# СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ ДЕЛЕНИЯ АТОМНЫХ ЯДЕР



### Статистическая модель

$$\Gamma_{f}^{BW} = \frac{1}{2\pi\rho \ (E^{*},J)} \int_{0}^{E^{*}-B_{f}} d\varepsilon \frac{\rho_{sad} \left(E^{*}-B_{f}-\varepsilon,J\right)}{1+e^{-2\pi\varepsilon/(\hbar\omega_{sad})}}$$



Bohr N., Wheeler J.A. The mechanism of nuclear fission Physical Review. 1939. V.56. P.426-450.



#### Динамическая модель (стохастические уравнения)



$$\frac{\partial f(x, p, t)}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} + \beta \frac{\partial}{\partial p}(fp) + \beta m T * \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$$

Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. Physica. 1940. V.7. P.284-304.

Уравнение Ланжевена  

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{2} \left( \frac{p}{m(r)} \right)^2 \frac{dm(r)}{dr} - \frac{dV}{dr} - \beta(r) p + f(t)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p}{m(r)}$$

# Ядерная диссипация - необратимая передача энергии коллективного ядерного движения одночастичным степеням свободы



Y. Abe et al. / Physics Reports 275 (1996) 49-196



Механизм ядерной диссипации ? Амплитуда диссипативных сил ?

### СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ



### ДИНАМИКА КОЛЛЕКТИВНОГО ЯДЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВО ВТОРОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

Ядерная диссипации приводит к тому, что только часть ядер, преодолевших внутренний барьер деления, может достичь второй седловой точки

с "первой попытки"- прямое деление.

### Уравнение Фоккера-Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} + \beta \frac{\partial}{\partial p}(fp) + \beta m T * \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$$

$$f(x, p, t = 0) = f(p)\delta(x - x_1)$$

$$\Phi(\varepsilon) = C \frac{\rho(E^* - U(x_1) - \varepsilon)}{1 + \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon}{\hbar\omega_1}\right)}$$

$$P(x_3,t) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp \int\limits_{x_1}^{x_3} dx f(x,p,t)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp \int\limits_{x_1}^{+\infty} dx f(x,p,t)}$$

$$\underbrace{\mathfrak{B}}_{0,00} = \sum_{i=0}^{h \otimes_{1}} \frac{h \otimes_{3}}{1 + E_{2}} + E_{3} + E_{1} - E_{3} + E_{2} + E_{3} + E_{3}$$

$$t = 8 \times 10^{-21} \text{ s}$$

$$t = 12 \times 10^{-21} \text{ s}$$

$$t^{240} \text{Pu}, \text{E}^{*} = 12 \text{ MeV}, \beta = 0.5 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$$



### УГЛОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСКОЛКОВ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР С ДВУГОРБЫМ БАРЬЕРОМ ДЕЛЕНИЯ

$$W(\theta) = \sum_{i} b_i \left\{ (1 - P_i) W_{i,1s}(\theta) + P_i W_{i,2s}(\theta) \right\}$$

$$W_{i,1s(2s)}(\theta) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{E} B_{i}(J,E) \frac{\sum_{M=-J}^{J} \exp\left(-\frac{M^{2}}{2M_{0}^{2}}\right) \sum_{K=-J}^{J} \frac{1}{2}(2J+1) \left| dM_{M,K}^{J}(\theta) \right|^{2} \exp\left(-\frac{K^{2}}{2K_{0,i}^{2}}\right)}{\sum_{J=0}^{\infty} \sum_{E} B_{i}(J,E) \sum_{M=-J}^{J} \exp\left(-\frac{M^{2}}{2M_{0}^{2}}\right) \sum_{K=-J}^{J} \exp\left(-\frac{K^{2}}{2K_{0,i}^{2}}\right)}$$

- вероятность деления і-го ядра эмиссионного каскада с угловым моментом J и энергией возбуждения Е



 $B_i(J,E) = \overline{\Sigma}$ 

σ<sub>if</sub>(J,E)-вес осколков деления i-го ядра эмиссионногоσ<sub>if</sub>(J,E)каскада в полном выходе осколков



Сечения деления i-го ядра с энергией возбуждения E и угловым моментом J  $\sigma_{if}(J,E)$  рассчитывались в рамках программного комплекса GFOT, в котором реализован формализм Хаузера-Фешбаха.



