

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Научно-исследовательский институт ядерной физики
имени Д.В. Скобельцына

Н.В. Никитин, К.С. Томс, О.В. Фотина

АКСИОМЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ





МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
имени Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Никитин Н.В., Томс К.С., Фотина О.В.

Аксиомы квантовой механики

Университетская книга

Москва

2015

УДК 539.17 (075.08)

ББК 22.38

К 32

Рецензент:

д. ф.-м. н. С.П. Баранов (ФИАН им. П.Н. Лебедева, Москва)

Добровольный и очень ответственный редактор:

М.Д. Томс (Женевский университет, Швейцария)

Никитин Н.В., Томс К.С., Фотина О.В.

К 32

Аксиомы квантовой механики: учебное пособие / Н.В. Никитин, К.С. Томс, О.В. Фотина — М.: Университетская книга, 2015 — 126 с.:ил.

ISBN: 978-5-91304-588-1

Учебное пособие соответствует программам межфакультетского курса по основаниям квантовой физики и различным спецкурсам, которые в течение ряда лет читаются авторами на физическом факультете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Последовательное и логически обоснованное изложение аксиоматики квантовой теории является важнейшим этапом понимания студентами оснований квантовой физики. Без такого понимания невозможно дальнейшее изучение различных приложений квантовых идей к задачам атомной и молекулярной физики, теории рассеяния и физики элементарных частиц.

Учебное пособие предназначено для студентов естественно-научных специальностей высших учебных заведений, обучающихся по программам подготовки бакалавров, магистров и специалистов.

УДК 539.17 (075.08)

ББК 22.38

© Никитин Н.В., Томс К.С., Фотина О.В., 2015

© Университетская книга, 2015

ISBN: 978-5-91304-588-1

Оглавление

Введение	5
1 Общие принципы работы поляризационных и измерительных приборов	10
1.1 Призма Николя и поляризатор	10
1.2 Наблюдатель, макроприбор и микромир	12
2 Несогласованность волнового и корпускулярного описаний прохождения света через призму Николя в рамках классической физики	16
2.1 Волновое описание прохождения линейно поляризованного света через призму Николя	16
2.2 Попытка корпускулярного описания прохождения линейно поляризованного света через призму Николя	20
3 Символы измерения и операции над ними	27
3.1 Определение наблюдаемых и символов измерения	27
3.2 Произведение символов измерения	28
3.3 Сложение символов измерения	36
3.4 Коммутаторы и антикоммутаторы символов измерения	40
3.5 Аналогия между символом измерения и проекционным оператором	41
3.6 Обобщение символа измерения	44
4 Принцип суперпозиции	48
5 Ключевое предположение о математической природе символов $ \psi\rangle$	52
5.1 Математический формализм квантовой механики. Базовые постулаты	52
5.2 Физический смысл коэффициентов разложения в принципе суперпозиции и понятие условной вероятности	57

6	Операторы физических величин	66
7	Условие совместной измеримости средних значений двух наблюдаемых	71
8	Описание прохождения линейно поляризованного света через призму Николя в формализме квантовой механики	77
9	Некоторые следствия из принципа суперпозиции	82
9.1	«Простое» классическое истолкование принципа суперпозиции	82
9.2	Математическое описание полупрозрачного зеркала	83
9.3	Интерферометр Маха–Цандера	88
9.4	Экспериментальная проверка принципа суперпозиции	91
9.5	Задача о «квантовой бомбе»	102
9.6	Теорема о невозможности клонирования произвольного чистого состояния	106
9.7	Теорема о невозможности уничтожения копии произвольного чистого состояния	112
9.8	Правила суперотбора	116
	Список литературы	121

Введение

“Quantum phenomena do not occur in a Hilbert space, they occur in a laboratory”

A. Peres

Предлагаемое читателям учебное пособие является первым из намеченного авторами цикла пособий, которые основаны на многолетнем опыте преподавания квантовой физики студентам Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Прежде всего данное издание предназначено для студентов, которые слушают межфакультетский курс квантовой физики. Но оно также может быть полезно всем, кто хочет самостоятельно разобраться в аксиоматике квантовой механики и других тонких вопросах, связанных с основаниями квантовой теории. С определенной степенью условности квантовую теорию можно разделить на три основные составляющие.

Первая — **нерелятивистская квантовая механика**, которая описывает поведение материи на уровне молекул, атомов и атомных ядер, когда релятивистские эффекты не играют существенной роли. Обычно под этим подразумевается, что характерные энергии в описываемых процессах много меньше энергий покоя участвующих в этих процессах микросистем¹ или что скорости рассматриваемых микрообъектов много меньше скорости света в вакууме. Типичный масштаб, на котором уже необходимо учитывать квантовые эффекты по порядку величины, равен 10^{-6} — 10^{-8} см. Такой масштаб находится за пределами возможностей органов чувств любого человека. Например, видимый свет имеет характерную длину волны порядка 5×10^{-5} см. Поэтому почти все микрообъекты человек не может увидеть даже в самый лучший оптический микроскоп. Это простое рассуждение иллюстрирует важнейшую идею,

¹Под **микросистемой** мы будем понимать молекулу, атом, ядро атома, элементарную частицу или их совокупность, генетически связанную каким — либо образом. Вместо термина «микросистема» в тексте учебного пособия иногда будут использоваться его синонимы «микрообъект» и «микрочастица».

которая лежит в основании нерелятивистской квантовой механики: *между наблюдателем и микромиром всегда находится измерительный прибор, влияние которого необходимо учитывать при анализе результатов любого эксперимента*².

Вторая составляющая — **релятивистская квантовая механика** — описывает квантовые эффекты в микросистемах, которые движутся со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме. К этому разделу квантовой теории тесно примыкает **квантовая теория излучения**, которая применяется для описания взаимодействия нерелятивистских заряженных частиц с квантами света — фотонами. Последние движутся со скоростью света и, следовательно, по определению являются релятивистскими частицами.

Релятивистская квантовая механика и квантовая теория излучения перекидывают мостик от нерелятивистской квантовой механики к **квантовой теории поля** — третьей важной составляющей квантовой теории. Эта теория последовательно описывает релятивистское поведение любых микрочастиц с учетом их рождения и уничтожения в процессах взаимодействия. Такая теория применяется для элементарных частиц начиная с расстояний порядка 10^{-12} — 10^{-13} см. К сожалению, даже простейшее изложение базовых понятий квантовой теории поля существенно выходит за рамки настоящего учебного пособия.

Хотя данное пособие является первым по времени выхода, но в хронологии читаемого авторами курса оно отвечает третьей части. Первая часть курса посвящена основам математического формализма, необходимого для построения нерелятивистской квантовой теории. Вторая часть включает в себя

²Для полноты картины хочется заметить, что не все объекты, описываемые при помощи квантовой механики, имеют размеры менее 10^{-6} см. Например, сверхтекучий гелий, который можно налить в обычный термос, является многочастичной квантовой системой! И нейтронная звезда, характерный размер которой порядка 10 км, тоже представляет собой пример объекта, свойства которого подчиняются квантовым законам. Но сверхтекучесть, сверхпроводимость и нейтронные звезды — это редчайшие исключения из общего правила, которые в очередной раз демонстрируют многообразие, удивительную и парадоксальную красоту окружающего нас мира. При первом знакомстве с квантовой механикой эти исключения лучше не рассматривать вовсе, а ограничиться типичными квантовыми явлениями, которые начинают проявляться на масштабах порядка 10^{-6} см.

описание экспериментов, которые демонстрируют недостаточность применения идей классической физики для описания поведения микрообъектов (молекул, атомов, элементарных частиц). Мы надеемся в скором времени выпустить пособия, отвечающие первым двум частям. Однако вопросы математического формализма квантовой механики и экспериментальной проверки законов микромира хорошо изложены во многих учебниках (см., например, [1], [2], [3] и [4]). В то время как понятного для студентов обоснования аксиоматики квантовой теории, по мнению авторов, не существует ни в одном известном учебнике. Ранее к курсу был выпущен задачник [5].

Понимание логики построения фундамента квантовой теории является ключом для успешного изучения всех дальнейших разделов квантовой физики. В настоящем учебном пособии будет показано, как попытка формализации процедуры взаимодействия измерительного прибора (макроскопического прибора, или, еще более кратко, макроприбора) с микросистемой, основанная на «почти очевидных» допущениях относительно математической структуры такого взаимодействия, практически неизбежно приводит к набору определенных квантовых аксиом. Эти аксиомы позволяют описать поведение микрообъектов в терминах векторов состояния и линейных операторов, действующих на эти векторы в гильбертовых пространствах³.

Для иллюстрации процедуры измерения состояния микрообъектов в учебном пособии будут использованы «мысленные эксперименты», которые описывают взаимодействие света с кристаллами турмалина и призмами Николя. Результат каждого такого «эксперимента» будет понятен исходя из здравого смысла. Мы покажем, что любому измерению можно сопоставить некоторый математический объект, который носит название **символа измерения**, или, более развернуто, **символа измерения Швингера**. Логика измерений подскажет нам правила операций с этими символами.

³Напомним, что линейное пространство $\mathcal{H}$ с операцией скалярного произведения и нормой, определяемой скалярным произведением, называется **гильбертовым пространством**. В гильбертовом пространстве строится математический аппарат нерелятивистской квантовой механики.

Юлиан⁴ Швингер — американский физик-теоретик, один из пионеров современной квантовой теории поля, совместно с Ричардом Фейнманом и Синъитиро Томонагой в 1965 году был удостоен Нобелевской премии по физике за создание квантовой электродинамики⁵. Ю. Швингер работал во многих областях теоретической физики. В том числе предложил очень красивую формулировку нерелятивистской квантовой механики на основе представлений о **селективных и неселективных измерениях**. Формализм Швингера отличается большой степенью абстракции. В нем используются многие понятия современной алгебры и теории групп. Поэтому данный подход, к сожалению, не получил широкого распространения в учебной литературе.

В настоящем пособии мы используем идеи швингеровского подхода для обоснования *одного из возможных наборов* аксиом, которые лежат в основании математического описания нерелятивистских квантовых систем. При этом иллюзорная «математическая строгость» будет сознательно принесена в жертву интуитивной ясности и физической наглядности, которые предпочтительны при первом знакомстве с весьма непривычными законами микромира. Авторы надеются, что подобный подход сделает взгляды Ю. Швингера на квантовую механику гораздо более доступными и популярными. С оригинальной трактовкой квантовой теории, изложенной самим Ю. Швингером, можно познакомиться по книгам [6] и [7].

Для тех, кто со временем пожелает глубже разобраться в основаниях квантовой теории, заметим, что развиваемый в данном учебном пособии подход можно рассматривать как трактующий символы измерения с точки зрения теории информации. Похожий взгляд (но без всяких ссылок на приоритет Ю. Швингера!) можно найти в появившейся недавно серии статей [8]. Среди учебников

⁴В последнее время имя Швингера все чаще переводят на английский манер как Джулиан или даже Джулиус.

⁵Квантовая электродинамика — сокращенно КЭД — это наука о взаимодействии релятивистских заряженных частиц (электронов, пионов и т. д.) с квантами электромагнитного поля — фотонами. КЭД была исторической первой успешной реализацией идей квантовой теории поля для описания окружающего мира.

по квантовой механике идеологически ближе всего к данному пособию при-
мыкают книги [9], [10] и [11].

Подчеркнем, что в настоящем учебном пособии аксиоматика нерелятивист-
ской квантовой механики развита не до конца. В книге отсутствуют нестаци-
онарное уравнение Шредингера и определение оператора производной опера-
тора по времени. Эти две аксиомы будут введены в учебном пособии, посвя-
щенном уравнению Шредингера и его приложениям.

Авторы выражают глубокую благодарность за обсуждение вопросов, за-
тронуемых в учебном пособии, д. ф.-м. н. С.П. Баранову, д. ф.-м. н. Д.И. Ме-
лихову, к. ф.-м. н. М.Н. Смолякову, студентам и аспирантам Н.М. Курносо-
ву, Г.А. Скорупскому, В.П. Сотникову и П.Р. Шараповой. Отдельная благодар-
ность добровольному редактору Маше Томс за каторжную работу по выяв-
лению многочисленных опечаток и рассогласований в первоначальном тексте
пособия.

О своих замечаниях, предложениях по улучшению учебного пособия и най-
денных опечатках большая просьба сообщать авторам на адрес электронной
почты 679nik@mail.ru. В заголовке письма, пожалуйста, указывайте «Учеб-
ное пособие. Аксиомы квантовой механики», чтобы ваше сообщение случайно
не попало в спам. Авторы не ведут дискуссий по вопросам «альтернативной
физики», ниспровержению релятивистской и квантовой теорий.

1. Общие принципы работы поляризационных и измерительных приборов

1.1. Призма Николя и поляризатор

Призма Николя (или просто **николь**) и родственные ей поляризующие устройства используют известный из курса оптики эффект *двойного лучепреломления* в анизотропных кристаллах. Такие кристаллы имеют некоторое выделенное направление, которое называется **оптической осью кристалла**. Эффект двойного лучепреломления заключается в том, что падающий на кристалл пучок света пространственно разделяется на два линейно поляризованных пучка. Векторы поляризации обоих пучков (совпадающие с направлением векторов электрического поля в световой волне) перпендикулярны друг другу.

Призма Николя схематически изображена на рис. 1. Она состоит из двух кристаллов исландского шпата (CaCO_3), разделенных прослойкой канадского бальзама. Коллимированный пучок света падает на переднюю грань призмы. Внутри призмы пучок разделяется на два. Пучок или луч, поляризованный перпендикулярно плоскости рис. 1, называется **обыкновенным лучом** и обозначается символом «*o*». Оставшийся луч поляризован в плоскости рисунка. Он носит название **необыкновенного луча** и обозначается символом «*e*». Пучок необыкновенных лучей *AE* проходит сквозь слой канадского бальзама и выходит через заднюю грань призмы. Пучок обыкновенных лучей *AO* испытывает полное внутреннее отражение на границе раздела «исландский шпат — канадский бальзам» и выходит через боковую поверхность призмы. Таким образом пучки света с различной поляризацией оказываются пространственно разделенными. Далее мы всегда будем пренебрегать отражением света от граней призмы и поглощением света внутри призмы Николя. Мы предполагаем, что во всех обсуждаемых ниже «мысленных экспериментах» призма абсолютно разделяет в пространстве необыкновенный и обыкновенный лучи, каждый из которых обладает 100%-й поляризацией.

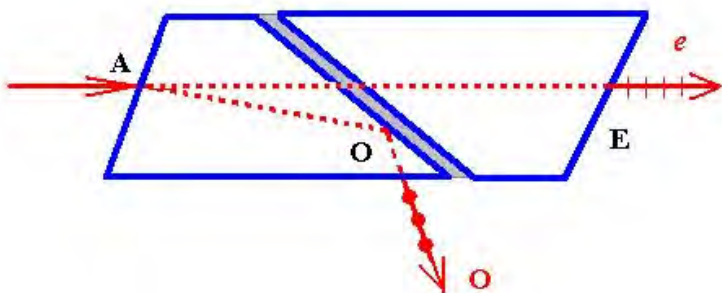


Рис. 1: Схематическое изображение призмы Николя. Оптическая ось призмы лежит в плоскости рисунка. Обыкновенный луч «*o*» поляризован перпендикулярно плоскости рисунка. Обыкновенный луч испытывает полное внутреннее отражение от границы раздела «исландский шпат — канадский бальзам» (серая прослойка на рисунке) и выходит из боковой грани призмы. Необыкновенный луч «*e*» поляризован параллельно плоскости рисунка. Этот луч проходит границу раздела без отражения и выходит из торцевой грани призмы Николя

Имеется широкий класс кристаллов, (к ним относится, например, кристалл турмалина), в которых при малой толщине кристалла (~ 1 мм) обыкновенный луч поглощается практически полностью, а необыкновенный поглощается слабо. Подобные кристаллы называются **поляризаторами**. Если на поляризатор, выполненный из кристалла турмалина, падает пучок света, то из поляризатора выходит пучок, линейно поляризованный вдоль оптической оси турмалина.

Основными характеристиками светового пучка являются спектр и интенсивность входящих в него волн. Чтобы не усложнять и без того непростые рассуждения, ниже всегда будем полагать, что все световые пучки строго монохроматичны и обладают частотой, лежащей в области видимого света. Для упрощения дальнейших рассуждений будем считать, что интенсивность моно-

хроматической волны в точности равна квадрату модуля электрического вектора⁶.

Задача. Пусть на идеальный поляризатор падает монохроматический пучок света интенсивности I_0 , линейно поляризованный под углом α к оптической оси поляризатора. Показать, что интенсивность прошедшего пучка I связана с I_0 соотношением

$$I = I_0 \cos^2 \alpha.$$

1.2. Наблюдатель, макроприбор и микромир

Человек — житель макромира. Его тело содержит порядка 10^{29} микрочастиц. В основном это электроны, протоны и нейтроны. Все органы чувств человека, при помощи которых он воспринимает информацию об окружающем мире, рассчитаны на макроскопические воздействия. Поэтому жаждущий нового знания человек (по-научному он называется **наблюдателем**) может исследовать микромир только при помощи приборов, конечный элемент которых отображает информацию в *макроскопических понятиях*, например, в виде отклонения стрелки на шкале амперметра или появления сигнала на экране осциллографа. В квантовой теории измерительные приборы, обладающие указанным выше свойством, носят название **макроприборов**.

Следовательно, *наблюдатель может исследовать микромир только при помощи макроприборов и выражать результаты измерения различных физических свойств микрообъектов исключительно в виде непротиворечивого сочетания макроскопических понятий*. Но что значит — исследовать микромир при помощи макроприборов? Если призвать на помощь аналогию, то это примерно то же самое, что играть на бильярде при помощи карьерных экскаваторов (см. рис. 2). Пока сделаешь один удачный удар, раздавишь несметное

⁶В стандартных курсах оптики доказывается, что имеет место не точное равенство, а лишь пропорциональность. Однако отсутствие коэффициента пропорциональности никак не скажется на всех приводимых ниже рассуждениях.



Рис. 2: Возможно, читатели этой книги никогда не видели карьерный экскаватор. Для примера приведем фотографию экскаватора ЭКГ-12 производства Уральского завода тяжелого машиностроения (УЗТМ). Ширина гусеницы этого экскаватора около двух метров, а в ковше без особого труда могут поместиться несколько бильярдных столов

число шаров и поломаешь огромное число столов! Представляется интуитивно вполне понятным, что в процессе измерения макроскопическим прибором *любой* микросистемы исходное (или **начальное**) состояние микросистемы *необратимо разрушается*⁷. И микросистема случайным образом переходит в **конечное** состояние, которое, вообще говоря, должно зависеть от того, какая физическая характеристика микросистемы измерялась. Поэтому можно предпо-

⁷ На самом деле, в этом месте интуиция нас подводит. В последние лет двадцать идет активное изучение так называемых «мягких» или «неразрушающих» измерений, которые не приводят к существенным изменениям состояния микросистемы. Однако глубокое понимание процедуры «мягких» измерений возможно только после построения квантовой теории с измерениями, разрушающими исходное состояние. Только такие «жесткие» измерения будут изучаться в настоящей главе.

ложить, что в отличие от детерминистической классической физики, где влиянием измерения на измеряемый объект можно пренебречь, физика микромира должна строиться как принципиально вероятностная теория.

Классические аналогии квантовых явлений *всегда* содержат изрядную долю лукавства. Вдумчивый читатель, надеемся, заметил, что аналогия с бильярдом и карьерными экскаваторами не полностью отражает суть измерения микросистемы макроприбором. Если после экскаватора столы и шары уже непригодны к дальнейшему использованию, то квантовая система после измерения переходит в другое состояние, над которым, в свою очередь, можно проводить новые измерения при помощи любых подходящих макроприборов.

Поскольку взаимодействие макроприбора с микросистемой необратимо разрушает состояние последней, то для получения информации о начальном состоянии микросистемы квантовая парадигма требует проведения серии измерений над большим числом микросистем, которые находятся в одинаковых начальных состояниях⁸. Каждое измерение дает небольшую порцию информации о начальном состоянии микросистемы. Относительно полная информация появляется у наблюдателя после большого числа измерений. Совокупности одинаково приготовленных микросистем получили название **квантовых ансамблей**. Возможность приготовления квантовых ансамблей макроскопическими средствами представляется априори не очевидной. Мы полагаем подобную возможность осуществимой. В параграфе 5.2 будут представлены аргументы в пользу этой точки зрения.

В качестве измерительных приборов в «мысленных экспериментах» этого раздела будут выступать фотоэлектронные умножители (ФЭУ), преобразующие интенсивность падающего света в электрический ток, и цифровые амперметры, дающие наблюдателю информацию о силе тока в макроскопических терминах (наборе цифр в окошечке амперметра). Будем полагать ФЭУ и амперметры идеальными. Это значит, что у ФЭУ отсутствует темновой ток и во

⁸Обычно говорят о *специально приготовленных* микросистемах, которые находятся в одинаковых начальных состояниях.

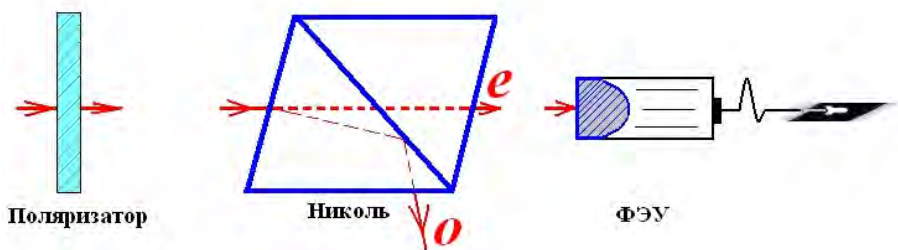


Рис. 3: Условные обозначения поляризатора (слева), призмы Николя (в центре) и ФЭУ (справа), которые будут использоваться при описании «мысленных экспериментов»

всех измерениях сохраняется прямая пропорциональность между током на выходе ФЭУ и интенсивностью падающего света, то есть $J_{\text{ФЭУ}} \sim I$. Амперметры обладают абсолютной чувствительностью к сигналу ФЭУ и полной нечувствительностью к любым иным паразитным токам. Условные обозначения призмы Николя, поляризатора и ФЭУ представлены на рис. 3.

2. Несогласованность волнового и корпускулярного описаний прохождения света через призму Николя в рамках классической физики

Рассмотрим оптическую систему, состоящую из поляризатора, призмы Николя и двух ФЭУ, изображенную на рис. 4. Пусть оптическая ось поляризатора составляет угол α с оптической осью призмы Николя. Обе эти оси лежат в двух параллельных плоскостях⁹, которые сами перпендикулярны плоскости рис. 4. Будем изучать прохождение линейно поляризованного света через николь в духе гипотезы корпускулярно-волнового дуализма Л. де Бройля. Для этого сначала дадим волновое описание этого процесса (параграф 2.1), а затем попытаемся понять, какие трудности возникают при корпускулярном рассмотрении прохождения света через Николь (параграф 2.2). Основная цель данного раздела состоит в том, чтобы на простом примере показать, что в рамках классической физики волновое и корпускулярное описания необходимы, но плохо совместимы друг с другом. Подчеркнем, что вывод о несогласованности между собой обоих описаний в классической физике выходит далеко за рамки рассматриваемого простого примера. Он является всеобщим и служит главным аргументом для создания новой теории — квантовой — взамен теории классической.

2.1. Волновое описание прохождения линейно поляризованного света через призму Николя

Пусть плоская монохроматическая волна частоты ω распространяется вдоль оси z слева направо (см. рис. 4) и падает на поляризатор. Плоскость (x, y) поляризатора перпендикулярна направлению распространения волны. После прохождения поляризатора электрический вектор волны $\vec{E}_i(t)$ лежит в плоскости

⁹На самом деле оптическая ось реальной призмы Николя направлена не совсем так, как предполагается в данном учебном пособии. Но это различие абсолютно не критично для тех идей, которые будут обсуждаться ниже.

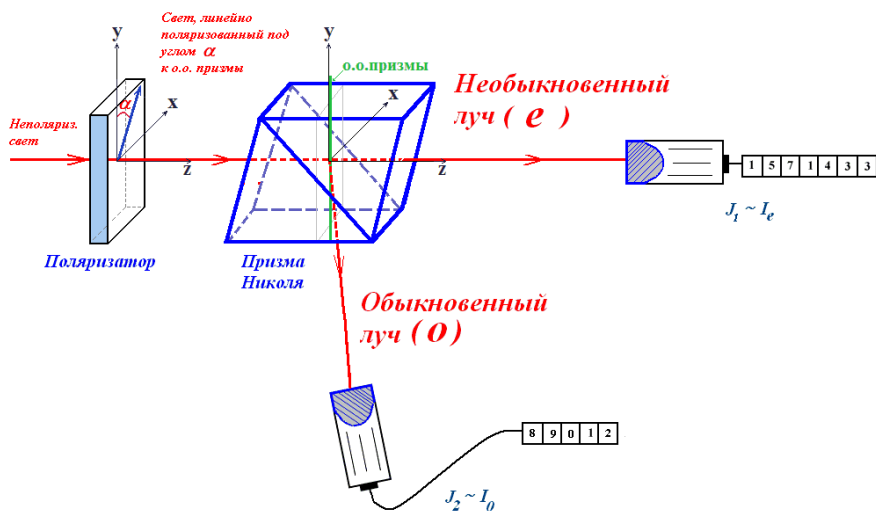


Рис. 4: Оптическая система, демонстрирующая несогласованность в рамках классической физики волнового и корпускулярного описаний прохождения линейно поляризованного света через призму Николя

(x, y) и направлен под углом α к оптической оси призмы Николя¹⁰, которая находится в плоскости (y, z) , параллельна оси y и перпендикулярна направлению распространения пучка (перпендикулярна оси z)¹¹. Обозначим через E_i амплитуду вектора $\vec{E}_i(t)$. Разложим электрический вектор $\vec{E}_i(t)$ по двум направлениям: параллельному и перпендикулярному оптической оси николя.

¹⁰Напомним, что поляризация волны совпадает с направлением электрического вектора.

¹¹Все остальные рисунки «мысленных экспериментов» в данном учебном пособии для упрощения будут строиться только в плоскости (y, z) .

