

Лекция 4: **Кварковая модель: дополнительные симметрии.**

”... Доказанная правда
есть, собственно, не правда, а всего
лишь сумма доказательств.”

(И. Бродский)

Рассмотрим теперь более внимательно спектр мезонных состояний, предсказываемый кварковой моделью. Так как $3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8$, то среди систем кварк-антикварк должны присутствовать состояния $SU(3)$ -синглета и $SU(3)$ -октета. Таким образом, для каждого из значений спина и внутренней четности должны существовать три истинно нейтральных (с $I_3 = Y = 0$) мезона: два из них принадлежат октету, и один – синглету, причем одно из октетных состояний входит вместе с двумя заряженными нестранными ($S = Y = 0, I_3 \pm 1$) мезонами в изотопический триплет, а другое является изотопическим синглетом. Волновые функции истинно нейтральных частиц записываются в виде $\Psi_i = \alpha_i \bar{u}u + \beta_i \bar{d}d + \gamma_i \bar{s}s$. Ясно, что $SU(3)$ -синглетное состояние полностью симметрично:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s),$$

а октетные состояния ортогональны Ψ_1 – соответствующие коэффициенты разложения удовлетворяют условию $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 0$. Состояние с изотопическим спином 1 объединяется в изотриплет вместе с $\bar{d}u$ и $\bar{u}d$, т.е. его следует строить только из u - и d -кварков и антикварков:

$$\gamma = 0, |\alpha| = |\beta| \Rightarrow \Psi_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}u - \bar{d}d)$$

Оставшееся изосинглетное унитарно-октетное состояние можно построить, исходя из условия ортогональности к Ψ_1 и Ψ_8 :

$$\Psi'_8 = \frac{1}{\sqrt{6}} (\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s).$$

Полный спин системы кварк-антикварк может равняться 0 или 1, а орбитальный момент основного состояния равен 0, что соответствует внутренней четности мезона $P = (-1)(-1)^l = -1$. В случае 0^- - мезонов построенные выше состояния можно идентифицировать с наблюдаемыми частицами: $\Psi_8 \equiv \pi^0$, $\Psi'_8 \equiv \eta$, $\Psi_1 \equiv \eta'$, что подтверждается соотношением масс ($m_\eta^2 \simeq \frac{1}{3}(4m_K^2 - m_\pi^2)$ – в соответствии с массовой формулой Гелл-Манна - Окубо, полученной именно для такого кваркового состава).

На первый взгляд, 1^- - мезонам можно приписать тот же кварковый состав – среди них также обнаруживаются три истинно нейтральных: ρ^0 (с массой $m_\rho =$

770 МэВ), ω ($m_\omega = 783$ МэВ) и ϕ ($m_\phi = 1020$ МэВ), однако это не согласуется с формулой расщепления масс: $m'_8 = [\frac{1}{3}(4m_{K^*}^2 - m_\rho^2)]^{\frac{1}{2}} \simeq 926.5$ МэВ, что слишком сильно отличается от m_ω . Выход был найден в том, чтобы считать ω и ϕ "смесью" октетного и синглетного состояний

$$\begin{cases} \omega = \cos\theta \cdot \Psi'_8 + \sin\theta \cdot \Psi_1 \\ \phi = -\sin\theta \cdot \Psi'_8 + \cos\theta \cdot \Psi_1 \end{cases} \quad (1)$$

Физической причиной подобного смешивания является, по-видимому, $SU(3)$ - несимметричная часть взаимодействия, приводящая к недиагональности гамильтониана соответствующих кварковых систем в базисе из собственных состояний \hat{I}_3 и \hat{Y} . С учетом этого взаимодействия запишем "массовую" матрицу изоскалярных истинно нейтральных мезонов в виде

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m_8'^2 & V_{81}^2 \\ V_{18}^2 & m_1^2 \end{pmatrix}$$

