Лекции 8,9: **Суперсимметрия и дополнительные измерения.**

"Тем, кто хорошо знаком с пятым измерением, ничего не стоит раздвинуть помещение до желательных пределов. Скажу Вам более, уважаемая госпожа, до черт знает каких пределов!"

(М. Булгаков, "Мастер и Маргарита")

Одной из центральных проблем простейших ТВО является уже обсуждавшаяся выше проблема иерархий – энергетические масштабы нарушения калибровочных симметрий $G_{CU} \to G_{SM}$ и $G_{SM} \to SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$ различаются на 12 - 13 порядков, что в значительной мере угрожает внутренней согласованности теории: даже если ввести столь малый параметр, как M_W/M_X, непосредственно в лагранжиан модели, он вряд ли сохранил бы свою малость при учете радиационных поправок (см. лекцию II.5). Причину столь удивительного отсутствия перенормировки этого параметра следует искать в существовании некоторой более обширной, чем G_{GU}, симметрии. До сих пор мы в подобных ситуациях рассматривали только одну возможность – расширение внутренней симметрии теории, оставляя неизменной симметрию пространства-времени, причем первая и вторая всегда были жестко разделены: полная группа симметрии всегда представляла собой прямое произведение $S = P_{st} \otimes G_{in}$. Опыт работы с такими теориями показал, что ввиду расходимости петлевых диаграмм перенормировки играют в них существенную роль, а добиться сокращения расходимостей можно только путем тщательного подбора констант взаимодействий и числа независимых компонент полей разных спинов, то есть введения в теорию некоторой симметрии между полями с разным значением спина. Здесь уместно напомнить, что спин – составная часть оператора момента импульса, т.е. генератора пространственно-временной симметрии, и, следовательно, теорию без перенормировок нужно снабдить группой симметрии, в алгебре которой нет разделения на внутренний и пространственно-временной сектора. Кроме того, оказывается, что в нетривиальной КТП расширение подобного рода должно производиться вполне определенным образом – если дополнительные генераторы группы S (отличные от импульса и момента импульса) имеют тензорную природу, то законы сохранения (которых станет значительно больше) при взаимодействии двух частиц приведут к требованию неизменности импульсов частиц при рассеянии, т.е. к требованию отсутствия взаимодействия (подобные утверждения в КТП известны как "no - go" - теоремы). Поэтому в теориях с взаимодействием можно ввести только спинорные дополнительные генераторы, антикоммутатор которых пропорционален оператору импульса – в этом случае новые тензорные законы сохранения не появляются (соответствующее преобразование является "квадратным корнем" из преобразования трансляции). В этом случае в группе симметрии содержатся преобразования, перемешивающие бозонные и фермионные степени свободы, и название "симметрия" заменяют на "*суперсимметрия*" ("SUSY"). Таким образом, естественно искать суперсимметричное обобщение ТВО ("СуперТВО").

На самом деле идея суперсимметрии позволяет сделать теорию еще более амбициозной. Объединение симметрий пространства-времени с калибровочными симметриями открывает возможность описания связанных с метрикой *гравитационных* полей. Это, впрочем, и не удивительно – продвижение по энергии далее масштаба ТВО подводит нас вплотную к *планковскому* масштабу

$$M_{Pl} \ = \ \sqrt{\frac{\hbar \ c}{\gamma}} \ \simeq \ 10^{19} \mathit{ГэВ}$$

(γ – гравитационная постоянная), который соответствует области проявления квантовогравитационных эффектов. Локализация суперсимметрии приводит нас к теориям *супергравитации*, в которой среди калибровочных полей появляется поле со спином 2, кванты которого отождествляются с *гравитонами* – переносчиками гравитационного взаимодействия.

Рассмотрим основные черты математического аппарата, используемого при работе с суперсимметричными теориями. Наиболее естественным образом суперсимметрия реализуется в "расширенном" (Z_2- градуированном) пространстве, точки которого описываются набором координат (x^μ, θ^α), в котором x^μ – обычные ("четные") координаты пространства Минковского, а θ^α – антикоммутирующие ("нечетные") координаты, которые при преобразованиях Лоренца ведут себя как компоненты майорановского спинора. Простейшая (ее называют "простой") алгебра преобразований суперсимметрии содержит помимо генераторов группы Пуанкаре вещественные спинорные операторы супертрансляций $\hat{Q}_\alpha = C_{\alpha\beta} \hat{\bar{Q}}^\beta$, причем в соответствии с проведенным выше анализом эти новые генераторы удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} [\ \hat{Q}_\alpha\ ,\ \hat{P}_\mu\ ] \ &= \ 0\ , \\ [\ \hat{Q}_\alpha\ ,\ \hat{J}_{\mu\nu}\ ] \ &= \ \frac{1}{2}\ (\sigma_{\mu\nu})^\beta_\alpha\ \hat{Q}_\beta\ , \\ \{\ \hat{Q}_\alpha\ ,\ \hat{Q}_\beta\ \} \ &= \ -\ (\gamma^\mu C)_{\alpha\beta}\ \hat{P}_\mu\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Более сложные примеры алгебр расширенной суперсимметрии получаются при введении нескольких (N) спинорных наборов дополнительных генераторов. Произвольный элемент группы трансляций в суперпространстве S можно представить в виде

$$G(x,\theta) \;=\; e^{i[x^\mu \hat{P}_\mu + \bar{\theta}^\alpha \hat{Q}_\alpha]}\;.$$

Нетрудно показать, используя закон коммутации (1), что сдвиги по нечетным координатам (супертрансляции) индуцируют сдвиг по пространственным координатам:

$$G(0,\xi)\;\cdot\;G(x,\theta)\;=\;G(x',\theta')\;,$$

$$x'^\mu \;=\; x^\mu \;+\; \frac{i}{2}\,\bar{\xi}\gamma^\mu\theta\;, \qquad \theta' \;=\; \theta \;+\; \xi\;.$$

Отметим, что условие вещественности майорановского спинора θ приводит к тому, что $\bar{\theta}$ не является независимой переменной, и можно вместо четырехкомпонентных спиноров использовать для параметризации дополнительных измерений в суперпространстве комплексные двухкомпонентные спиноры. Такой способ описания суперсимметрии (формализм Ван-дер-Вардена) часто оказывается удобным, особенно при изучении конструкций в пространстве четырех измерений, но для большей общности мы будем использовать четырехкомпонентную форму записи.

