

ФОРМ ФАКТОРЫ ПСЕВДОСКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ ИЗ ПРАВИЛ СУММ КХД

МГУ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА, ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
ГОЛИКОВА ИРИНА



МОТИВАЦИЯ

Цель – изучить форм факторы псевдоскалярных мезонов на примере $F_\pi(Q^2)$ и $F_{P\gamma}(Q^2)$, $P = (\pi^0, \eta, \eta')$ в широкой области значений переданного импульса Q .

Актуальность

• Упругий пионный форм фактор

- Теоретическое описание пионного форм фактора в области $Q = 3 - 8 \text{ GeV}^2$ методами КХД – сложная задача. Для ее решения используется несколько версий метода правил сумм КХД. Окончательных результатов не получено, имеется сильное несоответствие между результатами, полученными с использованием различных версий правил сумм КХД.
- Экспериментальное изучение пионного форм фактора в нижней части этой области станет возможным вследствие усовершенствования JLab в течение следующих нескольких лет.

• Переходные форм факторы

- Для η, η' модель ЛД дает хорошее описание экспериментальных данных. Для случая π есть несоответствие между предсказаниями модели ЛД и данными BaBar для больших Q .
- Однако, в потенциальной модели в квантовой механике установлено, что точность правила сумм в пределе ЛД быстро растет с ростом Q .
- Почему форм факторы η, η' -мезонов и форм фактор пиона так по-разному ведут себя при больших Q ?
- При этом, из данных BaBar можно сделать вывод, что для пиона нарушается модель ЛД.

Интересно ответить на эти вопросы.

ПУТЬ К ЦЕЛИ

Проблема

Цель – изучить форм факторы псевдоскалярных мезонов на примере $F_\pi(Q^2)$ и $F_{P\gamma}(Q^2)$, $P = (\pi^0, \eta, \eta')$ в широкой области значений переданного импульса Q .

Какова точность правил сумм в пределе ЛД и как она изменяется с ростом Q ?

Путь к цели

- Рассматриваем аналогичную задачу в точно решаемой модели – квантовой механике:
 - Форм факторы имеют те же свойства, что и в КХД;
 - Операторное разложение – аналогичную структуру;
 - Правила сумм – аналогичный вид.
- Поэтому, используя значения параметров взаимодействия, характерные для адронной физики, рассчитываем получить надежные результаты для КХД.

СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ПРАВИЛ СУММ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

- Базовые объекты для построения правил сумм:

- **Поляризационный оператор:**

$$\Pi(E) = \langle r' = 0 | G(E) | r = 0 \rangle$$

- **Вершинная функция:**

$$\Gamma(E, E', Q) = \langle r' = 0 | G(E) J(q) G(E') | r = 0 \rangle$$

$G(E) = (H - E)^{-1}$ – полная функция Грина, $H = H_0 + V(r)$ – полный Гамильтониан, $V(r)$ – потенциал взаимодействия

- Разложение функции Грина по степеням взаимодействия

$$G(E) = G(E)_0 - G(E)_0 V G(E)_0 + \dots$$

генерирует соответствующее разложение Π и Γ :

$$\Pi(E) = \Pi_0(E) + \Pi_1(E) + \dots, \Gamma(E, E', Q) = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots$$

- Преобразование Бореля $\frac{1}{a-E} = e^{-aT}$.
- Строим дуальный коррелятор.
- **Предположение о дуальности.** Вклад возбужденных состояний дуален области высоких энергий пертурбативных диаграмм нерелятивистской теории возмущений.
- Положим $T = 0$ - предел ЛД. Все степенные поправки исчезают, правило сумм принимает вид.

- **Упругий форм фактор**

$$F_{el}(Q) = \frac{1}{R_g} \int_0^{k_{eff}} 2k dk \int_0^{k_{eff}} 2k' dk' \Delta$$

- **Переходный форм фактор**

$$F_{trans}(Q) = \frac{1}{\sqrt{R_g}} \int_0^{\overline{k_{eff}}} dk \int_0^{\infty} dk' \Delta$$

ТОЧНЫЙ ФОРМ ФАКТОР И ФОРМ ФАКТОР ЛД В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В потенциальной модели в терминах волновых функций:

- Упругий форм фактор

$$F_{el}(Q) = \int d^3 k \exp(i\vec{q}\vec{r}) |\Psi(r)|^2 = \int d^3 k \Psi(\vec{k} + \vec{q})$$

