ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА»
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КАФЕДРА ОБЩЕЙ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

ЭФФЕКТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С ДИЛАТОНОМ И АКСИОНОМ

по материалам кандидатской диссертации

Мошарев Павел Александрович

Научный руководитель:
Д. ф.-м. н., профессор
Кечкин Олег Вячеславович

Семинар ОЭПВАЯ, Москва, 2020

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

- Главной целью теоретической физики на протяжении последнего столетия является построение единой теории поля, которая описывала бы все четыре фундаментальных взаимодействия и все поля материи. Многие из существующих кандидатов на роль Теории Великого Объединения предсказывают существование новых полей и частиц, не наблюдавшихся в эксперименте.
- Одной из самых важных проблем физики нашего времени является поиск объяснения природы скрытой массы во Вселенной (тёмной материи). Поиски тёмной материи ведутся как в экспериментах (регистрация так называемых WIMP, слабовзаимодействующих массивных частиц), так и в теории (предсказание возможных кандидатов на роль WIMP, исходя из общих принципов физики элементарных частиц и взаимодействий).
- Открытие в 2012 году бозона Хиггса подтвердило факт существования в нашем мире фундаментальных скалярных полей. Вопрос о существовании других подобных полей и о их взаимодействиях с известными полями остался открытым.
- Многие Теории Великого Объединения предсказывают модификацию классической электродинамики Максвелла, включающую дополнительные скалярное и псевдоскалярное поля – дилатон и аксион. Дилатон-аксионное обобщение классической электродинамики является в некотором смысле «минимальным». Аксион также естественным образом возникает в одном из самых популярных решений «сильной CP-проблемы» квантовой хромодинамики. Обе частицы, дилатон и аксион, рассматриваются в качестве кандидатов на роль тёмной материи. Все перечисленные факты делают актуальным исследование взаимодействия дилатонного и аксионного полей с электромагнитным полем в рамках классической и квантовой теории поля.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Исследование электродинамики Максвелла с дилатоном и аксионом в стационарном случае.
2. Разработка аналитических методов поиска точных решений.
3. Формулирование возможных принципов экспериментальной проверки теории.

ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

1. Анализ существующих нелинейных моделей теории поля
2. Исследование стационарной электродинамики с дилатоном известными средствами
3. Разработка новых методов поиска точных решений в электродинамике с дилатоном
4. Исследование стационарной электродинамики с аксионом, построение точных решений
5. Формулирование принципов экспериментальной проверки теории на основании полученных точных решений

- Уравнения Максвелла:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

- 4-потенциал поля

$$A^{\mu} = \{A^0, \vec{A}\}$$
$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$$
$$\vec{E} = - \nabla \cdot A^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- Тензор электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

- Лагранжиан классической электродинамики:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

- Центрально-симметричное решение уравнений с нулевой асимптотикой на бесконечности в случае электростатики – кулоновское поле:

$$\Delta A^0 = 0; \quad A^0 = \frac{Q}{r}$$

- Взаимодействие пробных заряженных частиц с электромагнитным полем осуществляется посредством силы Лоренца:

$$\frac{d\, p^{\mu}}{ds} = eF^{\mu\nu} u_{\nu}$$

› Теория Борна-Инфельда:

$$L_{BI} = -b^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{2b^2}I_1-\frac{1}{4b^4}I_2^2}-1\right)$$

где $I_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $I_2 = \tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}$

- Главный результат – конечная величина поля во всём пространстве.

› Теория Гейзенберга-Эйлера

$$L_{HE} = -\frac{1}{4}I_1 + \frac{e^2}{\hbar c}\int_0^\infty e^{-\eta}\frac{d\eta}{\eta^3}\left[i\eta^2\frac{I_2}{2}\frac{\cos\left(\frac{\eta}{E_0}\sqrt{-\frac{1}{2}I_1+i\,I_2}\right)+c.c}{\cos\left(\frac{\eta}{E_0}\sqrt{-\frac{1}{2}I_1+i\,I_2}\right)-c.c}+E_0^2+\frac{\eta^2}{6}I_1\right]$$

Рассматриваются и другие виды нелинейной электродинамики типа Борна-Инфельда:

› Логарифмическая:

$$L_{LOG} = -b^2\ln\left(1+\frac{1}{b^2}I_1-\frac{1}{2b^4}I_2^2\right)$$

› Экспоненциальная:

$$L_{EXP} = -I_1 e^{-bI_1}$$

В общем случае разложение до второго порядка по инвариантам даёт лагранжиан нелинейной электродинамики: $L_{NE} = -\frac{1}{4}I_1 + aI_1^2 + bI_2^2$

- Электродинамика Максвелла:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} I_1$$

- С алгебраической точки зрения для достижения общности описания разумно включить в лагранжиан второй независимый инвариант электромагнитного поля $I_2 = \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. Так как он является псевдоскалярной величиной, есть всего два способа это сделать: возвести его в чётную степень или домножить на новое псевдоскалярное поле. Это новое поле æ называется аксионом.
- Для достижения полной общности первый инвариант можно тоже домножить на дополнительное скалярное поле. Выражение для него подберем таким образом, чтобы в случае, когда дополнительные поля исчезают, мы получали лагранжиан классической электродинамики. Введенное таким образом поле ϕ называется дилатоном. В результате, добавив кинетические члены дилатона и аксиона, получим лагранжиан следующего вида:

$$L = -\frac{1}{4} e^{\alpha\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \gamma æ \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu æ \partial^\mu æ$$

- Величины α и γ – произвольные константы связи.

- ОТО – теория, описывающая гравитационное взаимодействие. Интервал между событиями в четырехмерном пространстве-времени:
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$
$g_{\mu\nu}$ - метрический тензор, имеющий 10 независимых компонент, динамика которых (в вакууме) описывается уравнениями Эйнштейна
$$R_{\mu\nu} = 0,$$
где $R_{\mu\nu}$ - тензор кривизны, составленный из компонент метрического тензора и их производных до второго порядка включительно.
- ОТО – нелинейная теория. На сегодняшний момент не найдено общего решения уравнений Эйнштейна.
- В некоторых случаях бывает удобно записать интервал в следующем виде:
$$ds_4^2 = f\left(dt + \omega_k dx^k\right)^2 - f^{-1} ds_3^2$$
- В стационарном случае динамика функций f и ω_k описывается независимо от остальных компонент метрического тензора. Соответствующий лагранжиан даётся выражением
$$L_{GR} = \frac{1}{2} f^{-2}[(\nabla f)^2 + (\nabla\chi)^2],$$
где $\nabla\chi = -f^2 \nabla \times \vec{\omega}$
- Введя новый комплексный потенциал $\mathcal{E} = f + i\chi$, можно показать, что преобразование
$$\mathcal{E} \to \frac{\mathcal{E} + i\Lambda}{1 + i\Lambda\mathcal{E}}$$
(нормированное преобразование Элерса) является точной симметрией лагранжиана L_{GR}.