(одновременно мы сейчас предполагаем, что взаимодействие кварк-антикварк сильно зависит от спина – недиагональные элементы в этой матрице оказываются существенны при полном спине $S = 1$ и несущественны при $S = 0$). Тогда квадраты масс наблюдаемых мезонов должны быть собственными значениями \hat{M} , т.е. корнями уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (m_8'^2 + m_1^2)\lambda + m_1^2 m_8'^2 - |V_{18}|^4 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_{\omega,\phi}^2 &= \frac{m_8'^2 + m_1^2}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{m_8'^2 - m_1^2}{2}\right]^2 + |V_{18}|^4}, \end{aligned}$$

а состояния (1) должны быть соответствующими собственными векторами, поэтому

$$\begin{cases} \cos\theta m_8'^2 + \sin\theta V_{81}^2 = m_\omega^2 \cos\theta \\ -\sin\theta m_8'^2 + \cos\theta V_{81}^2 = -m_\phi^2 \sin\theta \end{cases}$$

откуда легко получить, исключая V_{81} :

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{m_8'^2 - m_\omega^2}{m_\phi^2 - m_\omega^2}} \equiv \delta \simeq 0.76.$$

Следовательно, кварковый состав ω и ϕ - мезонов (с учетом (1)) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left[\delta + \sqrt{\frac{1-\delta^2}{2}} \right] (\bar{u}u + \bar{d}d) + \left[\delta - \sqrt{2(1-\delta^2)} \right] \bar{s}s \right\} \\ \phi &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left[\sqrt{1-\delta^2} - \frac{\delta}{\sqrt{2}} \right] (\bar{u}u + \bar{d}d) + \left[\sqrt{2} \delta + \sqrt{1-\delta^2} \right] \bar{s}s \right\}. \end{aligned}$$

Отметим, что в масштабе точности унитарной симметрии ($\sim 10\%$) значение δ близко к $\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0.81$ – говорят, что $\omega - \phi$ - смешивание ”близко к идеальному”, т.е.

$$\omega \simeq \omega^{(id)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}u + \bar{d}d), \quad \phi \simeq \phi^{(id)} \equiv \bar{s}s.$$

Таким образом, ϕ -мезон с хорошей точностью можно рассматривать как кварконий – связанную систему кварка и антикварка одинакового аромата.

Исследование смешивания мезонных состояний – характерный пример использования полуфеноменологического подхода, базирующегося на идее ”ароматовой” $SU(3)$ - симметрии физики адронов. Видно, что такой подход позволяет построить достаточно реалистичное описание адронного спектра. Вместе с тем обнаруживается целый ряд частиц, которые не удастся включить в $SU(3)$ - классификацию: J/ψ , D , Υ , Λ_c и некоторые другие. Это не удивительно, так как многие из этих частиц обладают ненулевыми значениями квантовых чисел C или b , которые отсутствуют у u -, d - и s -кварков, что явно указывает на неполноту трехкварковой модели. Очевидно, самый простой путь решения возникшей проблемы – введение новых ароматов кварков (”носителей” этих квантовых чисел). Конечно, адронные состояния в модели с N ароматами должны обладать $SU(N)$ - симметрией, однако при $N \geq 4$ эти симметрии могут быть очень сильно нарушены (в самом деле, степень нарушения изотопической $SU(2)$ - симметрии $\delta_2 \sim 0.01$, унитарной $SU(3)$ – $\delta_3 \sim 0.1$, и естественно ожидать более сильного нарушения для более высоких симметрий). Поэтому классификация адронов как базисных состояний неприводимых представлений групп $SU(4)$, $SU(5)$ и т.д. практически не имеет смысла. По современным представлениям, для непротиворечивого описания всех наблюдаемых адронных состояний необходимо не менее шести ароматов – к ”легким” кваркам u , d и s добавляются ”тяжелые” c , b и t с квантовыми числами:

	B	C	b	t	Q	Y
c	$\frac{1}{3}$	+1	0	0	$+\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
b	$\frac{1}{3}$	0	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
t	$\frac{1}{3}$	0	0	+1	$+\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$

Сильное нарушение соответствующих ”сверхунитарных” симметрий с физической точки зрения свидетельствует о существенном отличии свойств этих кварков (в первую очередь – их масс) от свойств u , d и s .