Тогда

$$\vec{E}_i(t) = \begin{pmatrix} E_{\parallel}(t) \\ E_{\perp}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_i \cos \alpha \\ E_i \sin \alpha \end{pmatrix} e^{i\omega t}.$$

Интенсивность начального пучка определяется по формуле¹²

$$\begin{aligned} I_i &= \left| \vec{E}_i(t) \right|^2 = \vec{E}_i^{\dagger}(t) \vec{E}_i(t) = e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} E_i \cos \alpha & E_i \sin \alpha \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} E_i \cos \alpha \\ E_i \sin \alpha \end{pmatrix} e^{i\omega t} = E_i^2. \end{aligned}$$

После прохождения призмы линейно поляризованный пучок света расщепляется на необыкновенную (e) и обыкновенную (o) компоненты. Поскольку поляризация света в необыкновенном пучке совпадает с направлением оптической оси призмы, то в плоскости (x, y) электрический вектор $\vec{E}_e(t)$ необыкновенного луча должен иметь следующие компоненты:

$$\vec{E}_e(t) = \begin{pmatrix} E_{\parallel}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_i \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \hat{\mathcal{I}}_e \vec{E}_i(t),$$

где мы ввели матрицу

$$\hat{\mathcal{I}}_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

которая преобразует электрический вектор падающего на призму линейно поляризованного света в электрический вектор необыкновенного луча. Назовем матрицу $\hat{\mathcal{I}}_e$ **матрицей необыкновенного луча**.

Задача. Найти выражение для электрического вектора $\vec{E}_o(t)$ обыкновенного луча и показать, что **матрица обыкновенного луча** $\hat{\mathcal{I}}_o$ может быть записана

¹²Символ «†» обозначает операцию **эрмитова сопряжения**, которая является комбинацией операций комплексного сопряжения и транспонирования.

в виде:

$$\hat{\mathcal{L}}_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Векторы $\vec{E}_i(t)$, $\vec{E}_e(t)$ и $\vec{E}_o(t)$ можно рассматривать как векторы в двумерном гильбертовом пространстве. Тогда матрицы $\hat{\mathcal{L}}_e$ и $\hat{\mathcal{L}}_o$ должны быть операторами в этом пространстве.

Задача. Найти явный вид единичного оператора (который естественно обозначить как $\hat{1}$) в рассматриваемом гильбертовом пространстве.

Задача. Проверить, что матрицы $\hat{\mathcal{L}}_e$ и $\hat{\mathcal{L}}_o$ обладают свойствами эрмитовых операторов. Каковы собственные векторы и собственные значения для этих матриц?

Кроме того, непосредственной проверкой можно убедиться, что матрицы $\hat{\mathcal{L}}_e$ и $\hat{\mathcal{L}}_o$ обладают свойствами проекционных операторов. Матрица $\hat{\mathcal{L}}_e$ проецирует любой вектор на вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ с некоторым коэффициентом. Например, вектор $\vec{E}_i(t)$ проецируется на вектор $\vec{E}_e(t) = E_i \cos \alpha e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Матрица $\hat{\mathcal{L}}_o$ проецирует любой вектор на направление единичного вектора $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задача. Без вычислений найти значение коммутатора $[\hat{\mathcal{L}}_e, \hat{\mathcal{L}}_o]$.

Интенсивность I_e необыкновенного луча по определению равна

$$\begin{aligned} I_e &= |\vec{E}_e(t)|^2 = \vec{E}_e^\dagger(t) \vec{E}_e(t) = \\ &= e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} E_i \cos \alpha, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_i \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = I_i \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Интенсивность I_e можно вычислить другим способом. Именно:

$$I_e = \vec{E}_e^\dagger(t) \vec{E}_e(t) = \vec{E}_i^\dagger(t) \hat{\mathcal{L}}_e^\dagger \hat{\mathcal{L}}_e \vec{E}_i(t) = \vec{E}_i^\dagger(t) \hat{\mathcal{L}}_e^2 \vec{E}_i(t) = \vec{E}_i^\dagger(t) \hat{\mathcal{L}}_e \vec{E}_i(t).$$

При переходе к предпоследнему равенству было использовано, что $\hat{\mathcal{I}}_e$ — эрмитова матрица, то есть $\hat{\mathcal{I}}_e^\dagger = \hat{\mathcal{I}}_e$. А для получения последнего равенства — одно из свойств проекционного оператора: $\hat{\mathcal{I}}_e^2 = \hat{\mathcal{I}}_e$. Таким образом,

$$I_e = \vec{E}_i^\dagger(t) \hat{\mathcal{I}}_e \vec{E}_i(t) \equiv \langle \mathcal{I}_e \rangle_{\vec{E}_i(t)}. \quad (3)$$

Последним равенством мы ввели более короткую запись вычисления интенсивности, которая по форме совпадает с определением среднего значения от оператора $\hat{A}$ по вектору $|\psi\rangle$. Это не случайно. Во-первых, если векторы $|\psi\rangle$ гильбертова пространства явно реализовать в виде столбцов, а операторы — в виде матриц, то формула (3) в точности реализует вычисление среднего от оператора $\hat{\mathcal{I}}_e$ по состоянию $\vec{E}_i(t)$. Во-вторых, в такой записи наиболее очевидна связь между классическим волновым и квантовомеханическим описаниями прохождения линейно поляризованного света через призму Николя. Квантовомеханическое описание будет дано в разделе 8.

Задача. Прямым вычислением проверить, что $I_e = \langle \mathcal{I}_e \rangle_{\vec{E}_i(t)} = I_i \cos^2 \alpha$.

Задача. Показать, что интенсивность обыкновенного луча

$$I_o = \langle \mathcal{I}_o \rangle_{\vec{E}_i(t)} = I_i \sin^2 \alpha. \quad (4)$$

Задача. Проверить, что закон сохранения энергии, который для данной задачи имеет вид $I_i = I_e + I_o$ (почему?), требует, чтобы $\hat{1} = \hat{\mathcal{I}}_e + \hat{\mathcal{I}}_o$.

2.2. Попытка корпускулярного описания прохождения линейно поляризованного света через призму Николя

В предыдущем параграфе мы провели волновое описание прохождения пучка линейно поляризованного света через призму Николя, то есть дали объяснение нашего «мысленного эксперимента» с точки зрения классической электродинамики. Это описание не содержит явных логических противоречий. Однако волновое описание справедливо, только если интенсивность I_i падающе-

го на призму пучка, интенсивность I_e необыкновенного луча и интенсивность I_o обыкновенного луча достаточно велики. Что будет, если уменьшать, например, величину I_i ?

Сначала токи обоих ФЭУ станут уменьшаться пропорционально интенсивностям I_e и I_o , тем не менее оставаясь достаточно гладкими функциями времени. Затем значения токов начнут испытывать статистические флуктуации. И наконец, при достижении какой-то интенсивности I_i токи ФЭУ перестанут быть непрерывными величинами, а превратятся в последовательности импульсов. Это означает, что эксперимент на рис. 4 перешел в корпускулярный режим, когда ФЭУ регистрируют отдельные попадающие на них частицы (кванты) света. Такая ситуация не должна удивлять, поскольку из экспериментов по изучению закономерностей фотоэффекта, эффекта Комптона, спектра излучения абсолютно черного тела и многих других более современных опытов, которые были проведены, например, в квантовой оптике, следует, что пучки света можно рассматривать не только как волны, но и как объекты, состоящие из частиц — корпускул — фотонов.

Задача. Пусть τ — характерное время срабатывания ФЭУ. Оценить, при каких значениях интенсивностей обыкновенного и необыкновенного лучей ФЭУ начнут чувствовать корпускулярную природу света.

Задача. Найти по порядку величины, на каком расстоянии от лампы накаливания мощностью 40 Вт начнут проявляться корпускулярные свойства излучаемого ею света. Сами сделайте разумные предположения о спектре излучения лампы. Все недостающие для решения задачи числа найдите в справочниках или в сети Интернет.

Логично предположить, что каждый фотон, прошедший поляризатор, обладает поляризацией, которая имеет векторную природу¹³ по аналогии с электрическим вектором $\vec{E}_i$ и направлена под углом α к оптической оси призмы Николя. Вектор поляризации, очевидно, можно разложить параллельно и пер-

¹³Забегая вперед, скажем, что с точки зрения квантовой теории такое предположение является правильным.

пендикулярно оптической оси призмы. Обозначим через N_i , N_e и N_o числа фотонов в падающем, необыкновенном и обыкновенном пучках соответственно. Известно, что интенсивность светового пучка прямо пропорциональна числу фотонов в пучке, то есть $I = \kappa N$. Для фотонов данной частоты коэффициент пропорциональности κ должен оставаться постоянным. Тогда, чтобы воспроизвести экспериментальные формулы для интенсивностей необыкновенного $I_e = I_i \cos^2 \alpha$ и обыкновенного $I_o = I_i \sin^2 \alpha$ лучей, мы должны потребовать, чтобы $N_e = N_i \cos^2 \alpha$ и $N_o = N_i \sin^2 \alpha$. Однако если множители $\cos^2 \alpha$ и $\sin^2 \alpha$ в волновом описании возникают естественным путем, то в корпускулярном подходе физический смысл этих множителей нуждается в специальном обосновании.

Наиболее естественное объяснение состоит в том, что $\cos^2 \alpha$ и $\sin^2 \alpha$ — это вероятности, с которыми призма Николя каждый падающий на нее поляризованный фотон относит к классу необыкновенных или обыкновенных частиц. Но такая естественная трактовка вступает в противоречие с детерминистической парадигмой классической физики, где вероятность трактуется только как мера нашего незнания реальной физической природы рассматриваемого явления. Тем более что с увеличением числа фотонов, то есть при переходе к интенсивным пучкам, когда в игру вступает волновой подход, вероятности, вообще говоря, перестают быть нужными для описания прохождения света через николю. А формулы (3) и (4) для вычисления интенсивностей необыкновенного и обыкновенного лучей как среднего по состоянию $\vec{E}_i(t)$ возникают скорее как вычислительный прием, а не как результат, имеющий глубокую физическую природу.

Попробуем подойти к вопросу описания интенсивностей необыкновенного и обыкновенного лучей в корпускулярном подходе несколько иначе, рассматривая понятие вероятности не как фундаментальное свойство поляризованных фотонов, а как следствие «логичных детерминистических предположений», которые близки по духу классической физике. Действительно, экспериментальные выражения для интенсивностей необыкновенного и обыкновен-

ного лучей можно *попытаться* объяснить, если предположить, что в пучке фотонов, падающих на призму Николя, имеется $N_e = N_i \cos^2 \alpha$ необыкновенных фотонов и $N_o = N_i \sin^2 \alpha$ обыкновенных фотонов, которые были *приготовлены самим поляризатором*¹⁴. Поскольку до измерения, которое производит призма Николя, мы не знаем, какой конкретно фотон в пучке необыкновенный, а какой — обыкновенный, то можно ввести **частотное определение вероятности** появления/измерения w_e для необыкновенного и w_o — для обыкновенного фотонов по формулам:

$$w_e(\alpha) = \frac{N_e}{N_i} = \frac{I_e}{I_i} = \cos^2 \alpha;$$

$$w_o(\alpha) = \frac{N_o}{N_i} = \frac{I_o}{I_i} = \sin^2 \alpha.$$

Это кажущееся столь логичным объяснение мгновенно рушится, если в схеме на рис. 4 повернуть призму Николя так, чтобы ее оптическая ось образовывала угол $\beta \neq \alpha$ с оптической осью поляризатора. В волновом и корпускулярном подходах с описанием поляризации как вектора получим, что интенсивности необыкновенного и обыкновенного лучей станут равными $I_e = I_i \cos^2 \beta$ и $I_o = I_i \sin^2 \beta$. Это заключение полностью согласуется с экспериментальным результатом. В корпускулярном описании с заранее подготовленными «скалярными» фотонами двух типов приходится предполагать, что поляризатор каким-то мистическим образом должен был «узнать» о повороте оптической оси призмы и начать выдавать фотоны двух новых сортов, поляризованных параллельно и перпендикулярно новому направлению оптической оси призмы Николя.

¹⁴Далее для простоты будем полагать, что $N_e = N_i \cos^2 \alpha \gg 1$ и $N_o = N_i \sin^2 \alpha \gg 1$. Это позволит исключить ненужные для понимания основной идеи рассуждения о статистических флуктуациях. Для интенсивных пучков наше предположение выполняется естественным образом. А для пучков, которые состоят из небольшого числа фотонов, мы просто увеличим время набора статистики.

Для любознательных читателей, которые привыкли докапываться до сути, заметим, что сделав предположение о числе фотонов с разной ориентацией относительно оптической оси призмы, мы перешли от векторного описания поляризации к скалярному.

Ситуация становится еще более абсурдной, если учесть, что согласно теории относительности максимальная скорость передачи сигналов не может превышать скорость света в вакууме, которую мы обозначим через c . Тогда фотоны с «новой правильной поляризацией» могут начать взаимодействовать с призмой Николя не раньше, чем через промежуток времени $\tau = 2\ell/c$, где ℓ — расстояние между поляризатором и николем. До этого с призмой Николя должны взаимодействовать фотоны «старой неправильной поляризации», которые были сформированы поляризатором еще до поворота оптической оси призмы. Следовательно, в течение времени порядка τ можно ожидать, что $I_e \neq I_i \cos^2 \beta$ и $I_o \neq I_i \sin^2 \beta$. Однако эксперименты ничего подобного не показывают. Интенсивности необыкновенного и обыкновенного лучей в любой момент времени зависят только от угла между оптическими осями поляризатора и призмы и не проявляют никакого, даже кратковременного отклонения от законов $\cos^2$ и $\sin^2$ при вращении оси призмы или поляризатора¹⁵. Промежуток времени τ может быть уменьшен вдвое, если *абсолютно спекулятивно* предположить, что николь и поляризатор могут неведомым науке способом обмениваться информацией со скоростью, многократно превышающей скорость света (естественно, подобная, с позволения сказать, «гипотеза» противоречит многократно проверенным на эксперименте утверждениям теории относительности). Но фотоны, летящие от поляризатора к призме Николя, скорость света превысить не могут!

Для усугубления противоречий можно воспользоваться идеей **«отложенного выбора»**, которую впервые предложил Джон Арчибальд Уилер [12]. Применительно к эксперименту рис. 4 эта идея может быть сформулирована следующим образом. Выберем расстояние ℓ достаточно большим. Каждый промежуток времени $\Delta t \ll \tau/2$ будем произвольным образом менять положение

¹⁵Иными словами, интенсивность не проявляет инерционности, которая неминуемо возникает при непосредственном обмене информацией между призмой и поляризатором. Чтобы лучше почувствовать влияние инерционности, решите следующую **задачу**: оцените отношение максимально возможных скоростей лунохода и марсохода, считая, что обоими аппаратами управляет оператор с Земли.

ние призмы относительно анализатора¹⁶. Тогда оптическая ось призмы, очевидно, будет произвольным образом менять свое положение относительно оптической оси поляризатора. И на призму *всегда* будут попадать фотоны только «старой неправильной поляризации», поскольку фотоны «новой правильной поляризации» не успевают долететь до призмы за время Δt . То есть корпускулярный подход предсказывает, что при помощи идеи «отложенного выбора» можно нарушить законы $\cos^2$ и $\sin^2$ на сколь угодно большое время. Как уже говорилось выше, эксперименты противоречат подобному предсказанию¹⁷.

Таким образом, проведенный анализ показывает противоречивость корпускулярного описания эксперимента рис. 4, которое основывается только на представлениях классической физики и заставляет начать поиски новой теории, которая бы непротиворечивым образом объединила в себе элементы волнового и корпускулярного описаний взаимодействия микросистем с измерительными приборами в духе корпускулярно-волнового дуализма. Согласно гипотезе де Бройля такая теория должна описывать не только поведение фотонов, но также электронов, протонов, нейтронов и прочих известных микрочастиц, а также составленных из этих частиц микрообъектов — атомов и молекул.

Для этого новая теория должна найти общие понятия и принципы в волновом и корпускулярном описаниях поведения микросистем.

¹⁶Принципиально важно, что меняется положение николя, а не анализатора!

¹⁷В этом месте читатель, обладающий большой фантазией, может предложить целый ряд «нетрадиционных объяснений». Например, поляризатор обладает способностью читать информацию из будущего, а потому заранее имеет возможность корректировать поляризации фотонов-корпускул. Или можно порассуждать о том, какими предшествовавшими во Вселенной процессами обусловлен на первый взгляд случайный поворот оси призмы. И получится ли, зная информацию об этих процессах, заранее предсказать величину угла поворота? А еще можно нафантазировать никак не обнаруживающего себя бога, который «играет в кости», а результат такой игры по неведомым нам причинам преподносит физикам как результат квантовых измерений. И нет этим фантазиям числа.

Однако авторы данной книги вслед за философом-неопозитивистом К. Поппером [13] считают научными только те объяснения и гипотезы, которые позволяют предложить критический эксперимент по их опровержению (в русских переводах для этого используется не очень удачный термин «фальсифицируемость»). Приведенные выше «нетривиальные объяснения» таких экспериментов не допускают, поэтому подобные фантазии лежат за пределами науки. И авторы больше не будут тратить время на какое-либо их обсуждение или опровержение.

1. В обоих подходах мы изучали только те величины, которые непосредственно измеряются макроприборами. Для системы рис. 4 это были интенсивности световых пучков. *Все, что невозможно измерить, не должно фигурировать в новой квантовой теории.* Именно этим принципом руководствовался при создании квантовой механики величайший немецкий физик-теоретик В. Гейзенберг¹⁸.
2. И в волновом, и в корпускулярном подходе мы использовали *понятие вероятности*. При волновом описании мы формально записали интенсивность как среднее значение (3), а среднее значение без труда определяется в терминах вероятности. В корпускулярном подходе понятие вероятности сначала возникло при попытке описания работы призмы Николя по разделению падающих фотонов на необыкновенный и обыкновенный, а потом как частотное определение среднего при неудачной попытке «объяснения» вероятностного отбора в классической парадигме.

Однако нас ждет еще длительный путь, чтобы от общих концепций и понятий прийти к математическистройной и логически последовательной квантовой теории микромира.

¹⁸В создании квантовой теории приняли участие сотни талантливейших физиков XX века. Имена некоторых уже появлялись на страницах этого учебного пособия, а других — еще обязательно появятся. Однако именно Вернер Гейзенберг в конце 1924 года получил самые первые результаты в рамках современной квантовой механики. За это он был удостоен Нобелевской премии по физике 1932 года. Два других физика, внесшие решающий вклад в создание фундамента квантовой механики (Э. Шредингер и П. Дирак), разделили между собой Нобелевскую премию 1933 года. П. Дирак и В. Гейзенберг стали одними из самых молодых лауреатов Нобелевской премии по физике за всю ее историю.

Хотя им, а возможно, уже и никому не повторить достижения 17-летней Малалы Юсуфзаи из Пакистана, которая получила Нобелевскую премию мира в 2014 году «за ... борьбу против подавления детей и молодых людей и за право всех детей на образование». С 11 лет молодая девушка, рискуя жизнью, борется за право своих сверстниц на образование в исламских странах. А на дворе меж тем XXI век.

3. Символы измерения и операции над ними

В данном разделе мы приступаем к обоснованию аксиоматики квантовой теории и созданию на ее основе математического аппарата нерелятивистской квантовой механики. В качестве примера, дающего наглядную интерпретацию основных шагов в этом направлении, будем рассматривать процедуру измерения интенсивностей и поляризаций пучков фотонов, проходящих через поляризаторы и призмы Николя.

3.1. Определение наблюдаемых и символов измерения

Пусть микрочастица обладает некоторой физической характеристикой A , которую возможно измерить экспериментально. Это может быть энергия, импульс, поляризация или любая другая характеристика микрочастицы. Такую характеристику будем называть **наблюдаемой величиной**, или просто **наблюдаемой**. Пусть макроскопические приборы измеряют одно из возможных значений $a_1, a_2, \dots, a_j$ и т. д. этой наблюдаемой величины. Совокупность *макроскопически различных* значений $\{a_i\}$ наблюдаемой A будем называть **спектром** наблюдаемой¹⁹. Например, для пучка фотонов, прошедших призму Николя, наблюдаемой величиной является интенсивность света I . Интенсивности необыкновенного I_e и обыкновенного I_o лучей образуют спектр этой наблюдаемой. Какая из интенсивностей относится к необыкновенному лучу, а какая относится к лучу обыкновенному, можно различить при помощи макроприборов.

Каждому измерению наблюдаемой A сопоставим символ измерения (иначе — символ измерения Швингера) $\hat{P}$ по следующему правилу. Пусть неко-

¹⁹Возможно, читатель уже уловил определенную аналогию между спектром наблюдаемой и спектром линейного оператора. Эта аналогия не случайна. При дальнейшем изложении аналогия между символами измерения и операторами будет только усиливаться.

Для упрощения изложения предполагается, что наблюдаемая A имеет дискретный спектр. Обобщение на непрерывный спектр не представляет труда. Поэтому мы предлагаем читателю сделать такое обобщение самостоятельно.

торый макроприбор выделяет из всего спектра наблюдаемой A только одно значение a_i . Тогда сопоставим такому макроприбору символ измерения $\hat{P}_{a_i}$. На рис. 5 показан пример макроприбора. После установки непрозрачной заглушки на пути обыкновенного луча получается макроприбор для измерения интенсивности необыкновенного луча. Этому макроприбору поставим в соответствие символ измерения $\hat{P}_e$. Если макроприбор позволяет регистрировать весь спектр наблюдаемой одновременно, то ему естественно сопоставить символ единичного измерения, который мы будем обозначать через $\hat{1}$. На рис. 6 показан макроприбор, при помощи которого можно измерять вместе интенсивности обыкновенного и необыкновенного лучей. Это пример макроприбора с единичным символом измерения. Наконец, если макроприбор не регистрирует ни одно из возможных значений наблюдаемой A , то ему должен соответствовать символ нулевого измерения $\hat{0}$. На рис. 7 показан макроприбор, который состоит из николя и двух непрозрачных заглушек на пути обыкновенного и необыкновенного лучей. Очевидно, что работа такого макроприбора описывается символом нулевого измерения.

Задача. Реализуйте символы измерений $\hat{P}_e$, $\hat{1}$ и $\hat{0}$, используя вместо непрозрачных заглушек поляризаторы.

Чтобы сделать дальнейшие предположения о математической природе символов измерения, изучим, какими свойствами они должны обладать с точки зрения описания совокупности измерений.

3.2. Произведение символов измерения

Поставим друг за другом две призмы Николя с заглушкой для обыкновенного луча, как это показано на рис. 8. Очевидно, что необыкновенный луч, прошедший первую призму, без изменения пройдет и вторую. С точки зрения символов измерения две призмы Николя, стоящие друг за другом, соответствуют **последовательному применению** двух символов измерения $\hat{P}_e$. Таковую конструкцию мы будем называть **произведением двух символов измерения**

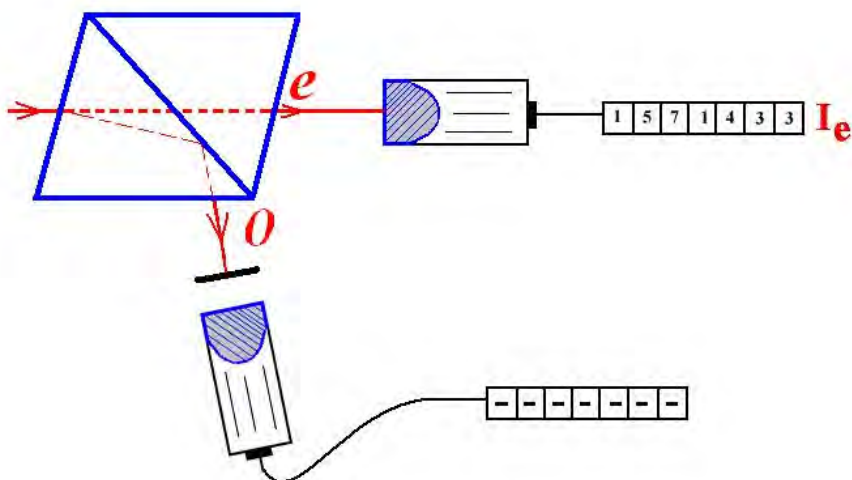


Рис. 5: Макроприбор для измерения интенсивности I_e необыкновенного луча e . Прибор состоит из призмы Николя, снабженной непрозрачной заглушкой на пути обыкновенного луча o . Такому макроприбору соответствует символ измерения $\hat{P}_e$

и записывать как $\hat{P}_e \otimes \hat{P}_e$. Если обе призмы поместить в «черный ящик»²⁰, то такой измерительный прибор должен работать точно так же, как одна призма Николя с заглушкой для обыкновенного луча. То есть ему должен соответствовать один символ измерения $\hat{P}_e$. Таким образом, находим следующее правило

²⁰Обычно «черным ящиком» называют нечто, имеющее вход и выход. Как связаны между собой вход и выход «черного ящика» — неизвестно. Его нельзя открыть и изучить его внутреннее устройство. Единственное, что можно делать, это подавать на вход «черного ящика» разные последовательности сигналов (например, пучки света) и изучать свойства сигналов на выходе. Понятие «черного ящика» широко используется в электротехнике и схемотехнике.

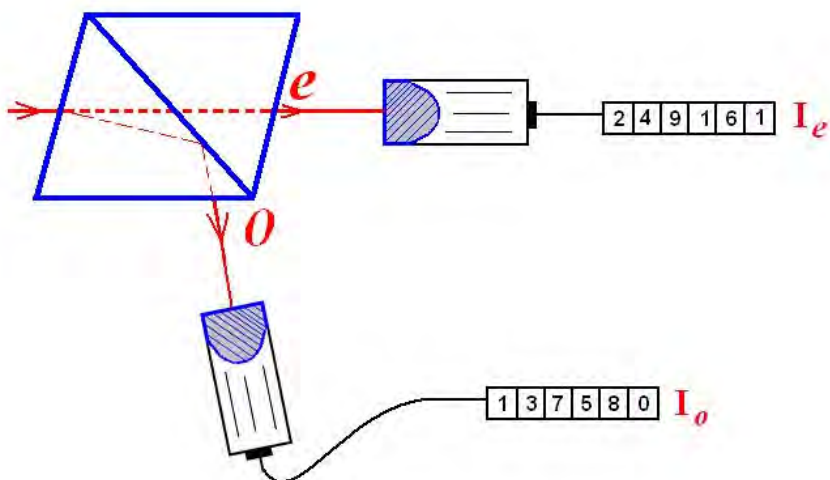


Рис. 6: Макроприбор для совместного измерения интенсивностей I_e необыкновенного и I_o обыкновенного лучей. Обе эти интенсивности составляют полный спектр интенсивности поляризованных пучков. Поэтому такому макроприбору соответствует единственный символ измерения $\hat{1}$

для произведения одинаковых символов измерения:

$$\hat{P}_e \otimes \hat{P}_e \equiv \hat{P}_e^2 = \hat{P}_e. \quad (5)$$

Символ « $\otimes$ » использован в формуле (5), чтобы подчеркнуть, что умножение символов измерения, вообще говоря, может отличаться от тех типов умножений, которые известны читателям из математических курсов. Его также не следует отождествлять с операцией прямого произведения.

