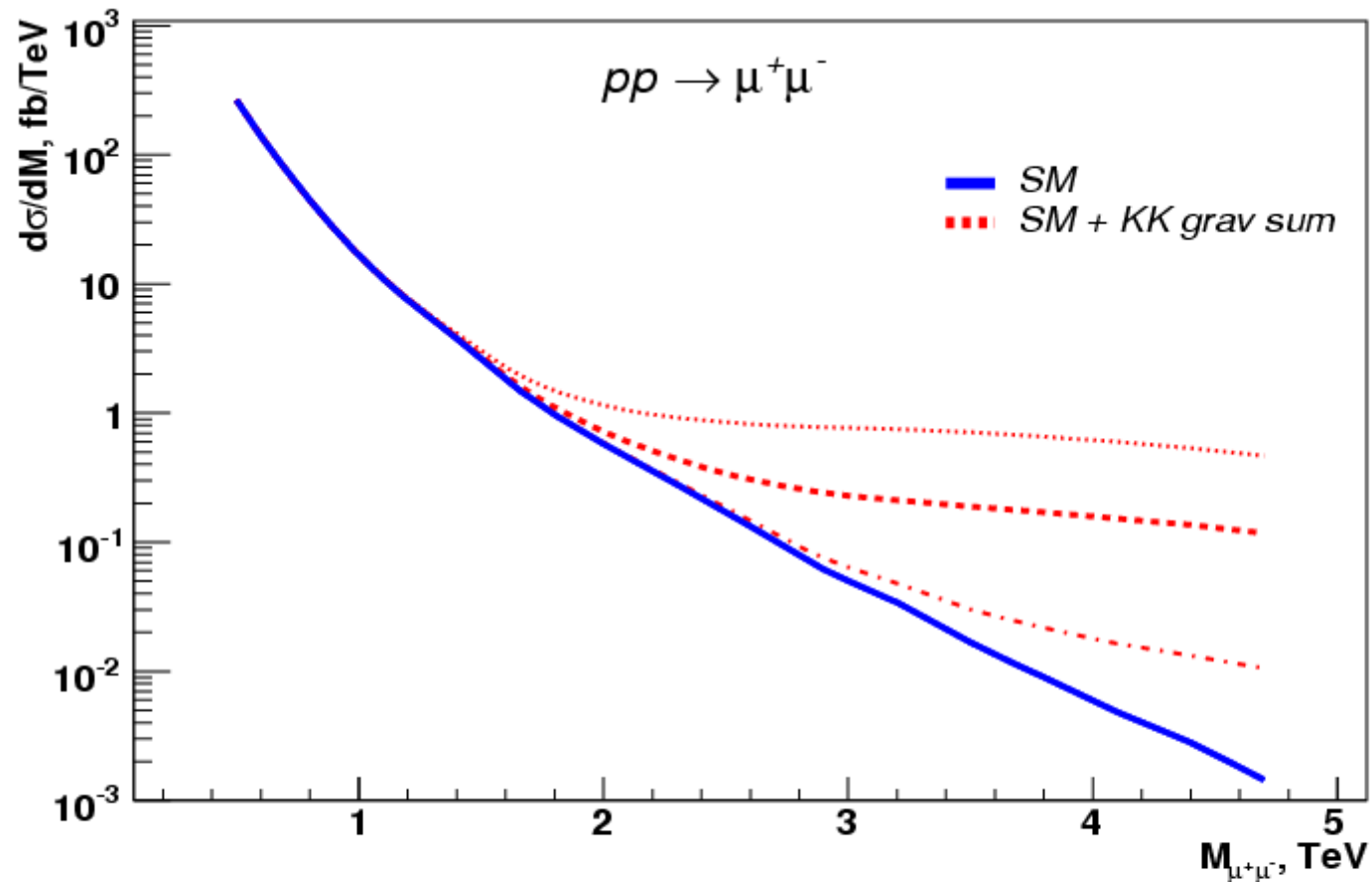
Различные процессы с этим лагранжианом были изучены с помощью программного пакета CompHEP в работе