### СХЕМА РАСЧЕТОВ



# ВРЕМЯ ДЕЛЕНИЯ



 $\textcircled{P}_{238}U + \ \ 28Si; \ \ \square - \ \ 28Si + \ nat}Pt; \\ \textcircled{P}_{232}Th(p,xnf); \ \square - \ \ 232Th(\alpha,xnf) \\ & \diamond^{232}Th(\ \ 3He,xnf)$ 

 $\rho(E,r) = \rho_{int}(E,r)K_{vibr}(E,r)K_{rot}(E),$ 





УГЛОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСКОЛКОВ ДЕЛЕНИЯ: МЕТОД РАСЧЕТОВ, ОСНОВАННЫЙ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О СУЩЕСТВОВАНИИ ЭФФЕКТИВНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ СОСТОЯНИЙ

$$\beta = 1.5 \times 10^{21} \text{ s}^{-1} \qquad \alpha + ^{238}\text{U} \rightarrow ^{242}\text{Pu} \qquad \tau_{K} = 8. \times 10^{-21} \text{ s}$$

 $r/R_{o}$ 

1.6

2

0.8

Т

1.2

0.8

1.2

 $r/R_{o}$ 

1.6

2

0.8

МэВ

2

Т

1.2

 $r/R_o$ 

1.6

### ЗАТУХАНИЕ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ЭФФЕКТОВ



$$B_{f} \leq T \qquad V_{shell} = 0 \qquad F(p,r,J) \sim \exp\left(-\frac{p^{2}/(2m) + V(r,J)}{T}\right) \frac{d\sigma(J)}{dJ} \delta(r - r_{eq})$$

 $\frac{d\sigma(J)}{dJ} = \frac{2\pi}{k^2} \frac{2J+1}{1+\exp\left(\frac{J-J_c}{\delta J}\right)}; J_c \text{ and } \delta J \text{ from Frobrich P., Gontchar I.I. // Phys.Rep. 1998.V.292. P.131.}$ 



$$W_{i}(\theta) = \sum_{M=-J_{i}}^{J_{i}} \sum_{K=-J_{i}}^{J_{i}} \frac{\frac{1}{2} \exp(-M^{2}/2M_{0i}^{2})(2J_{i}+1) \left| d_{M,K}^{J_{i}}(\theta) \right|^{2} \exp(-K^{2}/2K_{0i}^{2})}{\sum_{M=-J_{i}}^{J_{i}} \exp(-M^{2}/2M_{0i}^{2}) \sum_{K=-J_{i}}^{J_{i}} \exp(-K^{2}/2K_{0i}^{2})}$$
  
Эмиссия в r<sub>em</sub>  $M_{0i}^{2} = \frac{T_{i}(r_{em})}{\hbar^{2}} \Im_{||,i}(r_{em})$ 

### $E^*=100 \text{ M} \exists B, \beta=4 \times 10^{21} \text{ c}^{-1}, J=30 \text{ /}$







## ДИНАМИКО-СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ



УГЛОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСКОЛКОВ ДЕЛЕНИЯ



*т<sub>K</sub>* – время релаксации для *K*-моды; *h* – временной шаг численного интегрирования уравнений Ланжевена; *N<sub>f</sub>* - количество Ланжевеновских траекторий, достигших точки разрыва







Угловые распределения осколков деления в реакциях полного слияния деформированных ядер





$$w (J,K) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\substack{S=|I_{tag}-I_p|}}^{\ell} \frac{\partial \sigma (\ell,K_{\ell},K_p) \left| C \frac{I_{tag}, \ell, J}{I_{tag}, K_{\ell},K} \right|^2}{\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \frac{\partial \sigma (\ell,K_{\ell},K_p)}{\sum_{\substack{L=0}}^{\infty} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \frac{\partial \sigma (\ell,K_{\ell},K_p)}{\sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \frac{\partial \sigma (\ell,K_{\ell},K_p) \left| C \frac{S, -\ell, J}{K_{\ell},K_{\ell},K} \right|^2 \left| C \frac{I_{tag}, I_p, S}{I_{tag}, K-I_{tag}-K_{\ell},K-K_{\ell}} \right|^2}{\sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\infty} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \frac{\partial \sigma (\ell,K_{\ell},K_p) \left| C \frac{S, -\ell, J}{K_{\ell},K_{\ell},K} \right|^2 \left| C \frac{I_{tag}, I_p, S}{I_{tag}, K-I_{tag}-K_{\ell},K-K_{\ell}} \right|^2}{\sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\infty} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \frac{\partial \sigma (\ell,K_{\ell},K_p) \left| C \frac{S, -\ell, J}{K_{\ell},K_{\ell},K} \right|^2 \left| C \frac{I_{tag}, I_p, S}{I_{tag}, K-I_{tag}-K_{\ell},K-K_{\ell}} \right|^2}{\sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\infty} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \frac{\partial \sigma (\ell,K_{\ell},K_p) \left| C \frac{S, -\ell, J}{K_{\ell},K} \right|^2 \left| C \frac{I_{tag}, I_p, S}{I_{tag}, K-I_{tag}-K_{\ell},K-K_{\ell}} \right|^2}{\sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\infty} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \frac{\partial \sigma (\ell,K_{\ell},K_p) \left| C \frac{S, -\ell, J}{K_{\ell},K} \right|^2 \left| C \frac{I_{tag}, I_p, S}{I_{tag}, K-I_{tag}-K_{\ell},K-K_{\ell}} \right|^2}{\sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\infty} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \frac{\partial \sigma (\ell,K_{\ell},K_p) \left| C \frac{S, -\ell}{K_{\ell},K} \right|^2 \left| C \frac{I_{tag}, I_p, S}{I_{tag}, K-I_{tag}-K_{\ell},K-K_{\ell}} \right|^2}{\sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\infty} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{\ell} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}^{L} \sum_{\substack{K_{\ell}=-\ell}}$$