Алгебра (1) может быть реализована как алгебра дифференциальных операторов на суперпространстве

$$\hat{P}_\mu \;=\; i\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\;\equiv\; i\,\partial_\mu,$$

$$\hat{Q}_\alpha \;=\; \hat{D}_\alpha \;=\; \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha}\;-\;\frac{i}{2}\,(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\theta_\beta\partial_\mu\;,$$

если дифференцирование по нечетным координатам произвольной функции на суперпространстве определить таким образом, что

$$\Phi(x,\theta+\delta\theta)\;-\;\Phi(x,\theta)\;\equiv\;\delta\,\Phi(x,\theta)\;=\;\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,\delta\theta\;\equiv\;\delta\bar{\theta}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\theta}}\;.$$

<u>Локальные</u> полевые функции, определенные на суперпространстве – *суперполя*, удовлетворяют требованию

$$(x-x')^2>0\;\Rightarrow\;[\Phi(x,\theta),\Phi(x',\theta')]\;=\;0\;.$$

Заметим, что в силу антикоммутативности нечетных координат разложение суперполя по степеням θ является полиномом степени не выше четвертой:

$$\Phi(x,\theta)\;=\;A(x)\;+\;\bar{\theta}\psi(x)\;+\;\frac{1}{4}\,\bar{\theta}\theta F(x)\;+\;\frac{i}{2}\,\bar{\theta}\gamma^5\theta G(x)\;+\;\frac{1}{4}\,\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma^5\theta V_\mu(x)\;+ \qquad (2)$$

$$+\;\frac{1}{4}\,\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\chi(x)\;+\;\frac{1}{32}\,(\bar{\theta}\theta)^2 D(x).$$

Суперполе Φ может нести дополнительные спинорные или тензорные индексы, которые в этом случае появляются и у *компонентных* полей. Таким образом, с точки зрения "обычных" полевых теорий в четырехмерном пространстве-времени суперполе соответствует мультиплету полей различных спинов, в котором число фермионных и бозонных степеней свободы одинаково.

Важную роль в моделях SUSY играют специальные типы суперполей – киральные суперполя, удовлетворяющие условиям

$$\hat{D}^{\mp}_{\alpha}\ \Phi_{(\pm)}\ \equiv\ \frac{1 \mp \gamma^5}{2}\ \hat{D}_{\alpha}\ \Phi_{(\pm)}\ =\ 0\ ,$$

и вещественные суперполя $\Phi = \Phi^{+}$. В этих случаях число независимых компонентных полей, естественно, уменьшается – например, скалярное киральное суперполе можно представить в виде

$$\Phi_{(+)}\ =\ exp[\frac{i}{4}\bar{\theta}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\theta\partial_{\mu}]\ [A(x)\ +\ \bar{\theta}_{-}\psi(x)\ +\ \frac{1}{2}\ \bar{\theta}_{-}\theta_{+}F(x)],$$

в котором A, F – комплексные скалярные поля, а ψ – спинорное поле положительной киральности. Изменения суперполя при инфитезимальных супертрансляциях ε соответствует некоторому преобразованию компонентных полей; в частности, для кирального суперполя

$$\delta A\ =\ \bar{\varepsilon}\psi,$$

$$\delta\psi\ =\ F\varepsilon_{+}\ -\ i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}A\varepsilon_{-},$$

$$\delta F\ =\ \bar{\varepsilon}_{+}i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi.$$

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что вариация коэффициента при старшей степени нечетных координат – поля F – является 4-дивергенцией. Более того, можно убедиться, что это свойство имеет место для всех компонент высшей размерности любого суперполя. Поэтому интегралы от этих компонент по 4-пространству являются инвариантами, что можно использовать при построениии функционалов действия. Можно даже записать такое действие как интеграл от скалярной лагранжевой "суперплотности" по суперпространству, если определить интегрирование по нечетным координатам как дифференцирование:

$$\int d\theta_{\alpha}f(\theta)\ \equiv\ \frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}\ f(\theta)$$

(нетрудно заметить, что такое интегрирование всегда приводит как раз к коэффициенту при старшей степени θ, так как любая функция на суперпространстве всегда является линейной функцией θ_α). Поэтому инвариантами, подходящими для построения действия, являются

$$S_1 \;=\; \int d^4x d^4\theta \; L(x,\theta)$$

(L – скалярное суперполе, построенное из локальных суперполей, содержащихся в рассматриваемой модели) и

$$S_2 \;=\; \int d^4x d^2\theta_\pm \; L_{(\pm)}(x,\theta)$$

($L_{(\pm)}$ – киральное скалярное суперполе). Например, динамика триплетного кирального скалярного суперполя

$$\Phi_{(+)} \;=\; \begin{pmatrix} \Phi^1_{(+)} \\ \Phi^2_{(+)} \\ \Phi^3_{(+)} \end{pmatrix}$$

может быть описана с помощью функционала действия

$$S \;=\; \int d^4x d^4\theta \; \Phi^+_{(+)}\Phi_{(+)} \;+\; [\; \int d^4x d^2\theta_+ \; U(\Phi_{(+)}) \;+\; h.c. \;] \; . \qquad (3)$$

Анализ расходимостей в этой модели приводит к замечательному результату: необходимым и достаточным условием перенормируемости является использование в качестве U полинома третьей степени

$$U(\Phi_{(+)}) \;=\; \lambda_i \Phi^i_{(+)} \;+\; \frac{1}{2}\; m_{ij}\Phi^i_{(+)}\Phi^j_{(+)} \;+\; \frac{1}{6}\; g_{ijk}\Phi^i_{(+)}\Phi^j_{(+)}\Phi^k_{(+)} \; .$$

Более того – в этом случае радиационные поправки к значениям коэффициентов λ, m, g вообще отсутствуют! Такая "суперперенормируемость" с точки зрения компонентных полей является следствием точного сокращения расходящихся вкладов от фермионных и бозонных петель и поэтому тесно связана с SUSY.