E.E. Boos, V.E. Bunichev, M.N. Smolyakov  
and I.P. Volobuev,

“Testing extra dimensions below the production  
threshold of Kaluza-Klein excitations”  
arXiv:0710.3100v4 [hep-ph]

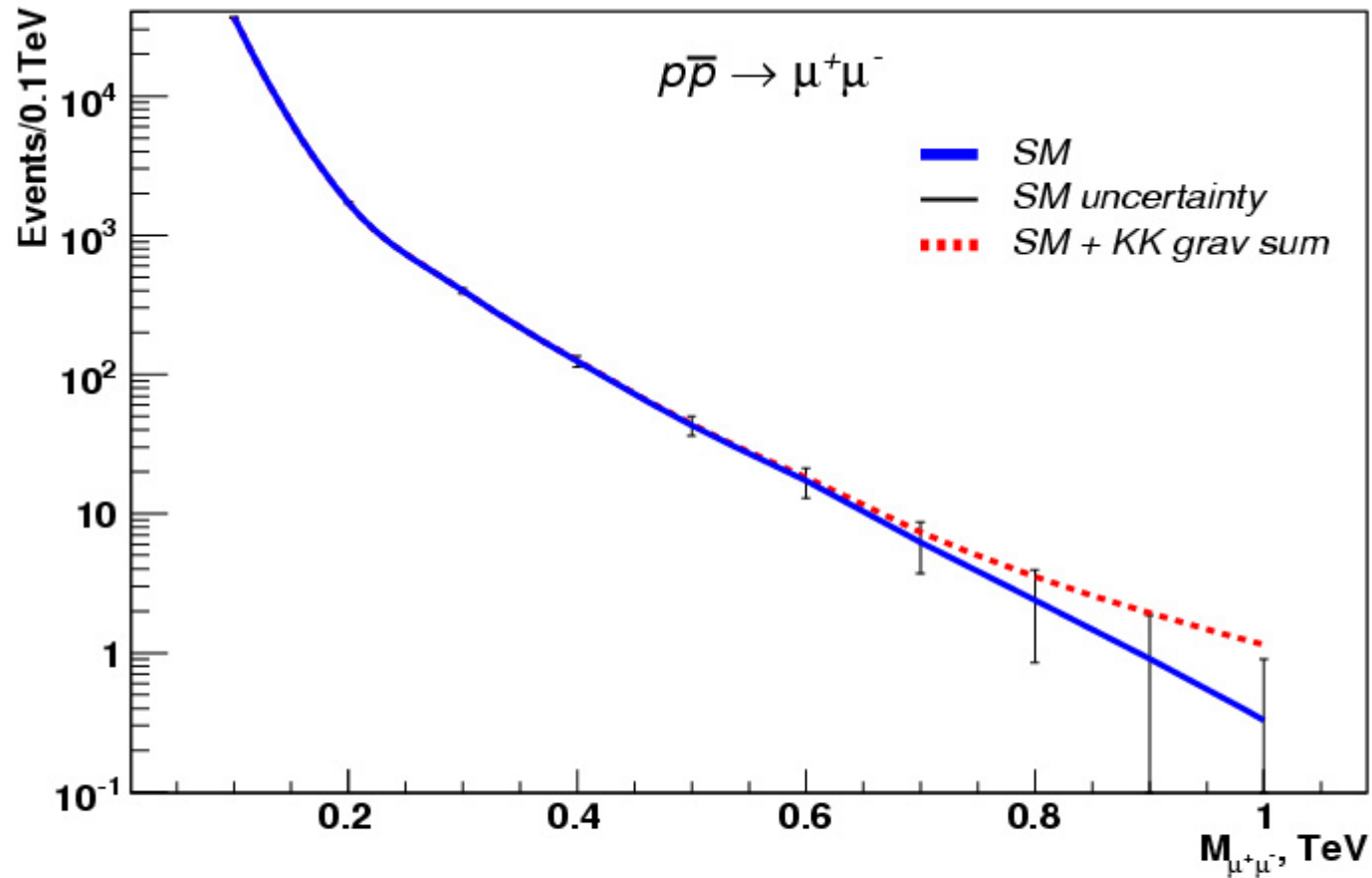


Dilepton invariant mass distribution for parameter  $\frac{0.91}{\Lambda_\pi^2 m_1^2} \times TeV^4 = 0.66$  (dash-dotted line), 1.82 (dashed line), 4 (dotted line) for the Tevatron