- Аналог переходного форм фактора

$$F_{trans}(Q) = \langle \Psi | J(q) | r = 0 \rangle$$

Волновые функции Ψ вычисляются из уравнения Шредингера для Гамильтониана

$$H = \frac{\vec{k}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} + V_{conf}(r)$$

Асимптотическое поведение

- Упругий форм фактор

$$F_{el\infty}(Q) = \frac{16\pi\alpha m R_g}{Q^4}$$

- Переходный форм фактор

$$F_{trans\infty}(Q) = \frac{2m\sqrt{R_g}}{Q^2}$$

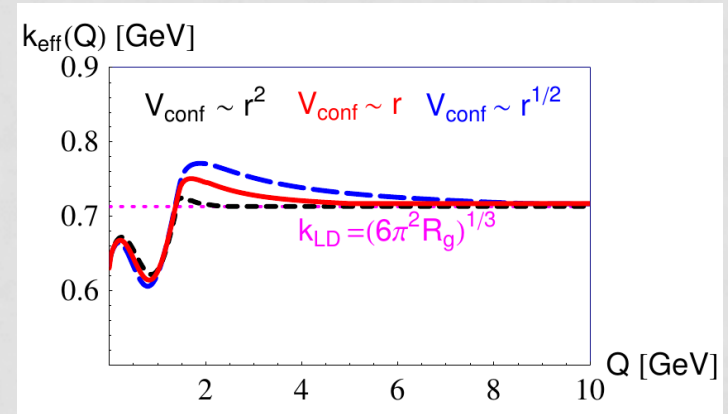
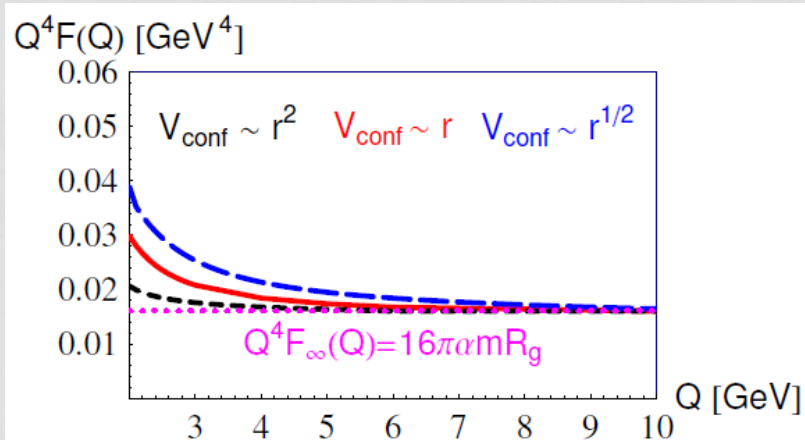
Чтобы оценить точность модели ЛД и степень влияния вида потенциала конфайнмента на нее, рассматриваем несколько потенциалов:

$$V_{conf}(r) = \sigma_n (mr)^n, n = 1, 2, \frac{1}{2}$$

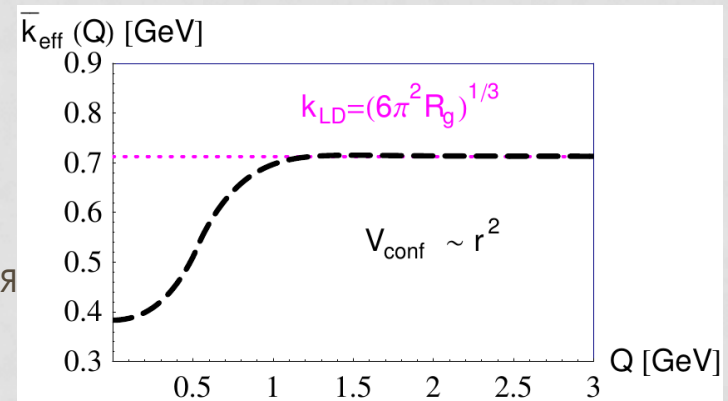
Параметры σ_n выбраны так, чтобы уравнение Шредингера давало для каждого потенциала одни и те же значения волновой функции при $Q=0$.

УПРУГИЙ ФОРМ ФАКТОР В ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Слева: точные форм факторы для различных потенциалов конфайнмента.
Справа: соответствующие эквивалентные эфффективные пороги.