Задача. Чему равны $\hat{P}_e^n$ и $\hat{P}_o^n$?

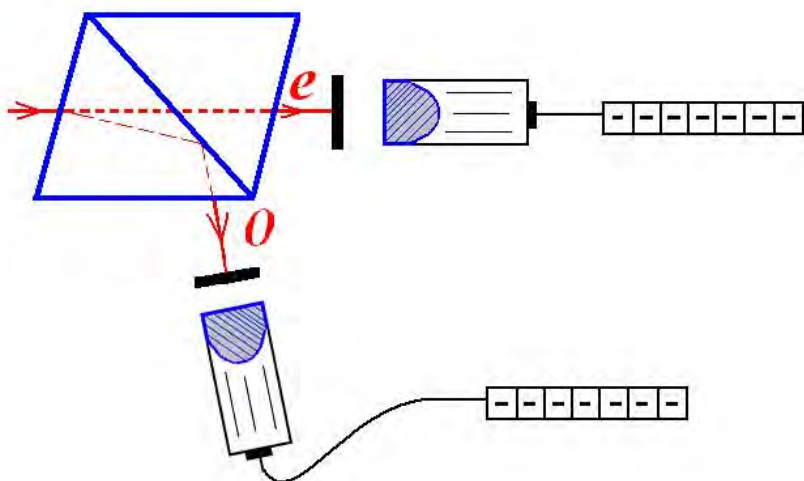


Рис. 7: Пример макроприбора, соответствующего нулевому символу измерения $\hat{0}$. Он состоит из призмы Николя и двух непрозрачных заглушек, поставленных на пути необыкновенного e и обыкновенного o лучей

Для вдумчивых читателей заметим, что если сравнить между собой рис. 5, на котором изображен макроприбор для символа измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$, и рис. 8, на котором показан макроприбор для символа измерения $\hat{\mathcal{P}}_e^2$, то можно заметить определенное несоответствие между двумя рисунками. У левой призмы на рис. 8 отсутствует ФЭУ, измеряющий интенсивность необыкновенного луча. Вместо него стоит вторая призма Николя. Поэтому, строго говоря, первой призме и первому ФЭУ с заглушкой не отвечает символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$. И формула (5) для такого макроприбора, вообще говоря, не имеет места. Однако данная ситуация легко поправима. Макроприбор рис. 5 можно модернизировать, поставив на пути необыкновенного луча полупрозрачное зеркало, а не ФЭУ. Но-

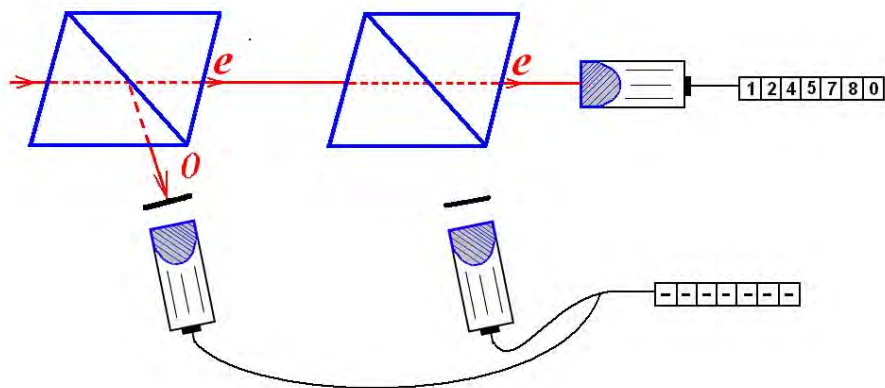


Рис. 8: Экспериментальная реализация формулы (5) для произведения двух символов измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$

вый вариант макроприбора показан на рис. 9. Пусть зеркало пропускает сквозь себя без изменения поляризации 99,999% интенсивности необыкновенного луча. А оставшиеся 0,001% — отражает. И этот отраженный свет попадает в ФЭУ. Понятно, что умножив показания идеального ФЭУ рис. 9 на нормировочный множитель 100 000, мы воспроизведем показания ФЭУ рис. 5. Тогда рис. 8 легко изменить, чтобы он соответствовал формуле (5). Исправленная версия макроприбора показана на рис. 10.

Введение полупрозрачных зеркал, которое требует формальное строгое рассмотрение предложенных выше «мысленных экспериментов», загромождает лишними элементами и без того сложные рисунки. Поэтому в дальнейшем мы откажемся от изображения полупрозрачных зеркал в пользу простоты и интуитивной ясности.

Заметим, что различие между рис. 5 и 9 можно трактовать как чисто методологическое. Действительно, в различных интерпретациях математического формализма квантовой механики нет однозначного ответа на вопрос: «на каком шаге в макроприборе непосредственно происходит измерение состояния

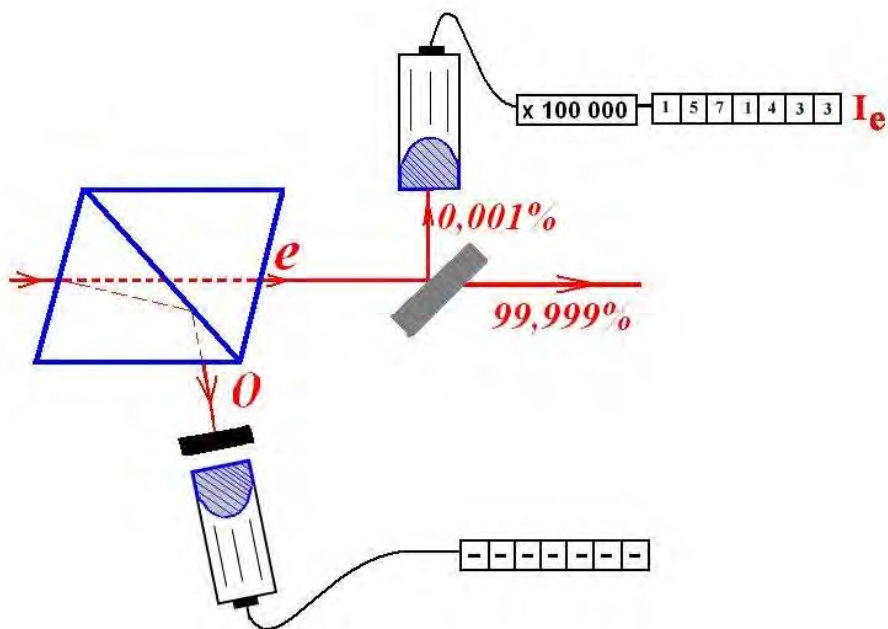


Рис. 9: Модифицированный макроприбор для измерения интенсивности I_e . Прибор состоит из призмы Николя, снабженной непрозрачной заглушкой для обыкновенного луча o , и полупрозрачного зеркала, стоящего на пути необыкновенного луча e . Зеркало пропускает без изменения поляризации 99,999% интенсивности необыкновенного луча, а 0,001% направляет на ФЭУ. Такому макроприбору, как и макроприбору на рис. 5, соответствует символ измерения $\hat{P}_e$

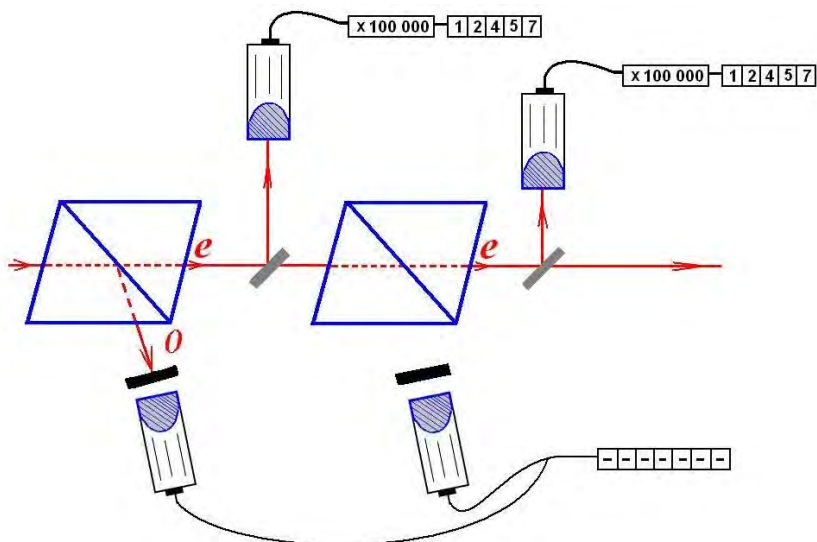


Рис. 10: Исправленная версия макроприбора для более строгой реализации формулы (5)

микросистемы: сразу же, когда свет проходит через призму Николя и попадает на заглушки, или только после того как сработает один из ФЭУ? В первом случае ФЭУ — это необязательный элемент макроприбора, необходимый только для того, чтобы в удобной форме передавать информацию об уже произошедшем измерении от макроприбора к наблюдателю. Во втором — неотъемлемая часть макроприбора. Соответственно, для первого случая можно ограничиться простым макроприбором, который изображен на рис. 5. Во втором случае следует использовать более громоздкую схему, показанную на рис. 9.

Теперь рассмотрим конфигурацию призм Николя, представленную на рис. 11. Из этого рисунка и определения символа нулевого измерения сразу получаем, что

$$\hat{P}_o \otimes \hat{P}_e = \hat{0}. \quad (6)$$

Задача. Прodelайте всю необходимую цепочку логических рассуждений, которая приведет от рис. 11 к формуле (6).

Необходимо условиться о порядке следования сомножителей при перемножении символов измерения. Пусть всегда в произведении двух символов измерения правее стоит тот, который соответствует более раннему измерению. Например, на рис. 11 раньше происходит измерение, соответствующее символу $\hat{P}_e$. Поэтому в выражении (6) этот символ стоит правее символа измерения $\hat{P}_o$. В порядке перемножения символов измерения легко можно усмотреть аналогию с определением операции умножения двух линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

$$(\hat{A} \hat{B}) |\psi\rangle = \hat{A} (\hat{B} |\psi\rangle).$$

Как станет ясно ниже, эта аналогия совсем не случайна.

То, что измерение при помощи двух призм на рис. 11 можно разделить на два последовательных измерения каждой из призм Николя по отдельности, становится очевидным, если поставить на пути необыкновенного луча между двумя призмами полупрозрачное зеркало и изменить рис. 11 в духе рис. 10. Читателям предлагается сделать это самостоятельно.

Задача. Какая конфигурация призм Николя и заглушек доказывает, что произведение $\hat{P}_e \otimes \hat{P}_o = \hat{0}$?

В качестве обобщения частных примеров (5) и (6) можно предложить следующее общее правило, которому должно подчиняться произведение любых двух символов измерения, соответствующих значениям a_i и a_j спектра наблюдаемой A :

$$\hat{P}_{a_i} \otimes \hat{P}_{a_j} = \begin{cases} \hat{P}_{a_i}, & \text{если } a_i \equiv a_j; \\ \hat{0}, & \text{если } a_i \neq a_j. \end{cases} \quad (7)$$

Если символ $\hat{P}_a$ относится к наблюдаемой A , а символ $\hat{P}_b$ — к наблюдаемой $B \neq A$, то для произведения $\hat{P}_a \otimes \hat{P}_b$ не существует простого правила, аналогичного правилу (7). Результат произведения $\hat{P}_a \otimes \hat{P}_b$ существенно зависит

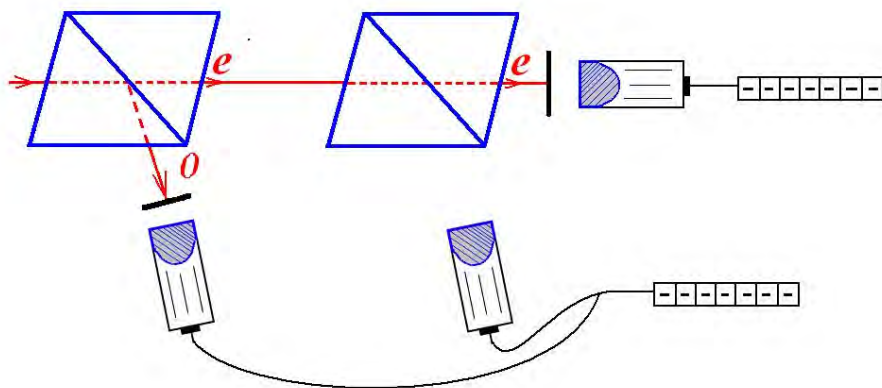


Рис. 11: Экспериментальная реализация формулы (6) для произведения символов измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$ и $\hat{\mathcal{P}}_o$

от того, можно ли создать макросприбор, который одновременно способен измерять наблюдаемые A и B , или для измерения спектров наблюдаемых A и B требуется *два принципиально различных* макроскопических прибора.

Задача. Сформулируйте аналог правила (7), если наблюдаемые A и B могут быть одновременно измерены при помощи одного макросприбора.

3.3. Сложение символов измерения

Пусть существует макросприбор, который может *одновременно* измерить сразу два значения a_i и a_j из спектра наблюдаемой A . Тогда действие этого макросприбора должно быть эквивалентно действию двух макросприборов, один из которых измеряет значение a_i , а другой — значение a_j . Естественно предположить, что символ измерения $\hat{\mathcal{P}}$ макросприбора, который может измерять два значения из спектра, должен быть равен **сумме символов измерения**

значений a_i и a_j по отдельности, что можно записать как

$$\hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}_{a_i} \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_j}. \quad (8)$$

В выражении (8) мы использовали символ « $\oplus$ », чтобы подчеркнуть, что сложение символов измерения может отличаться от всех известных законов сложения, например законов сложения комплексных чисел.

Если сложить символы измерений, отвечающие всем значениям спектра наблюдаемой A , то это будет означать одновременное измерение полного спектра наблюдаемой A при помощи одного макроприбора. Такому действию, по определению, соответствует символ единичного измерения, то есть

$$\hat{1} = \hat{\mathcal{P}}_{a_1} \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_2} \oplus \dots \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_j} \oplus \dots \quad (9)$$

Частный случай формулы (9) реализуется, когда для линейно поляризованного пучка света, падающего на призму Николя, выполняется равенство

$$\hat{1} = \hat{\mathcal{P}}_e \oplus \hat{\mathcal{P}}_o.$$

Слева стоит символ единичного измерения, которому сопоставлен макроприбор рис. 6. Справа — сумма двух символов измерения, каждому из которых сопоставляется макроприбор, аналогичный макроприбору для измерения интенсивности необыкновенного луча рис. 5 или 9. В качестве упражнения читателям предлагается самостоятельно нарисовать реализацию правой части равенства в терминах макроприборов.

Пользуясь правилами (7) и (9), можно установить, что:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}_a \otimes \hat{0} &= \hat{0} \otimes \hat{\mathcal{P}}_a = \hat{0}; \\ \hat{\mathcal{P}}_a \otimes \hat{1} &= \hat{1} \otimes \hat{\mathcal{P}}_a = \hat{\mathcal{P}}_a; \\ \hat{0} \otimes \hat{0} &= \hat{0}; \quad \hat{1} \otimes \hat{1} = \hat{1} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad \hat{\mathcal{P}}_a \oplus \hat{0} &= \hat{0} \oplus \hat{\mathcal{P}}_a = \hat{\mathcal{P}}_a; \\ \hat{0} \oplus \hat{1} &= \hat{1} \oplus \hat{0} = \hat{1}; \quad \hat{0} \oplus \hat{0} = \hat{0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Например, последовательно применяя определение (9) и два раза определение (7), получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}_{a_j} \otimes \hat{1} &= \hat{\mathcal{P}}_{a_j} \otimes (\hat{\mathcal{P}}_{a_1} \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_2} \oplus \dots \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_j} \oplus \dots) = \\ &= \hat{\mathcal{P}}_{a_j} \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j} = \hat{\mathcal{P}}_{a_j}, \end{aligned} \quad (12)$$

которая доказывает второе тождество в системе (10).

В преобразованиях цепочки (12) впервые используются скобки. Они служат для выделения определенной совокупности макроприборов. Поскольку каждый макроприбор работает независимо от других макроприборов, то по отношению к операциям « $\otimes$ » и « $\oplus$ » скобки можно раскрывать точно также, как при обычных операциях умножения и сложения.

Задача. Проверьте справедливость остальных соотношений в (10) и (11).

Задача. Придумайте «мысленные эксперименты» с призмой Николя, заглушками и ФЭУ, которые бы иллюстрировали формулы (10) и (11).

При описании сложения символов измерения осталось решить последний вопрос: чему равна сумма $\hat{\mathcal{P}}_{a_j} \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_j}$? Для этого вернемся к рис. 5, который соответствует макроприбору с символом измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$. Тогда два символа измерения соответствуют двукратному повторению измерения интенсивности необыкновенного луча и последующему сложению результатов измерения, как это показано на рис. 12. Поскольку результат двукратного измерения равен $2I_e$, логично предположить, что $\hat{\mathcal{P}}_e \oplus \hat{\mathcal{P}}_e = 2 \otimes \hat{\mathcal{P}}_e$. Обобщение данного результата на любые *целые* числа не представляет труда:

$$\underbrace{\hat{\mathcal{P}}_{a_j} \oplus \dots \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_j}}_{n \text{ раз}} = n \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j}. \quad (13)$$

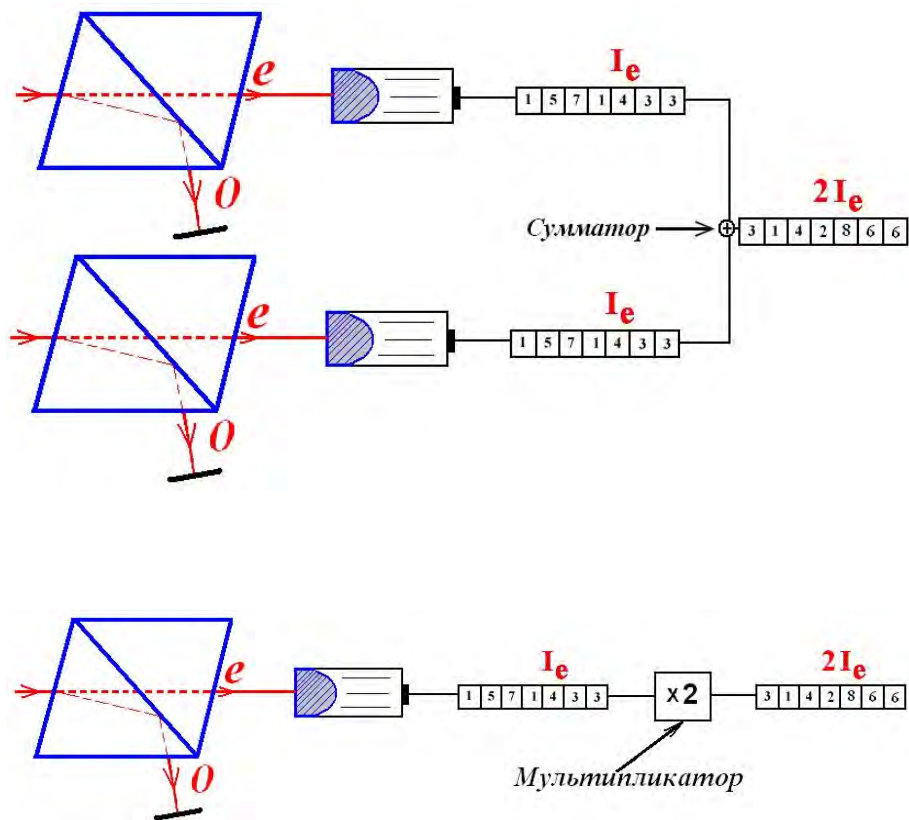


Рис. 12: «Экспериментальная» интерпретация сложения двух символов измерения $\hat{P}_e$. Верхний рисунок соответствует двукратному повторению измерения интенсивности необыкновенного луча, которая соответствует сложению символов измерения. Нижний рисунок — умножению сигнала ФЭУ на два. Легко видеть, что обе экспериментальные конфигурации приводят к одному и тому же результату

Очевидно, что символ измерения можно умножать не только на целые, но также на положительные рациональные и иррациональные числа. Умножение же на комплексные числа смысла не имеет, поскольку результаты измерения любых физических величин, например интенсивности I_e на рис. 12, выражаются действительными, а не комплексными числами. Смысл умножения на отрицательные числа обсуждается в параграфе 3.4.

Задача. Чему равна сумма $\hat{0} \oplus \hat{0}$?

Задача. Докажите, что для любых двух действительных чисел n и m выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}(n \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j}) \oplus (m \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j}) &= (n + m) \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j}; \\ (n \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j}) \otimes (m \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j}) &= (n \times m) \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j},\end{aligned}$$

где «+» и « $\times$ » — обычные операции сложения и умножения действительных чисел.

3.4. Коммутаторы и антикоммутаторы символов измерения

Можно ввести понятия **коммутатора** и **антикоммутатора для символов измерения**. Начнем с антикоммутатора. Будем обозначать его как $\{\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\mathcal{P}}_b\}$. Тогда

$$\{\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\mathcal{P}}_b\} = \hat{\mathcal{P}}_a \otimes \hat{\mathcal{P}}_b \oplus \hat{\mathcal{P}}_b \otimes \hat{\mathcal{P}}_a. \quad (14)$$

Это определение ничем не отличается от определения антикоммутатора для операторов. С коммутатором сложнее, поскольку физический смысл имеет только операция « $\oplus$ » сложения двух символов измерения. Поэтому будем говорить, что $[\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\mathcal{P}}_b] = \hat{\mathcal{P}}$, если

$$\hat{\mathcal{P}}_a \otimes \hat{\mathcal{P}}_b = \hat{\mathcal{P}}_b \otimes \hat{\mathcal{P}}_a \oplus \hat{\mathcal{P}}. \quad (15)$$

В случае когда символы измерения $\hat{\mathcal{P}}_a$ и $\hat{\mathcal{P}}_b$ относятся к измерению различных значений спектра одной наблюдаемой A (то есть когда $a \equiv a_i$ и $b \equiv a_j$), определения (14) и (15) сводятся к весьма тривиальным ситуациям.

Задача. Проверьте, что

$$\{\hat{\mathcal{P}}_{a_i}, \hat{\mathcal{P}}_{a_j}\} = \begin{cases} 2 \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_i}, & \text{если } a_i \equiv a_j; \\ \hat{0}, & \text{если } a_i \neq a_j. \end{cases}$$

Задача. Докажите, что если в определении (15) $a \equiv a_i$ и $b \equiv a_j$, то всегда $\hat{\mathcal{P}} = \hat{0}$. Как данный результат можно интерпретировать в терминах призм Николя, заглушек, ФЭУ и поляризаторов?

Если символы измерения $\hat{\mathcal{P}}_a$ и $\hat{\mathcal{P}}_b$ относятся к различным наблюдаемым A и B , то их коммутатор равен нулю тогда и только тогда, когда измерение спектра обеих наблюдаемых можно произвести при помощи одного и того же макropriбора. В подобной ситуации не важно, измеряется ли первой наблюдаемая A или наблюдаемая B . Во всех остальных ситуациях $[\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\mathcal{P}}_b] \neq \hat{0}$. В математическом аппарате квантовой теории некоммутативность символов измерения двух наблюдаемых приводит к так называемому **соотношению неопределенностей Гейзенберга**.

3.5. Аналогия между символом измерения и проекционным оператором

Хорошо известно, что в гильбертовом пространстве можно ввести проекционный оператор $\hat{P}_{a_j} = |a_j\rangle\langle a_j|$, который проецирует любой вектор $|\psi\rangle$ на состояние $|a_j\rangle$ ²¹. В предыдущих параграфах мы изучили символ $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}$, соответствующий измерению значения a_j наблюдаемой A . Сравнение математических свойств проекционного оператора с «физическими» свойствами символа

²¹Мы используем стандартную дираковскую нотацию для векторов в гильбертовом пространстве. Подробнее об этой нотации можно прочитать, например, в книгах [1] или [14].

измерения обнаруживает прямую аналогию между оператором $\hat{P}_{a_j}$ и символом $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}$. Действительно:

1. в гильбертовом пространстве проекционный оператор действует по правилу $\hat{P}_{a_j} |\psi\rangle \sim |a_j\rangle$, в то время как символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}$ из всего спектра наблюдаемой A выделяет только одно значение a_j ;
2. произведение двух проекционных операторов удовлетворяет интуитивно понятному условию $\hat{P}_{a_i} \hat{P}_{a_j} = \delta_{a_i a_j} \hat{P}_{a_j}$, которое по форме полностью аналогично правилу произведения двух символов измерения (7) значений a_i и a_j спектра наблюдаемой A ;
3. если векторы $|a_j\rangle$ образуют базис в гильбертовом пространстве, то сумма $\sum \hat{P}_{a_j} = \hat{1}$, в то время как сумма символов измерения, отвечающих всем возможным значениям спектра наблюдаемой A , также равна единичному символу измерения (9).

Проведенное сравнение свойств проекционного оператора и символа измерения позволяет *предложить гипотезу*, что каждому значению a_j спектра наблюдаемой A соответствует минимум одно состояние микросистемы. Математическая природа этого состояния, как и математическая природа символа измерения, пока остаются неясными. Если формально сопоставить такому состоянию символ $|a_j\rangle$, то символ измерения можно записать по аналогии с проекционным оператором в симметричной форме:

$$\hat{\mathcal{P}}_{a_j} = |a_j\rangle \langle a_j|. \quad (16)$$

Еще раз подчеркнем, что запись (16) не более чем гипотеза до тех пор, пока мы не выясним математическую природу символов $|a_j\rangle$ ²².