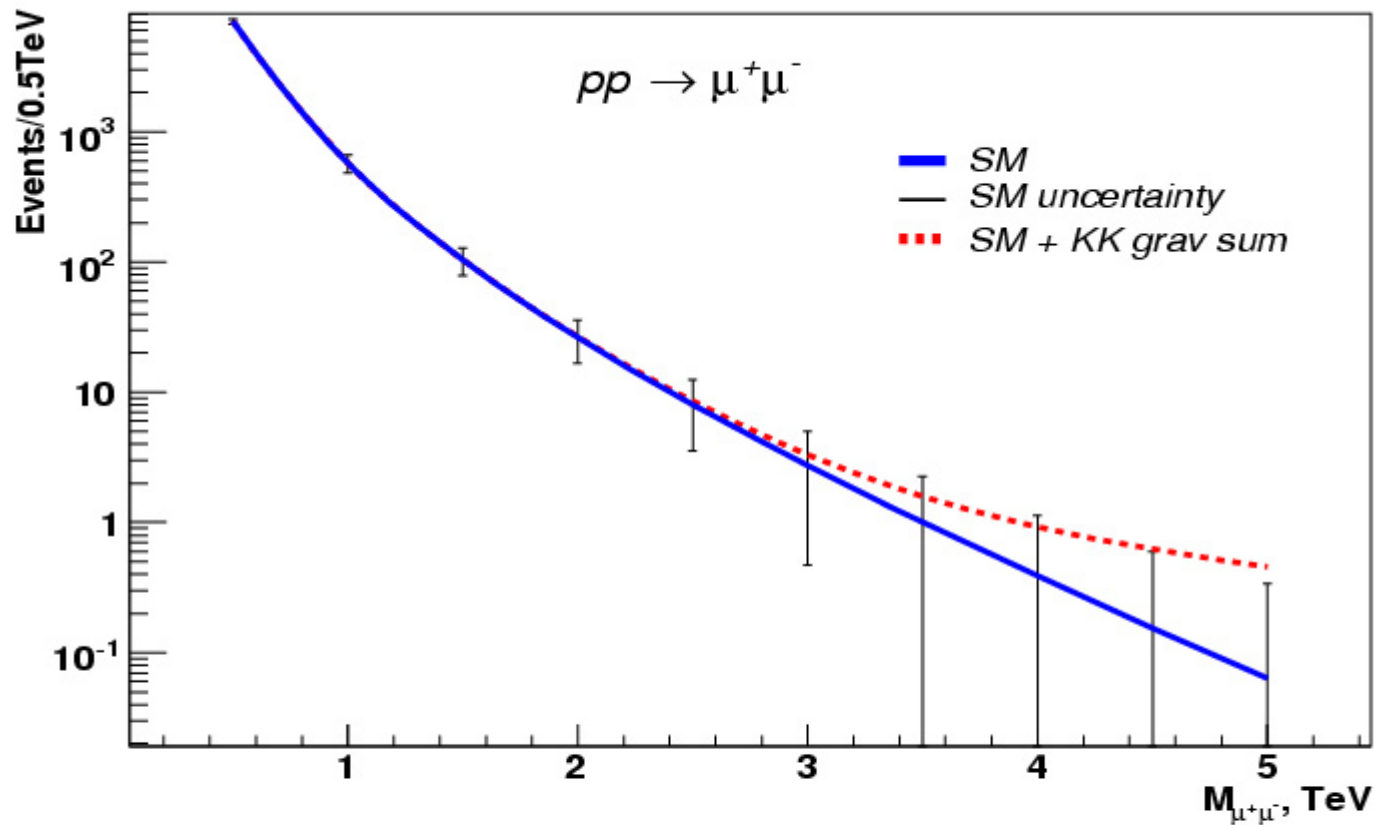
Dilepton invariant mass distribution for parameter  $\frac{0.91}{\Lambda_\pi^2 m_1^2} \times TeV^4 = 0.0014$  (dash-dotted line), 0.0046 (dashed line), 0.01 (dotted line) for the LHC