Наиболее ярко особенности физики тяжелых кварков проявляются в свойствах соответствующих кваркониев – ”чармония” ($\bar{c}s$) и ”боттомония” ($\bar{b}b$). Большая масса

c - и b - кварков приводит к тому, что эти системы можно считать "почти" нерелятивистскими, и спектроскопию низших состояний можно строить по аналогии со спектроскопией атома водорода – обычно используются обозначения $n^{2S+1}L_J$ (в котором n – главное квантовое число для относительного движения, L – буквенное обозначение ($S, P, D\dots$) полного орбитального момента, S – суммарный спин кварка и антикварка, J – полный момент кваркония). Например, на сегодняшний день зарегистрирован ряд состояний парачармония (основное состояние 1^1S_0 отождествляется с псевдоскалярным η_c - мезоном с массой 2.98 ГэВ), S - и P - состояний орточармония. Первым из них было обнаружено состояние 1^3S_1 – псевдовекторный J/ψ - мезон, который сразу обратил на себя внимание аномально малой шириной распада $\Gamma \simeq 0.068$ МэВ (и, следовательно, очень большим временем жизни). Дело в том, что его распады на другие адроны, содержащие c - кварк, запрещены по энергетическим соображениям, а распады на легкие неочарованные адроны могут идти только через аннигиляцию c и \bar{c} . Все эмпирические данные свидетельствуют о сильном подавлении подобных адронных процессов – в этом состоит так называемое "правило Цвейга", и оно может быть распространено на все тяжелые кварки. В свое время открытие J/ψ - частицы рассматривалось как первое экспериментальное доказательство существования c - кварка. Позднее были открыты три тяжелые псевдовекторные частицы Υ , также обладающие аномально малыми ширинами распадов (масса самой легкой из них составляет 9.46 ГэВ, а $\Gamma \simeq 0.052$ МэВ), которые можно интерпретировать как нижние S - состояния орточармония.

На основании анализа свойств кварков в различных процессах их обычно разбивают на три "поколения":

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}.$$

Здесь наблюдается явная аналогия с лептонами – их тоже шесть, и они также разбиты на три поколения. Это кварк - лептонное соответствие, как мы убедимся позднее, играет в физике элементарных частиц очень важную роль.

Окончательно приходим к выводу, что лагранжиан "адронной части" материи должен иметь вид

$$L^{(h)} = \sum_{f=1}^6 \left[\frac{i}{2} (\bar{\Psi}_f \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_f - \partial_\mu \bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_f) - m_f \bar{\Psi}_f \Psi_f \right] + V \quad (2)$$

в котором $\Psi_1 \equiv u$, $\Psi_2 \equiv d$, $\Psi_3 \equiv s$ и т.д., а V описывает сильное взаимодействие кварков. Массовые слагаемые нарушают симметрию между ароматами даже в приближении "свободных" кварков, V предполагается в довольно высокой степени симметричным, хотя нельзя исключать возможности нарушения ароматовых $SU(N)$ -

симметрий и за счет слагаемых в лагранжиане сильного взаимодействия. Исследуем сначала "свободную" часть $L^{(h)}$. Ее свойства определяются исключительно значениями масс свободных кварков (напомним, что в состав адронов кварки входят в "облаченном" виде – они окружены "шубой" из кварк-антикварковых пар и квантов сильного взаимодействия). Можно попытаться оценить их, исходя из массовых формул Гелл-Манна - Окубо. Например, соотношения для $(\frac{1}{2})^+$ - барионов и $(0)^-$ - мезонов (см. лекцию 3) позволяют получить:

$$m_s - m_{u,d} \simeq m_{\Lambda,\Sigma} - m_N \simeq 0.215 \text{ ГэВ}, \quad m_s^2 - m_{u,d}^2 \simeq m_K^2 - m_\pi^2 \simeq 0.049 \text{ ГэВ}^2$$

$$(m_{\Lambda,\Sigma} = \frac{m_\Lambda + m_\Sigma}{2} \simeq 1.155 \text{ ГэВ}), \text{ откуда}$$

$$m_u \simeq m_d \simeq \frac{m_{\Lambda,\Sigma} - m_N}{2} \left[\frac{m_K^2 - m_\pi^2}{(m_{\Lambda,\Sigma} - m_N)^2} - 1 \right] \simeq 6.5 \text{ МэВ}$$

$$m_s \simeq \frac{m_{\Lambda,\Sigma} - m_N}{2} \left[\frac{m_K^2 - m_\pi^2}{(m_{\Lambda,\Sigma} - m_N)^2} + 1 \right] \simeq 222 \text{ МэВ}$$