²²Проницательные читатели уже догадались, что в конце концов символы $|a_j\rangle$ будут отождествлены с векторами в гильбертовом пространстве. Однако для подобного отождествления, которое будет сделано в разделе 5, необходимо более детально исследовать свойства символов $|a_j\rangle$ с точки зрения измерения состояния микрочастицы макроскопическим прибором. Тем

Из (7) и (16) следует, что

$$|a_i\rangle\langle a_i| \otimes |a_j\rangle\langle a_j| = \begin{cases} |a_i\rangle\langle a_i|, & \text{если } a_i \equiv a_j; \\ \hat{0}, & \text{если } a_i \neq a_j, \end{cases}$$

или иначе

$$\langle a_i| \otimes |a_j\rangle = \begin{cases} \tilde{1}, & \text{если } a_i \equiv a_j; \\ \tilde{0}, & \text{если } a_i \neq a_j. \end{cases} \quad (17)$$

Выражение (17) содержит новые символы $\tilde{1}$ и $\tilde{0}$, которые обладают свойствами

$$\begin{aligned} |a_i\rangle \tilde{1} \langle a_i| &= |a_i\rangle\langle a_i| = \hat{\mathcal{P}}_{a_i}; \\ |a_i\rangle \tilde{0} \langle a_j| &= \hat{0}. \end{aligned}$$

Обсуждение произведений вида $\langle a| \otimes |b\rangle$, где a принадлежит спектру наблюдаемой A , а b — спектру наблюдаемой $B \neq A$, мы отложим до следующего раздела. Окончательно смысл подобных произведений станет ясен только после изучения теории представлений, которую мы планируем изложить в одном из следующих учебных пособий.

Задача. Проверьте, что конструкция (17) не противоречит аксиомам скалярного произведения.

В связи с последней задачей необходимо сделать две ремарки. Во-первых, напомним читателям аксиомы скалярного произведения в линейных (не обязательно гильбертовых!) пространствах:

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \psi \rangle^* &= \langle \psi | \varphi \rangle, \\ \langle \varphi | \lambda \times \psi \rangle &= \lambda \langle \varphi | \psi \rangle, \end{aligned}$$

не менее мы решили не множить количество обозначений, поэтому, несколько забежав вперед, обозначили состояние микросистемы точно так же, как и векторы в гильбертовом пространстве. Хочется еще раз подчеркнуть, что вплоть до раздела 5 мы не будем отождествлять состояния микросистемы и векторы в гильбертовом пространстве.

$$\langle \varphi | \psi + \chi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle + \langle \varphi | \chi \rangle,$$

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0 \text{ (равенство достигается тогда и только тогда, когда } |\psi\rangle = |0\rangle),$$

где символ « $\times$ » обозначает операцию умножения произвольного комплексного числа λ на вектор $|\psi\rangle$.

Во-вторых, уточним, что словосочетание «не противоречит» еще не означает, что исследуемая конструкция удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Например, поскольку неясно, что в конструкции (17) играет роль комплексного сопряжения, первая аксиома скалярного произведения для $\langle a_i | \otimes | a_j \rangle$ просто не определена.

3.6. Обобщение символа измерения

Выражение (16) имеет явно симметричный вид. Однако логика измерений и правило умножения (17) позволяют ввести **обобщенный**, или **несимметричный**, символ измерения

$$\hat{\mathcal{P}}_{a\,b} = |a\rangle\langle b|, \quad (18)$$

где значение a может принадлежать спектру наблюдаемой A , а значение b — спектру наблюдаемой B , вообще говоря, отличной от наблюдаемой A . Очевидно, что $\hat{\mathcal{P}}_{a\,a} \equiv \hat{\mathcal{P}}_a$. Тривиальным примером несимметричного символа измерения может служить символ измерения ФЭУ в системе на рис. 4. Наблюдаемая A в этом случае совпадает с интенсивностью, а наблюдаемая B — с силой электрического тока, которая может быть зарегистрирована амперметром.

Задача. Показать, что символ измерения ФЭУ можно записать в виде $|J_i\rangle\langle i|$, где $i = \{e, o\}$, а J_i — величина электрического тока, генерируемого ФЭУ.

Более продуктивно рассматривать несимметричные символы измерения вида $\hat{\mathcal{P}}_{a_i\,a_j} = |a_i\rangle\langle a_j|$, когда a_i и a_j принадлежат спектру одной и той же наблюдаемой A . Каков физический смысл обобщенного символа измерения в этом случае? Разберемся на примере символа измерения $\hat{\mathcal{P}}_{e\,o} = |o\rangle\langle e|$. Рассмотрим

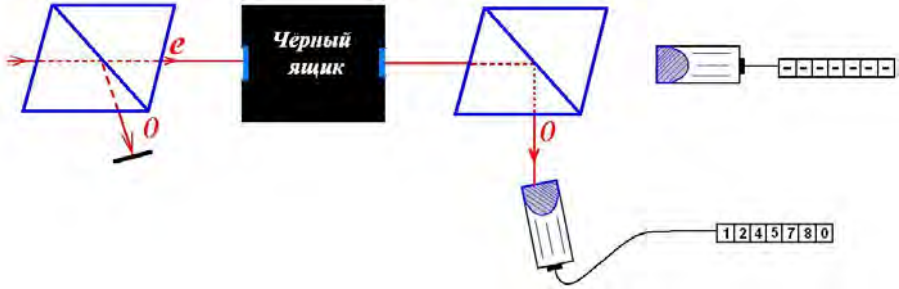


Рис. 13: В представленной «экспериментальной» ситуации «черному ящику» должен соответствовать обобщенный символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_{oe} = |o\rangle\langle e|$

рим две призмы Николя, разделенные некоторым «черным ящиком», как это показано на рис. 13. Пусть первая призма Николя выделяет только необыкновенный луч e . Тогда ей соответствует символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$. Далее необыкновенный луч попадает в «черный ящик». Поляризация вышедшего из «черного ящика» луча измеряется с помощью второй призмы Николя, идентичной первой по конструкции и ориентации в пространстве. При этом оказывается, что вторая призма Николя регистрирует только обыкновенный луч o . Тогда второй призме Николя необходимо сопоставить символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_o$. Символ измерения всего измерительного прибора на рис. 13, который мы обозначим через $\hat{\mathcal{P}}_{tot}$, можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}_{tot} &= \hat{\mathcal{P}}_o \otimes \hat{\mathcal{P}}_{ab} \otimes \hat{\mathcal{P}}_e = |o\rangle\langle o| \otimes |a\rangle\langle b| \otimes |e\rangle\langle e| = \\ &= |o\rangle \left(\langle o| \otimes |a\rangle \right) \left(\langle b| \otimes |e\rangle \right) \langle e|,\end{aligned}$$

где $\hat{\mathcal{P}}_{ab} = |a\rangle\langle b|$ — символ измерения «черного ящика». Поскольку $\hat{\mathcal{P}}_{tot} \neq \hat{0}$ (один из ФЭУ на рис. 13 выдает ненулевой сигнал), то $\langle o| \otimes |a\rangle \neq \tilde{0}$ и $\langle b| \otimes |e\rangle \neq \tilde{0}$. Принимая во внимание условие (17), мы видим, что наибо-

лее естественным образом неравенства $\langle o | \otimes | a \rangle \neq \tilde{0}$ и $\langle b | \otimes | e \rangle \neq \tilde{0}$ можно удовлетворить, если $a = o$ и $b = e$, то есть символ измерения «черного ящика» должен быть равен $\hat{P}_{oe} = |o\rangle\langle e|$. При этом в «черном ящике» может находиться полуволновая пластинка, которая поворачивает на 90° поляризацию светового пучка, или какой-либо более сложный оптический прибор.

Задача. Реализуйте символы измерения $\hat{P}_{oe}$ и $\hat{P}_{eo}$ только при помощи поляризаторов.

Задача. Как построить символ измерения поляризатора $\hat{P}_\alpha$ только при помощи призм Николя?

Задача. Почему символы измерения Швингера не имеет смысла использовать для описания процедуры измерения макроскопических объектов?

Задача. Используя условие (17) и определение несимметричного символа измерения (18) докажите, что:

$$\hat{P}_{a b_i} \otimes \hat{P}_{b_j c} = \begin{cases} \hat{P}_{ac}, & \text{если } b_i \equiv b_j; \\ \hat{0}, & \text{если } b_i \neq b_j. \end{cases} \quad (19)$$

Для обобщенных символов измерения можно ввести понятие антикоммутатора и коммутатора по аналогии с формулами (14) и (15). В рассматриваемом случае эти понятия оказываются достаточно содержательными, поскольку для несимметричных символов измерения, вообще говоря,

$$\hat{P}_{ab} \otimes \hat{P}_{cd} \neq \hat{P}_{cd} \otimes \hat{P}_{ab}. \quad (20)$$

Для иллюстрации утверждения (20) положим $a = d$ и $b = c$. Тогда легко проверить, что $\hat{P}_{ab} \otimes \hat{P}_{ba} = \hat{P}_a$, но $\hat{P}_{ba} \otimes \hat{P}_{ab} = \hat{P}_b$.

Закончим этот параграф шуточной интерпретацией симметричного и несимметричного символов измерения Швингера в классических терминах котов и коробок рис. 14, которая дает наглядное представление для столь абстрактных величин, коими являются символы измерения.

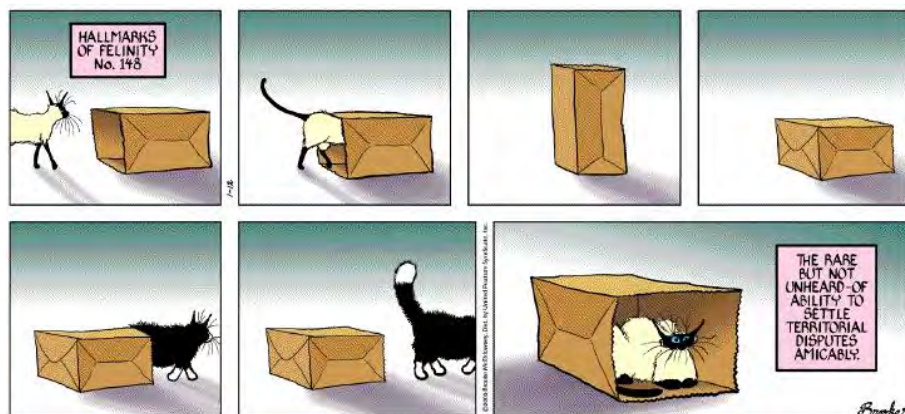
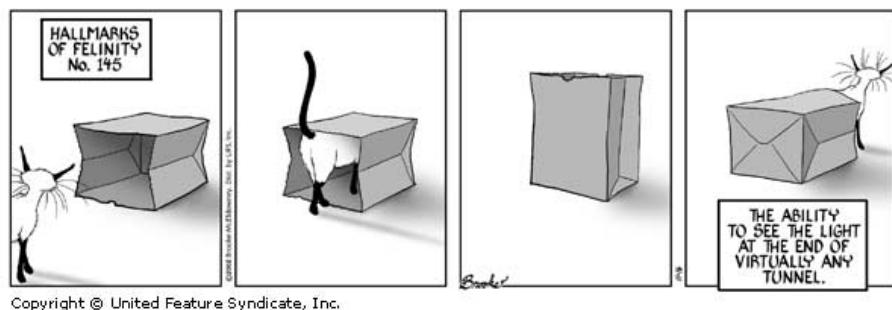


Рис. 14: Интерпретация символов измерения Швингера в макропических терминах котов и коробок. Верхний рисунок соответствует симметричному символу измерения, нижний — обобщенному. Рисунки взяты с сайта <http://www.oocities.org/tawley/felinity.html>

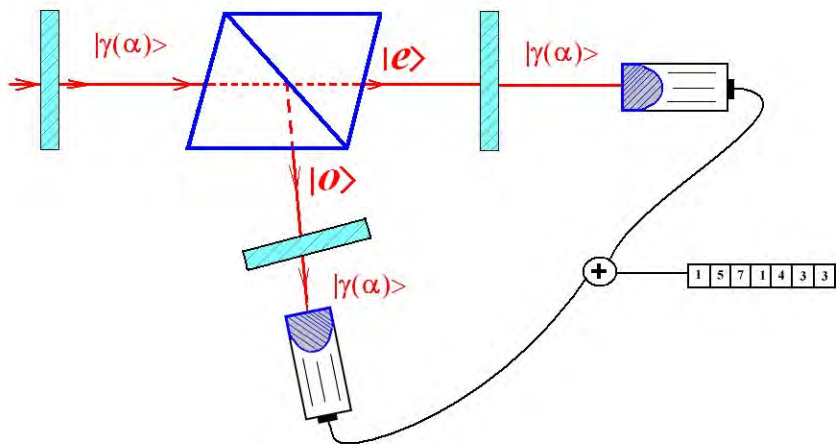


Рис. 15: «Мысленный эксперимент», объясняющий происхождение принципа суперпозиции в форме (21)

4. Принцип суперпозиции

Формула (17) задает правило умножения символов $|a_j\rangle$. В настоящем разделе мы найдем правило сложения символов $|a_j\rangle$, которое получило название **принципа суперпозиции**.

Для этого рассмотрим эксперимент с поляризаторами, призмой Николя и ФЭУ, показанный на рис. 15. Неполаризованный пучок света падает на поляризатор, оптическая ось которого составляет угол α с оптической осью призмы Николя. После прохождения поляризатора линейно-поляризованный пучок падает на николь и расщепляется на необыкновенный e и обыкновенный o лучи. Оба луча проходят через поляризаторы, идентичные первому поляризатору по составу материала и ориентации в пространстве оптических осей. Затем интенсивности обоих лучей регистрируются ФЭУ, а результаты измерений суммируются. Если заключить поляризаторы и призму Николя в «черный ящик»,

то с точки зрения внешнего наблюдателя этот «черный ящик» должен быть эквивалентен одному или двум одинаково ориентированным поляризаторам.

Действительно, сопоставим каждому поляризатору символ измерения $\hat{P}_\alpha = |\gamma(\alpha)\rangle\langle\gamma(\alpha)|$, который показывает, что вышедшие из поляризатора фотоны (γ) линейно поляризованы под углом α к оптической оси призмы Николя. Из рис. 15 видно, что призме Николя в данной конфигурации соответствует единичный символ $\hat{1} = \hat{P}_e \oplus \hat{P}_o$, поскольку она работает точно так же, как и конструкция на рис. 6. Тогда символ измерения, отвечающий «эксперименту» рис. 15, может быть записан в виде

$$\begin{aligned} (\hat{P}_\alpha \otimes \hat{P}_e \otimes \hat{P}_\alpha) \oplus (\hat{P}_\alpha \otimes \hat{P}_o \otimes \hat{P}_\alpha) &= \hat{P}_\alpha \otimes (\hat{P}_e \oplus \hat{P}_o) \otimes \hat{P}_\alpha = \\ &= \hat{P}_\alpha \otimes \hat{1} \otimes \hat{P}_\alpha = \hat{P}_\alpha \otimes \hat{P}_\alpha = \hat{P}_\alpha, \end{aligned}$$

то есть совпадает с символом измерения одного или двух одинаково ориентированных поляризаторов.

С другой стороны, используя (16), символ измерения для «мысленного эксперимента» рис. 15 можно записать в виде следующей цепочки преобразований:

$$\begin{aligned} (|\gamma(\alpha)\rangle\langle\gamma(\alpha)|) \otimes (|\gamma(\alpha)\rangle\langle\gamma(\alpha)|) &= \hat{P}_\alpha \otimes \hat{P}_\alpha = \\ &= (\hat{P}_\alpha \otimes \hat{1}) \otimes (\hat{1} \otimes \hat{P}_\alpha) = \\ &= (\hat{P}_\alpha \otimes (\hat{P}_e \oplus \hat{P}_o)) \otimes ((\hat{P}_e \oplus \hat{P}_o) \otimes \hat{P}_\alpha) = \\ &= (|\gamma(\alpha)\rangle\langle\gamma(\alpha)| \otimes (|e\rangle\langle e| \oplus |o\rangle\langle o|)) \otimes \\ &\quad \otimes ((|e\rangle\langle e| \oplus |o\rangle\langle o|) \otimes |\gamma(\alpha)\rangle\langle\gamma(\alpha)|) = \\ &= |\gamma(\alpha)\rangle (C_e^\dagger(\alpha)\langle e| \oplus C_o^\dagger(\alpha)\langle o|) \otimes \\ &\quad \otimes (|e\rangle C_e(\alpha) \oplus |o\rangle C_o(\alpha)) \langle\gamma(\alpha)|. \end{aligned}$$

Сравнение начального и конечного выражений данной цепочки показывает, что:

$$\begin{cases} |\gamma(\alpha)\rangle = |e\rangle C_e(\alpha) \oplus |o\rangle C_o(\alpha) \\ \langle\gamma(\alpha)| = C_e^\dagger(\alpha)\langle e| \oplus C_o^\dagger(\alpha)\langle o| \end{cases}, \quad (21)$$

где введены новые обозначения

$$\begin{aligned} C_e(\alpha) &= \langle e| \otimes |\gamma(\alpha)\rangle, & C_e^\dagger(\alpha) &= \langle\gamma(\alpha)| \otimes |e\rangle, \\ C_o(\alpha) &= \langle o| \otimes |\gamma(\alpha)\rangle, & C_o^\dagger(\alpha) &= \langle\gamma(\alpha)| \otimes |o\rangle. \end{aligned}$$

Из (21) следует, что символы $|\gamma(\alpha)\rangle$, $|e\rangle$ и $|o\rangle$ суть величины одной природы, поскольку при $\alpha = 0$ символ $|\gamma\rangle$ совпадает с символом $|e\rangle$, а при выборе $\alpha = \pi/2$ — с символом $|o\rangle$. Из свойств призмы Николя ясно, что поворот оси призмы на угол $\pi/2$ переводит символ $|e\rangle$ в символ $|o\rangle$ и наоборот. Аналогичное рассуждение можно провести для символов $\langle\gamma(\alpha)|$, $\langle e|$ и $\langle o|$.

Выражение (21) легко поддается обобщению. Если символы $|a_j\rangle$ подчиняются правилу умножения (17) и если $\sum_j \hat{P}_{a_j} = \hat{1}$, то любой символ $|\psi\rangle$ может быть **разложен в суперпозицию**

$$|\psi\rangle = |a_1\rangle C_1 \oplus \dots \oplus |a_j\rangle C_j \oplus \dots, \quad (22)$$

а любой символ $\langle\psi|$ — в суперпозицию

$$\langle\psi| = C_1^\dagger \langle a_1| \oplus \dots \oplus C_j^\dagger \langle a_j| \oplus \dots, \quad (23)$$

где $C_j = \langle a_j| \otimes |\psi\rangle$ и $C_j^\dagger = \langle\psi| \otimes |a_j\rangle$. Символы $|\psi\rangle$, $|a_j\rangle$, $\langle\psi|$ и $\langle a_j|$ имеют одинаковую природу.

Таким образом, природа как символов измерения, так и их половинок $|\psi\rangle$ или $|a_j\rangle$ абсолютно не зависит от физической реализации измерительного прибора и деталей процесса измерения, которым эти символы сопоставлены.

В заключение этого раздела еще раз подчеркнем, что принцип суперпозиции в форме (22) или (23) является следствием не только законов сложения и умножения символов измерения (которые почти неизбежно возникают из логики измерения свойств микросистемы при помощи макроприборов), но и следствием гораздо менее обоснованного предположения, что символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}$ по аналогии с проекционным оператором может быть записан в форме (16).

Задача. Исследовать свойства операции «†».

5. Ключевое предположение о математической природе символов $|\psi\rangle$

Сделаем основное и самое важное предположение, которое необходимо для построения математического аппарата квантовой механики: *наиболее естественно с математической точки зрения принцип суперпозиции (22) и (23) реализуется в линейных пространствах, где символы $|\psi\rangle$ и $\langle\psi|$ совпадают с кет- и бра-векторами соответственно*. Тогда символ « $\oplus$ » соответствует сложению двух векторов в линейном пространстве, то есть операции « $+$ ». А символ « $\otimes$ » необходимо сопоставить скалярному произведению, то есть считать, что $\langle a_j | \otimes | \psi \rangle \equiv \langle a_j | \psi \rangle$. В этом случае величины C_j и $C_j^\dagger$ представляют собой комплексные числа или функции. Естественно полагать, что эти величины должны быть каким-либо образом нормированы, поэтому из всех возможных линейных пространств для реализации математического аппарата квантовой механики логично выбрать гильбертово пространство.

Симметричные символы измерения Швингера $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}$ в подобной трактовке совпадают с проекционными операторами $\hat{P}_{a_j}$, что делает предположение параграфа 3.5 полностью обоснованным. При этом символы $|a_j\rangle$ и $\langle a_j|$ начинают жить «собственной жизнью» независимо друг от друга, разрушая целостность символа измерения $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}$.

Ниже мы сформулируем предположения о математическом формализме квантовой теории в виде постулатов квантовой механики. Прежде чем начать чтение следующих параграфов, рекомендуется освежить в памяти информацию, связанную со свойствами гильбертовых пространств, векторов и линейных операторов.

5.1. Математический формализм квантовой механики. Базовые постулаты

Наши рассуждения о математических структурах, описывающих поведение квантовых объектов, изобиловали «разумными» предположениями и «оче-

видными» аналогиями. Они подвели нас к выбору математического формализма квантовой теории. В настоящем параграфе этот выбор будет оформлен в виде трех первых аксиом, или постулатов, нерелятивистской квантовой механики. *Справедливость этих постулатов может быть проверена только сравнением предсказаний квантовой теории с экспериментами.* После формулирования необходимых постулатов все предыдущие рассуждения в терминах символов измерения и аналогий между этими символами и проекционными операторами должны быть отброшены за ненужностью. Они прекрасно сыграли роль «строительных лесов» при создании величественного здания теории микромира. Им на смену придет линейная алгебра и теория операторов.

Постулат №1. *Квантовая система описывается при помощи вектора состояния $|\psi\rangle$ в конечномерном или бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

Как правило, дополнительно предполагается, что *вектор состояния $|\psi\rangle$ несет максимально возможное количество информации о свойствах квантовой системы.* Это предположение является до сих пор дискуссионным. Мнения основоположников квантовой механики в этом вопросе разделились. Нильс Бор, Вернер Гейзенберг, Поль Дирак, Макс Борн и многие другие были сторонниками утверждения о максимально возможном количестве информации, в то время как Альберт Эйнштейн, Эрвин Шредингер, Луи де Бройль и некоторые другие — противниками. Отдельные аргументы А. Эйнштейна и его сторонников будут изложены в конце раздела 8. В то же время результаты квантовой теории информации прекрасно согласуются с утверждением о том, что вектор состояния $|\psi\rangle$ содержит максимально возможное количество информации о квантовой системе.

К сожалению, изучение даже основ квантовой теории информации, которая в настоящее время переживает бурное развитие, далеко выходит за рамки данного пособия. Заинтересовавшимся читателям можно порекомендовать две прекрасные монографии на эту тему [15] и [16]. Первая из двух монографий

написана так, что одновременно может рассматриваться как учебник по квантовой теории для желающих изучить эту науку с нуля.

Состояние микросистемы, которое допускает описание в терминах векторов состояния $|\psi\rangle$, называется **чистым состоянием**. Чистые состояния являются частным случаем так называемых **смешанных состояний**, которые в данном учебном пособии обсуждаться не будут. Отметим только, что смешанные состояния напрямую связаны с символами измерения, а не с их «половинками». Настойчивый и *очень умный* читатель сам может попытаться построить теорию смешанных состояний, или теорию **матрицы плотности**, как она называется в квантовой механике. Менее настойчивый может заглянуть, например, в книгу [17].

Постулат №2. *Состояние микросистемы определяется только направлением вектора $|\psi\rangle$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, но не длиной самого вектора.* Иначе говоря, состояние микросистемы задается лучом в гильбертовом пространстве.

Этот постулат естественно вытекает из философии символов измерения Швингера, в которой понятие «длины» символа измерения или какой-либо его части не фигурирует. Таким образом, в нашей теории норма вектора состояния $|\psi\rangle$ является свободным параметром, от которого не должны зависеть физические предсказания теории. Имея в виду дальнейшее развитие теории, удобно положить $||\psi|| = 1$. Отсюда сразу следует, что для любого вектора $|\psi\rangle$, который описывает физическую систему, выполняется **условие нормировки**

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1, \quad (24)$$

где запись «1» означает обычную единицу из поля действительных чисел. Заметим, что после введения Постулата №1 в формуле (17) символы $\tilde{1}$ и $\tilde{0}$ также следует трактовать как обычные единицу и ноль, то есть

$$\langle a_i | a_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \equiv a_j; \\ 0, & \text{если } a_i \neq a_j. \end{cases} \quad (25)$$

Перейдем теперь к принципу суперпозиции, который мы сформулируем в виде следующего постулата.

Постулат №3, или **принцип суперпозиции**. Пусть некоторая микросистема описывается вектором состояния $|\psi\rangle$. И пусть в результате измерения она может переходить в несколько макроскопически различных состояний, каждому из которых можно сопоставить вектор $|a_j\rangle$. Тогда $|\psi\rangle$ можно представить в виде линейной комбинации (суперпозиции) состояний $|a_j\rangle$ по формуле

$$|\psi\rangle = \sum_j C_j |a_j\rangle, \quad (26)$$

где C_j — набор комплексных чисел (и/или функций), которые определены через операцию скалярного произведения

$$C_j = \langle a_j | \psi \rangle. \quad (27)$$

Задача. Доказать, что формула (27) следует из разложения (26), если принять во внимание два первых постулата квантовой механики и условие (25).

Рассмотрим пример. Когда линейно поляризованный свет проходит через призму Николя, то он разделяется на два макроскопически различных состояния: необыкновенный и обыкновенный лучи. Поэтому, согласно Постулату N3, вектор состояния $|\gamma(\alpha)\rangle$ падающего на призму Николя света может быть разложен в суперпозицию

$$|\gamma(\alpha)\rangle = C_e(\alpha) |e\rangle + C_o(\alpha) |o\rangle \quad (28)$$

с комплексными коэффициентами $C_e(\alpha)$ и $C_o(\alpha)$, которые являются функциями угла α .

Задача. Записать принцип суперпозиции для вектора состояния $\langle\psi|$.

Задача. Записать коэффициенты $C_e(\alpha)$ и $C_o(\alpha)$ через векторы состояний $|\gamma(\alpha)\rangle$, $|e\rangle$ и $|o\rangle$.