Если переписать (3) через компонентные поля, то после интегрирования по θ получим:

$$S \;=\; \int d^4x \; L(x) \; ,$$

$$L(x) \;=\; \frac{i}{2}(\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi) \;+\; \partial^\mu A^+\partial_\mu A \;+\; F^+F \;+\; [\; \lambda_i F^i \;+\; m_{ij}(A^iF^j - \psi^i\psi^j) \;+$$
$$+\; g_{ijk}(\frac{1}{2}\; A^iA^jF^k - \psi^i\psi^jA^k) \;+\; h.c. \;] \; .$$

Так как L не содержит производных полей F, то эти поля в действительности не являются независимыми динамическими переменными и могут быть исключены с помощью соответствующих полевых уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial F^{i*}} \;=\; F^i \;+\lambda^i \;+\; m_{ij}A^j \;+\; g_{ijk}A^jA^k \;=\; 0 \; ,$$

что приводит к выражению для плотности лагранжиана в терминах независимых полей A и ψ:

$$L \;=\; \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) \;-\; m_{ij}\bar{\psi}^{i}\psi^{j} \;+\; \partial^{\mu}A^{+}\partial_{\mu}A \;-\; [g_{ijk}\psi^{i}\psi^{j}A^{k} \;+\; h.c.] \;-\; V_{ef}(A,A^{+})\;,$$

где эффективный потенциал самодействия скалярных полей

$$V_{ef}(A,A^{+}) \;\equiv\; F^{+}F\;.$$

Наличие среди компонент суперполей "лишних" (вспомогательных) полей, подобных F в рассмотренном примере, весьма типично для SUSY - теорий.

Включение в эту схему локальных (калибровочных) симметрий и связанных с ними полей легко производится по обычной "компенсационной" схеме. К примеру, модель (3) обладает глобальной $U(1)$ - симметрией

$$\Phi_{(+)} \;\to\; \Phi'_{(+)} \;=\; e^{i\alpha\hat{s}_3}\;\Phi_{(+)}$$

($\hat{s}_3 \equiv diag(+1,0,-1)$), если коэффициенты в полиноме U удовлетворяют необходимым требованиям (в частности,

$$U \;=\; \lambda\Phi^{2} \;+\; m\Phi^{1}\Phi^{3} \;+\; g\Phi^{2}\Phi^{1}\Phi^{3}$$

указанной симметрией обладает). Эту симметрию можно расширить до локальной ($\alpha=\alpha(x)$), вводя скалярное вещественное суперполе V $(=V^{+})$

$$\Phi^{+}_{(+)}\Phi_{(+)} \;\to\; \Phi^{+}_{(+)}e^{2V}\;\Phi_{(+)},$$

преобразующееся по закону

$$e^{2V} \;\to\; e^{2V'} \;=\; e^{i\alpha\hat{s}_3}\;e^{2V}\;e^{-i\alpha\hat{s}_3}\;.$$

Суперполе V имеет довольно много компонент, однако ясно, что калибровочная симметрия приводит к дополнительным связям между компонентными полями, т.е. многие из них не являются независимыми. Фиксация калибровки приводит к потере явной симметрии (и, возможно, суперсимметрии) лагранжиана – супертрансляции нужно будет сопровождать "синхронным" калибровочным преобразованием для того, чтобы калибровочные поля продолжали удовлетворять условию, фиксирующему калибровку – но позволяет минимизировать число компонентных полей (в калибровке Весса - Зумино). При этом обнаруживается, что *суперпотенциал*

$$V(x,\theta)|_{WZ} \;=\; \frac{1}{4}\;\bar{\theta}\gamma^{\mu}\gamma^{5}V_{\mu}(x) \;+\; \frac{i}{2\sqrt{2}}\;\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\gamma^{5}\lambda(x) \;+\; \frac{1}{16}\;(\bar{\theta}\theta)^{2}D(x)\;.$$

содержит помимо обычных векторных полей Янга-Миллса также скалярные и спинорные поля. Янг-миллсовские напряженности содержатся в киральном спинорном суперполе

$$W_{\alpha(+)} \;=\; -\,\frac{i}{2\sqrt{2}}\,\hat{\bar{D}}^{\beta+}\hat{D}^{-}_{\beta}\,[\,e^{-2V}\hat{D}^{+}_{\alpha}e^{2V}\;]\;,$$

поэтому полное действие (включающее слагаемые для свободных калибровочных полей) в локально-симметричной теории имеет вид

$$S \;=\; \int d^4x d^4\theta\;\Phi^{+}_{(+)}e^{2V}\Phi_{(+)} \;+\; [\;\int d^4x d^2\theta_{+}\;[\;U(\Phi_{(+)})\;+\;\frac{1}{4}\,Tr(W^{T}_{(+)}C^{-1}W_{(+)})\;]\;+\;h.c.\;]\;.$$

Локализация самой суперсимметрии приводит к весьма интересному и важному результату. С точки зрения обычных теорий калибровочных полей в этом случае мы имеем дело с локальной фермионной симметрией – параметром преобразований SUSY является спинорное поле. В соответствии с (1) антикоммутатор двух супертрансляций пропорционален обычной трансляции, и поэтому локализация суперсимметрии приводит и к локализации симметрии по отношению к общекоординатным преобразованиям, т.е. к описанию гравитации в калибровочном подходе. Действительно, в теориях с локальной SUSY – *супергравитацией* – в наборе калибровочных полей содержатся поля со спином $\frac{3}{2}$ (*гравитино*) и 2 (*гравитоны*).

После построения суперполевых лагранжианов можно развивать SUSY-теории, пользуясь обычными методами КТП. В частности, можно сформулировать правила Фейнмана и использовать диаграммную технику. При этом каждая суперполевая диаграмма – *суперграф* – содержит в себе целый набор диаграмм Фейнмана для компонентных полей. Конечно, мы можем с самого начала переписать действие суперсимметричной теории через компонентные поля, исключить вспомогательные полевые переменные и все вычисления производить в терминах независимых полей в обычном 4-пространстве, тем более что физическая интерпретация результатов в таком подходе имеет более ясный смысл. Однако многие точные результаты удобнее получать, работая непосредственно с суперполями.