ЗАДАЧА 1

АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ 〉 ЭЛЕКТРОДИНАМИКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ В РАМКАХ БОЛЕЕ ОБЩИХ ТЕОРИЙ

- Теория Калуцы-Клейна – способ единообразного описания гравитации и электродинамики за счёт расширения ОТО на 5 измерений. При параметризации пятимерного метрического тензора в виде

$$(g_{MN}) = e^{-\frac{1}{3}\alpha\phi}\begin{pmatrix} g_{\mu\nu+\frac{\alpha^2}{12}e^{\alpha\phi}A_\mu A_\nu} & \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}e^{\alpha\phi}A_\mu \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}e^{\alpha\phi}A_\nu & e^{\alpha\phi} \end{pmatrix}$$

пятимерные уравнения Эйнштейна $R_{MN} = 0$ совпадают с уравнениями, получаемыми при варьировании действия

$$S = -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{4}e^{\alpha\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right)$$

- Если пространство плоское, это действие описывает электродинамику с дилатоном, если отсутствуют электромагнитные поля – склярно-тензорную гравитацию Бранса-Дикке.

- Аксионы были добавлены в лагранжиан Стандартной модели в рамках решения «Сильной CP-проблемы», предложенного Печчеи и Квинн в 1977 году. Необходимость их введения возникла в теории сильного взаимодействия, также массивные аксионы являются одним из главных кандидатов на роль частиц тёмной материи. Для нас в рамках настоящей работы наиболее интересно взаимодействие аксионов с электромагнитным полем, описываемое лагранжианом следующего вида:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\gamma æ\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu æ\partial^\mu æ + V(æ)$$

- Поиски аксионов предпринимались в экспериментах CAST и ADMX, существует также проект эксперимента CASPEr.

СЛЕДУЕТ ОТМЕТИТЬ, ЧТО АКСИОННОЕ И ДИЛАТОННОЕ ОБОБЩЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ВОЗНИКАЮТ ТАКЖЕ ПРИ КОМПАКТИФИКАЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В МНОГОМЕРНОЙ ТЕОРИИ СТРУН.

- В данном разделе изучается модель классической электродинамики с одним дополнительным дилатонным полем

$$L = -\frac{1}{4}e^{\alpha\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$$

- При условии, что все поля не зависят от времени, можно ввести скалярный потенциал магнитного поля u согласно уравнению

$$\nabla u = -e^{-2\alpha\phi}\nabla\times\vec{A}.$$

- В этом случае уравнения, описывающие динамику полей, примут следующий вид:

$$\nabla\left(e^{2\alpha\phi}\nabla u\right) = 0,$$
$$\nabla\left(e^{-2\alpha\phi}\nabla v\right) = 0,$$
$$\nabla^2\phi + \frac{\alpha}{4}\left[e^{-2\alpha\phi}(\nabla v)^2 - e^{2\alpha\phi}(\nabla u)^2\right] = 0.$$

- Этими уравнениями описываются стационарные поля ДМЭ. Соответствующий им трехмерный лагранжиан выглядит так:

$$L_3 = 2\,(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\left[e^{-2\alpha\phi}(\nabla v)^2 + e^{2\alpha\phi}(\nabla u)^2\right]$$

ОБЩЕЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

- Предположим, что все поля исследуемой модели зависят от одной гармонической функции, то есть,
$$\phi = \phi(\lambda), \quad v = v(\lambda), \; u = u(\lambda),$$
$$\Delta\lambda = 0.$$
- В этом случае мы получаем эффективно одномерную теорию, уравнения и лагранжиан которой записываются так:
$$\left(e^{2\alpha\phi}u'\right)' = 0,$$
$$\left(e^{-2\alpha\phi}v'\right)' = 0,$$
$$\phi'' + \frac{\alpha}{4}\left[e^{-2\alpha\phi}(v')^2 - e^{2\alpha\phi}(u')^2\right] = 0.$$
$$L_3 = 2\,(\phi')^2 + \frac{1}{2}\left[e^{-2\alpha\phi}(v')^2 + e^{2\alpha\phi}(u')^2\right]$$
(Можно провести аналогию с классической механикой, где λ играет роль «времени»)

- Уже при первом взгляде на уравнения видно, что существуют три интеграла движения
$$e^{-2\alpha\phi}v' = C_1,$$
$$e^{2\alpha\phi}u' = C_2,$$
$$(\phi')^2 - \frac{C_1^2}{4}e^{2\alpha\phi} - \frac{C_2^2}{4}e^{-2\alpha\phi} = C_3.$$
- Второй из этих интегралов с учётом определения потенциала u позволяет сразу получить вид магнитного поля:
$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} = -C_2\nabla\lambda.$$
- Это позволяет нам в дальнейшем не интересоваться явным видом потенциала u.

ЗАДАЧА 2

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С ДИЛАТОНОМ ИЗВЕСТНЫМИ СРЕДСТВАМИ 〉 ОБЩЕЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ. ПРОБЛЕМА ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ

- Решение уравнения для поля ϕ

$$(\phi')^2 - \frac{C_1^2}{4}e^{2\alpha\phi} - \frac{C_2^2}{4}e^{-2\alpha\phi} = C_3$$

даётся интегралом следующего вида:

$$\lambda = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{C_1^2}{4}e^{2\alpha\phi} + \frac{C_2^2}{4}e^{-2\alpha\phi} + C_3}}$$

- Замена переменной $e^{\alpha\phi} = x$ приводит его к более простому виду:

$$\lambda = \frac{2}{\alpha}\int \frac{dx}{\sqrt{C_1^2 x^4 + 4C_3 x^2 + C_2^2}}$$

- Дальнейшее вычисление зависит от того, какие корни имеет многочлен в знаменателе.