Dilepton invariant mass distribution for 95% CL parameter

$$\frac{0.91}{\Lambda_\pi^2 m_1^2} \times \text{TeV}^4 = 0.66 \text{ for the Tevatron } (L = 10 \text{fb}^{-1})$$



Dilepton invariant mass distribution for 95% CL parameter

$$\frac{0.91}{\Lambda_\pi^2 m_1^2} \times TeV^4 = 0.0014 \text{ for the LHC } (L = 100 fb^{-1})$$

- Ограничения на константу связи ,  $0.91/\Lambda_\pi^2 m_1^2$ , при которых дополнительное измерение не может быть обнаружено на Tevatron и LHC:

$$Tevatron : \frac{0.91}{\Lambda_\pi^2 m_1^2} \times TeV^4 < 0.66,$$

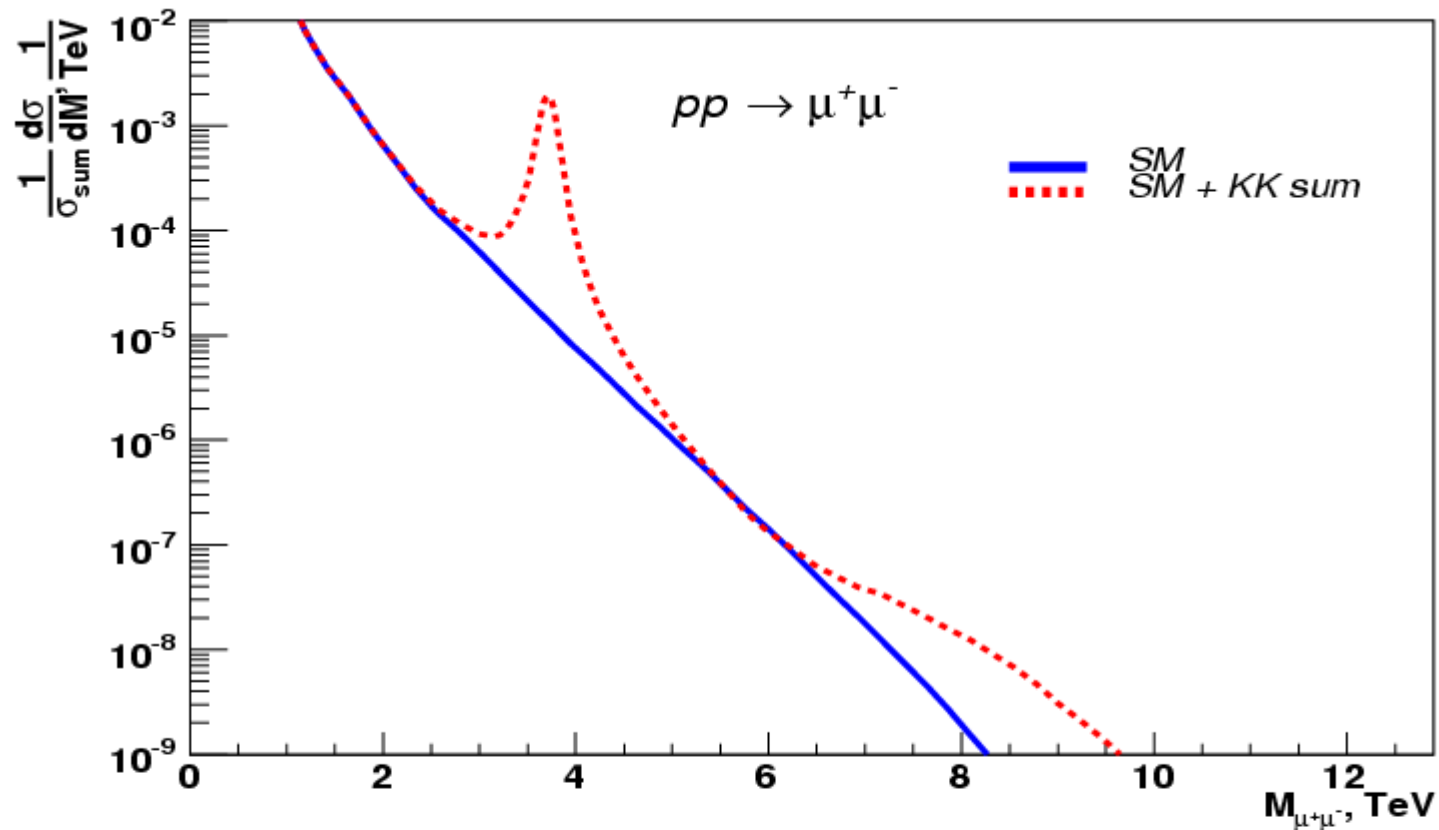
$$LHC : \frac{0.91}{\Lambda_\pi^2 m_1^2} \times TeV^4 < 0.0014.$$