После изучения структуры суперсимметричных теорий естественно задаться вопросом: каким образом суперсимметрия может проявляться в окружающем нас мире? Если она является симметрией динамики квантовой теории поля, то генераторы суперсимметрии могут быть отождествлены с сохраняющимися зарядами, а гильбертово пространство состояний системы полей совпадает с пространством представления алгебры SUSY (1). Любое представление может быть разложено на неприводимые, поэтому состав мультиплетов полей в суперсимметричных теориях может быть выяснен при изучении неприводимых представлений (1). Оператор массы $\hat{P}^2$ коммутирует со всеми генераторами движений суперпространства, т.е. является одним из операторов Казимира, поэтому все состояния пространства неприводимого представления есть состояния с одной и той же массой. В этом отношении ситуация не изменилась по сравнению с Пуанкаре-инвариантными полевыми теориями. Однако второй оператор Казимира группы Пуанкаре – оператор квадрата спина – требует модификации, так как супертрансляции характеризуются спинорным параметром и перемешивают состояния различных спинов. В случае ненулевой массы покоя неприводимые представления могут быть классифицированы по значениям *суперспина* j, который задает трансформационные свойства клиффордова "вакуума" мультиплета по отношению к пространственным вращениям. Спиновый состав мультиплета с данным j определяется числом N наборов генераторов суперсимметрии – при $j = 0$ (фундаментальный мультиплет) есть 2^{2N-1} бозонных и столько же фермионных состояний с максимальным спином $N/2$, причем это состояние является единственным, а при ненулевом суперспине мы должны сложить (по правилу сложения моментов) спин клиффордова вакуума и спины частиц фундаментального мультиплета. Например, при $N = 1$ фундаментальный мультиплет содержит состояния двух скалярных и одной спинорной частицы, потому мультиплет с суперспином $j \neq 0$ содержит состояния со спинами $(j, j - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, j)$. Для безмассовых мультиплетов аналогичным образом оператор спиральности обобщается до оператора суперспиральности $\hat{\lambda}$, причем неприводимый мультиплет $N = 1$ - суперсимметрии содержит состояния со спиральностями $(\lambda, \lambda + \frac{1}{2})$.

Таким образом, в мире с ненарушенной суперсимметрией все частицы должны иметь *суперпартнеров* – частицы с таким же значением массы, но с отличающимся на $\frac{1}{2}$ спином. В реальном спектре частиц такая закономерность не просматривается, поэтому необходимо считать, что суперсимметрия является нарушенной. Техника нарушения SUSY имеет свои особенности. Поскольку, как видно из последнего соотношения в (1), оператор энергии можно выразить через антикоммутаторы генераторов суперсимметрии, любое вакуумное состояние, сохраняющее суперсимметрию, будет обладать нулевой энергией, а энергия всех прочих состояний положительна. Вследствие этого суперсимметрия окажется спонтанно нарушена, если энергия вакуумного состояния отлична от нуля. Например, в модели (3) для этого достаточно, чтобы уравнение

$$V_{ef}(A, A^{+}) \;\equiv\; 0 \;,$$

определяющее нули эффективного потенциала, не имело решений в классе значений A. Кроме того, в SUSY - теориях с неабелевой калибровочной симметрией, так же, как и в "обычных", непертурбативные вакуумные эффекты приводят к образованию конденсатов и динамическому нарушению суперсимметрии, причем масштаб этих эффектов определяется величинами порядка e^{-1/g^2}, в которых g – малое значение константы связи исходной теории. В этом случае естественным образом возникает малый параметр, который из-за отсутствия перенормировки сохранит свою малость во всех порядках теории возмущений, и это дает возможность решения проблемы иерархий в ТВО.

В мире с нарушенной SUSY суперпартнеры наблюдаемых частиц будут иметь весьма большие массы, но тем не менее они обязаны существовать и их поиск можно рассматривать как проверку идеи SUSY. В "минимальных" моделях простой (N = 1) супергравитации каждая из частиц Стандартной Модели имеет суперпартнера – в этом случае в мире должны существовать скалярные *скварки* ($\tilde{q}$) и *слептоны* ($\tilde{l}$), спинорные (спин $s = \frac{1}{2}$) *фотино* ($\tilde{\gamma}$), *вино* ($\tilde{W}$), *зино* ($\tilde{Z}$) и набор *глюино* ($\tilde{g}$), а возможно – также и весьма обширное семейство скалярных и спинорных частиц, связанных с хиггсовскими полями, необходимыми для нарушения симметрий. К сожалению, недостаток информации о характере нарушения суперсимметрии не позволяет сделать достаточно определенные предсказания относительно их массы – с помощью вполне допустимых с эмпирической точки зрения модификаций моделей можно вытеснить их довольно далеко за пределы области, доступной экспериментальному исследованию. Стоит, однако, отметить, что в наиболее простых моделях массы суперпартнеров оказываются связаны с массой хиггсовского бозона СМ и не должны сильно отличаться от нее по порядку величины. Если задаться какими-то определенными значениями масс суперпартнеров, то можно сделать множество всевозможных предсказаний относительно сечений процессов с их участием и их времен жизни (см. задачи к данной лекции). При вычислении амплитуд процессов следует учесть, что вследствие суперсимметрии и законов сохранения зарядов и момента импульса вершины в SUSY - обобщениях СМ получаются из вершин самой СМ путем попарной замены частиц их суперпартнерами. Последнее, в частности, означает, что действуют законы сохранения "чисел суперпартнеров", и поэтому наиболее легкие из них должны быть стабильными ввиду отсутствия разрешенных каналов распада. Наличие таких новых типов стабильных массивных частиц, слабо взаимодействующих с обычной материей может облегчить решение уже неоднократно упоминавшейся проблемы скрытой массы во Вселенной.