В самых авторитетных учебниках по квантовой механике, к которым авторы причисляют книги [1] и [2], утверждается, что именно принцип суперпозиции отличает квантовую теорию от классической. Если бы квантовая механика имела единственную формулировку в терминах векторов состояния, то это утверждение можно было бы считать правильным. Однако все гораздо сложнее. Вспомним, что векторы состояния появились при «делении пополам» символа измерения, который сам квадратичен относительно таких векторов. Поэтому если формулировать квантовую механику в терминах «неделимых» символов измерения, то неизбежно возникают матрицы плотности (как обобщение проекционных операторов). В теории матрицы плотности принцип суперпозиции теряет все свое изящество и становится довольно искусственной, даже уродливой конструкцией, которую рука не поднимается положить в основания квантовой физики. Более того, существуют формулировки квантовой механики, в которых не появляются ни векторы состояния, ни символы измерения. Это, например, **формулировка квантовой механики в терминах интегралов по траекториям** [18], принадлежащая великому американскому физику-теоретику Р. Фейнману, или интенсивно развивающаяся в последнее время **томографическая формулировка квантовой механики**, основы которой можно найти в работах [19]. Естественно, что в обеих формулировках отсутствует принцип суперпозиции.

Если не принцип суперпозиции, то что же отличает квантовый мир от классического? Окончательного ответа на данный вопрос до сих пор не найдено. Однако есть несколько интересных гипотез. Согласно одной из них в квантовом мире максимальная степень корреляции между двумя физическими системами, которые связаны каким-либо законом сохранения (например, законом сохранения полного момента), выше, чем в классическом мире. Пользуясь методами квантовой теории информации, степень корреляции можно найти численно. К сожалению, даже беглое обсуждение этого вопроса потребует от читателя глубокого знания квантовой теории и виртуозного владения ее математическим аппаратом. На данном этапе изучения квантовой механики это

не представляется возможным. Но если заинтересовавшийся читатель захочет позже вернуться к вопросу о корреляциях в квантовой физике, то для вхождения в тему ему можно порекомендовать статьи [20]. Какова же роль принципа суперпозиции в этой картине? С помощью принципа суперпозиции в терминах векторов состояния необходимая максимальная степень корреляции между двумя микроскопическими системами может быть достигнута почти автоматически.

5.2. Физический смысл коэффициентов разложения в принципе суперпозиции и понятие условной вероятности

Вернемся, однако, к формулировке квантовой механики в терминах векторов состояния и выясним физический смысл коэффициентов C_j в принципе суперпозиции (26). Для этого продолжим рассмотрение «мысленного эксперимента» на рис. 15. Векторы состояния $|\gamma(\alpha)\rangle$, $|e\rangle$ и $|o\rangle$ удовлетворяют условию нормировки (24), то есть $\langle\gamma(\alpha)|\gamma(\alpha)\rangle = \langle e|e\rangle = \langle o|o\rangle = 1$. Кроме того, векторы $|e\rangle$ и $|o\rangle$ подчиняются условию ортогональности (25), которое дает $\langle e|o\rangle = \langle o|e\rangle = 0$. Тогда с помощью разложения (28) получаем:

$$\begin{aligned} 1 = \langle\gamma(\alpha)|\gamma(\alpha)\rangle &= |C_e(\alpha)|^2 \langle e|e\rangle + |C_o(\alpha)|^2 \langle o|o\rangle + \\ &+ C_e^*(\alpha)C_o(\alpha) \langle e|o\rangle + C_o^*(\alpha)C_e(\alpha) \langle o|e\rangle = \\ &= |C_e(\alpha)|^2 + |C_o(\alpha)|^2, \end{aligned}$$

то есть

$$|C_e(\alpha)|^2 + |C_o(\alpha)|^2 = 1.$$

Если оптическая ось поляризатора совпадает с оптической осью призмы, то на николь падает свет, поляризованный параллельно оптической оси призмы. Тогда по физическим соображениям мы ожидаем, что из призмы будет выходить только необыкновенный луч с интенсивностью $I_e = I_i$. Следовательно,

в этом случае величину $|C_e(\alpha = 0)|^2$ необходимо положить равной единице, а величину $|C_o(\alpha = 0)|^2$ — равной нулю. Когда оптическая ось поляризатора перпендикулярна оптической оси призмы Николя, то из физики эксперимента мы предсказываем регистрацию только обыкновенного луча с $I_o = I_i$, что на языке векторов состояния эквивалентно условиям $|C_e(\alpha = \pi/2)|^2 = 0$ и $|C_o(\alpha = \pi/2)|^2 = 1$.

Теперь рассмотрим эксперимент, представленный на рис. 15, в терминах фотонов. Пусть N_e — число необыкновенных, а N_o — число обыкновенных фотонов, зарегистрированных каждым из двух ФЭУ. Их сумма — $N_{\gamma(\alpha)}$ — равна числу фотонов, прошедших поляризатор и попавших на призму Николя. Тогда из частотного определения вероятности необыкновенного $w_e(\alpha) = N_e/N_{\gamma(\alpha)}$ и обыкновенного $w_o(\alpha) = N_o/N_{\gamma(\alpha)}$ фотонов находим, что

$$w_e(\alpha) + w_o(\alpha) = 1.$$

Если оптическая ось анализатора параллельна оптической оси призмы Николя, то $w_e(\alpha = 0) = 1$ и $w_o(\alpha = 0) = 0$. В случае когда оптические оси обоих приборов ортогональны, вероятности регистрации необыкновенного и обыкновенного фотонов равны $w_e(\alpha = \pi/2) = 0$ и $w_o(\alpha = \pi/2) = 1$.

При сравнении описания эксперимента рис. 15 в терминах векторов состояния и в терминах фотонов прослеживается очевидная аналогия между величиной $|C_e(\alpha)|^2$ (или $|C_o(\alpha)|^2$) и вероятностью $w_e(\alpha)$ (или $w_o(\alpha)$). Более того, хочется записать, что

$$w_e(\alpha) = |C_e(\alpha)|^2 \quad \text{и} \quad w_o(\alpha) = |C_o(\alpha)|^2.$$

То есть разумно предположить, что в квантовой теории квадраты модулей коэффициентов разложения *нормированного на единицу* вектора состояния $|\gamma(\alpha)\rangle$ по нормированным векторам состояния необыкновенного $|e\rangle$ и обыкновенного $|o\rangle$ лучей дают вероятности $w_e(\alpha)$ и $w_o(\alpha)$ регистрации этих лучей соответ-

ствующими макроприборами (в качестве которых на рис. 15 выступает пара ФЭУ).

Задача. Покажите, что в случае если вектор $|\gamma(\alpha)\rangle$ НЕ нормирован на единицу, а векторы $|e\rangle$ и $|o\rangle$ нормированы на единицу, связь между вероятностями и коэффициентами разложения должна иметь вид:

$$w_e(\alpha) = \frac{|C_e(\alpha)|^2}{|C_e(\alpha)|^2 + |C_o(\alpha)|^2} \quad \text{и} \quad w_o(\alpha) = \frac{|C_o(\alpha)|^2}{|C_e(\alpha)|^2 + |C_o(\alpha)|^2}.$$

Проверим, не противоречит ли сделанное нами выше предположение о связи вероятностей и квадратов модулей коэффициентов разложения в принципе суперпозиции одному из важнейших свойств вероятности: полная вероятность двух последовательных *независимых* событий равна произведению вероятностей каждого из событий. Для этого рассмотрим «мысленный эксперимент» рис. 16: свет, поляризованный под углом α , падает на призму Николя, которая выделяет из него только необыкновенную компоненту. Затем эта компонента падает на второй поляризатор, оптическая ось которого составляет угол β с оптической осью призмы. Прошедший через поляризатор свет регистрируется ФЭУ.

С точки зрения экспериментатора события, отвечающие прохождению света через николь и прохождению света через второй поляризатор, должны быть независимыми. Поэтому интенсивность света I_f на выходе из второго поляризатора следующим образом связана с интенсивностью света I_i , падающего на призму Николя:

$$I_f = w_e(\beta) w_e(\alpha) I_i = \cos^2 \beta \cos^2 \alpha I_i. \quad (29)$$

Теперь рассмотрим тот же самый эксперимент в терминах символов измерения, которые будем отождествлять с проекционными операторами на соответствующие векторы состояния. Поместим николь и поляризаторы в «черный ящик», которому по физике дела должен соответствовать символ измерения

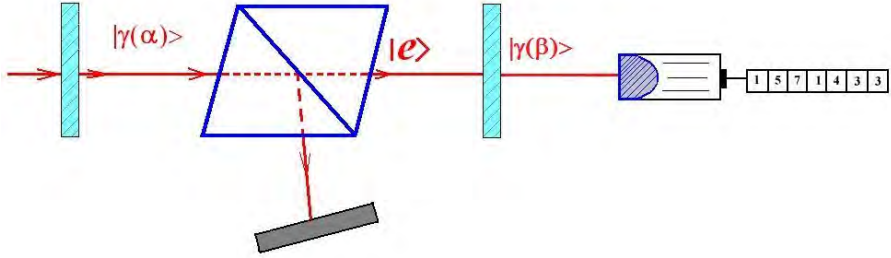


Рис. 16: «Мысленный эксперимент» для проверки свойства перемножения вероятностей двух последовательных независимых событий

$\hat{\mathcal{P}}_{\beta\alpha} = |\gamma(\beta)\rangle \langle \gamma(\alpha)|$. С другой стороны, система рис. 16 описывается произведением символов измерения:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}_{\beta} \hat{\mathcal{P}}_e \hat{\mathcal{P}}_{\alpha} &= |\gamma(\beta)\rangle (\langle \gamma(\beta)| e\rangle \langle e| \gamma(\alpha)\rangle) \langle \gamma(\alpha)| = \\ &= C_e^*(\beta) C_e(\alpha) |\gamma(\beta)\rangle \langle \gamma(\alpha)| = C_e^*(\beta) C_e(\alpha) \hat{\mathcal{P}}_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Поэтому соответствующая вероятность

$$|C_e^*(\beta) C_e(\alpha)|^2 = w_e(\beta) w_e(\alpha),$$

то есть равна произведению вероятностей, что находится в полном согласии с правилом вычисления вероятностей независимых событий и формулой (29).

Задача. Используя условие нормировки (24), показать, что коэффициенты C_j разложения (26) удовлетворяют равенству:

$$\sum_j |C_j|^2 = 1.$$

На основании проведенных выше нестрогих, но достаточно убедительных рассуждений мы можем ввести четвертый постулат квантовой механики, который раскрывает физический смысл коэффициентов C_j принципа суперпозиции (26).

Постулат №4, или постулат о физическом смысле коэффициентов разложения в принципе суперпозиции. В условиях Постулата №3 вероятность w_j найти микросистему после измерения в состоянии $|a_j\rangle$ задается формулой

$$w_j = |C_j|^2 = |\langle a_j | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | a_j \rangle \langle a_j | \psi \rangle. \quad (30)$$

Коэффициенты C_j в разложении (26) носят название **амплитуд вероятности** нахождения системы в состоянии $|a_j\rangle$. Этимология данного термина очевидна из формулировки Постулата №4.

В литературе Постулат №4 называют **проекционным постулатом Макса Борна** — по имени немецкого физика-теоретика, который в 1926 году первым предложил вероятностное толкование коэффициентов C_j для принципа суперпозиции (26). Постулат №4 задает алгоритм сравнения предсказаний квантовой механики с экспериментальными результатами, то есть открывает возможность экспериментальной проверки квантовой теории. Это делает квантовую механику научной теорией по К. Попперу [13].

Еще раз подчеркнем (поскольку это крайне важно!), что w_j — это вероятность найти квантовую систему в состоянии $|a_j\rangle$ **ПОСЛЕ ИЗМЕРЕНИЯ**, а не до измерения. Таким образом, в процессе любого измерения наблюдаемой A происходит «схлопывание» (или иначе — **редукция**) вектора состояния $|\psi\rangle$ к одному из возможных значений $|a_j\rangle$. Наблюдатель узнает о факте редукции, когда его макроприбор выдает информацию об измерении одного из возможных значений a_j , принадлежащих спектру наблюдаемой A .

Проекционный постулат автоматически решает вопрос о приготовлении ансамблей квантовых систем в заданном начальном состоянии только при по-

мощи макроприборов. Действительно, проведем множество измерений наблюдаемой A для большого количества микросистем, каждая из которых находится в неизвестном состоянии $|\psi_k^{(in)}\rangle$. По результатам измерения будем отбирать для дальнейшего использования только те микросистемы, в которых было измерено одно и то же значение a_j спектра наблюдаемой A . Тогда согласно Постулату №4 все отобранные микросистемы будут находиться в одинаковых состояниях $|a_j\rangle$ вне зависимости от того, каково было исходное состояние $|\psi_k^{(in)}\rangle$.

Хотя проекционный постулат явно не содержит параметра времени, но этот постулат можно рассматривать как один из динамических принципов нерелятивистской квантовой механики, поскольку согласно Постулату №4 квантовая система меняет свое состояние при взаимодействии с макроприбором. Другой динамический принцип, который явно описывает эволюцию квантовой системы во времени, носит название **нестационарного уравнения Шредингера**. Он тоже является одним из постулатов квантовой механики и играет в квантовой теории ту же роль, что и второй закон Ньютона в классической механике. Уравнение Шредингера будет всесторонне изучено в одном из следующих учебных пособий. Здесь только отметим, что связь проекционного постулата и уравнения Шредингера представляет собой одну из интригующих, до сих пор удовлетворительно не решенных, проблем квантовой механики.

Задача. Проверить, что если $\hat{P}_{a_j}$ — проекционный оператор на состояние $|a_j\rangle$, то формулу (30) можно переписать в виде

$$w_j = \langle \psi | \hat{P}_{a_j} | \psi \rangle \equiv \langle \hat{P}_{a_j} \rangle_\psi. \quad (31)$$

Задача. Показать, что в самом общем виде коэффициенты разложения вектора $|\gamma(\alpha)\rangle$ по базисным состояниям $|e\rangle$ и $|o\rangle$ можно записать как $C_e(\alpha) = \cos \alpha e^{i\delta_e}$ и $C_o(\alpha) = \sin \alpha e^{i\delta_o}$, где δ_e и δ_o — произвольные действительные числа.

Заметим, что при записи вектора состояния $|\gamma(\alpha)\rangle$ важны не абсолютные фазы δ_e и δ_o , а только **относительная фаза** $\delta = \delta_o - \delta_e$. Действительно

$$\begin{aligned} |\gamma(\alpha)\rangle &= \cos \alpha e^{i\delta_e} |e\rangle + \sin \alpha e^{i\delta_o} |o\rangle = e^{i\delta_e} \left(\cos \alpha |e\rangle + \sin \alpha e^{i\delta} |o\rangle \right) = \\ &= e^{i\delta_e} |\tilde{\gamma}(\alpha)\rangle. \end{aligned}$$

Читатель легко может проверить, что с точки зрения всех введенных до сих пор постулатов квантовой механики и правил вычисления вероятностей векторы $|\gamma(\alpha)\rangle$ и $|\tilde{\gamma}(\alpha)\rangle$ абсолютно эквивалентны. Эта эквивалентность сохранится и после формулировки остальных постулатов квантовой теории. Если векторы $|\gamma(\alpha)\rangle$ и $|\tilde{\gamma}(\alpha)\rangle$ эквивалентны, то это значит, что никакое физическое измерение не сможет их различить, и следовательно, измерить **абсолютную фазу** δ_e . Поэтому эту фазу обычно называют **нефизической** общей, или абсолютной, **фазой** и полагают равной нулю, чтобы сразу исключить из всех промежуточных вычислений. Сказанное выше легко можно обобщить на разложение произвольного вектора $|\psi\rangle$ по любому базису $|a_j\rangle$.

Согласно проекционному постулату М. Борна в процессе измерения микросистемы макроприбором переход из состояния $|\psi\rangle$ в состояние $|a_j\rangle$ происходит за время Δt , много меньшее характерного времени срабатывания макроприбора, так что можно считать, что данный переход происходит мгновенно (скачком). Это очень хорошая модель для описания абсолютного большинства измерений в квантовом мире. Вопрос о том, какие состояния проходила микросистема при переходе из состояния $|\psi\rangle$ в состояние $|a_j\rangle$, не имеет никакого смысла, поскольку эти промежуточные состояния (если предположить, что они существуют) не могут быть измерены при помощи макроприборов. Тут мы следуем фундаментальному принципу, который был положен В. Гейзенбергом в основание квантовой теории²³. Необходимость введения подобного принципа обсуждалась в конце параграфа 2.2.

²³Напомним, что В. Гейзенберг предложил включать в квантовую теорию только те величины, которые могут быть измерены при помощи макроприборов (наблюдаемые). Этот принцип можно уточнить. При теоретическом описании любого эксперимента можно оперировать только

Если читателя не убедили рассуждения о фундаментальных принципах, то для уяснения бессмысленности вопроса о промежуточных состояниях можно предложить, например, аналогию с вопросом «Каково на вкус вдохновение?». Хотя вопрос о вкусе вдохновения не противоречит нормам русского языка, но в реальной жизни он не имеет абсолютно никакого смысла, и ответ на него не может быть получен.

Выражение (31) для вероятности допускает более общую запись при помощи следа двух проекционных операторов:

$$w_j = \text{Tr} \left(\hat{P}_\psi \hat{P}_{a_j} \right), \quad (32)$$

где $\hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ — проектор на состояние $|\psi\rangle$. Отметим, что формула (32) без изменений может быть перенесена на смешанные состояния. Эту формулу удобно доказывать справа налево. Для доказательства запишем след двух проекционных операторов в базисе $|a_i\rangle$:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\hat{P}_\psi \hat{P}_{a_j} \right) &= \sum_i \left\langle a_i \left| \hat{P}_\psi \hat{P}_{a_j} \right| a_i \right\rangle = \sum_i \langle a_i | \psi \rangle \langle \psi | a_j \rangle \langle a_j | a_i \rangle = \\ &= \sum_i C_i C_j^* \delta_{ji} = \sum_i C_j^* C_i \delta_{ji} = C_j^* C_j = \\ &= \langle \psi | a_j \rangle \langle a_j | \psi \rangle = \left\langle \psi \left| \hat{P}_{a_j} \right| \psi \right\rangle = w_j. \end{aligned}$$

Скалярное произведение $\langle a_j | \psi \rangle$ можно рассматривать как проекцию вектора состояния $|\psi\rangle$ на базисное состояние $|a_j\rangle$. Очевидно, что вектор состояния $|\psi\rangle$ можно спроектировать на любое другое состояние $|\varphi\rangle$. Тогда величину

$$w(\varphi | \psi) = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = \text{Tr} \left(\hat{P}_\psi \hat{P}_\varphi \right) \quad (33)$$

с теми наблюдаемыми, которые могут быть измерены совместно. Условия совместной измеримости наблюдаемых нам еще предстоит изучить в разделе 7.

следует трактовать как **условную вероятность** измерения квантовой системы в состоянии $|\varphi\rangle$, если до этого система находилась в состоянии $|\psi\rangle$. Такие условные вероятности играют важнейшую роль в квантовой физике.

Задача. Рассмотрим наблюдаемую A , спектр которой состоит всего из двух значений a_1 и $a_2 \neq a_1$. Этим значениям соответствуют базисные векторы $|a_1\rangle$ и $|a_2\rangle$. Пусть некоторая квантовая система находится в состоянии

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (|a_1\rangle + 3|a_2\rangle)$$

(самостоятельно проверьте правильность нормировки вектора состояния!) .
Найти:

- а) вероятность измерения значения a_1 наблюдаемой A ;
- б) вероятность измерения значения a_2 наблюдаемой A ;
- в) проекционный оператор $\hat{P}_\psi$ на состояние $|\psi\rangle$;
- г) условную вероятность перехода из состояния $|\psi\rangle$ в состояние

$$|\psi^{(\perp)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (3|a_1\rangle - |a_2\rangle);$$

- д) условные вероятности переходов из состояния $|\psi\rangle$ в состояния

$$|\varphi^{(\pm)}\rangle = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{2}} (|a_1\rangle \pm |a_2\rangle), \text{ где } \delta \text{ — произвольное действительное число.}$$

В связи с пунктом «д» последней задачи имеет смысл еще раз обсудить фундаментальное различие между абсолютной и относительной фазами при записи векторов состояния. Если читатель проделал все вычисления без ошибок, то он должен получить, что $w(\varphi^{(+)}|\psi) = 4/5$ и $w(\varphi^{(-)}|\psi) = 1/5$. Таким образом, наблюдаемые на эксперименте вероятности не зависят от абсолютной фазы δ , но зависят от того, какой знак выбран между векторами состояния $|a_1\rangle$ и $|a_2\rangle$, то есть зависят от величины относительной фазы.

6. Операторы физических величин

Перед тем как приступить к чтению данного раздела, советуем освежить знания относительно эрмитовых операторов и их свойств.

Пусть микросистема обладает наблюдаемой A и находится в состоянии $|\psi\rangle$. Например, рассмотрим пучок света (фотонов), прошедший поляризатор в оптической системе на рис. 4. Роль наблюдаемой в такой микросистеме выполняет интенсивность, а состояние пучка описывается вектором $|\gamma(\alpha)\rangle$.

В результате детектирования квантового ансамбля при помощи макроприбора, обладающего набором символов измерения $\{\hat{\mathcal{P}}_{a_i}\}$, стало известно, что наблюдаемая A обладает спектром значений $\{a_j\}$, а вероятность измерения каждого значения спектра равна w_j . Вероятности w_j , очевидно, зависят как от типа измерительного прибора, так и от состояния микросистемы $|\psi\rangle$ ²⁴. На рис. 4 роль макроприбора играет призма Николя, разделяющая начальный пучок на необыкновенный и обыкновенный лучи с вероятностями $w_e = \cos^2 \alpha$ и $w_o = \sin^2 \alpha$ соответственно. Необыкновенный и обыкновенный лучи, получившиеся после прохождения пучка линейно поляризованного света через николь, также являются примерами микросистем, каждая из которых описывается вектором состояния $|e\rangle$ и $|o\rangle$ соответственно. Для них макроприборами являются ФЭУ.

²⁴Естественно предположить, что для определения спектра значений наблюдаемой A используется макроприбор, символы измерения которого удовлетворяют условию $\sum_i \hat{\mathcal{P}}_{a_i} = \hat{1}$. Оче-

видно, что число значений a_j не превышает числа символов измерения $\hat{\mathcal{P}}_{a_i}$, однако эти числа не обязательно совпадают между собой. Действительно, нескольким различным символам измерения может соответствовать одно и то же значение спектра. Поясним сказанное простым примером. Пусть измеряется импульс нерелятивистской частицы $\vec{p}$, а в качестве наблюдаемой выбирается кинетическая энергия $T = \vec{p}^2/2m$. Тогда символам измерения импульсов $\vec{p}_1 = \vec{P}$ и $\vec{p}_2 = -\vec{P}$ соответствует одно и то же значение в спектре кинетической энергии $T = \vec{P}^2/2m$.

Среднее значение наблюдаемой A в состоянии $|\psi\rangle$ можно найти по хорошо известной формуле

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_j w_j a_j, \quad (34)$$

то есть суммированием по всему спектру наблюдаемой A , где каждое значение спектра a_j берется со своей вероятностью (иначе говорят, со своим весом) w_j .

Задача. Обоснуйте эту формулу в корпускулярном подходе при помощи частотного определения вероятности.

Согласно Постулату №4 и формуле (30) выражение для $\langle A \rangle_\psi$ можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\psi &= \sum_j |C_j|^2 a_j = \sum_j \langle \psi | a_j \rangle \langle a_j | \psi \rangle a_j = \\ &= \sum_j \langle \psi | a_j \rangle a_j \langle a_j | \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | \left(\sum_j |a_j\rangle a_j \langle a_j| \right) | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle, \end{aligned}$$

где $\hat{A} = \sum_j |a_j\rangle a_j \langle a_j|$ — оператор, который в квантовой теории должен быть сопоставлен наблюдаемой A . Оператор $\hat{A}$ действует в гильбертовом пространстве векторов состояния данной микросистемы. Поскольку вектор $|a_j\rangle$ и число a_j , очевидно, коммутируют между собой, то оператор $\hat{A}$ может быть переписан через проекционные операторы $\hat{P}_{a_j} = |a_j\rangle \langle a_j|$ в виде

$$\hat{A} = \sum_j a_j \hat{P}_{a_j}.$$

Докажем, что $\hat{A}$ — **эрмитов оператор**. Очевидно, что проекционный оператор является частным случаем эрмитового оператора. Кроме того, величины a_j

суть действительные числа, поскольку их значения измеряются в эксперименте, а стрелка макроприбора или макроскопический цифровой датчик могут показать только действительную величину. Тогда

$$\hat{A}^\dagger = \sum_j \left(a_j \hat{P}_{a_j} \right)^\dagger = \sum_j \hat{P}_{a_j}^\dagger a_j^* = \sum_j \hat{P}_{a_j} a_j = \sum_j a_j \hat{P}_{a_j} = \hat{A},$$

что и требовалось доказать.

Задача. Докажите, что векторы $|a_j\rangle$ являются собственными векторами оператора $\hat{A}$, отвечающими собственным значениям a_j .

Поэтому оператор, отвечающий любой наблюдаемой характеристике микросистемы A , обладает точно такими же свойствами, какими обладает эрмитов оператор. Еще раз перечислим важнейшие из этих свойств:

1. Собственные векторы оператора любой наблюдаемой физической величины образуют базис в гильбертовом пространстве векторов состояния рассматриваемой квантовой системы. Очевидно, что большинство микросистем имеет сразу несколько наблюдаемых. Поэтому в пространстве векторов состояния может быть построено несколько различных базисов (или представлений), по которым можно разложить любой вектор состояния микросистемы $|\psi\rangle$.
2. Средние значения любой наблюдаемой A в любом допустимом состоянии микросистемы $|\psi\rangle$ являются действительными числами. Это утверждение следует из свойств эрмитового оператора $\hat{A}$. Например, начальная интенсивность пучка линейно поляризованных фотонов I_i в эксперименте на рис. 4 всегда действительная (более того, в данном конкретном примере — всегда неотрицательная) величина, каково бы ни было состояние $|\gamma(\alpha)\rangle$.

Утверждение о том, что каждой наблюдаемой в квантовой механике соответствует эрмитов оператор, было доказано практически без использования «очевидных допущений», взятых из эксперимента. Самым большим таким допуще-

нием стало условие действительности коэффициентов a_j . Поскольку мы стремимся построить квантовую теорию не на основании «очевидных допущений», а на основе некоторого количества четко сформулированных аксиом, то суммируем результаты этого раздела в виде очередного постулата квантовой механики.