- Для примера, в случае $4C_3^2 - C_1^2 C_2^2 > 0$, $C_3 < 0$ имеем решение

$$e^{\alpha\phi} = A \cdot sn\left(\pm\frac{\alpha|C_2|}{2A}\lambda + \Lambda_0, k\right),$$

$$v = BC_1\lambda + \frac{|C_2|}{A}\sqrt{B}\int_{\Lambda_0}^{\pm\frac{\alpha|C_2|}{2A}\lambda+\Lambda_0} dn^2\left(\pm\frac{\alpha|C_2|}{2A}\lambda + \Lambda_0, k\right)d\lambda,$$

где $sn(x,k)$ и $\mathrm{dn}(x,k)$ – эллиптические функции Якоби. Константы A, B и k задаются формулами

$$A = \sqrt{\frac{2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2C_2^2}}{-C_1^2}},\ B = \frac{-2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2C_2^2}}{C_1^2},\ k^2 = \frac{2C_3 + \sqrt{4C_3^2 - C_1^2C_2^2}}{2C_3 - \sqrt{4C_3^2 - C_1^2C_2^2}};$$

Λ_0 - константа интегрирования

- В случае центральной симметрии $\lambda = \frac{q}{r}$, и разложение решения по степеням $\frac{1}{r}$ позволяет найти эффективные заряды:

$$q_\phi = \pm\frac{\sqrt{4C_3 + C_1^2 + C_2^2}}{2}q, \qquad q_e = C_1 q, \qquad q_m = C_2 q.$$

- Выражения для потенциалов при других значениях параметров приведены в Приложении.

ОБЩЕЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

- В частном случае $C_3 = \frac{C_1 C_2}{2}$, $\frac{C_1}{C_2} = \mathrm{k}^2$ получаем решение следующего вида:

$$e^{\alpha\phi} = \frac{1}{k}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha C_2 k}{2}\lambda + \operatorname{arctg} k\right),$$

$$v = -C_2\lambda + \frac{2}{\alpha}\left[\frac{1}{k}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha C_2 k}{2}\lambda + \operatorname{arctg} k\right) - 1\right].$$

- При $\frac{C_1}{C_2} = -\mathrm{k}^2$ получаем решение такого вида:

$$e^{\alpha\phi} = \frac{1}{k}\frac{(1+k)e^{\alpha C_2 k\lambda} - 1 + k}{(1+k)e^{\alpha C_2 k\lambda} + 1 - k},$$

$$v = -C_2\lambda + \frac{2(1-k)}{\alpha k}\left[1 - \frac{2}{(1+k)e^{\alpha C_2 k\lambda} + 1 - k}\right].$$

- В случае центральной симметрии $\lambda = \frac{q}{r}$, и эффективные заряды каждого типа даются выражениями

$$q_e = C_1 q, \qquad q_m = C_2 q, \qquad q_\phi = \frac{C_1 + C_2}{2}q = \frac{q_e + q_m}{2}.$$

- Отдельно в нашей работе рассмотрены частные электро- и магнитостатические решения. Подробности приведены в Приложении (также электростатическое решение будет обсуждаться ниже), здесь укажем лишь крайний предельный случай: электростатическое решение при условии $q_\phi = \frac{q_e}{2}$ в случае центральной симметрии имеет вид:

$$e^{-\alpha\phi} = 1 - \frac{\alpha q_e}{2r}, \qquad v = \frac{2\,q_e}{2r - \alpha q_e}.$$

- Видно, что электростатическое поле может иметь конечную величину во всём пространстве.

ЗАДАЧА 3

РАЗРАБОТКА НОВЫХ МЕТОДОВ ПОИСКА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ С ДИЛАТОНОМ 〉 ДУАЛЬНОСТЬ СТАТИЧЕСКОЙ ДМЭ И СТАЦИОНАРНОЙ ОТО, МЕТОД СИММЕТРИЙ

- Рассмотрим модель электродинамики с дилатоном и отрицательным знаком перед кинетическим членом дилатона (она возникает, например, в случае, если дополнительное измерение в теории Калуцы-Клейна является времениподобным):

$$L = -\frac{1}{4}e^{\alpha\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$$

- В стационарном случае, при рассмотрении только электростатики или только магнитостатики, лагранжиан модели может быть записан в виде

$$\mathrm{L} = L_{GR} = \frac{1}{2}f^{-2}[(\nabla f)^2 + (\nabla\chi)^2],$$

где введены обозначения

$$f = e^{\pm\alpha\phi}, \qquad \chi = \frac{\alpha}{2}\{{}^{v}/_{u}\}.$$

- Знак «+» отвечает электростатике, «-» – магнитостатике. Потенциал χ, фактически, является скалярным потенциалом электрического или магнитного поля.
- Установленная таким образом дуальность между двумя теориями позволяет нам использовать результаты ОТО для получения точных решений в электродинамике с дилатоном. Например, применяя нормированное преобразование симметрии Элерса к простейшему – гармоническому – «затравочному» потенциалу $\Delta\phi_0 = 0$, получим более общее решение следующего вида:

$$\chi = \mathrm{tg}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\frac{1 - e^{2\alpha\phi_0}}{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)e^{2\alpha\phi_0}}, \qquad e^{-\alpha\phi} = \frac{\left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]e^{\alpha\phi_0}}{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)e^{2\alpha\phi_0}}.$$

- Это решение совпадает с одним из решений, полученных ранее.

ЗАДАЧА 3

РАЗРАБОТКА НОВЫХ МЕТОДОВ ПОИСКА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ С ДИЛАТОНОМ 〉 ОБЩЕЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ ДМЭ

- Подставив в решение, полученное на предыдущем слайде, затравочное решение в виде кулоновского потенциала $\phi_0 = \frac{Q}{r}$, получим центрально-симметричное решение следующего вида:

$$v = \frac{2}{\alpha}\operatorname{tg}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\frac{1 - e^{\frac{2\alpha Q}{r}}}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)e^{\frac{2\alpha Q}{r}}},$$

$$e^{-\alpha\phi} = \frac{\left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]e^{\frac{\alpha Q}{r}}}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)e^{\frac{2\alpha Q}{r}}}.$$

- На пространственной бесконечности эти поля принимают кулоновский вид $v = \frac{q_e}{r}, \quad \phi = \frac{q_\phi}{r}$, где заряды находятся по формулам $q_e = -2Q\sin(\lambda), \quad q_\phi = Q\cos(\lambda)$.

- Электростатический потенциал v имеет конечную величину во всём пространстве.