Богатые теоретические возможности, открывшиеся при реализации идеи суперсимметрии с помощью Z_2 - градуированных пространств, привлекли внимание к теориям в пространствах с дополнительными измерениями и нетривиальным топологическим устройством. Так получилось, что именно SUSY вдохнула новую жизнь в предложенную еще в 1921 году схему *размерной редукции* Калуцы-Клейна. В качестве простого примера рассмотрим эту схему в ее первоначальном виде.

Предположим, что физическое пространство – пятимерное многообразие с глобальной топологией цилиндрической гиперповерхности $M^{(4)} \otimes S^{(1)}$ ($M^{(4)}$ – четырехмерное псевдоевклидово простанство, отождествляемое с обычным пространством-временем, а $S^{(1)}$ – окружность радиуса a). Действие

$$S_5 \ = \ - \ \frac{1}{16\pi G} \int d^5x \ \sqrt{|g|} \ R$$

(в котором $g \equiv det||g_{AB}||$, $R \equiv R^A_A$ – скалярная кривизна) приводит к уравнениям, определяющим метрику пустого пространства аналогично уравнениям Гильберта - Эйнштейна в $M^{(4)}$. Введем следующую параметризацию метрического тензора:

$$g_{AB} \ = \ \frac{1}{\phi^{1/3}} \begin{pmatrix} \tilde{g}_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \phi A_\nu & \phi \end{pmatrix}$$

(здесь пятнадцать независимых компонент тензора g_{AB} выражены через десять компонент $\tilde{g}_{\mu\nu}$, 4-вектор A_μ и скаляр ϕ). Учитывая циклический характер координаты x_5, можно разложить g_{AB} в ряд Фурье

$$g_{AB}(x^\mu, x^5) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g^{(n)}_{AB}(x^\mu) \ \cdot \ e^{inx^5/a} \tag{4}$$

и предположить наличие симметрии относительно трансляций по x_5 – в этом случае в сумме останется только слагаемое с $n = 0$ (с квантовой точки зрения моды с $n \neq 0$ "вымораживаются" в низкоэнергетическом приближении, так как соответствуют энергиям $\sim 1/a^2$). Тогда действие может быть переписано через эффективную четырехмерную лагранжеву плотность

$$S_5 \ = \ - \ \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \ \sqrt{|\tilde{g}|} \ [\ \tilde{R} \ + \ \frac{1}{4} \ \phi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \ + \ \frac{1}{6\phi^2} \ \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \ ]$$

($F_{\mu\nu} \equiv \tilde{D}_\mu A_\nu - \tilde{D}_\nu A_\mu$). Очень впечатляюще выглядит "естественное" появление в эффективном лагранжиане слагаемого, описывающего "электромагнитное" поле. К тому же сдвиги по пятой координате

$$x^A \ = \ (x^\mu, x^5) \ \rightarrow \ x'^A \ = \ (x^\mu, x^5 + \alpha(x^\mu))$$

генерируют преобразование g_{AB}, которое в используемой параметризации в точности соответствует "калибровочному" преобразованию

$$A_\mu \ \rightarrow \ A_\mu \ + \ \partial_\mu\alpha \ .$$

Если в квантовой версии этой модели ввести ненулевое вакуумное среднее поля ϕ, то поле

$$\tilde{A}_\mu \;\equiv\; \sqrt{\frac{<\phi>_{vac}}{16\pi G}}\; A_\mu$$

можно интерпретировать как электромагнитное. Заметим, что компоненты скалярных полей с $n \neq 0$ (т.е. с ненулевой пятой компонентой импульса) удовлетворяют в четырехмерном мире уравнению Клейна-Гордона-Фока для заряженных частиц:

$$D_A D^A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi^{(n)}(x^\mu) \;\cdot\; e^{inx^5/a} \;=\; 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (\tilde{D}_\mu - iq_n\tilde{A}_\mu)\cdot(\tilde{D}^\mu - iq_n\tilde{A}^\mu)\;\chi^{(n)} \;=\; 0\;,$$

$$q_n \;=\; n\cdot e \;=\; n\cdot\frac{\sqrt{16\pi G}}{a}\;.$$

Таким образом, в пятимерном мире Калуцы - Клейна электромагнитное взаимодействие имеет чисто геометрическое происхождение. Ясно, что, увеличивая число дополнительных измерений, мы будем получать все более сложную эффективную четырехмерную динамику, и возникает надежда на описание <u>всех</u> фундаментальных взаимодействий в рамках $d = (4+K)$-мерной геометрической конструкции с глобальной топологией гиперповерхности $M^{(4)} \otimes B^{(K)}$ ($B^{(K)}$ – некоторое <u>компактное</u> K-мерное многообразие). Фоновая (вакуумная) метрика d-мерного пространства и конфигурация материальных полей (если они есть в используемой модели) в нем ищется как решение соответствующих классических уравнений, удовлетворяющее условию симметрии по отношению к группе движений компактного пространства. После этого все полевые переменные (включая те, с помощью которых параметризованы компоненты метрики) раскладываются аналогично (4) по собственным функциям оператора массы на $B^{(K)}$:

$$\phi(x^A) \;=\; \phi(x^\mu, y^m) \;=\; \sum_{n_1,\ldots,n_K} \phi^{\{n_i\}}(x^\mu)\cdot\psi^{\{n_i\}}(y^m)\;,$$