- Наименьшее значение параметра  $\Lambda_\pi$  при котором дополнительное измерение не проявится, можно получить из требования, что ширина резонанса меньше его массы, т.е.  $\Gamma_1 = m_1/\xi$ , где  $\xi > 1$ :

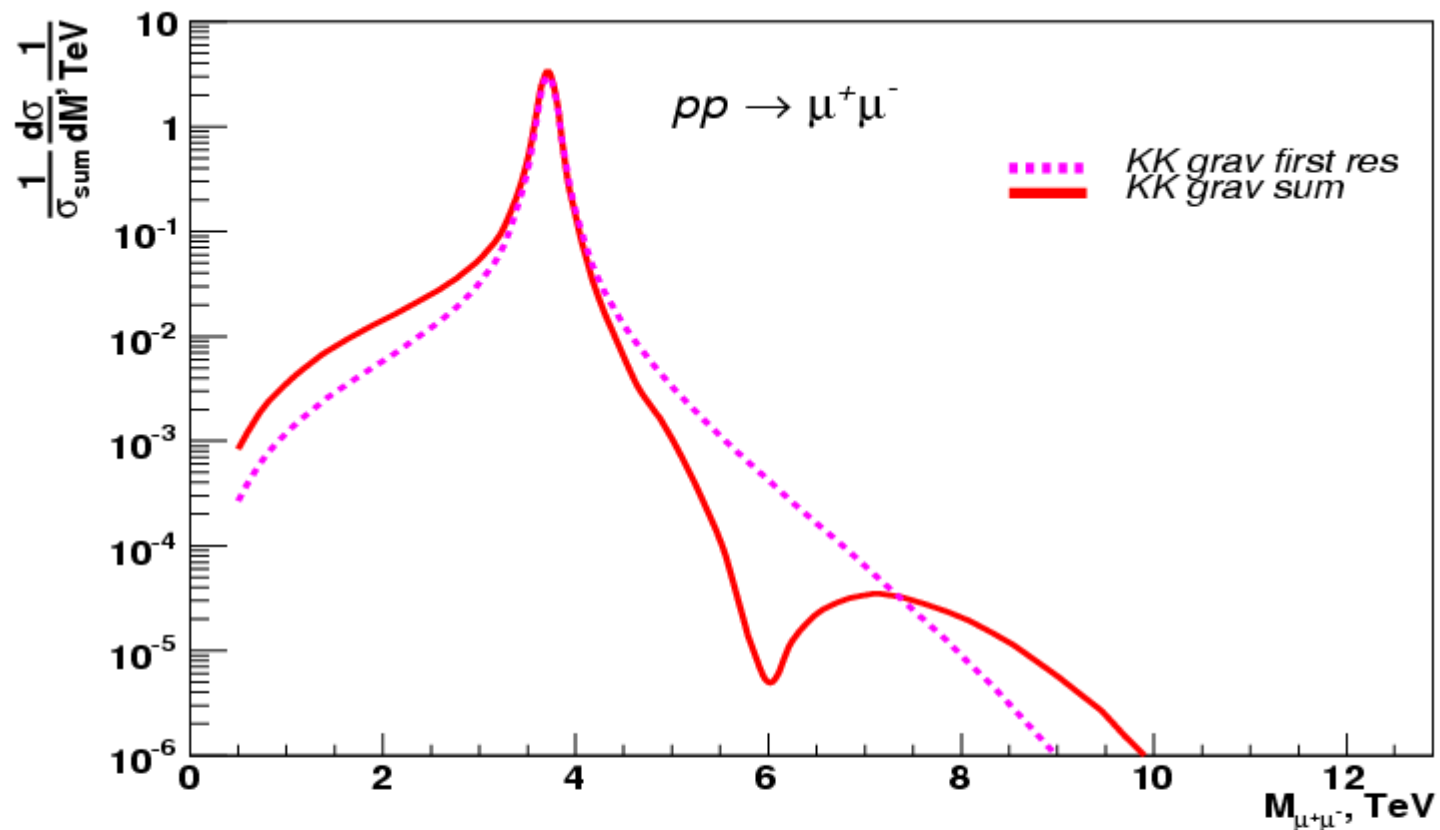
$$Tevatron : \Lambda_\pi > 0.61 \cdot \xi^{1/4} TeV,$$