Значения масс чармония и боттомония позволяют получить оценку и для масс тяжелых кварков: $m_c \simeq 1.5 \text{ ГэВ}$, $m_b \simeq 5 \text{ ГэВ}$. Разумеется, эти оценки носят весьма приблизительный характер (например, никак не учитывается различие масс m_u и m_d и зависимость энергии "облачения" от кваркового состава). Более строгие расчеты, основанные на анализе данных рассеяния адронов, дают: $m_u \simeq 4 \text{ МэВ}$, $m_d \simeq 7 \text{ МэВ}$, $m_s \simeq 130 \text{ МэВ}$. Примечательно, что большая часть массы нуклона оказалась связана с энергией "облачения", а не с массой составляющих кварков.

Заканчивая рассмотрение структуры кварковой модели адронов, обратим внимание на ряд возникших у нас проблем, которые мы до сих пор игнорировали:

1. Почему наблюдаются только связанные состояния систем кварк-антикварк и трехкварковых – нет ни двухкварковых, ни четырехкварковых связанных состояний? Наконец, почему мы не наблюдаем сами кварки в свободном состоянии?

2. Почему зарядовые радиусы мезонов и барионов практически одинаковы? В самом деле, в мезоне наинизшей энергией обладает, естественно, состояние с нулевым орбитальным моментом. Близость зарядовых радиусов свидетельствует о том, что в низших энергетических барионных состояниях кварки также обладают нулевыми орбитальными моментами, что для барионов, состоящих из трех одинаковых кварков, противоречит принципу Паули.

3. Почему волновые функции трехкварковых систем из одинаковых кварков ($\Delta^{++} = uuu$, $\Omega^- = sss$ и других) не обладают нужным типом перестановочной симметрии (т.е. нарушают теорему о связи спина со статистикой): координатная часть волновой функции основного состояния системы из трех кварков имеет нулевой полный

орбитальный момент и полностью симметрична (что очевидно, если обратить внимание на близость массы Δ^{++} и $\Delta^+ = uud$, для которой проблемы тождественности не существует), Но барионы декаплета имеют спин $\frac{3}{2}$, и поэтому спиновая часть волновой функции тоже полностью симметрична по отношению к перестановкам. Следовательно, полная волновая функция симметрична по отношению к перестановкам любой пары кварковых переменных, что противоречит требованиям статистики Ферми-Дирака для частиц с полуцелым спином.

Обойти все эти трудности можно с помощью предположения о наличии у кварковых состояний дополнительного вырождения, которое ранее не учитывалось. Тем самым мы постулируем наличие у лагранжиана (2) дополнительной внутренней симметрии. Состояния в соответствующем пространстве различаются по значениям некоторого нового квантового числа, получившего название цвет. Для обеспечения возможности построения антисимметричных волновых функций барионов необходимо иметь не менее трех независимых цветовых состояний. Это число также оказывается и достаточным, и теперь кварк каждого аромата может иметь одно из трех возможных значений цветового заряда: в (2)

$$\Psi_f = \begin{pmatrix} \Psi_f^r \\ \Psi_f^y \\ \Psi_f^g \end{pmatrix}$$

(значения индексов расшифровываются как "red" – красный, "yellow" – желтый и "green" – зеленый), т.е. кварковые поля образуют триплет относительно цветовой группы симметрии $SU(3)$. Эта симметрия предполагается точной. Для отбора наблюдаемых состояний адронов достаточно потребовать, чтобы все они были цветовыми синглетами – волновые функции барионов полностью антисимметричны по цветовому индексу. Тогда отсутствие двухкварковых систем связано с тем, что для $SU(3)$ $3 \otimes 3 = 3^* \oplus 6$ – среди них нет цветовых синглетов, которые появляются в системах $\bar{q}q$ и qqq .