$$\hat{M}_B^2\;\psi^{\{n_i\}}(y^m) \;=\; m^2_{\{n_i\}}\psi^{\{n_i\}}(y^m)\;.$$

Таким образом, материальное поле в d-мерном пространстве порождает бесконечный набор полей в $M^{(4)}$ (причем все поля с $n_i \neq 0$ обладают массами $\sim 1/a^2$). Анализ решений классических уравнений показал, что возможна интерпретация перехода от $a = \infty$ к $a \to 0$ как "фазового" перехода типа спонтанного нарушения симметрии в негравитационных полевых теориях – в этом случае говорят, что происходит *спонтанная компактификация пространства – времени*. Естественно считать, что "стягивание" дополнительных измерений в точку будет остановлено за счет квантово-гравитационных эффектов – a будет уменьшатся не до нуля, а до "нулевой" (планковской) длины $l_{Pl} \simeq 10^{-33}$ см. Тогда частицы, отвечающие возбуждению высших гармоник редуцированных полей, должны иметь массы порядка планковской. К настоящему времени построено довольно много полуфеноменологических моделей, в которых и сама спонтанная компактификация обусловлена квантовыми поправками. При этом оказывается, что для полного описания низкоэнергетической физики необходимо "стартовать" из пространства достаточно большой размерности ($d = 10$ или $d = 11$), и существует очень много эмпирически равноценных способов компактификации дополнительных 6 или 7 измерений, каждый из которых соответствует различным законам редуцированной физики. Более того – нет разумного объяснения тому, что компактифицируются именно $d-4$ дополнительных измерения (можно построить и решения с глобальной топологией $M^{(3)} \otimes B^{(d-3)}$ или $M^{(5)} \otimes B^{(d-5)}$). Возникает ощущение, что при сверхвысоких температуре и плотности, в области действия теорий квантовой гравитации, пространство-время и материя находятся в состоянии "пены" – существуют в нередуцированном многообразии большой размерности, в котором квантовые флуктуации метрики и топологии играют важную роль. Конкретное устройство низкоэнергетической физики – включая топологические свойства и размерность пространства-времени – определяются начальными условиями для той стадии эволюции мира, на которой гравитация и метрика описываются классической теорией, причем эти условия создаются одной из упомянутых флуктуаций.

Как уже упоминалось выше, очень продуктивно оказалось соединение идей Калуцы-Клейна и суперсимметрии. Оказалось, что при размерной редукции теории простой (N = 1) суперсимметрии порождают теории, обладающие расширенной (N ¿ 1) суперсимметрией, так что редукция стала удобным инструментом для построения и исследования теорий расширенной супергравитации. Например, теория, полученная путем спонтанной компактификации "лишних" измерений в семимерный тор из простой супергравитации в 11 измерениях, может претендовать на роль единой теории – при низких энергиях в четырехмерном мире можно обеспечить существование всех полей Стандартной Модели и описание гравитации в рамках метрической теории. Проверку справедливости этой теории можно осуществлять путем поиска предсказываемых ею частиц – суперпартнеров (фотино, скварков и т.д.).

Центральная проблема квантового варианта редукционных теорий, содержащих гравитацию – обеспечение перенормируемости (а еще лучше конечности) функций Грина в ульрафиолетовой области. Дело в том, что в гравитационных взаимодействиях роль заряда играет тензор энергии-импульса, и это приводит к чрезмерному усилению взаимодействий с ростом энергии – вклады от диаграмм, содержащих интегрирование по импульсам виртуальных гравитонов, приводят к неустранимым расходимостям. Попытки построить перенормируемую квантовую теорию гравитации как *локальную* калибровочную теорию поля столь долго оставались безуспешными, что это заставило теоретиков искать другие подходы. Для обеспечения продуктивного поиска следовало прежде всего попытаться дать ответ на вопрос: почему вообще в локальных калибровочных теориях возникают расходимости и почему мы привязаны именно к таким теориям? Локальность нам нужна для распространения принципа причинности на микропроцессы, но именно она может являться источником ультрафиолетовых расходимостей, так как подразумевает наличие сколь угодно малых длин волн в спектрах полевых возмущений. Для борьбы с расходимостями мы и вводим в теорию симметрии – такие, как калибровочная или суперсимметрия. Для более ясного понимания ситуации сошлемся на аналогию с задачей о квантовании колебаний кристаллической решетки. В общем случае это довольно сложная задача о движении большого числа взаимодействующих тел (атомов решетки), однако мы можем переформулировать ее, введя вместо координат и импульсов атомов новые динамические переменные, удовлетворяющие алгебре бозонных операторов рождения и уничтожения. При этом основное состояние решетки оказывается вакуумом для соответствующих квазичастиц – фононов, а низкоэнергетические (с длинами волн много больше периода решетки) фононные возбуждения ведут себя как безмассовые ($E = cp$, где c – скорость звука) слабовзаимодействующие частицы в локальной полевой теории. Заметим, что структура такой эффективной теории почти не зависит от деталей строения исходной системы – безмассовость обеспечивается просто наличием глобальной трансляционной симметрии, которая присутствием решетки спонтанно нарушается до группы дискретных трансляций (фононная степень свободы отвечает голдстоуновской моде), а структура взаимодействий обусловлена использованием низкоэнергетического разложения (от исходных взаимодействий зависит только величина констант связи). При вычислениях матричных элементов переходов с помощью фононной модели в высших порядках теории возмущений возникают расходимости. В данном случае их природа вполне очевидна – они являются следствием некорректной экстраполяции результатов низкоэнергетического приближения в "ультрафиолетовую" область. Так как поведение длинноволновых фононов практически не зависит от устройства решетки на малых расстояниях, можно подобрать эффективную схему перенормировки (вводя функцию обрезания фононного спектра). Этот пример демонстрирует нам, что перененормируемые локальные теории возникают как низкоэнергетический предел конечных *нелокальных*, в которых симметрия динамики обеспечивает существование сектора легких (в масштабе $\sim 1/l$, где l – параметр нелокальности) квазичастичных возбуждений. Такая точка зрения позволяет объяснить также и тот факт, что лагранжианы локальных полевых теорий квадратичны по производным (что приводит к динамическим уравнениям в форме дифференциальных уравнений второго порядка). Можно предположить, что это просто следствие использования разложения по степеням l нелинейной функции, соответствующей эффективной локальной модели: например,

$$(\partial_\mu \phi)^2 \ \simeq \ (\partial_\mu \phi)^2 \ + \ \alpha l^2 (\partial_\mu \phi)^4 \ + \ \beta l^4 (\partial_\mu \phi)^6 \ + \ \ldots$$

Отсутствие перенормируемости в случае гравитации связано с ростом эффективных констант взаимодействия гравитонов с другими частицами при уменьшении длины волны – гравитоны "чувствуют" строение пространства на малых расстояниях. Поэтому вполне возможно, что для построения непротиворечивых моделей квантовой гравитации нам придется отказаться от локальности.