$$LHC : \Lambda_\pi > 2.82 \cdot \xi^{1/4} TeV.$$

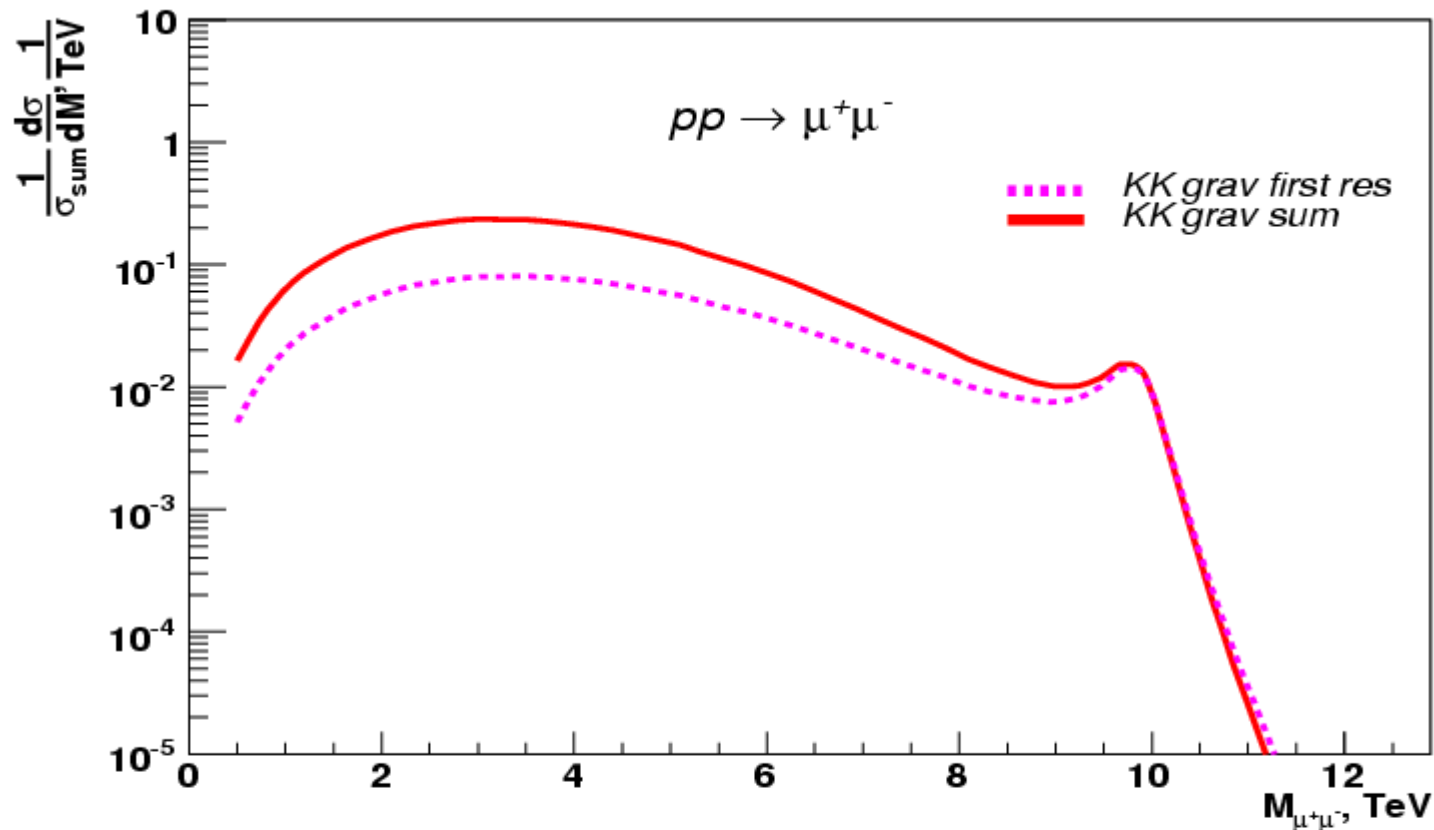
- Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда масса первой моды лежит в достижимой области энергий. В этом случае вклад первой моды должен быть учтен в явно, а вклад остальных мод, начиная со второй, опять может быть учтен с помощью контактного взаимодействия.