Постулат №5, или постулат о соответствии наблюдаемых величин и операторов. Любая микросистема обладает хотя бы одной экспериментально наблюдаемой и измеряемой физической величиной, которая для краткости называется **наблюдаемой**. В квантовой механике любой наблюдаемой A ставится в соответствие эрмитов оператор $\hat{A}$, так что среднее значение этой наблюдаемой в любом допустимом состоянии $|\psi\rangle$ определяется по формуле

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (35)$$

В заключение сделаем еще три замечания. **Первое.** Если известно среднее значение наблюдаемой A , то можно найти среднее значение любой гладкой функции от этой наблюдаемой. **Второе.** Формула (35) справедлива только в том случае, когда микросистема замкнута, а все измерительные приборы абсолютно идеальные. Наконец, **третье.** Формула (35) дает рецепт вычисления среднего наблюдаемой A . Но без конкретизации вида оператора $\hat{A}$ и вектора состояния $|\psi\rangle$ (например, в виде дифференциальных операторов и функций или в виде матриц и столбцов) невозможно провести ни одного вычисления для конкретных микросистем. Поиск явного вида операторов координаты, импульса, энергии, орбитального момента и спина, равно как и состояний, на которые они действуют, представляет собой нетривиальную задачу. Ее решению будут посвящены другие учебные пособия этого курса.

Задача. Показать, что формула (35) может быть переписана в виде

$$\langle A \rangle_\psi = \text{Tr} \left(\hat{P}_\psi \hat{A} \right). \quad (36)$$

Задача. Рассмотрим наблюдаемую A , спектр которой состоит всего из двух значений $a_1 = 5$ и $a_2 = 1/6$. Этим значениям отвечают базисные векторы $|a_1\rangle$ и $|a_2\rangle$ соответственно. Пусть некоторая квантовая система находится в состоянии $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (|a_1\rangle + 3|a_2\rangle)$. При помощи определения (35) вычислить, чему равны:

- а) среднее значение наблюдаемой A в состоянии $|\psi\rangle$;
- б) дисперсия наблюдаемой A , которая задается формулой

$$D_A = \sqrt{\left\langle \left(\hat{A} - \langle A \rangle_\psi \right)^2 \right\rangle_\psi}.$$

Задача. В базисе векторов $|a_1\rangle$ и $|a_2\rangle$ из предыдущей задачи найти явный вид проектора $\hat{P}_\psi$ и вычислить $\langle A \rangle_\psi$ при помощи выражения (36).

Задача. Как надо модифицировать формулу (36), чтобы вычислить $\langle A^2 \rangle_\psi$?

7. Условие совместной измеримости средних значений двух наблюдаемых

В макроскопическом мире влиянием процесса наблюдения (и самого наблюдателя) на состояние наблюдаемой системы практически всегда можно пренебречь. Поэтому в рамках классической теории предполагается возможность измерения любых характеристик макроскопической системы со сколь угодно большой точностью в произвольном порядке. Например, для шарика, скатывающегося вниз по наклонной плоскости, можно измерить сначала его скорость, затем координату, и наконец, момент количества движения. Ничего не изменится, если сначала будет измерена координата шарика, затем — его момент, а при последнем измерении найдена скорость²⁵.

В параграфе 1.2 приведены качественные рассуждения, которые показывают, что в микромире измерение любой характеристики квантовой системы обязано чрезвычайно сильно менять состояние самой микросистемы. Строго это утверждение можно получить непосредственно из постулатов квантовой теории.

Действительно, приготовим квантовый ансамбль, в котором до измерения каждая микросистема находится в состоянии $|\psi\rangle$. Далее предположим, что мы хотим измерить среднее значение $\langle A \rangle_\psi$ наблюдаемой A в этом ансамбле. Пусть для простоты наблюдаемая A обладает конечным невырожденным дискретным спектром $a_1, \dots, a_n$. Для экспериментального нахождения $\langle A \rangle_\psi$ необходимо сначала взять одну микросистему из ансамбля и измерить значение наблюдаемой для этой микросистемы. Пусть это значение равно a_j . Тогда, согласно принципу суперпозиции и проекционному постулату Макса Борна (постулаты №3 и №4 из параграфов 5.1 и 5.2 соответственно), измерение значения a_j означает, что после измерения данная конкретная микросистема перешла в состояние $|a_j\rangle$. Аналогичное измерение необходимо проделать с остальными

²⁵Если только все три измерения происходят в течение достаточно малого промежутка времени Δt .

микросистемами из ансамбля. Тогда для каждого значения a_j будет найдена вероятность его появления $w_j = N_j/N$, где $N \gg 1$ — полное количество микросистем в ансамбле, совпадающее с полным числом измерений, $N_j \gg 1$ — число измерений, в которых было зарегистрировано значение a_j наблюдаемой A . Среднее значение $\langle A \rangle_\psi$ легко вычисляется по формуле (34). Однако после измерения $\langle A \rangle_\psi$ в нашем распоряжении уже не имеется квантового ансамбля из N микросистем в состоянии $|\psi\rangle$, а имеется n ансамблей, каждый из которых включает в себя $N_j \gg 1$ микросистем в состоянии $|a_j\rangle$.

Следовательно, в общем случае невозможно измерить среднее значение $\langle B \rangle_\psi$ наблюдаемой B для *того же самого квантового ансамбля* микросистем, в котором было измерено среднее значение наблюдаемой A ²⁶. Поэтому для квантовых ансамблей имеет смысл исследовать два вопроса:

1. при каком условии на операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ средние значения наблюдаемых A и B могут быть одновременно измерены для одного и того же квантового ансамбля;
2. как найти полный набор совместно измеримых наблюдаемых для микросистемы с известными (или заданными) свойствами?

На первый вопрос можно дать следующий ответ: *если две наблюдаемые A и B могут быть совместно измерены для одного и того же квантового ансамбля, то соответствующие этим наблюдаемым операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют*, то есть $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Это и есть искомое условие на операторы.

Для доказательства рассмотрим квантовый ансамбль микросистем в состоянии $|\psi\rangle$. Пусть для этого ансамбля необходимо измерить средние значения наблюдаемых A и B . Чтобы не усложнять доказательство, предположим, что обе наблюдаемые имеют конечный дискретный невырожденный спектр.

²⁶Обычно вместо словосочетания «вместе измерены для одного и того же квантового ансамбля», говорят о **совместной измеримости** или **одновременной измеримости** наблюдаемых A и B .

Если первым измеряется среднее значение наблюдаемой B , то

$$\langle B \rangle_\psi = \sum_j w_j^{(b)} b_j. \quad (37)$$

Если же первой измеряется наблюдаемая A , а за ней наблюдаемая B , то среднее значение наблюдаемой A есть

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_i w_i^{(a)} a_i.$$

После измерения наблюдаемой A каждое состояние $|\psi\rangle$ переходит в состояние $|a_i\rangle$, которое может быть разложено по базису

$$|a_i\rangle = \sum_j c_{ij} |b_j\rangle.$$

Поэтому среднее значение наблюдаемой B , полученное после измерения среднего значения наблюдаемой A , может быть записано в виде

$$\langle B|A \rangle_\psi = \sum_i \left(w_i^{(a)} \sum_j w_{ij} b_j \right) = \sum_{ij} w_i^{(a)} w_{ij} b_j, \quad (38)$$

где $w_{ij} = |c_{ij}|^2 = |\langle b_j | a_i \rangle|^2$. Обозначение $\langle B|A \rangle_\psi$ означает, что измерение среднего наблюдаемой B происходит при условии, что уже выполнено измерение среднего наблюдаемой A . Похожее обозначение использовалось в разделе 6 для записи условных вероятностей²⁷.

Если наблюдаемые A и B могут быть измерены для одного квантового ансамбля, то измерение среднего наблюдаемой A не влияет на измерение средне-

²⁷Стоит специально обратить внимание читателей, что обозначение $\langle B|A \rangle_\psi$ не следует путать с весьма похожим по написанию обозначением $\langle b | a \rangle$ скалярного произведения двух векторов состояния. Условное среднее $\langle B|A \rangle_\psi$ несет дополнительный нижний индекс ψ , характеризующий состояние, по которому происходит усреднение. В записи скалярного произведения подобный нижний индекс, очевидно, отсутствует.

го наблюдаемой B , и наоборот: измерение среднего наблюдаемой B не должно влиять на измерение среднего наблюдаемой A . Математически оба утверждения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\langle B \rangle_\psi &= \langle B|A \rangle_\psi; \\ \langle A \rangle_\psi &= \langle A|B \rangle_\psi.\end{aligned}\tag{39}$$

Учитывая (37) и (38) из первого равенства (39), получаем:

$$w_j^{(b)} = \sum_i w_i^{(a)} w_{ij}.\tag{40}$$

Задача. Пользуясь вторым равенством из формулы (39), показать, что

$$w_i^{(a)} = \sum_\ell w_\ell^{(b)} w_{i\ell}.\tag{41}$$

Подставляя (41) в (40), находим, что

$$w_j^{(b)} = \sum_{i,\ell} w_\ell^{(b)} w_{ij} w_{i\ell},$$

откуда следует

$$\sum_i w_{ij} w_{i\ell} = \delta_{j\ell}.\tag{42}$$

Рассмотрим последнее уравнение при $j = \ell$. Тогда $\sum_i (w_{ij})^2 = 1$. С другой стороны, поскольку все w_{ij} положительны и не превосходят единицы, то выполняется очевидное неравенство $\sum_i (w_{ij})^2 \leq \sum_i w_{ij} = 1$. Из обоих выражений следует, что

$$\sum_i (w_{ij})^2 = \sum_i w_{ij} = 1.\tag{43}$$

Равенство в (43) достигается только тогда, когда одна из вероятностей w_{ij} строго равна единице, а остальные вероятности равны нулю. Учитывая (42) при $j \neq \ell$ для вероятности w_{ij} можно написать, что $w_{ij} = \delta_{ij}$, то есть и $c_{ij} = \delta_{ij}$. Поэтому должно выполняться равенство $|a_i\rangle \equiv |b_i\rangle \equiv |a_i, b_i\rangle$, где используется стандартное обозначение для общих векторов операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Таким образом, мы доказали, что если средние значения двух наблюдаемых A и B могут быть измерены для одного и того же квантового ансамбля, то операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют общую систему собственных векторов. Для эрмитовых операторов это эквивалентно условию коммутативности операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в гильбертовом пространстве векторов состояния микросистемы. Доказательство закончено. Случай непрерывного и/или вырожденного спектров читателю предлагается разобрать самостоятельно.

В виде задачи сформулируем не менее важное обратное утверждение.

Задача. Докажите, что из коммутативности операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ следует совместная измеримость наблюдаемых A и B .

На совместную измеримость наблюдаемых A и B можно взглянуть и с формальной математической точки зрения. Из определения (34) следует, что для наблюдаемых A и B должно существовать совместное распределение вероятностей $w(a_j, b_k)$, при помощи которого вычисляются средние значения $\langle A \rangle_\psi$ и $\langle B \rangle_\psi$:

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_j w(a_j, b_k) a_j \quad \text{и} \quad \langle B \rangle_\psi = \sum_k w(a_j, b_k) b_k.$$

Известная из теории вероятностей **теорема Нельсона** утверждает, что две наблюдаемые A и B имеют совместное распределение вероятностей $w(a_j, b_k)$ во всех состояниях $|\psi\rangle$ тогда и только тогда, когда соответствующие им операторы коммутируют, то есть $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Выше мы фактически доказали теорему Нельсона при помощи физических соображений.

Задача. Проведите полное доказательство теоремы Нельсона.

Теперь ответим на вопрос о максимальном количестве совместно измеримых наблюдаемых, характеризующих данную микросистему. Очевидно, что если имеются наблюдаемые $A, B, C, D, \dots$, то максимальный набор будет соответствовать максимальному количеству попарно коммутирующих операторов. Например, пусть $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, $[\hat{A}, \hat{C}] = 0$ и $[\hat{B}, \hat{C}] = 0$, но $[\hat{C}, \hat{D}] \neq 0$. Тогда максимальный набор наблюдаемых составят A, B и C , а любой вектор состояния может быть разложен по базису $|a, b, c\rangle$. Заметим, что для многих задач базис можно выбрать не единственным образом. Действительно, пусть дополнительно $[\hat{A}, \hat{D}] = 0$ и $[\hat{B}, \hat{D}] = 0$. Тогда альтернативный набор наблюдаемых включает в себя величины A, B и D . Этот набор продуцирует базис $|a, b, d\rangle$.

Задача. Найдите связь между базисами $|a, b, c\rangle$ и $|a, b, d\rangle$.

Задача. В гильбертовом пространстве даны три оператора $\hat{A}, \hat{B}$ и $\hat{C}$, удовлетворяющие условиям $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ и $[\hat{A}, \hat{C}] = 0$. Следует ли из первых двух равенств, что $[\hat{B}, \hat{C}] = 0$?

8. Описание прохождения линейно поляризованного света через призму Николя в формализме квантовой механики

В этом разделе мы вернемся к задаче, с которой начали построение аксиоматики квантовой механики: задаче о прохождении линейно поляризованного света через призму Николя (см. рис. 4). Из раздела 2 мы знаем, как эта система может быть рассмотрена с классической волновой и корпускулярной точек зрения. Теперь рассмотрим эту же систему с точки зрения квантовой теории.

Система рис. 4 представляет собой типичную двухуровневую систему. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ ортонормированные векторы $|e\rangle$ и $|o\rangle$ образуют базис, по которому с точностью до общей нефизической (и ненаблюдаемой) фазы $e^{i\delta_e}$ (см. соответствующее обсуждение в параграфе 5.2) может быть разложено любое состояние $|\gamma(\alpha)\rangle$ линейно поляризованного света:

$$|\gamma(\alpha)\rangle = \cos \alpha |e\rangle + \sin \alpha e^{i\delta} |o\rangle.$$

В самом общем виде оператор интенсивности можно записать как

$$\hat{I}_i = I_e \hat{P}_e + I_o \hat{P}_o = \hat{I}_e + \hat{I}_o,$$

где I_e и I_o — собственные значения оператора $\hat{I}$, отвечающие собственным векторам $|e\rangle$ и $|o\rangle$ соответственно; $\hat{P}_e$ и $\hat{P}_o$ — проекторы на эти состояния; $\hat{I}_e$ и $\hat{I}_o$ — операторы интенсивности необыкновенного и обыкновенного лучей. Чтобы найти значения I_e и I_o , надо привлечь дополнительные физические соображения. Известно, что если на призму Николя падает пучок фотонов, поляризованных под углом α к оптической оси призмы (описывается вектором состояния $|\gamma(\alpha)\rangle$), то среднее значение интенсивности необыкновенного луча, вышедшего из призмы, равно $I_i \cos^2 \alpha$, а обыкновенного — $I_i \sin^2 \alpha$. При помощи Постулата №5 и формулы (35) эти условия можно записать следую-

щим образом:

$$\begin{cases} \langle I_e \rangle_{\gamma(\alpha)} = \langle \gamma(\alpha) | \hat{I}_e | \gamma(\alpha) \rangle = I_i \cos^2 \alpha \\ \langle I_o \rangle_{\gamma(\alpha)} = \langle \gamma(\alpha) | \hat{I}_o | \gamma(\alpha) \rangle = I_i \sin^2 \alpha \end{cases} . \quad (44)$$

Задача. Показать, что условия (44) ведут к следующим выражениям для операторов $\hat{I}_e$, $\hat{I}_o$ и $\hat{I}_i$:

$$\begin{aligned} \hat{I}_e &= I_i \hat{P}_e, \\ \hat{I}_o &= I_i \hat{P}_o, \\ \hat{I}_i &= I_i \hat{1}. \end{aligned} \quad (45)$$

Если выбрать базис, в котором вектор $|e\rangle$ записан в виде столбца $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а вектор $|o\rangle$ — в виде столбца $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то любое состояние $|\gamma(\alpha)\rangle$ в таком базисе имеет вид $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\delta} \end{pmatrix}$. Операторам необыкновенного и обыкновенного лучей соответствуют матрицы

$$\hat{I}_e = I_i \hat{P}_e = I_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{I}_o = I_i \hat{P}_o = I_i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Поэтому такое представление называется **матричным**, или **энергетическим**, представлением. Отметим, что в матричном представлении вычисление среднего сводится к хорошо известному из линейной алгебры перемножению векторов и матриц. Например,

$$\begin{aligned} \langle I_e \rangle_{\gamma(\alpha)} &= \langle \gamma(\alpha) | \hat{I}_e | \gamma(\alpha) \rangle = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha, & \sin \alpha e^{-i\delta} \end{pmatrix} I_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\delta} \end{pmatrix} = I_i \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Задача. Вычислить $\langle I_o \rangle_{\gamma(\alpha)}$.

Внимательный читатель, несомненно, заметил сходство между матричным представлением и волновым описанием прохождения линейно поляризованного света через призму Николя, которое мы разбирали в параграфе 2.1. Это сходство не случайно, ведь в данном представлении *математическое выражение* для вектора состояния $|\gamma(\alpha)\rangle$ с точностью до коэффициента совпадает с записью вектора напряженности электрического поля $\vec{E}_i(t)$. Оба вектора несут информацию о поляризации начального пучка света. Следовательно, интенсивности необыкновенного и обыкновенного лучей должны выражаться через компоненты этих векторов. Необходимые компоненты выделяются при действии на векторы $|\gamma(\alpha)\rangle$ и $\vec{E}_i(t)$ проекционными операторами (или матрицами необыкновенного и обыкновенного лучей в терминах параграфа 2.1) $\hat{P}_e \equiv \hat{\mathcal{I}}_e$ и $\hat{P}_o \equiv \hat{\mathcal{I}}_o$.

Однако вектор состояния $|\gamma(\alpha)\rangle$ гораздо более универсальный объект, чем вектор напряженности $\vec{E}_i(t)$. Действительно, вектор состояния $|\gamma(\alpha)\rangle$ никак не привязан к тому, что свет — это волна. С помощью разложения $|\gamma(\alpha)\rangle$ по базису можно вычислить вероятность регистрации обыкновенного или необыкновенного фотона в ситуации, когда плотность пучка фотонов столь мала, что в каждый конкретный момент между поляризатором и призмой находится только один фотон (сравните с экспериментом Бибермана–Сушкина–Фабриканта [21]). Но в классической физике вычисление такой вероятности (и то, для достаточно интенсивных пучков, в которых можно пренебречь флуктуациями числа фотонов) — прерогатива корпускулярного подхода из параграфа 2.2. В таком подходе вектора $\vec{E}_i(t)$ просто не существует как физического понятия.

Таким образом, на базе концепции вероятности и обобщения обычного координатного пространства до гильбертова пространства состояний квантовая механика объединила два понятия «волна» и «частица», различных с точки зрения макроскопического мира, в одно универсальное понятие «микросистема». В качестве синонима термину «микросистема» в литературе по квантовой механике употребляются термины «микрочастица» или «микрообъект». Эти тер-

мины не очень удачны, поскольку на подсознательном уровне заставляют представлять себе любую микросистему в виде классической точки или шарика, что не только неверно, но и вредно! Довольно часто подобные наивные «шарико-частичные» представления могут привести к неверным выводам относительно поведения микросистем.

Задача. Для более глубокого понимания отличия аксиом квантовой механики от наивного «шарико-частичного» представления попробуйте истолковать все полученные выше аксиомы квантовой физики сначала в волновом, а затем в корпускулярном подходе. Покажите, что волновой подход не может быть согласован с проекционным постулатом М. Борна, а корпускулярный подход пасует перед принципом суперпозиции²⁸.

Вернемся к вопросу о возможности приготовления квантовых ансамблей при помощи макроприборов. В данном разделе таким макроприбором выступал поляризатор. Из падающего на него неполяризованного пучка света он готовил состояния с определенной поляризацией. А узнавали мы об этом, когда подвергали данное состояние измерению при помощи призмы Николя. То, что интенсивность необыкновенного луча при разных значениях угла между оптической осью поляризатора и оптической осью призмы всегда подчинялась закону $\cos^2 \alpha$, а интенсивность обыкновенного луча — закону $\sin^2 \alpha$, как раз и говорит о том, что прошедший поляризатор пучок имеет одну и ту же поляризацию в любой момент времени. Работу николя можно независимо проверить при помощи других оптических приборов. И так далее. Если в конце концов находится макроприбор, в правильной работе которого мы не имеем ни малейших сомнений, то мы должны согласиться, что при помощи макроскопического поляризатора можно готовить наборы совершенно одинаковых микроскопических состояний с заранее известными свойствами. Это рассуждение проходит в случае, если все макроскопические приборы абсолютно идеальные. Но в реальной жизни так не бывает.

²⁸ На самом деле решение данной задачи уже содержится в разных параграфах учебного пособия. Но нам представляется полезным, чтобы читатель свел вместе всю эту информацию и еще раз осознал глубину, общность и красоту аксиоматики квантовой теории.

Наконец, обозначим тут один тонкий вопрос, более подробный разбор которого отложим до будущих учебных пособий. Насколько вероятностный подход и вероятностные предсказания присущи микромиру и микрообъектам? Любый читатель, внимательно изучивший данное пособие, без колебаний ответит, что без вероятностного подхода квантовая механика вообще не может состояться как наука, поскольку только вероятностная интерпретация совместима с принципом суперпозиции и проекционным постулатом М. Борна. Но быть может, символы измерения Швингера, принцип суперпозиции и проекционный постулат отражают лишь тот факт, что макроприборы слишком грубы для изучения микромира, а квантовая механика покорно смиряется с такой грубостью? Быть может, если бы наши приборы оказались более чувствительными, то с их помощью мы бы смогли измерить некоторые дополнительные «тонкие» характеристики микросистемы, знание которых позволило бы нам создать полностью детерминистскую теорию микромира в духе ньютоновской механики? Подобный подход носит название **концепции скрытых параметров** в квантовой механике [22]. В настоящее время он не имеет канонического решения, а значит, у вас, дорогой читатель, есть шанс сделать фундаментальный вклад в квантовую теорию²⁹.

²⁹ Отметим, что в параграфе 2.2 мы один раз неявно уже пользовались концепцией скрытых параметров, когда попытались заменить фотоны, обладающие векторной поляризацией, на фотоны со скалярными поляризациями двух типов, которые якобы приготавливаются поляризатором. Сделано это было как раз для того, чтобы избавиться от неожиданно появившихся фундаментальных вероятностей в угоду классическому детерминизму.

9. Некоторые следствия из принципа суперпозиции

В настоящем разделе мы приведем несколько элегантных результатов, которые следуют из принципа суперпозиции (26). Эти результаты помогут как глубже понять сам принцип, так и проникнуться парадоксальной красотой квантовой теории.

9.1. «Простое» классическое истолкование принципа суперпозиции

Начинающие изучать квантовую теорию, как правило, еще находятся в плену классических представлений и индуцированного этими представлениями «здорового смысла». Такие люди часто пытаются интерпретировать принцип суперпозиции (26) следующим, логичным с их точки зрения, образом. Заранее подчеркнем, что такая интерпретация *глубоко ошибочна*. Ниже в данном разделе мы приведем эксперименты, которые эту «классически логичную» интерпретацию опровергают.

Теперь сформулируем саму интерпретацию. Возьмем только одну микросистему. Конечно, мы не знаем, в каком из возможных состояний $|a_j\rangle$ данная конкретная микросистема **на самом деле**³⁰ находится **до измерения**. И мерой нашего незнания служит то, что мы не приписываем этой микросистеме конкретное состояние $|a_j\rangle$, а в духе классической статистической физики говорим, что микросистема может быть описана при помощи разложения (26). При этом с вероятностью w_j следует ожидать, что микросистема находится именно в состоянии $|a_j\rangle$. То есть в предложенной трактовке измерение переводит наше незнание об истинном состоянии системы в точное знание этого состояния. Очередной раз подчеркнем, что такая трактовка Постулатов №3 и №4 **принципиально ошибочна!** Откуда это следует?

Во-первых, несостоятельность предложенной выше трактовки ясно видна из проведенного в разделе 2 анализа прохождения поляризованных фотонов

³⁰ Вот он, типичный стиль мышления «классического» физика! Если вы хотите постичь квантовый мир, то отучайтесь от подобных детерминистических формулировок.

через призму Николя. Напомним, что при объяснении этого эксперимента на основе классического корпускулярного подхода в параграфе 2.2 мы уже пытались встать на ту точку зрения, что каждый фотон еще до взаимодействия с николем находился в состоянии с определенной поляризацией. И пришли к противоречию.

Во-вторых, если принять предложенную выше трактовку принципа суперпозиции, то становятся невозможными опыты по интерференции и дифракции одиночных микрочастиц, аналогичные экспериментам А. Тономуры с коллегами [23] и Бибермана–Сушкина–Фабриканта [21].

Задача. С помощью принципа суперпозиции дайте качественные объяснения явлениям интерференции и дифракции.

Задача. Проследите связь между опытом Бибермана–Сушкина–Фабриканта и правильной трактовкой Постулатов №3 и №4.

В-третьих, существует очень красивый прямой эксперимент, который доказывает, что до измерения каждая отдельная микросистема находится в состоянии $|\psi\rangle$, а макроприбор производит редукцию этого состояния к одному из возможных макроскопически различимых состояний $|a_j\rangle$. Но прежде чем приступить к описанию этого эксперимента, нам надо построить теорию простейшего делителя света — полупрозрачного зеркала — и на основе этой теории дать матричное описание интерферометра Маха–Цандера.