Простейшей нелокальной модификацией теории точечных частиц является *теория струн* – одномерных протяженных объектов. На первый взгляд, переход к струнам – лишь самое начало длинного пути изучения влияния нелокальностей, ибо представляется естественным желание впоследствии перейти к теориям двумерных объектов (мембран), потом – трехмерных (мешков), а затем (если иметь в виду идеи размерной редукции) и к теории протяженных объектов (p-бран) в пространстве большего ($d = p + 1$) числа измерений. Не исключено, что построение такого иерархического ряда имеет смысл, но на практике струнные модели оказались существенно более продуктивными, чем можно было предположить в рамках такого подхода. С чисто математической точки зрения причина этого состоит в возможности описания многомерных нелокальных объектов в терминах теории струн, подобно тому, как сама теория струн может быть переформулирована (правда, весьма громоздким образом) в терминах локальных полей (струну можно рассматривать как бесконечный набор взаимодействующих полей). При этом более детальное исследование обнаружило, что математический аппарат теории одномерных объектов с одной стороны – существенно проще, чем аппарат теорий двумерных или трехмерных объектов, а с другой – ближе по структуре к ним, чем к нульмерным (локальным) теориям. В связи с этим можно считать, что струнные модели обеспечивают некоторый разумный компромисс между вычислительной простотой и реалистичностью.

Вторая причина, по которой струны привлекают к себе внимание – существование "струноподобных" конфигураций в решениях многих систем динамических полевых уравнений: в гидродинамике (вихри), в теории твердого тела (линии дислокаций), в нелинейных полевых теориях (топологически нетривиальные решения типа абрикосовских нитей в сверхпроводнике). В физике элементарных частиц наиболее известный пример – использование модели релятивистских струн в физике адронов (см. лекцию I.11). Во всех перечисленных случаях струны характеризуются дисперсионным соотношением $E \sim L$, так как в силу равноправия всех элементов струны энергия, приходящаяся на единицу длины, оказывается постоянной.

Динамические уравнения струнных моделей могут быть получены из принципа наименьшего действия, причем, обобщая известное выражение для действия точечной релятивистской частицы, запишем

$$S_{str} \ = \ \alpha \, \Sigma \ ,$$

где Σ – площадь мировой поверхности, заметаемой струной в процессе движения в $M^{(4)}$. Квантование этой теории методом фейнмановского интеграла по траекториям приводит нас к вычислению производящих функционалов

$$Z_{str} \ = \ \int D[\Sigma] \ e^{i \ \alpha \ \Sigma} \ .$$

Эти рассуждения подсказывают нам еще один вариант использования аппарата теории струн – он оказывается адекватен также задачам о поведении многофазной термодинамической трехмерной системы. В квазиравновесном состоянии объемная плотность энергии различных фаз практически одинакова,и вся свободная энергия системы связана с поверхностями раздела фаз: $F \sim \Sigma$. Тогда вычисление статсуммы сводится к интегрированию по произвольно расположенным поверхностям раздела с весами $e^{-\beta\Sigma}$:

$$Z \ = \ \int D[\Sigma] \ e^{- \ \beta \ \Sigma} \ ,$$

и термодинамика трехмерных многофазных систем во многих отношениях аналогична динамике струн. Многообразие интересных приложений убеждает нас в том, что с наиболее общей точки зрения теория струн – это обширный набор новых и весьма мощных математических методов, которые могут найти применение практически во всех формализуемых областях знания.

Возвращаясь к *фундаментальным струнам* – объектам для построения единой картины мира, отметим, что закон дисперсии $E \sim L$ обеспечивает существование локального низкоэнергетического предела: классический минимум энергии соответствует стягиванию струны в точку ($L \to 0$), а с учетом квантовогравитационных закономерностей "нулевой" размер легкой струны должен быть порядка l_{Pl}. С точки зрения больших ($\gg l_{Pl}$) масштабов такой объект выглядит почти как точечная частица, а возбуждение внутренних степеней свободы струны (которое в рамках корпускулярной интерпретации выглядит как превращение легкой частицы в тяжелую) требует энергий порядка M_{Pl}. Классификация струнных образований наиболее естественным образом проводится на основе различения их топологических характеристик – в фундаментальных теориях рассматривают *открытые* (имеющие два свободных конца) и *замкнутые*, *ориентируемые* и *неориентируемые* (в соответствии с наличием этого свойства у мировой поверхности) струны. Приписав динамике точек струны какие-либо внутренние симметрии, отвечающие появлению сохраняющихся наблюдаемых (спин, изоспин и т.д.), можно значительно расширить эту классификацию – например, ввести в рассмотрение бозонные и фермионные струны. Введение суперсимметрии (симметрии между степенями свободы бозонного и фермионного секторов) приводит нас к моделям *суперструн*. Из всего многообразия возникающих моделей нас в первую очередь интересуют струнные модели с достаточно большим (для размещения всех частиц СМ) количеством безмассовых мод, так как в масштабе планковских величин массы кварков, лептонов и калибровочных бозонов СМ очень малы, и разумно считать, что они связаны с непертурбативными поправками, возникающими при учете взаимодействия струн. Требование содержательности безмассового сектора оказалось тесно связано с размерностью пространства, в котором движется струна – например, в теориях открытых бозонных струн безмассовые частицы появляются только при d=2 (одно скалярное поле), d=26 (24-компонентное поле) или еще больших размерностях. К тому же во многих струнных моделях разделение безмассового и массивного секторов, обеспечивающее возможность непротиворечивого описания низкоэнергетической физики в терминах локальных теорий, нарушается при квантовании из-за *аномалий* (нарушения симметрий классической теории квантовыми поправками). Поэтому простая интерпретация частиц как "легких" струнных объектов возможна только в *критических* (свободных от аномалий) моделях. В таких моделях безмассовый сектор приходится снабдить дополнительной калибровочной симметрией (частицы должны размещаться в неприводимом мультиплете соответствующей группы). Примеры критических моделей оказались немногочисленны, так что сразу возникло ощущение их "уникальности" – возникла надежда, что требования критичности, конечности и содержательности низкоэнергетического предела позволят выделить практически единственную удовлетворяющую им модель (или хотя бы небольшое число таких моделей).