Dilepton invariant mass distribution from the SM (solid line) and from the SM plus sum of KK modes including the first KK resonance with  $M_{res} = 3.83 \text{ TeV}$ ,  $\Gamma_{res} = 0.08 \text{ TeV}$ ,  $\Lambda_\pi = 8 \text{ TeV}$  (dashed line) for the LHC



The normalized dilepton invariant mass distribution from the first KK resonance plus the sum of KK tower states starting from the second mode (solid line) and from the first KK resonance only (dashed line) for  $M_{res} = 3.83 \text{ TeV}$ ,  $\Gamma_{res} = 0.08 \text{ TeV}$ ,  $\Lambda_\pi = 8 \text{ TeV}$  for the LHC



The normalized dilepton invariant mass distribution from the sum of KK tower states starting from the first KK mode (solid line) and from the first KK mode only (dashed line) for

$$M_{res} = 10 \text{ TeV}, \Gamma_{res} = 0.5 \text{ TeV}, \Lambda_\pi = 14 \text{ TeV} \text{ for the LHC}$$

## ■ 7 Заключение

- Стабилизированная модель Рэндалл-Сундрума феноменологически приемлема. Если значения фундаментальных параметров лежат в области TeV, то эффекты обусловленные наличием массивных мод, могут быть обнаружены в ускорительных экспериментах.
- Эффективный лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$L_{eff} = \frac{1.82}{\Lambda_\pi^2 m_1^2} T^{\mu\nu} \tilde{\Delta}_{\mu\nu,\rho\sigma} T^{\rho\sigma},$$

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \left( \frac{1}{3} - \frac{\delta}{2} \right) \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma},$$

где  $T_{\mu\nu}$  - тензор энергии-импульса СМ,  $m_1$  и  $\Lambda_\pi$  - масса и константа связи первой тензорной моды, параметр  $\delta$  учитывает вклад скалярных мод.



- Оценка параметра модели  $\Lambda_{\pi}$  по данным ускорителя Tevatron:

$$\Lambda_{\pi} > 0.61 \cdot \xi^{1/4} TeV.$$

- Эффективное контактное взаимодействие, порождаемое бесконечной "башней" гравитонов, должно учитываться также и в случае, когда энергия в с.ц.м. выше порога рождения первой моды.