- Можно доказать, что данное решение – единственное в центрально-симметричном случае. Для этого запишем уравнения движения в матричном виде: $\nabla(M^{-1}\nabla M) = 0$, где матрица M имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} f^{-1} & f^{-1}\chi \\ f^{-1}\chi & f + f^{-1}\chi^2 \end{pmatrix}$$

- Матрица M удовлетворяет двум условиям: $\det M = 1, M^T = M$. Записывая уравнение в сферических координатах, учитывая условие центральной симметрии и данные дополнительные условия, можем получить его общее решение в виде функций, представленных на данном слайде.

ЗАДАЧА 3

РАЗРАБОТКА НОВЫХ МЕТОДОВ ПОИСКА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ С ДИЛАТОНОМ

ОБОБЩЕННАЯ СИЛА ЛОРЕНЦА И ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

- Лагранжиан ДМЭ симметричен относительно преобразования полей $\phi \to \phi + \varepsilon, \quad A_\mu \to A_\mu e^{\alpha\varepsilon}$.
- Требование симметрии относительно этого преобразования приводит нас к следующему выражению для силы Лоренца:

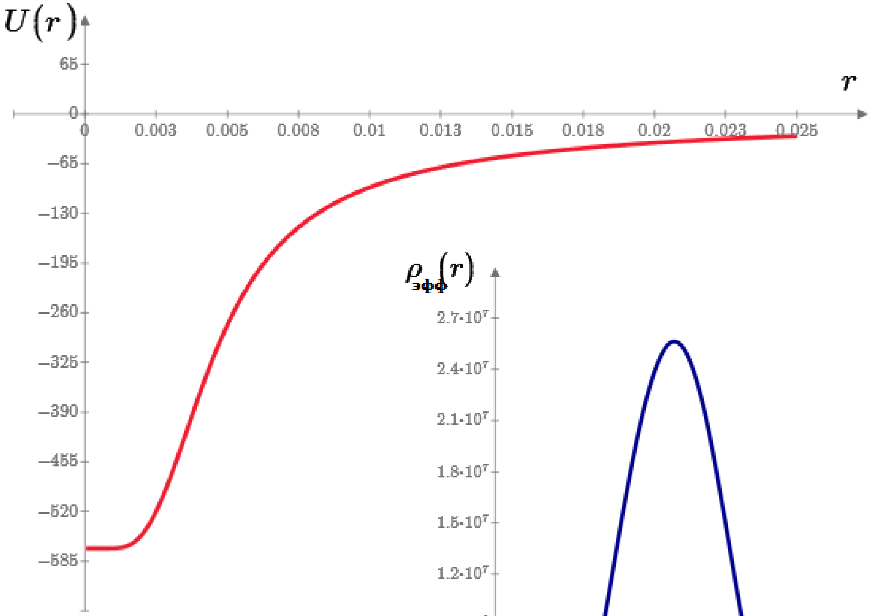
$$\frac{dp^\mu}{ds} = q e^{-\alpha\phi} F^{\mu\nu} u_\nu.$$

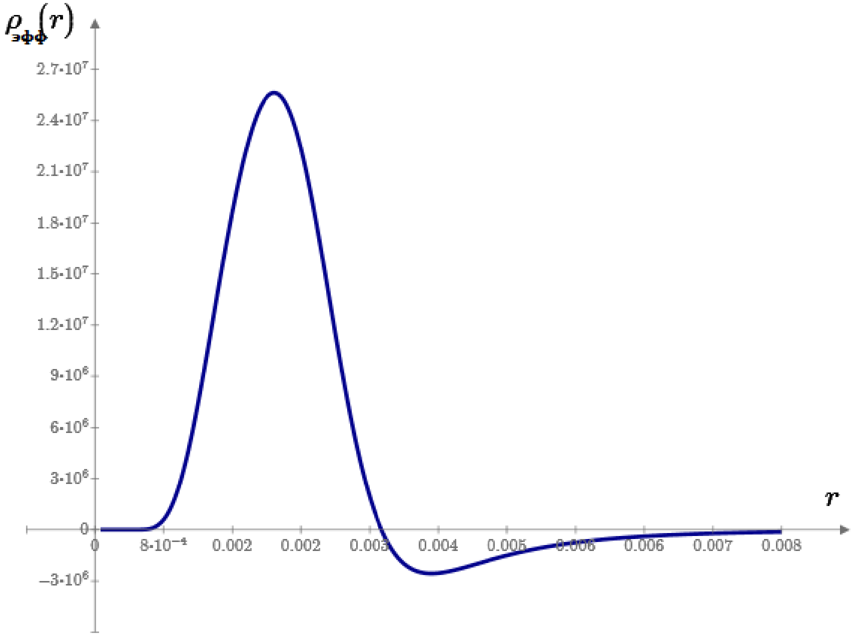
- Подставляя в это выражение общее центрально-симметричное решение для полей ДМЭ, можно показать, что сила Лоренца имеет потенциальный вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\nabla U$$

с потенциалом

$$U = -\frac{4q}{\alpha}\left\{\operatorname{arctg}\left[e^{\frac{\alpha Q}{r}} \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right] - \frac{\lambda}{2}\right\}.$$





Соответствующая эффективная плотность заряда

ОБОБЩЕННАЯ СИЛА ЛОРЕНЦА И ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

- Энергия полей вычисляется как интеграл от нулевой компоненты тензора энергии-импульса

$$E = \int d^3x[-2(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}e^{-2\alpha\phi}(\nabla v)^2]$$

- В выражении для энергии можно выделить инвариантную расходящуюся часть

$$E_0 = -2\int d^3x \frac{Q^2}{r^4},$$

которая совпадает с выражением для энергии точечного электрона, и нетривиальную конечную добавку к ней

$$\Delta E = \frac{8\pi q_e^2}{\alpha\left(\sqrt{q_e^2 + 4q_\phi^2} - 2q_\phi\right)}.$$

- Если эксперимент состоит в наблюдении за движением пробных частиц, то будет наблюдаться только поле v, имеющее полную энергию

$$E_e = \frac{8\pi}{3\alpha}\frac{\sqrt{q_e^2 + 4q_\phi^2} + 2q_\phi}{\sqrt{q_e^2 + 4q_\phi^2} - 2q_\phi}\left(\sqrt{q_e^2 + 4q_\phi^2} - q_\phi\right).$$