Прямое доказательство существования цветовой степени свободы было получено при изучении процессов e^-e^+ -аннигиляции в адроны. Обычно рассматривают отношение сечения этого процесса к сечению стандартного лептонного процесса

$$R \equiv \frac{\sigma[e^-e^+ \rightarrow h_1, h_2 \dots]}{\sigma[e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+]}$$

Такие реакции в низшем порядке КЭД идут путем аннигиляции электрона и позитрона в один виртуальный фотон с последующим образованием лептон-антилептонных или кварк-антикварковых пар (именно кварки и лептоны выступают в нашей модели

в качестве фундаментальных частиц). Диаграммы всех таких процессов совершенно одинаковы, и соответствующие амплитуды будут различаться только значением заряда в вершине рождения пары конечных частиц. Полное сечение в нерезонансном случае будет пропорционально сумме квадратов электрических зарядов кварков и лептонов, рождение которых разрешено законом сохранения энергии в системе центра масс. Конечное состояние будет адронным в случае рождения кварковых или τ -лептонных пар (τ за малое время распадается преимущественно на адроны), поэтому

$$R = \sum_i Q_i^2.$$

Индекс i пробегает все разрешенные для данной энергии конечные состояния, кроме электронных и мюонных, и, следовательно, значение R зависит от наличия внутренних степеней свободы у кварковых полей. С учетом цвета ниже порога рождения очарованных кварков $R = 3 \cdot [(\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2] = 2$ (без учета цветовой степени свободы мы имели бы только $\frac{2}{3}$), после прохождения этого порога (для энергий $E > 3$ ГэВ) R возрастает до $\frac{10}{3}$; выше порога рождения τ -лептонов $R = \frac{13}{3}$, а после открытия канала b -кварка $R = \frac{14}{3}$. Эксперимент подтверждает такое поведение R ; кроме того, до сих пор новые пороги надежно не обнаружены, однако в 1994 году было зарегистрировано рождение пары $\bar{t}t$ на протон-антипротонном коллайдере ($E_{СЦИ} = 1.8$ ТэВ). Масса t -кварка оказалась равной примерно 175 ГэВ.

Таким образом, фундаментальные фермионы – частицы, из которых построена все наблюдаемое вещество – это 18 кварков, 6 лептонов и соответствующие античастицы. Последующее развитие теории должно содержать изучение взаимодействий кварков и лептонов. В частности, сильное взаимодействие кварков должно обеспечивать некоторый динамический механизм конфайнмента – ”невывлета” свободных кварков, благодаря которому наблюдаются только синглетные по цвету образования. Есть ряд указаний на то, что такое поведение действительно возникает в квантовой хромодинамике (КХД) – теории, согласно которой именно цвет играет роль заряда частицы по отношению к сильному взаимодействию. Цветные частицы взаимодействуют между собой за счет обмена квантами-переносчиками, получивших название глюоны.

Задачи к лекции 4:

1. Найти квантовые числа (n, l, S, J, P) низших состояний чармония и боттомония. Какие частицы им соответствуют?
2. Возможны ли процессы $\psi', \psi'' \rightarrow J/\psi\gamma$ и $\Upsilon', \Upsilon'' \rightarrow \Upsilon\gamma$?
3. Для случая идеального смешивания найти отношение ширин распадов ρ^0, ω, ϕ на пару e^+e^- .
4. Почему распады $\phi \rightarrow \pi\pi\pi$ сильно подавлены по сравнению с $\phi \rightarrow KK$?
5. Построить волновые функции протона и π^+ - мезона как составных систем с учетом цветовой степени свободы у кварков.
6. В каких комбинациях кварковых систем (кроме кварк-антикварк и трехкварковых) возможно существование цветовых синглетов?
7. Оценить разность масс u - и d -кварка, исходя из характеристик нуклонов.