Независимо от вида потенциала конфайнмента, точность модели ЛД растет с ростом Q , начиная уже с $Q \sim 2 - 3 \text{ GeV}$. Это означает, что точный порог приближается к порогу ЛД.



МОДЕЛЬ ЛД В КХД

Базовый объект для вычислений в методе правил сумм – корреляционная функция.

- **Для упругого:**

$$\langle 0 | T j_\alpha^5 j_\mu j_\beta^5 | 0 \rangle$$

- **Для переходного:**

$$\langle 0 | T j_\mu^5 j_\alpha j_\beta | 0 \rangle$$

j_α^5, j_β^5 - интерполирующий аксиальный ток пиона, j_μ - электромагнитный ток.

В КХД этот коррелятор может быть вычислен с помощью операторного разложения. Затем применяется предположение о кварк-адронной дуальности.

Вклад возбужденных состояний дуален области высоких энергий пертурбативных кварковых диаграмм.

Используя это предположение, в киральном пределе исчезающих кварковых масс, правило сумм принимает вид:

$$f_\pi^2 F_\pi(Q^2) = \int_0^{s_{eff}(\tau, Q^2)} ds_1 \int_0^{s_{eff}(\tau, Q^2)} ds_2 e^{-\frac{(s_1+s_2)\tau}{2}} \Delta_{pert}(s_1, s_2, Q^2) + \frac{\langle \alpha_s G^2 \rangle}{24\pi} \tau + \frac{4\pi\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{81} (13 + Q^2\tau)\tau^2 + \dots$$

$\Delta_{pert}(s_1, s_2, Q^2)$ - двойные спектральные плотности трехточечных диаграмм теории возмущений.

Мы хотим изучать форм фактор при больших Q . Форм фактор связанного состояния должен убывать с ростом Q . Но степенные поправки в правой части – полиномы по Q и поэтому они растут с Q . Т.о., это выражение не может быть использовано напрямую при больших Q . Чтобы использовать правило сумм при больших Q существует несколько возможностей. Одна из них – положить $\tau = 0$.

Предел ЛД $\tau \rightarrow 0$. Тогда все степенные поправки исчезают.

- **Для упругого:**

$$F_\pi(Q^2) = \frac{1}{f_\pi^2} \int_0^{s_{eff}(Q^2)} ds_1 \int_0^{s_{eff}(Q^2)} ds_2 \Delta_{pert}(s_1, s_2, Q^2)$$

- **Для переходного:**

$$F_{\pi\gamma}(Q^2) = \frac{1}{f_\pi} \int_0^{s_{eff}(Q^2)} ds \Delta_{pert}(s, Q^2), \quad s_{eff}(Q^2 \rightarrow \infty) \rightarrow 4\pi^2 f_\pi^2$$

СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ И ФОРМ ФАКТОРОВ

Спектральные плотности

- **Векторное тождество Уорда** при $Q^2 = 0$ связывает 3- и 2-точечные функции

$$\lim_{Q \rightarrow 0} \Delta_i(s_1, s_2, Q) = \rho_i(s_1) \delta(s_1 - s_2)$$

- **Прямые вычисления**

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{Q \rightarrow \infty} \Delta_0(s_1, s_2, Q) \sim \frac{1}{Q^4} \\ \lim_{Q \rightarrow \infty} \Delta_1(s_1, s_2, Q) = \frac{8\pi}{Q^2} \rho_0(s_1) \rho_0(s_2) \end{array} \right.$$

Форм факторы

- **Нормировка:** $F_\pi(0) = 1$. **Аксиальная аномалия:** $F_{P\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi^2 f_P}$
- **Факторизация** при $Q^2 \rightarrow \infty$:

Положим:

$$s_{eff}(Q^2 = 0) = \frac{4\pi^2 f^2 \pi}{1 + \frac{\alpha_S}{\pi}}, \quad s_{eff}(Q^2 \rightarrow \infty) = 4\pi^2 f^2 \pi,$$