Отметим, что два последних требования тесно взаимосвязаны, так как накладывают сходные ограничения на допустимый вид взаимодействия в струнных теориях. Возможность эффективного описания систем взаимодействующих струн в терминах локальных частиц без существенного пересмотра концепции причинности обеспечивается, если разрешить только локальное (осуществляющееся в одной точке) взаимодействие. С геометрической точки зрения это требование обеспечивает гладкость мировой поверхности взаимодействующих струн, т.е. отсутствие на ней точек или линий ветвления. Замечательно, что одновременно оно зачастую обеспечивает конечность струнных "диаграмм", содержащих петли. Природа этой конечности может быть понята, если обратить внимание на то обстоятельство, что в теории локальных частиц запрет на ветвление мировых линий частиц в диаграммах означал бы отсутствие вершин, т.е. полный запрет на всякие взаимодействия! Таким образом, теория струн с локальным взаимодействием есть обобщение теории <u>невзаимодействующих</u> частиц, чем и обеспечивается ее относительная простота. Можно также обратить внимание на то, что любая "петля" в гладкой двумерной поверхности непрерывным преобразованием может быть "вытеснена наружу", т.е. преобразована в петлю типа "головастик" – это единственный тип петель в струнных диаграммах теории с локальным взаимодействием, а они не дают вклада в расходимости квантовых диаграмм.

Перечисленные свойства струнных моделей породили весьма серьезные ожидания того, что они могут стать основой для построения "Теории Всего" – "настоящей" фундаментальной теории физического мира. В атмосфере этих ожиданий первые же успехи породили настоящий бум – "суперструнную революцию 1984 года". Ее начало ознаменовалось выходом работ Грина и Шварца, в которых было показано, что существует критическая (полностью свободная от аномалий!) модель суперструн в десятимерном пространстве-времени (d = 10, N = 1), причем низкоэнергетическая ("локальная") физика в ней описывается калибровочной теорией с 496-параметрической группой $SO(32)$ или $E_8 \otimes \bar{E}_8$. Почти сразу де Виттену удалось показать, что после редукции в четырехмерное "физическое" пространство-время в пределе $E \ll M_{Pl}$ может быть получена реалистичная модель Великого Объединения ($SU(5)$ или E_8) с достаточно большим числом фермионных поколений. Позднее была построена модель *гетеротической* струны (этот термин позаимствован из биологии, где он означает наиболее жизнестойкие гибриды) Гросса и Харви. В этой модели правые и левые сектора взяты из различных теорий: левая составляющая – 10-мерная суперструна, правая – 26-мерная бозонная струна, а компактификация пространства происходит в два этапа: сначала образуется пространство-время с d = 10 (лишние измерения компактифицируются в 16-мерный тор), в котором возникает теория с калибровочной группой $E_8 \otimes \bar{E}_8$, а затем – обычное четырехмерное. В этой модели сокращаются все аномалии, есть веские аргументы в пользу ее конечности, а при энергиях $E < 10^{15}$ ГэВ получается реалистичная E_8 - ТВО, дополненная существованием "теневого" мира, частицы которого отличаются от обычных только значениями масс и чрезвычайно слабо (гравитационным образом) взаимодействуют с частицами нашего мира. На первом этапе исследования этой модели проходили в обстановке необычайного подъема – она явно может претендовать на роль Теории Всего, и к тому же ее свойства представлялись совершенно уникальными. Постепенно было выяснено, что мы все-таки имеем дело с целым классом критических конечных моделей, и к тому же был предложен ряд некритических моделей без явных внутренних противоречий. Во всех указанных моделях при расчете констант низкоэнергетических эффективных теорий (только они могут быть сопоставлены с эмпирическими данными – планковские энергии еще долго будут оставаться недоступными для экспериментаторов) необходим учет непертурбативных эффектов, что делает эти расчеты практически невыполнимыми. Таким образом, несмотря на построение столь замечательных моделей, мы не имеем возможности произвести обоснованный выбор единственно правильной. Этот вывод нанес серьезный удар по самой идеологии единых теорий – за периодом больших надежд в теории фундаментальных струн последовал период некоторого разочарования. Впрочем, в последние годы количество работ по струнным моделям вновь стало расти – в любом случае от них не следует отказываться. Более того, высказываются соображения о том, что такой единственно верной теории может не быть вообще – различные модели можно рассматривать как описание различных *фаз* некоторой динамической системы, между которыми возможны переходы (с подобной ситуацией мы уже сталкивались при рассмотрении связанных туннельными переходами топологически нетривиальных вакуумов в КХД, когда истинное вакуумное состояние может быть смесью всех возможных). В этом случае Теория Всего есть объединение <u>всех</u> непротиворечивых теорий поля. Технически построение подобной теории означает построение описания квантованной струнной системы с очень большим (или даже бесконечным) количеством фаз. Вообще говоря такая программа в принципе может быть реализована методами теории струн, но в настоящий момент до осуществления ее на практике еще очень и очень далеко.

Задачи к лекциям 8,9:

1. Стационарные состояния нерелятивистской заряженной частицы спина $\frac{1}{2}$ в однородном магнитном поле $\vec{B} = B\vec{e}_z$ можно описывать волновой функцией

$$\Psi \ = \ \psi(x - \frac{cp_y}{eB}) \ e^{\frac{i}{\hbar} \ (p_y y + p_z z)} \ .$$

   Записать гамильтониан на подпространстве состояний с $p_y = p_z = 0$ и выразить его через бозонные и фермионные операторы

$$\hat{b}^{\pm} \ \equiv \ \frac{eB\hat{x} \mp ic\hat{p}_x}{\sqrt{2eB\hbar c}} \ , \quad \hat{f}^{\pm} \ \equiv \ \hat{s}_x \pm \hat{s}_y \ .$$

   Чему равна энергия "вакуума"? Как продемонстрировать наличие суперсимметрии?

2. Оценить ширину фотинного распада заряженного сфермиона массы $M \sim 10^2 - 10^3$ ГэВ.

3. Оценить сечение взаимодействия фотино с протоном, считая массы скварков $\tilde{u}, \tilde{d}$ равными $M \sim 10^2 - 10^3$ ГэВ.