- Отношение этих энергий выражается через параметр преобразования Элерса следующим образом:

$$\frac{E_e}{\Delta E} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2-\cos\lambda}{1-\cos\lambda}.$$

- Если же движение пробных частиц подчиняется обобщенной силе Лоренца, то наблюдаемая энергия полей будет следующей:

$$\tilde{E}_e = \frac{4\pi}{\alpha}\frac{\left(\sqrt{q_e^2 + 4q_\phi^2} + 2q_\phi\right)^2}{\sqrt{q_e^2 + 4q_\phi^2} - 2q_\phi}.$$

ЗАДАЧА 3

РАЗРАБОТКА НОВЫХ МЕТОДОВ ПОИСКА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ С ДИЛАТОНОМ

АДАПТАЦИЯ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ ИЗ ОТО. РЕШЕНИЕ КЕРРА-НУТ

› В аксиально-симметричном случае общее выражение для метрики четырехмерного пространства-времени может быть параметризовано в следующем виде (Эрнст, 1968):

$$ds_4^2 = f\left(dt + \omega_\varphi d\varphi\right)^2 - f^{-1}[e^{2\gamma}(d\,z^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\varphi^2].$$

› Сравним это выражение с известным решением Керра-НУТ из Общей Теории Относительности:

$$-ds^2 = \frac{\omega}{\Delta}dr^2 + \omega d\theta^2 - \frac{1}{\omega}\{(\Delta - a^2\sin^2\theta)d\tau^2 - [4\Delta b\cos\theta - 4\,a\sin^2\theta\ (mr + b^2)]d\tau d\varphi\ + [\Delta(a\sin^2\theta + 2b\cos\theta)^2 - \sin^2\theta\,(r^2 + b^2 + a^2)^2]d\varphi^2\},$$

где $\tau = -t + 2a\varphi$, $\omega = r^2 + (b - a\cos\theta)^2$, $\Delta = r^2 - 2mr + a^2 - b^2$. Константа a – параметр Керра, константа b – параметр НУТ.

› Путём некоторых преобразований, записав все формулы в вытянутых сфероидальных координатах (σ,τ,φ), получим следующие выражения для полей ДМЭ:

$$e^{\pm\alpha\phi} = -\frac{(m^2 - a^2 + b^2)(1 - \sigma^2) + a^2(1 - \tau^2)}{\left(\sigma\sqrt{m^2 - a^2 + b^2} + m\right)^2 + (b - a\tau)^2},$$

$$\{{}^{v}/{}_{u}\} = \frac{4}{\alpha}\frac{\sigma b\sqrt{m^2 - a^2 + b^2} + ma\tau}{\left(\sigma\sqrt{m^2 - a^2 + b^2} + m\right)^2 + (b - a\tau)^2}.$$

ЗАДАЧА 3

РАЗРАБОТКА НОВЫХ МЕТОДОВ ПОИСКА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ С ДИЛАТОНОМ 〉 АДАПТАЦИЯ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ ИЗ ОТО. РЕШЕНИЕ КЕРРА-НУТ

› Если выразить найденное решение в сферических координатах, а потом разложить по степеням $1/R$, можно найти эффективные заряды и дипольные моменты полей:

$$\phi = \pm\frac{2m}{\alpha}\frac{1}{R} \pm \frac{2b(a\cos\Theta - b)}{\alpha}\frac{1}{R^2} + \cdots; \qquad \{{}^{v}/_{u}\} = \frac{4b}{\alpha}\frac{1}{R} + \frac{4m(a\cos\Theta - 2b)}{\alpha}\frac{1}{R^2} + \cdots$$

› Система, создающая данные поля, обладает зарядами: дилатонным $q_\phi = \pm\frac{2m}{\alpha}$, электрическим/магнитным $q_{e/m} = \frac{4b}{\alpha}$. Дипольные моменты равны, соответственно, $d_\phi = \pm\frac{2ba}{\alpha}$, $d_{e/m} = \frac{4ma}{\alpha}$.

› В случае $a = b = 0$ решение Керра-НУТ переходит в решение Шварцшильда. В таком решении отсутствуют электрическое и магнитное поля.

› Интересно оказывается рассмотреть вопрос о существовании у этого решения «горизонта событий», такой поверхности, для достижения которой частице нужно иметь бесконечную энергию. Выразив энергию пробной частицы через её координаты, получим, что она достигает бесконечного значения на поверхности

$$\sigma^2 = \frac{m^2 + b^2 - a^2\tau^2}{m^2 + b^2 - a^2}$$

› В случае решения Шварцшильда и Тауба-НУТ эта поверхность вырождается в единственную точку, в случае решения Керра имеет более сложную форму.

ЗАДАЧА 4

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С АКСИОНОМ, ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ 〉 КОМПАКТИФИКАЦИЯ ЛАГРАНЖИАНА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИММЕТРИИ

- Рассмотрим лагранжиан электродинамики Максвелла с безмассовым аксионом:

$$L = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \gamma æ\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\partial_\mu æ\partial^\mu æ$$

- В данном случае также можно ввести скалярный потенциал магнитного поля согласно уравнению

$$\nabla u = -\nabla \times \vec{A} + \gamma æ\nabla A_0$$

- Система уравнений, описывающих динамику полей, в стационарном случае может быть записана следующим образом:

$$\nabla^2 v + 2\gamma^2 æ\nabla æ\nabla v + \gamma^2 æ^2\nabla^2 v - \gamma\nabla æ\nabla u - \gamma æ\nabla^2 u = 0,$$
$$\nabla^2 æ + \gamma^2 æ(\nabla v)^2 - \gamma\nabla v\nabla u = 0,$$
$$\nabla^2 u - \gamma\nabla æ\nabla v - \gamma\nabla v\nabla u = 0.$$

- Соответствующий трехмерный лагранжиан выглядит так:

$$L_3 = 2\,(\nabla æ)^2 - \frac{1}{2}\left[(\nabla u - \gamma æ\nabla v)^2 + (\nabla v)^2\right].$$