9.2. Математическое описание полупрозрачного зеркала

Теорию полупрозрачного зеркала удобно строить в прямоугольной декартовой системе координат. Пусть такое зеркало расположено перпендикулярно плоскости (xy) , проходит через начало координат и повернуто под углом 45° к оси x , как показано на рис. 17. Введем дополнительное упрощение: падающие на зеркало фотоны могут лететь только вдоль оси x и/или вдоль оси y . В первом случае припишем падающему фотону вектор состояния $|x\rangle$. Во втором — вектор состояния $|y\rangle$. Поскольку зеркало тонкое, а угол падения равен углу отражения, то падающий вдоль оси x фотон с некоторой вероятностью прохо-

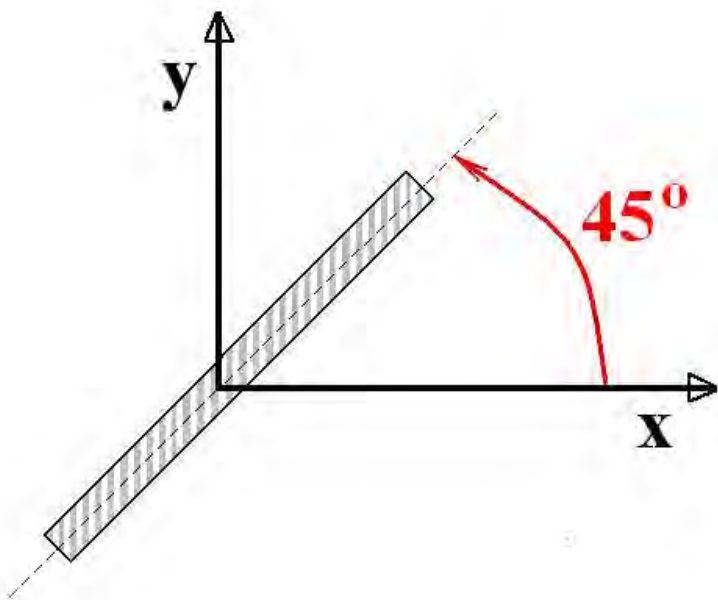


Рис. 17: Схематическое изображение полупрозрачного зеркала, расположенного перпендикулярно плоскости (xy) и под углом 45° к оси x

дит зеркало по оси x (чему отвечает вектор состояния $|x'\rangle$), а с некоторой — отражается вдоль оси y (сопоставим такому состоянию вектор $|y'\rangle$). Эта ситуация показана на рис. 18. Векторы $|x\rangle$ и $|y\rangle$ образуют базис в пространстве состояний падающих фотонов. Удобно записать эти векторы в виде столбцов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответственно³¹.

³¹Обратите внимание на аналогию с описанием состояний необыкновенного и обыкновенного лучей из раздела 8!

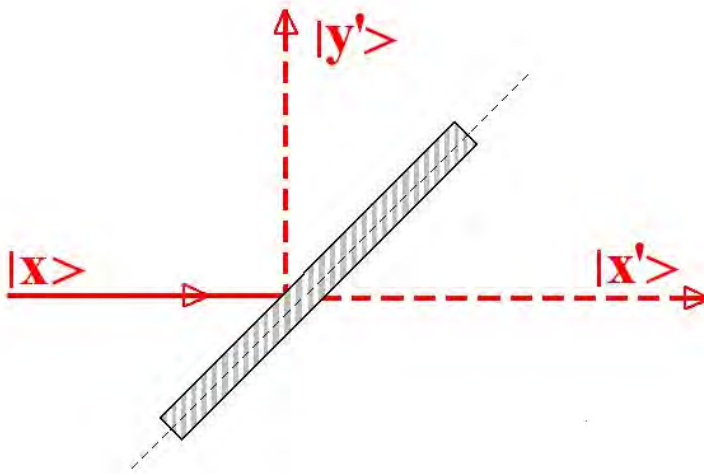


Рис. 18: Схематическое изображение работы полупрозрачного зеркала, когда на него падает фотон в состоянии $|x\rangle$

Задача. Докажите, что состояния $|x'\rangle$ и $|y'\rangle$ образуют базис в пространстве состояний фотонов, которые провзаимодействовали с полупрозрачным зеркалом.

Указание. В дополнение к фотону, падающему на зеркало вдоль оси x , рассмотрите фотон, который падает на зеркало вдоль оси y . Воспользуйтесь рис. 19.

Векторам $|x'\rangle$ и $|y'\rangle$ также удобно сопоставить столбцы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пусть полупрозрачное зеркало устроено так, что вероятности прохождения фотона сквозь зеркало и отражения от зеркала равны между собой. Такое зеркало переводит вектор $|x\rangle$ в вектор $|\text{fin } 1\rangle$, который следующим образом может быть разложен по базису $|x'\rangle$ и $|y'\rangle$:

$$|\text{fin } 1\rangle = \frac{|x'\rangle + e^{i\alpha}|y'\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (47)$$

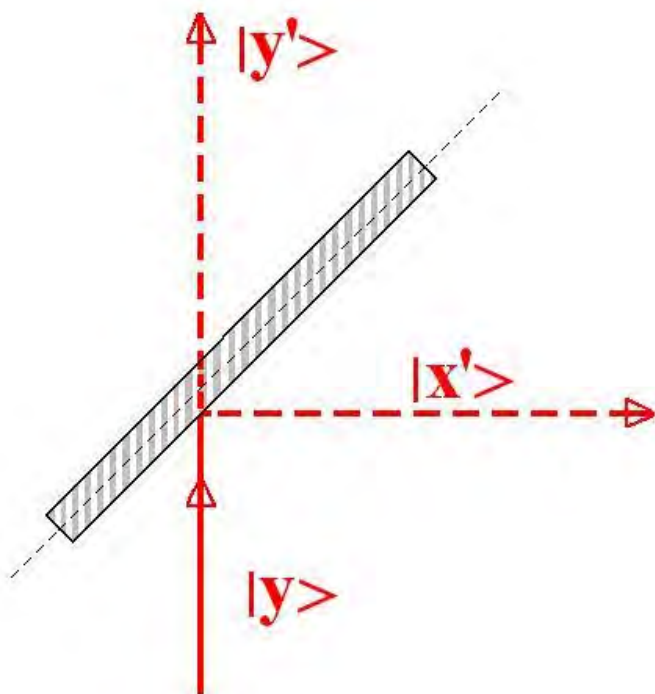


Рис. 19: Схематическое изображение работы полупрозрачного зеркала, когда на него падает фотон в состоянии $|y\rangle$

Множитель $1/\sqrt{2}$ возник из условия нормировки $\langle \text{fin } 1 | \text{fin } 1 \rangle = 1$ и условия равенства вероятностей прошедшего и отраженного состояний; α — неизвестная относительная действительная фаза. Ее еще требуется определить из дополнительных соображений.

Задача. Покажите, что в тех же самых предположениях относительно вероятностей прохождения и отражения вектор состояния $|y\rangle$ переводится зеркалом в вектор:

$$|\text{fin } 2\rangle = \frac{e^{i\beta} |x'\rangle + |y'\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (48)$$

Оператор полупрозрачного зеркала обозначим через $\hat{R}$. Согласно приведенным выше предположениям этот оператор действует следующим образом:

$$|\text{fin } 1\rangle = \hat{R} |x\rangle \quad \text{и} \quad |\text{fin } 2\rangle = \hat{R} |y\rangle. \quad (49)$$

В выбранном базисе оператор $\hat{R}$ является матрицей размерности 2×2 , которая может быть записана в виде

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\beta} \\ e^{i\alpha} & 1 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Задача. При помощи формул (47), (48) и условия (49) докажите, что матричная форма оператора $\hat{R}$ в базисе $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ задается выражением (50).

Из условия нормировки $\langle \text{fin } 1 | \text{fin } 1 \rangle = 1$ и $\langle \text{fin } 2 | \text{fin } 2 \rangle = 1$ и выражения (49) следует, что матрица $\hat{R}$ обязана быть унитарной (покажите это самостоятельно!).

Задача. Прямыми вычислениями проверьте, что унитарность матрицы $\hat{R}$ требует выполнения следующего условия на фазы α и β :

$$\alpha + \beta = \pi + 2\pi n, \quad (51)$$

где n — произвольное целое число от нуля до бесконечности.

Решения при разных значениях n должны быть физически эквивалентны. Поэтому мы можем ограничиться только случаем $n = 0$. Поскольку с физической точки зрения направления $|x\rangle$ и $|y\rangle$ ничем не отличаются одно от другого, то без потери общности можно выбрать $\alpha = \beta$. Тогда $\alpha = \beta = \pi/2$.³²

³²Заметим, что сделанный нами выбор фаз α и β не единственен. Можно отказаться от условия равенства фаз и взять, например, $\alpha = \pi$, а $\beta = 0$. Главное, чтобы сумма фаз удовлетворяла соотношению (51).

Следовательно, матрица полупрозрачного зеркала имеет вид

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

а векторы состояний $|\text{fin } 1\rangle$ и $|\text{fin } 2\rangle$ записываются как

$$\begin{aligned} |\text{fin } 1\rangle &= \frac{|x'\rangle + i|y'\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \\ |\text{fin } 2\rangle &= \frac{i|x'\rangle + |y'\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (53)$$

9.3. Интерферометр Маха–Цандера

Схема интерферометра Маха–Цандера показана на рис. 20. Фотон в состоянии $|x\rangle$ падает на полупрозрачное зеркало A . Зеркало расщепляет фотон. Имеется два пути ABC и ADC , по которым фотон может попасть к точке C . В этой точке находится второе полупрозрачное зеркало, за которым стоят два счетчика фотонов ФЭУ $_x$ и ФЭУ $_y$. Для дальнейшего существенно, что зеркало C можно либо оставлять на месте, либо удалять уже *после* того, как фотон прошел точку A , но еще *до* того, как он долетел до точки C . Это будет важно в следующем параграфе, где мы используем уже знакомую читателям идею отложенного выбора Д. Уилера для проверки реальности принципа суперпозиции. Зеркала B и D полностью отражающие.

Прежде всего заметим, что путем подбора световодов с разными показателями преломления оптические длины ℓ_{ABC} и ℓ_{ADC} можно сделать различными.

Рассмотрим конфигурацию интерферометра Маха–Цандера, когда полупрозрачное зеркало C не убрано. Фотон, прошедший полупрозрачное зеркало A , находится в состоянии $|A_{in}\rangle = \hat{R}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x'\rangle + i|y'\rangle)$, которое полностью аналогично состоянию $|\text{fin } 1\rangle$ предыдущего параграфа. Это состоя-

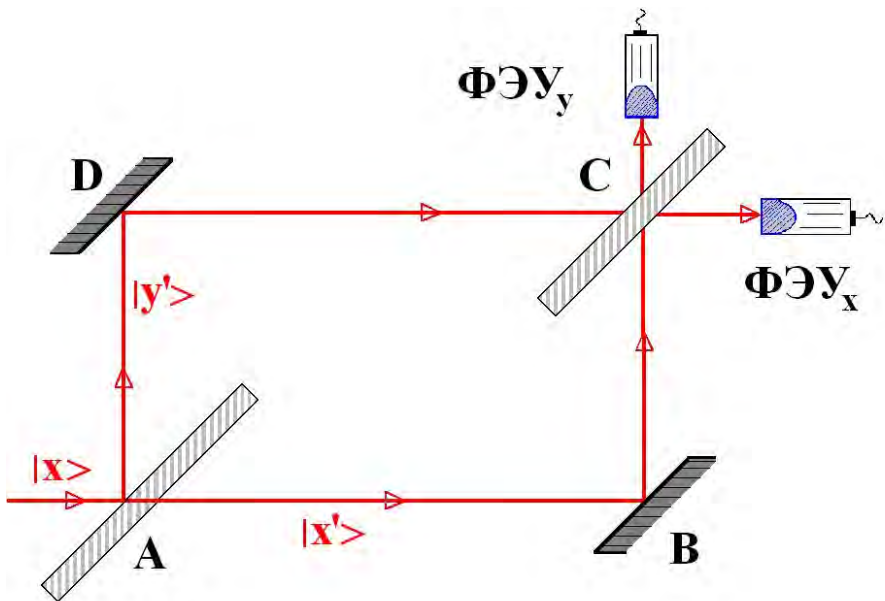


Рис. 20: Схема интерферометра Маха–Цандера

ние претерпевает эволюцию во времени, прежде чем фотон достигнет точки C . Квантовомеханическое уравнение для такой эволюции мы напишем только после изучения свойств нестационарного уравнения Шредингера. Однако, если предположить, что фотон распространяется по световоду как свободная частица, то временная эволюция состояний $|x'(t)\rangle$ и $|y'(t)\rangle$ должна описываться волной де Бройля вида $e^{-i\omega t}$. Пусть ℓ — оптическая длина пути, t — время, за которое фотон проходит расстояние ℓ . Обозначим через ω , λ и T — частоту, длину волны фотона и период колебаний соответственно. Тогда $\omega t = \frac{2\pi}{T} \frac{\ell}{c} = 2\pi \frac{\ell}{\lambda}$. При помощи гипотезы де Бройля эволюция состояния $|x'\rangle$ за то время, когда фотон пролетит из точки A в точку C по пути ABC , может быть записана в виде $|x'(t)\rangle = |x'\rangle e^{2\pi i \frac{\ell_{ABC}}{\lambda}}$. Аналогично для состо-

яния $|y'(t)\rangle$. В базисе $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответствующая матрица эволюции состояния должна быть записана как

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \frac{\ell_{ABC}}{\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \frac{\ell_{ADC}}{\lambda}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{i\Phi_{ABC}} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi_{ADC}} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Наконец, зеркала B и D изменяют направление движения фотона на 90° . В матричном формализме это означает, что состояния, соответствующие верхним компонентам двухкомпонентных столбцов, должны переходить в нижние, и наоборот. Подобную перестановку можно совершить с помощью антидиагональной матрицы

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Таким образом, состояние фотона, прошедшего интерферометр Маха–Цандера с двумя полупрозрачными зеркалами A и C , можно записать в виде

$$|C_{in}\rangle = \hat{R} \hat{M} \hat{Z} |A_{in}\rangle = \hat{R} \hat{M} \hat{Z} \hat{R} |x\rangle. \quad (56)$$

Еще раз напомним читателям, что первым в формуле (56) действует самый правый оператор $\hat{R}$, который описывает прохождение фотоном полупрозрачного зеркала A . Затем фотон распространяется по оптическим путям и отражается от зеркал. Этот процесс описывается при помощи произведения операторов $\hat{M}$ и $\hat{Z}$. Наконец, самый левый оператор $\hat{R}$ в (56) описывает работу второго полупрозрачного зеркала C .

Заметим, что операторы $\hat{M}$ и $\hat{Z}$ коммутируют между собой (проверьте это!). Поэтому все равно, в каком порядке их применять. По той же причине мы не разбиваем, например, оптический путь ABC на два отрезка AB до зеркала B и BC после зеркала B и не ставим каждому из таких путей в соответствие свой оператор, а обходимся общим для всего пути оператором $\hat{Z}$.

Последнее очевидное предположение, при котором получена формула (56), заключается в том, что временем прохождения света через полупрозрачные зеркала A и C можно пренебречь.

Введем новое обозначение $\Phi = \Phi_{ABC} - \Phi_{ADC}$ для разности фаз, которая появляется при прохождении фотоном двух различных оптических путей в интерферометре.

Задача. Покажите, что в терминах разности фаз Φ формула (56) имеет вид

$$|C_{in}\rangle = i e^{i(\Phi_{ABC} + \Phi_{ADC})/2} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Отсюда сразу следует, что вероятность зарегистрировать фотон при помощи ФЭУ _{x} равна $\cos^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)$. А для ФЭУ _{y} эта вероятность составляет $\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)$. Очевидно, что эти вероятности не могут зависеть от конкретного выбора фаз α и β в (51).

Задача. Получите тот же самый результат для вероятностей, не делая конкретного выбора величин фаз α и β , а считая только, что они связаны соотношением (51).

9.4. Экспериментальная проверка принципа суперпозиции

Теперь у нас есть все необходимые знания, чтобы описать одно из самых красивых подтверждений принципа суперпозиции. Этот эксперимент стал развитием опыта по доказательству корпускулярной природы фотонов [24], выполненного А. Аспе, П. Гренджером и Д. Роджером. В эксперименте использовался источник одиночных фотонов на основе возбужденных состояний атома кальция (рис. 21). Возбуждение создавалось при помощи двух лазеров с длинами волн $\lambda_K = 404$ нм и $\lambda_D = 581$ нм. Затем переход с возбужденного s -уровня на промежуточный p -уровень ($4p^2\ ^1S_0 \rightarrow 4s4p\ ^1P_1$) сопровождался излучением фотона с длиной волны $\lambda_1 = 551,3$ нм. Этот фотон регистрировался счетчиком PM_1 (рис. 22), который давал сигнал всей установке быть готовой к

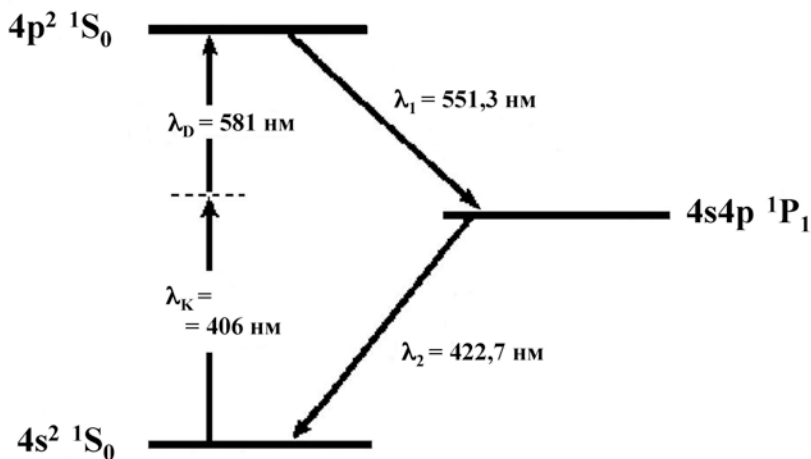


Рис. 21: Схема уровней энергии источника одиночных фотонов на основе атомов кальция

регистрации второго фотона с длиной волны $\lambda_2 = 422,7 \text{ нм}$, который должен появиться за счет перехода с промежуточного p -уровня в основное s -состояние ($4s4p \ ^1P_1 \rightarrow 4s^2 \ ^1S_0$). Сигнал готовности действовал в течение времени $\tau = 2\tau_s$, где $\tau_s = 4,7 \text{ нс}$ — время жизни промежуточного p -уровня. Такой выбор времени τ дает оптимальное соотношение сигнала к шуму в рассматриваемом эксперименте.

В эксперименте по доказательству корпускулярной природы фотонов одиночный фотон с длиной волны λ_2 (или, что тоже самое, частотой ν_2) падает на полупрозрачное зеркало BS , после чего может быть зарегистрирован либо счетчиком PM_r , либо счетчиком PM_t . Собственно, стремление частоты совпадения срабатывания счетчиков PM_r и PM_t к нулю при уменьшении потока фотонов является доказательством корпускулярной природы света.

Используя тот же самый кальциевый источник света и абсолютно аналогичную схему отбора одиночных фотонов, А. Аспе с коллегами стали подавать одиночные фотоны не на полупрозрачное зеркало BS , а на полупрозрачное

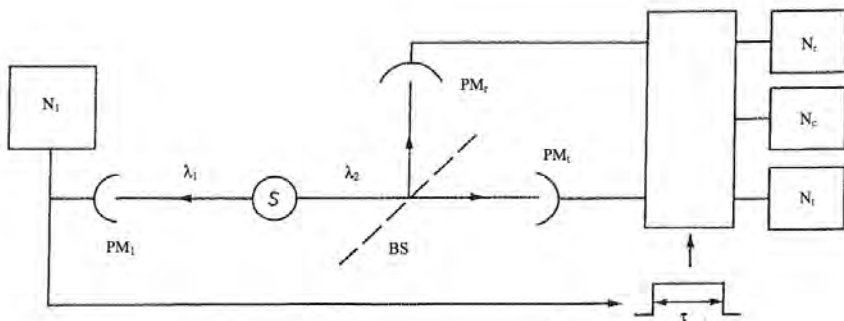


Рис. 22: Принципиальная схема установки А. Аспе по проверке корпускулярной природы света [24]. На рисунке S — источник одиночных фотонов. Остальные обозначения объяснены в тексте

зеркало A , которое является входом интерферометра Маха–Цандера (рис. 20). Это позволило провести экспериментальную проверку принципа суперпозиции.

Имеется две логические возможности. Первая из них отрицает принцип суперпозиции для одиночных фотонов. Тогда после прохождения полупрозрачного зеркала A фотон с вероятностью $1/2$ пойдет по пути ABC (то есть будет находиться в состоянии $|x'\rangle$) или с такой же вероятностью пойдет по пути ADC (то есть окажется в состоянии $|y'\rangle$). Хотя мы не знаем, какой путь выбрал каждый из одиночных фотонов, но в упорстве отрицания принципа суперпозиции можем утверждать, что после прохождения полупрозрачного зеркала C такой фотон с вероятностью $1/2$ попадет в ФЭУ $_x$ и с такой же вероятностью $1/2$ попадет в ФЭУ $_y$. При этом указанные вероятности *не зависят от разности фаз* Φ оптических путей ABC и ADC используемого интерферометра, поскольку каждый фотон идет только по одному из путей.

Вторая возможность признает принцип суперпозиции даже для одиночных фотонов. Тогда после прохождения полупрозрачного зеркала A *каждый фотон* находится в состоянии $|A_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x'\rangle + i |y'\rangle)$, которое является

суперпозицией состояний $|x'\rangle$ и $|y'\rangle$. То есть одиночный фотон *одновременно* распространяется по путям ABC и ADC в интерферометре Маха–Цандера. Таким образом, на полупрозрачном зеркале C одиночный фотон может *интерферировать сам с собой*, и его состояние $|C_{in}\rangle$ на выходе из интерферометра описывается формулой (56). Следовательно, согласно результату (57) необходимо заключить, что вероятности срабатывания $\Phi\mathcal{E}U_x$ и $\Phi\mathcal{E}U_y$ *зависят от разности фаз Φ* .

Аспе с коллегами проверили обе возможности. Для этого они выполнили две серии измерений. В каждой серии 200 раз при помощи механического изменения положения зеркал B и D разность оптических путей ABC и ADC увеличивалась с шагом $\lambda/50$. Таким образом, разность фаз Φ пробегала значение от 0 до 8π . Серии измерений отличались длительностью набора статистики. В первой серии на каждом шаге статистика набиралась 1 секунду, во второй — 15 секунд.

Если принцип суперпозиции для одиночных фотонов не выполняется, то на графике зависимости числа фотонов в каждом из $\Phi\mathcal{E}U$ от числа шагов изменения оптического пути должна получиться горизонтальная прямая. В противном случае должно наблюдаться четыре максимума и четыре минимума. Оригинальный рис. 23 из статьи [24] *однозначно свидетельствует в пользу выполнения принципа суперпозиции для одиночных фотонов*. На рисунке $\Phi\mathcal{E}U_x$ соответствует обозначение $MZ1$, а $\Phi\mathcal{E}U_y$ — обозначение $MZ2$. Видно, что имеется небольшая начальная разность фаз, которая обусловлена прохождением фотонов через полупрозрачные зеркала A и C . Как и следовало ожидать, число отсчетов в каждой из серий пропорционально времени набора статистики, то есть отличается примерно в 15 раз. Это доказывает равномерность испускания одиночных фотонов.

Развитием работы [24] служит работа [25], в которой реализована идея Д. Уилера об отложенном выборе. Эта идея уже возникала в параграфе 2.2, когда при помощи «мысленного эксперимента» мы подвергли критике корпускулярный взгляд на прохождение фотонов через поляризатор. Применительно

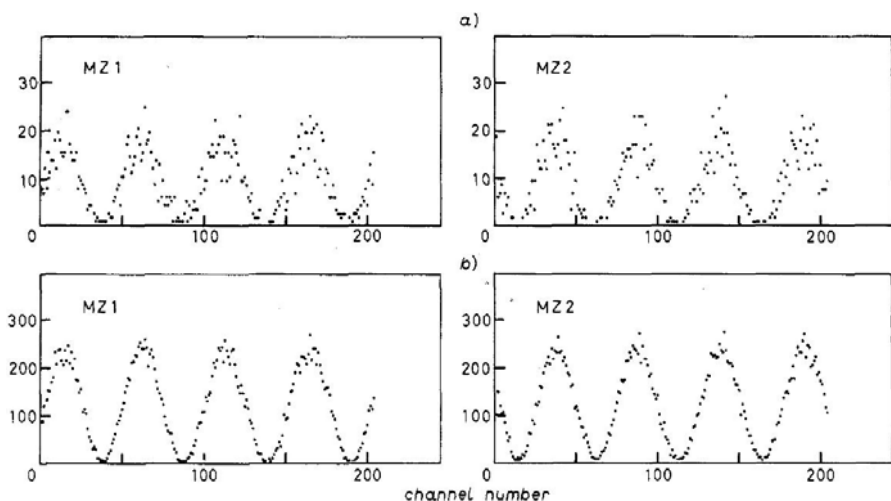


Рис. 23: Зависимость числа отсчетов ФЭУ_x (обозначено как *MZ1*) и ФЭУ_y (обозначено как *MZ2*) от порядкового номера шага изменения разности фаз оптических путей *ABC* и *ADC* интерферометра Маха–Цандера рис. 20. Каждый шаг соответствует увеличению разности оптических путей на величину $\lambda/50$. Представлены две серии измерений: **a)** с длительностью набора статистики на каждом шаге 1 сек.; **b)** с длительностью набора статистики на каждом шаге 15 сек.