$$\frac{\partial \sigma(\ell, K_{\ell}, K_{p}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{s=|I_{tag}-I_{p}|}^{\infty} \sum_{k_{\ell}=-\ell}^{\infty} \sum_{k_{\ell}=-\ell}^{\ell} \sum_{k_{p}=-I_{p}}^{I_{p}} \partial \sigma(\ell, K_{\ell}, K_{p}) }{\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k_{\ell}=-\ell}^{\ell} \sum_{k_{p}=-I_{p}}^{I_{p}} \partial \sigma(\ell, K_{\ell}, K_{p}) } \sin(\theta_{tag}) \sin(\theta_{p}) d\theta_{tag} d\theta_{p} }$$

ag,

 $\mu$  tag

R.D.Butt et al., Phys. Rev. C, V. 66 (2002) 044601

$$V = V_{Nucl} + V_{Coul} + V_{Rot}$$

$$V_{Nucl}(R,\theta) = \frac{-V_{\theta}}{1 + exp\left\{\frac{R - R_{p} - R_{tag}(\theta)}{a}\right\}} \qquad R_{tag} = r_{\theta}A_{tag}^{1/3} \left\{1 + \beta_{2}Y_{2\theta}(\theta)\right\} \qquad R_{p} = r_{\theta}A_{p}^{1/3}$$

$$V_{Rot}(R,\ell) = \frac{\hbar^{2}\ell(\ell+1)}{2\mu R^{2}}$$

$$V_{Coul}\left(R,\theta_{tag},\theta_{p},\beta_{tag},\beta_{p}\right) = \frac{Z_{p}Z_{tag}e^{2}}{R} + \left(\frac{9}{20\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{Z_{p}Z_{tag}e^{2}}{R^{3}}\right) \sum_{i=p,tag} R_{i}^{2} \beta_{i} P_{2}(\cos\theta_{i}) + \left(\frac{3}{7\pi}\right) \left(\frac{Z_{p}Z_{tag}e^{2}}{R^{3}}\right) \sum_{i=p,tag} R_{i}^{2} \left(\beta_{i} P_{2}(\cos\theta_{i})\right)^{2}$$

$$\hbar\omega(\ell,\theta) = \hbar \left\{ \left[ \frac{d^2 V(\ell,\theta)}{dR^2} \right] \frac{1}{\mu} \right\}^{1/2}$$

$$\sigma(\ell,\theta) = \left(\frac{\pi\hbar^2}{2\,\mu E}\right) \frac{2\ell+1}{1+\exp(2\pi(B(\ell,\theta)-E)/\hbar\omega(\ell,\theta))} \quad \sigma_{tot} = \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sigma(l,\theta)\sin(\theta)d\theta$$



E<sub>lab</sub>, M<sub>3</sub>B

 $a = 0.47 \, fm \, (C+U)$ 









## QUASIFISSION



(a) -<sup>32</sup>S + <sup>208</sup>Pb и (б) - <sup>28</sup>Si + <sup>208</sup>Pb





1.2 1.6 2 2.4 2.8

 $\mathbf{R} / \mathbf{R}_0 = 1$ 

40

J, n

60

80

100

 $\mathbf{K} = \mathbf{0} \hbar$ 

R / R<sub>0</sub>







### Mass-angle correlations



$$\begin{array}{c} 48_{Ca+}168_{Er-2}216_{Ra} \\ \hline & E'-41 \ MeV \\ 0 \ m-72\pm10 \\ \hline & m-72\pm10 \\ \hline & m-72\pm10 \\ \hline & m-78\pm10 \\ \hline &$$

Figure 2: Experimental angular distributions of fission fragments from the reaction  ${}^{48}Ca+{}^{168}Er$  at  $E_{lab} = 195 \text{ MeV}.$ 

#### Согласованное описание экспериментальных данных по -вероятностям деления ядер изотопов Pu и Am;

- выходам изомеров формы для реакций  $\alpha$  + 238U при E $\alpha$  = (20÷32) МэВ и d + 242,240Pu при Ed = (20÷30) МэВ;

-длительностям деления для реакции  $\alpha$  + 238U при E $\alpha$  = (20÷32) МэВ;

-угловым распределениям осколков деления для реакций α + 238U, 237Np при Eα = (20÷100) МэВ



### **INITIAL CONDITIONS**

$$\Phi(r, p, J, K, M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mT}} exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right) \delta(r - r_o) w(J, K, M)$$
$$w(J, K, M) = \frac{d\sigma}{dJ} w_J(K, M)$$

Wong model for  $\frac{d\sigma}{dJ}$ 