- Полученный лагранжиан сохраняет свою форму при следующих преобразованиях полей:

$$v \to æ\,\mathrm{sh}(\lambda) + v\,\mathrm{ch}(\lambda),$$
$$æ \to æ\,\mathrm{ch}(\lambda) + v\,\mathrm{sh}(\lambda),$$
$$u \to u + \frac{\gamma}{4}\left[(æ^2 + v^2)\mathrm{sh}(2\lambda) + 4æv\,\mathrm{sh}^2(\lambda)\right].$$

$$v \to v,$$
$$æ \to æ + \lambda,$$
$$u \to u + \gamma v\lambda.$$

$$v \to v + \lambda,$$
$$æ \to æ,$$
$$u \to u.$$

$$v \to v,$$
$$æ \to æ,$$
$$u \to u + \lambda.$$

- Предположим, что все поля исследуемой модели зависят от одной гармонической функции, то есть,

$$æ=æ(\lambda),\quad v=v(\lambda),\ u=u(\lambda),$$
$$\Delta\lambda=0.$$

- В этом случае мы получаем эффективно одномерную теорию, уравнения и лагранжиан которой записываются так:

$$[u'-\gamma æ v']'=0,$$
$$[v'-\gamma æ(u'-\gamma æ v')]'=0,$$
$$æ''-\gamma(u'-\gamma æ v')v'=0.$$
$$L_3=\frac{1}{2}[(æ')^2-(u'-\gamma æ v')^2-(v')^2].$$

- Здесь, как и в случае электродинамики с дилатоном, можно сразу выписать два интеграла движения

$$u'-\gamma æ v'=C_1,$$
$$v'-\gamma æ C_1=C_2.$$

- Первое выражение с учётом определения потенциала u позволяет сразу получить вид магнитного поля: $\vec{H}=\nabla\times\vec{A}=-C_1\nabla\lambda$.
- Уравнение на потенциал æ имеет следующий вид:

$$æ''-(\gamma C_1)^2æ-\gamma C_1 C_2=0.$$

- Общее гармоническое решение уравнений электродинамики с аксионом:

$$æ = A\, e^{\gamma C_1 \lambda} + B e^{-\gamma C_1 \lambda} - \frac{C_2}{\gamma C_1},$$
$$v = A\, e^{\gamma C_1 \lambda} - B e^{-\gamma C_1 \lambda} + D.$$

- В центрально-симметричном случае $\lambda = \frac{q}{r}$, и при условии исчезновения полей на пространственной бесконечности решение принимает вид:

$$æ = \frac{C_2}{\gamma C_1}\left[ch\left(\frac{\gamma C_1 q}{r}\right) - 1\right] - D\, sh\left(\frac{\gamma C_1 q}{r}\right),$$
$$v = \frac{C_2}{\gamma C_1} sh\left(\frac{\gamma C_1 q}{r}\right) - D\left[ch\left(\frac{\gamma C_1 q}{r}\right) - 1\right].$$

- Эффективные заряды в этом случае равны

$$q_e = C_2 q, \qquad q_m = C_1 q, \qquad q_{æ} = -\gamma D C_1 q.$$

- Если магнитный заряд равен нулю, электрическое поле и аксион принимают кулоновский вид.

- В случае $q_{æ} = -q_e$ потенциалы имеют следующий вид:

$$æ = \frac{q_e}{\gamma q_m}\left(e^{-\frac{\gamma q_m}{r}} - 1\right),$$
$$v = -\frac{q_e}{\gamma q_m}\left(e^{-\frac{\gamma q_m}{r}} - 1\right).$$

- Они имеют конечную величину во всём пространстве.

ЗАДАЧА 5

ФОРМУЛИРОВАНИЕ ПРИНЦИПОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ТЕОРИИ НА ОСНОВАНИИ ПОЛУЧЕННЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

ПОПРАВКИ К ФОРМУЛЕ РЕЗЕРФОРДА ДЛЯ РАССЕЯНИЯ НА ЭФФЕКТИВНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ ДМЭ

- Рассмотрим рассеяние пробных частиц на найденном ранее потенциале

$$U = -\frac{4q}{\alpha}\left\{\operatorname{arctg}\left[e^{\frac{\alpha Q}{r}}\operatorname{tg}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]-\frac{\lambda}{2}\right\}.$$

- Так как на сегодняшний день классическая электродинамика хорошо подтверждается в экспериментах, разумно будет полагать, что константа связи α имеет очень малую величину, и рассматривать поправки к сечению рассеяния на потенциале Кулона в первом порядке по α.
- С такой точностью приближённое выражение для потенциала U принимает вид:

$$U = \frac{q\,q_e}{r} + \alpha\frac{q\,q_e\,q_\phi}{2r^2}.$$

- Понятно, что при этих ограничениях имеет смысл рассматривать только рассеяние на малые углы.

- После вычислений получаем следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{mqq_e}{2p^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{\alpha\pi}{4\hbar}\frac{m^2q^2q_e^2q_\phi}{p^3}\frac{1}{\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

- Первое слагаемое здесь представляет собой известную формулу Резерфорда, второе – поправку к ней.

ЗАДАЧА 5

ФОРМУЛИРОВАНИЕ ПРИНЦИПОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ТЕОРИИ НА ОСНОВАНИИ ПОЛУЧЕННЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

РАССЕЯНИЕ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ НА ТОЧЕЧНОМ ДИОНЕ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ С АКСИОНОМ

› Ранее в работе было найдено решение уравнений электродинамики с аксионом, включающее кулоновское магнитное поле и электрическое поле $v(\mathrm{r})$, распределенное в пространстве более сложным образом. Будем предполагать, что взаимодействие осуществляется посредством обычной силы Лоренца:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}v(r) + \frac{q_m}{r^3}\left[\dot{\vec{r}} \times \vec{r}\right].$$

› Можно показать, что в этом случае пробная частица движется по конусу с углом раствора

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{q_m}{mbv_0},$$

где b – прицельный параметр, v_0 - скорость налетающей частицы на пространственной бесконечности.

› При этом движение в радиальном и азимутальном направлениях определяется только электростатическим взаимодействием.