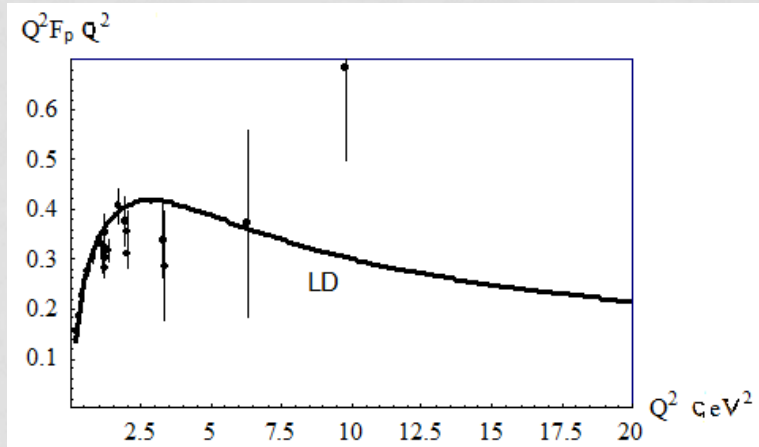
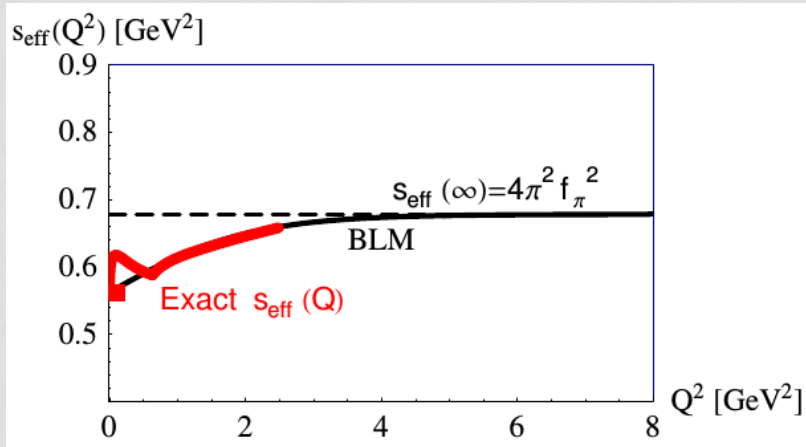
тогда форм фактор, полученный из правила сумм Δ удовлетворяет правильному условию нормировки при $Q^2 = 0$ и воспроизводит асимптотическое поведение в соответствии с факторизационной теоремой для форм фактора при $Q^2 \rightarrow \infty$.

Эти два значения мало отличаются друг от друга. Построим интерполяционную функцию $s_{eff}(Q^2)$ для всех Q^2 .

Из экспериментальных данных можно получить точки для точного s_{eff} .

УПРУГИЙ ФОРМ ФАКТОР ПИОНА В КХД

- **Слева:** эквивалентный порог для экспериментальных данных и версия модели ЛД. Эти результаты означали бы, что точность модели ЛД растет с ростом Q^2 .
- **Справа:** предсказания модели ЛД для упругого форм фактора пиона.



В недалеком будущем JLab ожидается получить данные в области переданных импульсов до $Q^2 = 8 \text{ GeV}^2$. Эти данные должны решить указанные противоречия.

$\eta, \eta' \rightarrow \gamma\gamma^*$ ПЕРЕХОДНЫЙ ФОРМ ФАКТОР

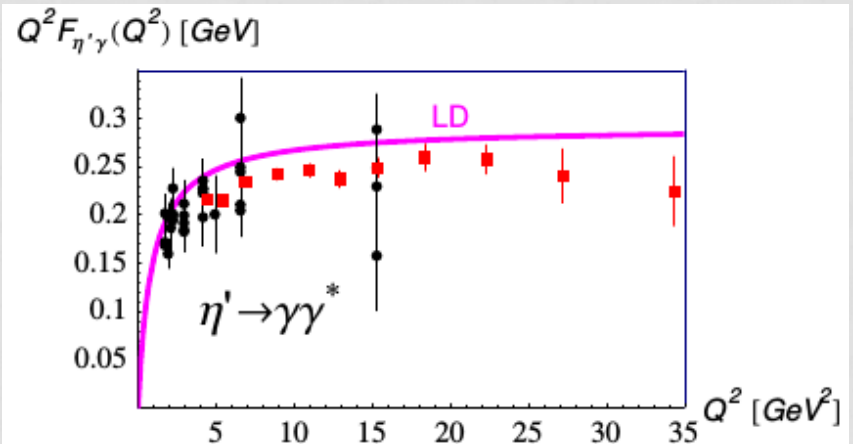
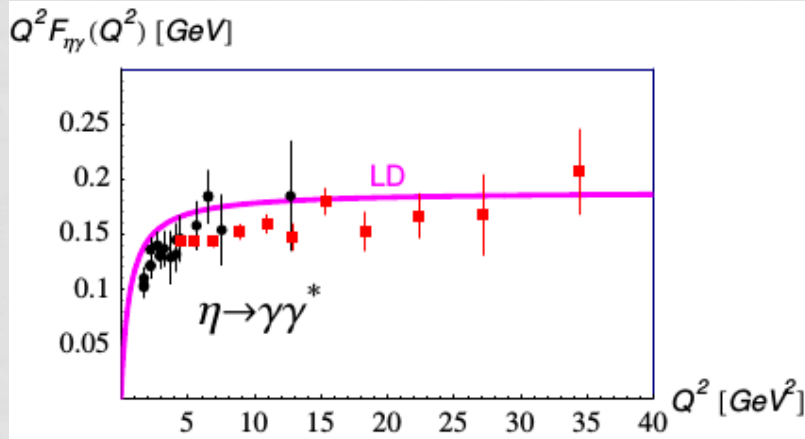
Стандартная схема смешивания $\eta - \eta'$, предложенная Фельдманом и модель ЛД для нестранной и странной компонент:

$$F_{\eta\gamma} = \cos(\phi) F_{n\gamma} - \sin(\phi) F_{s\gamma}, \quad F_{\eta'\gamma} = \cos(\phi) F_{n\gamma} - \sin(\phi) F_{s\gamma}, \quad \phi \simeq 38^\circ,$$

$$n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d), \quad s \rightarrow \bar{s}s.$$

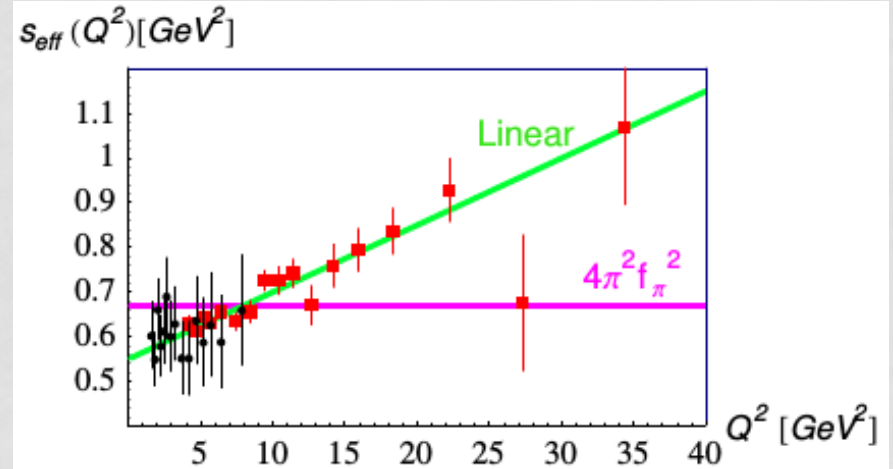
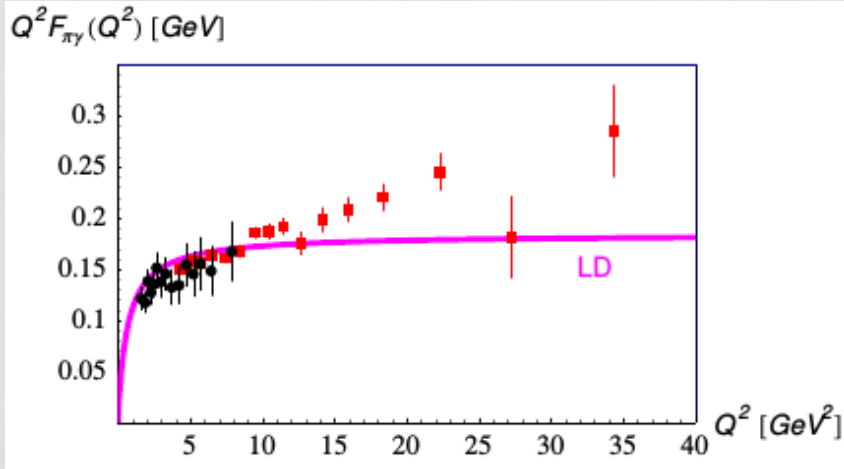
$$F_{n\gamma}(Q^2) = \frac{1}{f_n} \int_0^{s^{(n)_{eff}}(Q^2)} ds \Delta_n(s, Q^2), \quad F_{s\gamma}(Q^2) = \frac{1}{f_s} \int_0^{s^{(s)_{eff}}(Q^2)} ds \Delta_s(s, Q^2)$$

Два различных эффективных порога: $s^{(n)_{eff}}(Q^2) = 4\pi^2 f_n^2$, $s^{(s)_{eff}}(Q^2) = 4\pi^2 f_s^2$, $f_n \simeq 1.07f_\pi$, $f_s \simeq 1.36f_\pi$.

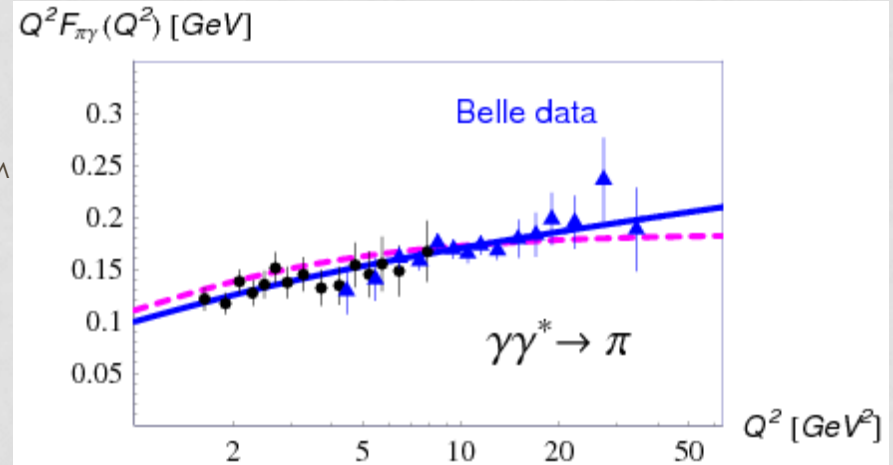


Нет несоответствия между моделью ЛД и экспериментальными данными.

$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma^*$ ПЕРЕХОДНЫЙ ФОРМ ФАКТОР



- **Слева:** предсказания модели ЛД и данные ВаВар.
- **Справа сверху:** эквивалентные пороги для данных ВаВар (могут быть аппроксимированы линейно растущей функцией. Это означает, что в противоположность случаям η , η' и результатам, полученным в квантовой механике, нарушение ЛД растет с ростом Q даже при $Q^2 \cong 40 \text{ GeV}^2$)
- Несоответствие с данными ВаВар.
- Почему нестранные компоненты в η , η' и π^0 должны вести себя настолько по-разному?
- **Справа внизу:** более поздние данные Belle.
- Согласие с более поздними данными Belle.



Принимая во внимание данные Belle, можно сделать вывод об одинаковом поведении $F_{P\gamma}(Q^2)$, $P = (\pi^0, \eta, \eta')$

ВЫВОДЫ

- Показано, что один из ключевых параметров метода правил сумм s_{eff} в правилах сумм для форм факторов зависит от Q^2 . Значение s_{eff} при $Q^2 \rightarrow \infty$ фиксируется факторизационными теоремами; при малых Q^2 величина s_{eff} отличается от $s_{eff}(Q^2 \rightarrow \infty)$. Показано, что s_{eff} не является универсальным, а зависит от типа форм фактора (отличается для упругого и переходного) и вида $V_{conf}(r)$.
- В потенциальной модели изучен предел ЛД в правилах сумм для форм факторов. В этом пределе все эффекты конфайнмента "спрятаны" в $s_{eff}(Q^2)$. Приближение ЛД возникает, когда мы полагаем $s_{eff} = s_{eff}(Q^2 \rightarrow \infty)$ для всех Q^2 . В потенциальной модели, показано, что точность модели ЛД улучшается с ростом Q^2 в области $Q^2 > 4 - 6 \text{ GeV}^2$ независимо от вида $V_{conf}(r)$.
- Исследован $F_\pi(Q^2)$ в КХД. Из экспериментальных данных вычислен точный s_{eff} при малых $Q^2 < 4 \text{ GeV}^2$. На основе установленных общих свойств s_{eff} и данных при малых Q^2 предсказано, что s_{eff} для $F_\pi(Q^2)$ будет достигнут уже при $Q^2 \approx 6 - 8 \text{ GeV}^2$. Предсказание будет проверено в эксперименте JLab. Подтверждение предсказания будет означать, что мы имеем надежное теоретическое описание $F_\pi(Q^2)$ в области $Q^2 > 6 - 8 \text{ GeV}^2$ до асимптотически больших значений.
- Изучены $F_{\rho\gamma}(Q^2)$ псевдоскалярных мезонов в КХД. Проверено, что приближение ЛД согласуется с имеющимися данными по форм факторам η , η' и η_c -мезонов в широком диапазоне Q^2 . Показано, что данные BaBar по $F_{\rho\gamma}(Q^2)$ противоречат данным по η , η' и η_c - мезонам, и общим свойствам переходных форм факторов, установленным в квантовой механике. Более поздние данные Belle находятся в согласии с теоретической картиной переходных форм факторов, и с данными по форм факторам других легких псевдоскаляров.
- Показано, что правила сумм КХД в пределе ЛД являются эффективным теоретическим методом, позволяющим получать надежные предсказания для адронных форм факторов в широкой области Q^2 .