› Разложим потенциал $v(r)$ по степеням малого параметра γ до первого порядка:

$$v = \frac{q_e}{r} + \frac{\gamma q_m q_æ}{2r^2} + \cdots$$

› Зависимость азимутального угла от прицельного параметра выражается следующим образом:

- при больших значениях прицельного параметра

$$\varphi\Big|_{r\to\infty} = \frac{1}{\cos\theta\sqrt{\frac{\gamma m q_æ}{q_m} + \operatorname{tg}^2\theta}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2Eq_m^2}{mq_e^2}\left(\frac{\gamma m q_æ}{q_m} + \operatorname{tg}^2\theta\right)}.$$

- при малых значениях прицельного параметра

$$\varphi|_{r\to\infty} = \frac{1}{2\cos\theta\sqrt{-\left(\frac{\gamma m q_æ}{q_m} + \operatorname{tg}^2\theta\right)}} \ln\left|\frac{1 - \sqrt{-\frac{2Eq_m^2}{mq_e^2}\left(\frac{\gamma m q_æ}{q_m} + \operatorname{tg}^2\theta\right)}}{1 + \sqrt{-\frac{2Eq_m^2}{mq_e^2}\left(\frac{\gamma m q_æ}{q_m} + \operatorname{tg}^2\theta\right)}}\right|$$

› Угол раствора конуса, азимутальный угол и угол рассеяния частицы Θ связаны соотношением

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \sin\theta\sin\left(\varphi\Big|_{r\to\infty}\right)$$

ЗАДАЧА 5

ФОРМУЛИРОВАНИЕ ПРИНЦИПОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ТЕОРИИ НА ОСНОВАНИИ ПОЛУЧЕННЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

РАССЕЯНИЕ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ НА ТОЧЕЧНОМ ДИОНЕ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ С АКСИОНОМ

- Дифференциальное сечение рассеяния вычисляется по формуле

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\sum_{\theta_i}\left(\frac{q_m}{mv}\right)^2\frac{1}{2\cos^4\theta}\left|\frac{\sin 2\theta}{\sin\Theta}\frac{d\theta}{d\Theta}\right|.$$

- Особенностью рассеяния на дионах является то, что разным значениям прицельного параметра могут соответствовать одинаковые углы рассеяния. В этой формуле суммирование ведется по всем подходящим значениям угла θ. Также особенностью является наличие таких углов, при которых сечение рассеяния формально стремится к бесконечности. Эти углы соответствуют уравнениям $\sin\Theta=0$ и $\frac{d\Theta}{d\theta}=0$. Первый вариант расходимости в оптике называется «глорией», второй – «радугой».

- В предельном случае $q_m=0$ дифференциальное сечение принимает вид формулы Резерфорда.
- В случае $q_e=0$ младшим порядком в разложении потенциала по степеням $\frac{1}{r}$ будет второй. Тогда выражение для угла рассеяния через прицельный параметр принимает следующий вид:

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{eq_m}{mvb}\right)^2}}\sin\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{eq_m}{mvb}\right)^2}{1+\frac{\gamma meq_m q\text{æ}}{(mvb)^2}}}\right]$$

- Выражение для сечения рассеяния в случае малых углов соответствует рассеянию на кулоновском дионе:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{(eq_m)^2}{16mE}\frac{1}{\cos^3\left(\frac{\Theta}{2}\right)}$$

НАУЧНАЯ НОВИЗНА

1. В работе впервые построены общие гармонические решения уравнений электродинамики Максвелла с дилатоном и электродинамики Максвелла с аксионом в стационарном случае, обобщающие ранее известные результаты других авторов.

2. Впервые найдена дуальность между электростатическим и магнитостатическим секторами электродинамики Максвелла с дилатоном и стационарной Общей Теорией Относительности в вакууме в случае аксиальной симметрии. Указанная дуальность использована для получения точных решений электродинамики с дилатоном из известных решений Шварцшильда и Керра ОТО.

3. Разработан метод получения точных решений, использующий известные симметрии лагранжиана ОТО в вакууме.

ЗНАЧИМОСТЬ

- Полученные в работе точные решения не привязаны к конкретным значениям констант-параметров теории, поэтому могут быть использованы для проверки следствий из различных вариантов теорий Великого Объединения.
- Найденная в работе дуальность между статической электродинамикой с дилатоном и стационарной аксиально-симметричной ОТО в вакууме имеет большой потенциал развития для поиска новых статических решений.

ПУБЛИКАЦИИ

№ П/П	ССЫЛКА	ТРЕБОВАНИЯ ВАК
1	Kechkin O. V., Mosharev P. A. Structures of general relativity in dilaton-maxwell electrodynamics // International Journal of Modern Physics A. — 2016. — Vol. 31, no. 23.	Scopus
2	Kechkin O. V., Mosharev P. A. Singularity-free interaction in dilaton-maxwell electrodynamics // Modern Physics Letters A. — 2016. — Vol. 31, no. 31.	Scopus
3	Кечкин О. В., Мошарев П. А. Общее гармоническое решение уравнений электродинамики Максвелла с дилатоном // Учёные записки физического факультета МГУ. — 2019. — № 6.	Входит в список ВАК
4	Кечкин О. В., Денисова И. П., Мошарев П. А. Генерация статических решений в нелинейной электродинамике с дилатоном из стационарных решений Общей Теории Относительности в вакууме // Ученые Записки Физического Факультета МГУ. — 2019. — № 3.	Входит в список ВАК
5	Кечкин О. В., Мошарев П. А. Симметрии и общее гармоническое решение уравнений электродинамики Максвелла с аксионом // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. (Статья принята к печати)	Входит в список ВАК
6	Кечкин О. В., Мошарев П. А. Асимптотическая свобода, сечение рассеяния и уровни энергии для центрально-симметричного взаимодействия в электродинамике с дилатоном // Труды XVI Межвузовской научной школы молодых специалистов Концентрированные потоки энергии в космической технике, электронике, экологии и медицине (Москва, Россия, 24-25 ноября 2015). ISBN 978-5-91304-566-8. — Университетская книга Москва, 2015.	-

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Найдено эффективное трехмерное описание для электродинамики Максвелла с дилатоном в стационарном случае.
2. Найдено общее гармоническое решение уравнений электродинамики Максвелла с дилатоном. Рассмотрены частные случаи, интегрируемые в элементарных функциях. Выписаны соответствующие центрально-симметричные решения и найдены эффективные заряды.
3. Установлена дуальность статической ДМЭ и стационарной ОТО. На основании этой дуальности разработаны два метода построения точных решений ДМЭ.
4. Найдено общее центрально-симметричное решение ДМЭ-электростатики и доказана его единственность.
5. Предложено выражение для обобщённой силы Лоренца на основании принципа симметрии и найден эффективный потенциал взаимодействия пробных заряженных частиц с центрально-симметричными полями электростатики ДМЭ. Вычислена эффективная плотность заряда и плотность энергии полей.
6. Найдено точное решение ДМЭ, дуальное решению Керра-НУТ. Вычислены эффективные заряды, дипольный момент, и установлен вид «горизонта событий» при различных значениях параметров решения.
7. Найдено трехмерное описание электродинамики Максвелла с аксионом в стационарном случае. Найдена группа скрытых симметрий трехмерного лагранжиана. Найдено общее гармоническое решение уравнений электродинамики Максвелла с аксионом, записано центрально-симметричное решение и вычислены эффективные заряды.
8. Вычислены поправки к формуле Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния пробных частиц на найденных потенциалах в электродинамике с дилатоном и аксионом.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