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Спасибо за внимание!

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СЛАЙДЫ

ДВУХ- И ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ КОРРЕЛЯТОРЫ

- Двухточечный коррелятор

$$\Pi(p^2) = \int \langle \Omega | T j(x) j^+(0) | \Omega \rangle e^{ipx} dx$$

Ω физический вакуум; $j(x)$ краткое обозначение интерполирующего тока $j_{5\alpha}(x)$ положительно заряженного пиона $\langle \Omega | j_{5\alpha}(0) | \pi(p) \rangle = ip_\alpha f_\pi$; для краткости опускаем лоренцовские индексы.

- Трехточечный коррелятор

$$\Gamma(p_1^2, p_2^2, q^2) = \int \langle \Omega | T j(x_1) J(0) j^+(x_2) | \Omega \rangle e^{ip_1 x_1 - ip_2 x_2} dx_1 dx_2$$

Здесь $q = p_1 - p_2$; $J(0)$ краткое обозначение электромагнитного тока $J_V(0)$.

Рассматриваем случай пространственноподобных переданных моментов:

$$Q^2 = -q^2 > 0$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОРЕЛЯ ДЛЯ ДВУХТОЧЕЧНОГО КОРРЕЛЯТОРА

Вместо функций Грина в пространстве Минковского удобно использовать операторы эволюции в Евклидовом пространстве, которые появляются после преобразования Бореля.

Преобразование Бореля приводит к **нескольким улучшениям**:

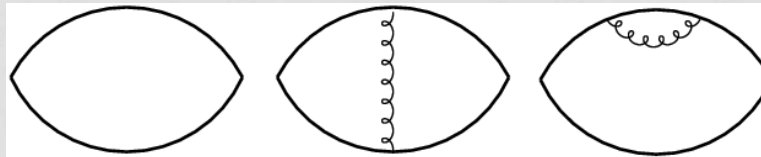
- подавляет вклады возбужденных состояний;
- улучшает сходимость пертурбативного разложения;
- обеспечивает необходимое "размазывание", требуемое кварк-адронной дуальностью.

Преобразование Бореля $p^2 \rightarrow \tau$ для двухточечного коррелятора:

$$\Pi_{OPE}(\tau) = \int_0^\infty \rho_{pert}(s) e^{-s\tau} ds + \Pi_{cond}(\tau),$$

$$\rho_{pert}(s) = \rho_0(s) + \alpha_s \rho_1(s) + O(\alpha_s^2)$$

□ спектральные плотности двухточечных диаграмм теории возмущений:



На языке промежуточных адронных:

$$\Pi(\tau) = f_\pi^2 e^{-m_\pi^2 \tau} + \textit{excited states}$$

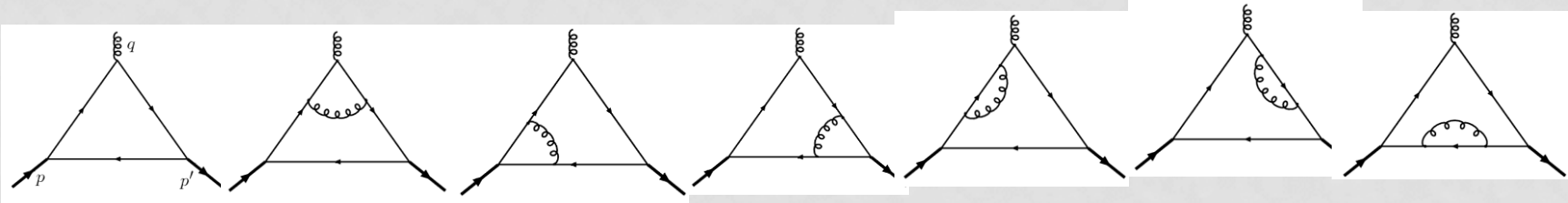
ДВОЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОРЕЛЯ ДЛЯ ТРЕХТОЧЕЧНОГО КОРРЕЛЯТОРА

- Двойное преобразование Бореля $p_1^2 \rightarrow \frac{\tau}{2}; p_2^2 \rightarrow \frac{\tau}{2}$ для трехточечного коррелятора:

$$\Gamma(\tau, Q) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Delta_{pert}(s_1, s_2, Q) e^{-\frac{s_1\tau}{2}} e^{-\frac{s_2\tau}{2}} ds_1 ds_2 + \Gamma_{cond}(\tau, Q)$$

$$\Delta_{pert}(s_1, s_2, Q) = \Delta_0(s_1, s_2, Q) + \alpha_s \Delta_1(s_1, s_2, Q) + O(\alpha_s^2)$$

- Δ_i – двойные спектральные плотности трехточечных диаграмм теории возмущений:



На языке промежуточных адронных:

$$\Gamma(\tau, Q) = F(Q) f_\pi^2 e^{-m_\pi^2 \tau} + \text{excited states}$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ ДУАЛЬНОСТИ

Вклад возбужденных состояний дуален области высоких энергий свободных кварковых диаграмм теории возмущений.

Используя предположение дуальности, правила сумм принимают вид:

для двухточечного коррелятора:

$$f_\pi^2 e^{-m_\pi^2 \tau} = \int_0^{\bar{s}_{\text{eff}}(\tau)} \rho_{\text{pert}}(s) e^{-s\tau} ds + \frac{\langle \alpha_s G^2 \rangle}{12\pi} \tau + \frac{176\pi\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{81} \tau^2 + \dots$$

для трехточечного коррелятора:

$$F(Q) f_\pi^2 e^{-m_\pi^2 \tau} = \int_0^{s_{\text{eff}}(Q,\tau)} \int_0^{s_{\text{eff}}(Q,\tau)} \Delta_{\text{pert}}(s_1, s_2, Q) e^{-\frac{s_1\tau}{2}} e^{-\frac{s_2\tau}{2}} ds_2 ds_1 + \frac{\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle}{24} \tau + \frac{4\pi\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{81} \tau^2 (13 + Q^2 \tau) + \dots$$

Свойства спектральных плотностей

- При $Q \rightarrow 0$ спектральные плотности двух- и трехточечных функций связаны между собой **тождеством Уорда**:

$$\lim_{Q \rightarrow 0} \Delta_i(s_1, s_2, Q) = \rho_i(s_1) \delta(s_1 - s_2)$$

- Для $Q \rightarrow \infty$ прямые вычисления дают:

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{Q \rightarrow \infty} \Delta_0(s_1, s_2, Q) \sim \frac{1}{Q^4}; \\ \lim_{Q \rightarrow \infty} \Delta_1(s_1, s_2, Q) = \frac{8\pi}{Q^2} \rho_0(s_1) \rho_0(s_2). \end{array} \right.$$

Свойства пионного форм фактора в КХД

- **Нормировка**:

$$F_\pi(0) = 1$$

- **Факторизационная теорема**:

$$F_\pi(Q) = \frac{8\pi f_\pi^2 \alpha_s}{Q^2} + \dots$$

Если положим

Форм фактор, полученный из правила сумм ЛД будет удовлетворять двум этим условиям.

$$s_{eff}(Q \rightarrow 0) = \frac{4\pi^2 f_\pi^2}{1 + \frac{\alpha_s}{\pi}}; \quad s_{eff}(Q \rightarrow \infty) = 4\pi^2 f_\pi^2.$$

Эти два значения для $s_{eff}(Q)$ мало отличаются друг от друга!

Т.о. легко построить интeрполяционную функцию для $s_{eff}(Q)$ для всех Q .

Заметим: не ожидается, чтобы модель хорошо работала при малых Q , т.к. в этой области неприменимо операторное разложение.