МОШАРЕВ Павел Александрович

Тел.: +7(926)925-44-23

E-Mail: moscharev.pavel@physics.msu.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ОБЩЕЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ МАКСВЕЛЛА С ДИЛАТОНОМ

1. В случае $4C_3^2 - C_1^2C_2^2 > 0$, $C_3 < 0$ имеем решение

$$e^{\alpha\phi} = A\cdot sn\left(\pm\frac{\alpha|C_2|}{2A}\lambda + \Lambda_0, k\right),$$

$$v = BC_1\lambda + \frac{|C_2|}{A}\sqrt{B}\int_{\Lambda_0}^{\pm\frac{\alpha|C_2|}{2A}\lambda+\Lambda_0} dn^2\left(\pm\frac{\alpha|C_2|}{2A}\lambda + \Lambda_0, k\right)d\lambda.$$

Константы A, B и k задаются формулами:

$$A = \sqrt{\frac{2C_3+\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}{-C_1^2}},\ B = \frac{-2C_3+\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}{C_1^2},\ k^2 = \frac{2C_3+\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}{2C_3-\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}$$

2. В случае $4C_3^2 - C_1^2C_2^2 > 0$, $C_3 > 0$ имеем решение

$$e^{\alpha\phi} = A\cdot sc\left(\pm\frac{\alpha|C_2|}{2A}\lambda + \Lambda_0, k\right),$$

Константы A и k в этом случае задаются формулами

$$A = \sqrt{\frac{2C_3-\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}{C_1^2}},\ k^2 = \frac{2\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}{2C_3+\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}.$$

$$v = \pm\frac{2\sqrt{2C_3+\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}}{\alpha C_1}\left[dn\left(\pm\frac{\alpha|C_2|}{2A}\lambda+\Lambda_0,k\right)sc\left(\pm\frac{\alpha|C_2|}{2A}\lambda+\Lambda_0,k\right) - \sqrt{\frac{C_1^2}{C_2^2}\cdot\frac{C_2+2C_3-\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}{C_1^2+2C_3-\sqrt{4C_3^2-C_1^2C_2^2}}} - \int_{\Lambda_0}^{\pm\frac{\alpha|C_2|}{2A}\lambda+\Lambda_0} dn^2\left(\pm\frac{\alpha|C_2|}{2A}\lambda+\Lambda_0,k\right)d\lambda\right].$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ОБЩЕЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ МАКСВЕЛЛА С ДИЛАТОНОМ

3. В случае $4C_3^2 - C_1^2 C_2^2 < 0$ имеем решение

$$e^{\alpha\phi} = \sqrt{\left|\frac{C_2}{C_1}\right| \cdot \frac{1 - \sqrt{\frac{g}{h}}\, sc\left(\mp\frac{\alpha h}{4}\lambda + \Lambda_0, k\right)}{1 + \sqrt{\frac{g}{h}}\, sc\left(\mp\frac{\alpha h}{4}\lambda + \Lambda_0, k\right)}},$$

$$v = C_1 \sqrt{\left|\frac{C_2}{C_1}\right|} \left\{\lambda \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{32}{\alpha h} \int_{sn\left(\frac{\Lambda_0}{2}, k\right)}^{sn\left[\frac{1}{2}\left(\mp\frac{\alpha h}{4}\lambda + \Lambda_0, k\right)\right]} \frac{(1 - 2\xi^2 + k^2\xi^4)\xi d\xi}{(1 - 2\xi^2 + k^2\xi^4)^2 + 2\sqrt{\frac{g}{h}}\xi\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-k^2\xi^2} + \frac{g}{h}\xi^2(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}\right\}$$

Константы g, h и k задаются формулами

$$g = 2\sqrt{|C_1 C_2|} - \sqrt{2|C_1 C_2| - 4C_3}, \quad h = 2\sqrt{|C_1 C_2|} + \sqrt{2|C_1 C_2| - 4C_3}, \quad k^2 = 1 - \left(\frac{g}{h}\right)^2$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЭЛЕКТРО- И МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С ДИЛАТОНОМ

В случае $C_1 = 0$ в общем гармоническом решении отсутствует электрическое поле, в случае $C_2 = 0$ отсутствует магнитное поле. В каждом из этих случаев мы можем записать три класса решений.

1. При $\frac{4C_3}{C_{1,2}^2} = k^2$ поля имеют вид

$$e^{\mp\alpha\phi} = \frac{\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)^2 e^{\mp\alpha k C_{1,2}\lambda} - 1}{2k\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)e^{\mp\frac{\alpha k C_{1,2}\lambda}{2}}},$$

$$\left\{{}^{v}/_{u}\right\} = \mp\frac{4k}{\alpha}\left[\frac{1}{\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)^2 - 1} - \frac{1}{\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)^2 e^{\mp\alpha k C_{1,2}\lambda} - 1}\right].$$

(верхний знак соответствует электростатике, нижний – магнитостатике).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЭЛЕКТРО- И МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С ДИЛАТОНОМ

2. При $\frac{4C_3}{C_{1,2}^2} = -k^2$ поля принимают вид

$$e^{\mp\alpha\phi} = \frac{1}{k}\sin\left(\mp\frac{\alpha k C_{1,2}}{2}\lambda + \arcsin k\right),$$

$$\left\{{}^{v}/_{u}\right\} = \pm\frac{2k}{\alpha}\operatorname{ctg}\left(\mp\frac{\alpha k C_{1,2}}{2}\lambda + \arcsin k\right) \mp \frac{2}{\alpha}\sqrt{1-k^2}\,.$$

(верхний знак соответствует электростатике, нижний – магнитостатике).

3. Наконец, в пограничном случае $C_3 = 0$ имеем решение

$$e^{\mp\alpha\phi} = 1 \pm \frac{\alpha C_{1,2}}{2}\lambda,$$

$$v = \frac{C_{1,2}\lambda}{1 \mp \frac{\alpha C_{1,2}}{2}\lambda}.$$