к прохождению одиночных фотонов через интерферометр Маха-Цандера идея отложенного выбора выглядит следующим образом. Пусть одиночный фотон проходит первое полупрозрачное зеркало *A*. После этого при помощи некоторого случайного процесса экспериментатор решает, оставлять или убирать полупрозрачное зеркало *C*. Такой выбор делается для нескольких последовательных значений разности фаз Φ . Очевидно, что в отсутствие полупрозрачного зеркала *C* воспроизводится экспериментальная ситуация, которая показана на рис. 22. В этом случае срабатывание ФЭУ_x однозначно говорит, что фотон двигался по пути *ADC*, а срабатывание ФЭУ_y указывает, что фотон

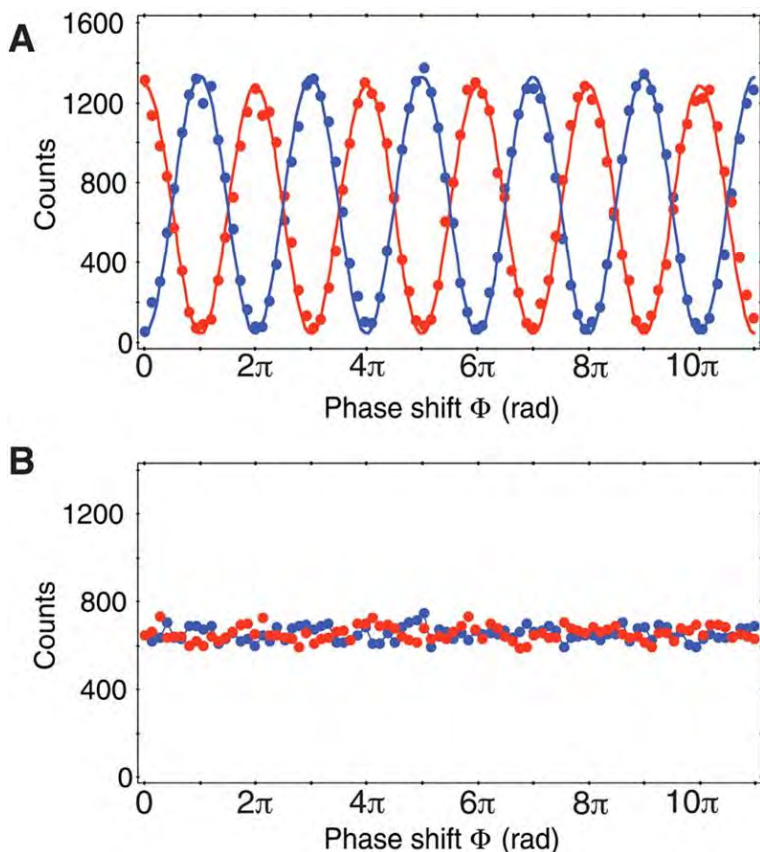


Рис. 24: Зависимость числа отсчетов ФЭУ_x (красная линия (красные точки) или более светлая линия (светлые точки) в черно-белом варианте) и ФЭУ_y (синяя линия (синие точки) или более темная линия (темные точки) в черно-белом варианте) от порядкового номера шага изменения разности фаз оптических путей ABC и ADC интерферометра Маха–Цандера рис. 20. Рис. **A** соответствует случаю, когда полупрозрачное зеркало C оставлено на своем месте. Рис. **B** соответствует случаю, когда полупрозрачное зеркало C убрано. Статистика для каждой точки собиралась примерно 1,9 сек. За это время для обоих положений зеркала C детектируется порядка 2600 фотонов. И они примерно пополам делятся между обеими возможностями **A** и **B**

двигался по пути ABC . Поскольку фотон находится в состоянии $|A_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x'\rangle + i|y'\rangle)$, то частоты срабатывания обоих ФЭУ не зависят от разности фаз Φ и равны друг другу. Если же полупрозрачное зеркало C не убирается, то в точности воспроизводится эксперимент, который был описан выше в настоящем параграфе, и зависимость частоты срабатывания от разности фаз Φ будет иметь место. Изюминка эксперимента в том, что он показывает, что состояние одиночного фотона описывается при помощи принципа суперпозиции не только на выходе, но и на входе интерферометра. То есть, фотон действительно «размазан» по двум возможным путям. На рис. 24 показана зависимость числа отсчетов от разности фаз, когда полупрозрачное зеркало оставлено на месте (**A**) и когда оно убрано (**B**). В первом случае наблюдается интерференция согласно формуле (57). Во втором случае — две практически совпадающие прямые, параллельные оси абсцисс. Еще одно красивое доказательство справедливости принципа суперпозиции для одиночных фотонов.

Согласно проекционному постулату М. Борна, в квантовой теории времени излучения и поглощения фотона считаются много меньше, чем время, необходимое для пролета фотона из точки излучения к точке поглощения. Поэтому на первый (и очень наивный!) взгляд размер экспериментальной установки для проверки принципа суперпозиции с помощью одиночных фотонов не должен влиять на результаты опытов. Однако если одиночный фотон излучается с промежуточного уровня, который имеет конечное время жизни τ_s , то для гарантированного исключения влияния различных пространственно-временных корреляций необходимо сделать так, чтобы с момента излучения фотона до момента его поглощения прошел интервал времени, значительно превосходящий (например, в 10 раз) время жизни промежуточного состояния. Для экспериментов А. Аспе это требование означает, что длина интерферометра Маха–Цандера должна быть порядка $10c\tau_s \approx 15$ м, где c — скорость света в вакууме. Фактический размер установки А. Аспе не превышал нескольких метров. Поэтому опыты Аспе до конца не закрыли вопрос о том, в какой степени результат интерференции одиночного фотона определяется принципом супер-

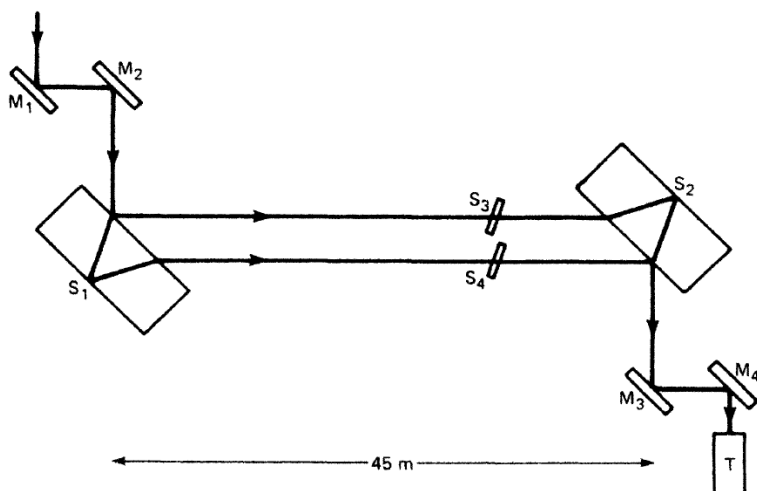


Рис. 25: Схематическое изображение схемы эксперимента с интерферометром Жамена из работы [26]

позиции, а в какой — гипотетическими корреляциями, совместимыми с требованиями специальной теории относительности³³.

Окончательную точку в данном вопросе поставил эксперимент Д. Франсона и К. Потоцкого [26]. В эксперименте был использован двухлучевой интерферометр Ж. Жамена (рис. 25), основными элементами которого являются две плоскопараллельные пластины кремния S_1 и S_2 толщиной 63,5 мм каждая. Расстояние между пластинами составляет $L_{S_1 S_2} = 45$ м, что позволяет исключить влияние любых разумных пространственно-временных корреляций на результаты измерений. При помощи системы зеркал M_1 и M_2 на кремниевую пластину S_1 падают одиночные фотоны длиной волны $\lambda = 585,2$ нм, испускаемые возбужденными уровнями атомов неона. За счет отражения от верхней и нижней граней пластины S_1 фотон может идти к пластине S_2 сразу по двум путям (плечам интерферометра) $S_1 S_3 S_2$ и $S_1 S_4 S_2$. Кремниевые пластинки S_3 и

³³Нелокальные корреляции и взаимодействия, превосходящие скорость света, в данном учебном пособии обсуждаться не будут, поскольку для их введения в теорию нет сколько-нибудь серьезных оснований.

S_4 служат для создания контролируемой разности фаз между плечами интерферометра. В пластине S_2 согласно принципу суперпозиции одиночный фотон интерферирует сам с собой и при помощи системы зеркал $M_3 — M_4$ попадает на фотоэлектронный умножитель T , который чувствителен к регистрации одиночных фотонов.

Очевидно, что скорость счета фотонов R пропорциональна интенсивности и зависит от разности фаз Φ в плечах $S_1 S_3 S_2$ и $S_1 S_4 S_2$ интерферометра Жамена следующим образом:

$$R = a + b \cos^2 \left(\frac{\Phi}{2} \right), \quad (58)$$

где a и b — некоторые константы.

Задача. Создать теорию интерферометра Жамена по аналогии с теорией интерферометра Маха–Цандера из параграфа 9.3.

Задача. При помощи этой теории получить формулу (58).

Экспериментальная зависимость скорости счета R при средней скорости счета $2,4 \text{ с}^{-1}$ показана на рис. 26. Если бы одиночные фотоны не интерферировали сами с собой, а шли бы по одному из путей $S_1 S_3 S_2$ или $S_1 S_4 S_2$, то экспериментальные точки лежали бы на прямой $R = 2,4 \text{ с}^{-1}$, параллельной оси абсцисс. Однако экспериментальная зависимость не имеет ничего общего с константой и находится в прекрасном согласии с предсказаниями формулы (58).

Можно было бы попытаться объяснить картину рис. 26 тем, что в интерферометр Жамена иногда попадает не один, а сразу два фотона, которые интерферируют друг с другом после прохождения пластины S_2 . Вероятность попадания второго фотона в интерферометр при условии, что в приборе уже находится один фотон, можно оценить следующим образом:

$$w_{2\gamma} \sim \frac{L_{S_1 S_2}}{c} R \approx 4 \times 10^{-7}.$$

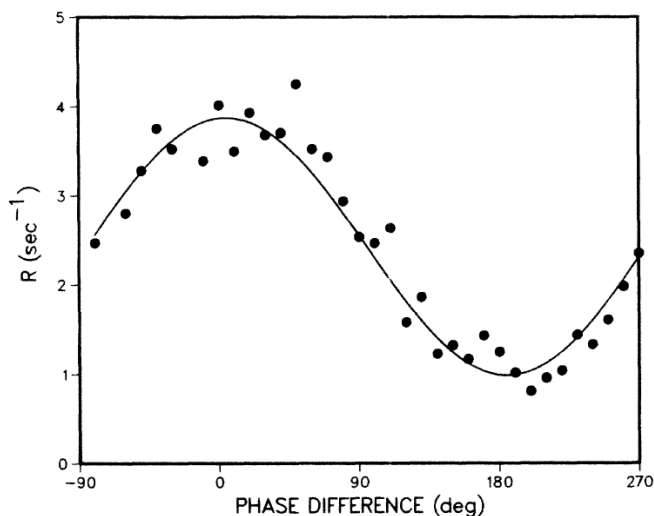


Рис. 26: Экспериментальная зависимость скорости счета R одиночных фотонов в интерферометре Жамена от разности фаз Φ — точки. Один бин на рисунке соответствует 10° . Легко видеть, что зависимость R от Φ хорошо описывается формулой (58) — сплошная линия. Рисунок взят из работы [26]

Следовательно, если отличие экспериментальной зависимости скорости счета R на рис. 26 от константы было бы обусловлено только двухфотонной интерференцией, то мы должны были получить практически постоянную подложку, на фоне которой почти невозможно увидеть эффект изменения скорости счета. Однако на рис. 26 амплитуда изменения величины R сравнима или даже превосходит высоту постоянной подложки. Это доказывает, что основной эффект связан с интерференцией одиночных фотонов.

Таким образом, в работе [26] было получено еще одно экспериментальное подтверждение справедливости принципа суперпозиции для одиночных микробъектов, в данном случае — фотонов.

В заключение этого параграфа еще раз подчеркнем, что главная трудность в восприятии «неклассической физики» как раз и состоит в том, чтобы избе-

виться от «очевидных» и «интуитивно понятных» суждений в областях, где человеческие здравый смысл и жизненный опыт перестают работать. В микромире надо доверять экспериментам, а не классическому здравому смыслу и макроскопическому жизненному опыту. Ведь Вселенная гораздо более разнообразна и многогранна, чем ежедневно окружающая нас нерелятивистская макроскопическая действительность, где приобретались те самые «здравый смысл» и «жизненный опыт»!³⁴ Читателю, склонному к философствованию, на примере осмысления квантовой теории можно предложить поразмышлять о том, в какой мере классическое восприятие человека может поставить принципиальные ограничения на его способность постигнуть Вселенную. Не может ли так случиться, что на какой-то ступени познания Мира у наблюдателя просто закончатся все возможные комбинации классических терминов, так что он не сможет сделать обобщение для перехода на другой, более фундаментальный уровень описания природы?

³⁴В очередной раз сошлемся на авторитет Л.Д. Ландау. Лев Давидович говорил: «Мы способны вычислить даже то, что не в состоянии себе представить».

9.5. Задача о «квантовой бомбе»

Не только прямое измерение характеристик микросистемы при помощи макроприбора, но и существование такого макроприбора, который *никак не реагирует* на состояние квантовой системы, может нести некоторую информацию о микросистеме. Это было продемонстрировано в 1993 году двумя израильскими физиками Авшаломом Элитцуром (Avshalom Elitzur) и Львом Вайдманом (Lev Vaidman) [27].

Рассматривается следующая задача. На военном складе имеется миллион одинаковых бомб. Взрыватели некоторых из них — исправные, а некоторых — неисправные. Известно, что исправный взрыватель срабатывает при поглощении даже одного фотона со 100%-й вероятностью. Неисправный взрыватель с фотоном вообще не взаимодействует, и следовательно, никогда не срабатывает. Требуется изъять со склада **абсолютно все** неисправные бомбы, при этом, сохранив **хоть какое-то** количество исправных бомб не взорвавшимися. Кроме реакции на взаимодействие с фотоном, исправный и неисправный взрыватели больше ничем друг от друга не отличаются.

Очевидно, что если бы фотон был классическим объектом, то задача не имела бы решения. Но квантовая природа фотонов позволяет решить эту задачу.

Поместим бомбу в интерферометр Маха–Цандера так, чтобы ее взрыватель находился в плече AB (рис. 27). Плечи ABC и ADC выберем равной длины. Тогда $\Phi_{ABC} = \Phi_{ABD} = \Phi_0$. На вход интерферометра подадим фотон в состоянии $|x\rangle$.

Если бомба *неисправна*, то интерферометр с бомбой абсолютно не отличается от интерферометра без бомбы. Согласно теории интерферометра Маха–Цандера, которая была развита в параграфе 9.3, после прохождения полупрозрачного зеркала C фотон будет находиться в состоянии

$$|C_{in}\rangle = \hat{R}\hat{M}\hat{Z}\hat{R}|x\rangle =$$

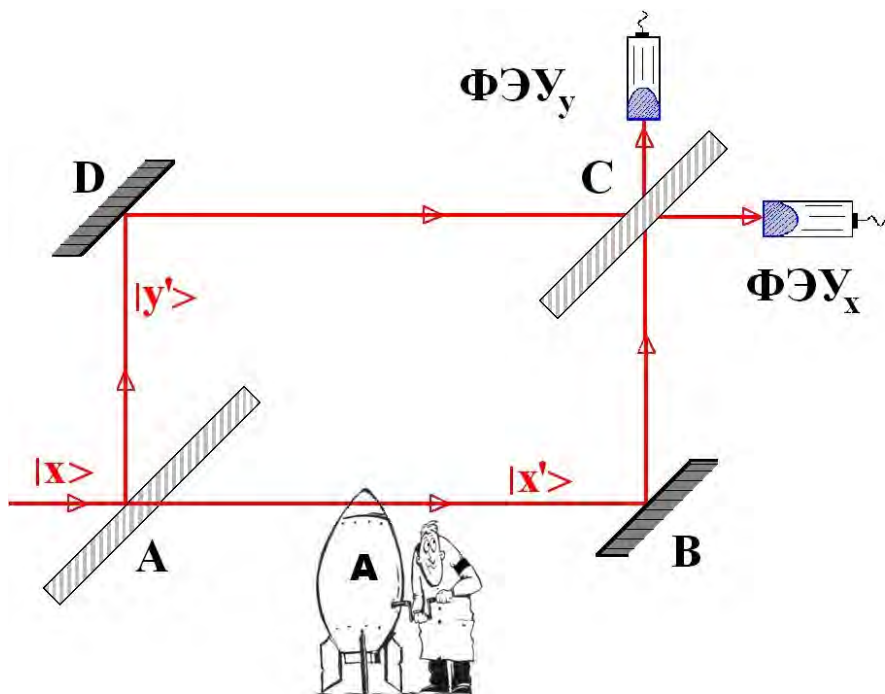


Рис. 27: Схема интерферометра Маха–Цандера с бомбой

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi_0} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= i e^{i\Phi_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, если бомба неисправна, то на выходе интерферометра срабатывает только $\Phi \mathcal{E} \mathcal{Y}_x$, а сама бомба, естественно, не взорвется.

Пусть теперь бомба исправна. После прохождения полупрозрачного зеркала A фотон окажется в состоянии

$$|A_{in}\rangle = \hat{R}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

То есть с вероятностью $w_{ADC} = 1/2$ фотон пойдет по пути ADC , а с вероятностью $w_{ABC} = 1/2$ — по пути ABC . Если фотон пойдет по пути ABC , то он должен попасть на исправный взрыватель, что приведет к взрыву бомбы. Поэтому если бомба исправна, но не взорвалась, то фотон пошел по пути ADC . В этом случае его состояние будет

$$|A_{in}\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i|y'\rangle.$$

На выходе из интерферометра ему соответствует состояние

$$\begin{aligned} |\tilde{C}_{in}\rangle &= i\hat{R}\hat{M}\hat{Z}|y'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi_0} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \\ &= \frac{ie^{i\Phi_0}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из анализа состояния $|\tilde{C}_{in}\rangle$ очевидно, что если бомба исправна, но фотон прошел по пути ADC , то с вероятностью $w_x = 1/2$ сработает ФЭУ $_x$, а с вероятностью $w_y = 1/2$ сработает ФЭУ $_y$. Исправная бомба при этом *НЕ взорвется!* Если сработал ФЭУ $_x$, то ситуация ничем не отличается от ситуации с неисправной бомбой. Поэтому такие бомбы должны быть помечены как неисправные. Если же бомба не взорвалась, но сработал ФЭУ $_y$, то взрыватель бомбы исправен.

Таким образом, при помощи интерферометра Маха–Цандера точно удастся идентифицировать четверть ($w_{ADC} * w_y = 1/4$) исправных бомб, не уничтожив

их. Еще четверть ($w_{ADC} * w_x = 1/4$) исправных бомб не удастся идентифицировать как исправные. А половина исправных бомб ($w_{ABC} = 1/2$) при таком тесте будет уничтожена.

Экспериментально (без бомб, естественно!) данный эффект был проверен и подтвержден через год в работе [28].

После проведения тестирования взрывателей бомб при помощи интерферометра Маха–Цандера, все бомбы можно разделить на три категории. В первую вошли исправные взорвавшиеся бомбы. Во вторую — исправные, но не взорвавшиеся бомбы. И наконец, в третью — неисправные бомбы и некоторое количество невзорвавшихся исправных бомб, которые не были идентифицированы как исправные. Эта последняя категория — самая интересная. Ведь к ней еще раз можно применить описанную выше процедуру выявления исправных бомб. В результате все бомбы опять поделятся на три категории. Теперь можно провести процедуру идентификации исправных бомб еще раз. И так далее.

Задача. Какое максимальное количество невзорвавшихся исправных бомб можно выявить в результате многократного повторения процедуры тестирования взрывателей при помощи интерферометра Маха–Цандера?

9.6. Теорема о невозможности клонирования произвольного чистого состояния

Пусть некоторая секретная информация передается от Отважного Разведчика из вражеской страны в наш Самый Главный Штаб при помощи вектора состояния $|\psi\rangle$ ³⁵. Теорема утверждает, что Тайный Враг из любой другой страны, случайно перехвативший *неизвестный ему* вектор состояния $|\psi\rangle$, никогда не сможет создать себе его точную копию так, чтобы о несанкционированном перехвате не узнали в нашем Самом Главном Штабе.

Действительно, чтобы Самый Главный Штаб не догадался о перехвате сообщения, Тайный Враг должен уметь из одного вектора состояния $|\psi\rangle$ делать как минимум два абсолютно идентичных вектора, чтобы одну копию оставить себе для последующей дешифровки, а другую отослать в Самый Главный Штаб, чтобы там не догадались о факте перехвата. Такой процесс называется **клонированием** вектора состояния.

Предположим, что вектор состояния $|\psi\rangle$ можно представить как суперпозицию двух векторов состояния $|\varphi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle$, то есть

$$|\psi\rangle = C_1 |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle.$$

Далее предположим, что процедура клонирования существует. Пусть эта процедура из произвольного вектора состояния $|\phi\rangle$ и другого «пустого» вектора состояния $|0\rangle$ делает две копии вектора $|\phi\rangle$, то есть

$$|\phi\rangle |0\rangle \rightarrow |\phi\rangle |\phi\rangle.$$

С одной стороны, мы можем применить процедуру клонирования непосредственно к вектору $|\psi\rangle$. Это дает

$$|\psi\rangle |0\rangle \rightarrow |\psi\rangle |\psi\rangle =$$

³⁵Конкретную технику создания вектора $|\psi\rangle$, несущего заданную информацию, методы ее передачи, приема и расшифровки мы обсуждать не будем.

$$\begin{aligned}
&= (C_1 |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle) \times (C_1 |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle) = \\
&= C_1^2 |\varphi_1\rangle |\varphi_1\rangle + C_2^2 |\varphi_2\rangle |\varphi_2\rangle + \\
&+ C_1 C_2 (|\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle + |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle).
\end{aligned} \tag{59}$$

С другой стороны, гипотетическую операцию клонирования можно применить к каждому из векторов линейной комбинации. В этом случае

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle |0\rangle &= C_1 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle |0\rangle \rightarrow \\
&\rightarrow C_1 |\varphi_1\rangle |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle |\varphi_2\rangle.
\end{aligned} \tag{60}$$

Если операция клонирования является самосогласованной, то результат (59) должен совпадать с результатом (60). Очевидно, что из-за наличия дополнительного интерференционного слагаемого в (59) совпадение обоих способов клонирования состояния $|\psi\rangle$ возможно только при условии $C_1 = C_2 = 0$. Во всех остальных случаях операция клонирования не согласуется с принципом суперпозиции, то есть с Постулатом N3. Это доказывает теорему о невозможности клонирования чистого состояния.

Хотя рассуждения, которые приводят к доказательству теоремы, достаточно просты и очевидны, сама теорема была доказана только в 1982 году. То есть более чем через пятьдесят лет после создания квантовой механики! А результат произвел на современников столь большое впечатление, что был опубликован в журнале «Nature» [29]. В англоязычной литературе теорема о невозможности клонирования чистого состояния получила название «No-cloning theorem». Она стала родоначальницей целого ряда теорем о запрете определенных действий в рамках квантовой теории (так называемые «No-go theorems»). Еще одна теорема из этого списка будет доказана в разделе 9.7.

Задача. Обобщите теорему о невозможности клонирования на произвольное число копий вектора $|\psi\rangle$, если этот вектор в свою очередь представляет собой суперпозицию произвольного числа векторов состояния.

При доказательстве теоремы можно дополнительно учесть вектор состояния макроприбора, при помощи которого происходит измерение свойств микросистемы. Пусть до измерения состояние макроприбора описывалось вектором $|A_0\rangle$. После измерения состоянию макроприбора будет соответствовать вектор $|A_\phi\rangle$, который зависит от конечного состояния микросистемы $|\phi\rangle$.

Задача. Доказать, что невозможен процесс

$$|A_0\rangle |\phi\rangle |0\rangle \rightarrow |A_\phi\rangle |\phi\rangle |\phi\rangle.$$

Подсказка Разложите вектор $|\psi\rangle$ в суперпозицию двух состояний $|\varphi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle$. Затем покажите, что $|A_\psi\rangle \sim |A_{\varphi_1}\rangle \sim |A_{\varphi_2}\rangle$. Тогда доказательство сведется к предыдущему.

В формулировке теоремы о невозможности клонирования ключевую роль играет тот факт, что вектор состояния $|\psi\rangle$ *неизвестен* (или *произволен*, что, по-сути, одно и то же). Известный вектор клонировать можно³⁶. Например,

пусть $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — известный вектор. В качестве стандартного «пустого» вектора $|0\rangle$ выберем вектор³⁷ $|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, который известен *a priori*. Тогда

$|\psi\rangle |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, и унитарное преобразование $\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ переводит состояние $|\psi\rangle |0\rangle$ в клонированное состояние $\frac{1}{\sqrt{2}} |\psi\rangle |\psi\rangle$.

Задача. Проверьте последнее утверждение самостоятельно.

Если известен вектор состояния $|\psi\rangle$, то можно найти ортогональные ему векторы. То есть эти векторы тоже известны, и следовательно, их можно кло-

³⁶Можно, но абсолютно бессмысленно. Действительно, зачем Тайному Врагу копировать сообщение, содержание которого он и так знает?

³⁷Обратите внимание на терминологию! «Пустой вектор» не всегда означает «нулевой вектор»! Но для данной иллюстрации удобно выбрать «пустой» вектор, совпадающий с нулевым.

нирывать наряду с вектором $|\psi\rangle$. Более того, клонирование может осуществляться одним и тем же унитарным оператором. Действительно, пусть $\hat{U}$ — искомый унитарный оператор. Рассмотрим два состояния $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$, для которых осуществляется операция клонирования. Тогда:

$$\begin{aligned}\hat{U}|\psi\rangle|0\rangle &= |\psi\rangle|\psi\rangle; \\ \hat{U}|\varphi\rangle|0\rangle &= |\varphi\rangle|\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Теперь скалярно умножим одно равенство на другое. В результате получим:

$$|\langle\psi|\varphi\rangle|^2 = \langle 0|\langle\psi|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\varphi\rangle|0\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle\langle 0|0\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle.$$

То есть необходимо решить уравнение $|x|^2 = x$, где $x = \langle\psi|\varphi\rangle$. Имеется два решения. Первое: $x = 1$, что ведет за собой равенство $|\varphi\rangle \equiv |\psi\rangle$. Второе: $x = 0$, которое означает, что $|\varphi\rangle = |\psi^{(\perp)}\rangle$. Таким образом, наше утверждение доказано.

Задача. Проверьте, что вектор $|\psi^{(\perp)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ортогональный вектору $|\psi\rangle$ из рассмотренного выше числового примера, может быть клонирован при помощи того же унитарного преобразования $\hat{U}$.

На первый взгляд может показаться, что теорема о невозможности клонирования произвольного чистого состояния также запрещает копирование любой информации на макроскопическом уровне, что явно противоречит нашему повседневному жизненному опыту. Однако даже самые маленькие макроскопические объекты, с которыми мы имеем дело в повседневной жизни, содержат не менее 10^{20} микрочастиц. Эти микрочастицы непрерывно взаимодействуют между собой и с окружающим миром. Поэтому если два макрообъекта кажутся нам одинаковыми, то на самом деле это не так. Векторы состояния почти всех частиц, образующих один макрообъект, хоть немного, но отличаются от векторов состояния микрочастиц, которые составляют другой макрообъект. Поэтому векторы состояний даже абсолютно похожих с виду макрообъектов

(например, двух одинаковых жестких дисков) с точки зрения квантовой теории совершенно различны. Более того, эти векторы состояний практически ортогональны друг другу³⁸. Следовательно, перенос информации с одного жесткого диска на другой с точки зрения квантовой физики не является процессом клонирования и не попадает под юрисдикцию теоремы о запрете клонирования³⁹.

Теорема о невозможности клонирования позволяет под новым углом зрения взглянуть на концепцию ансамблей в квантовой механике. Напомним, что согласно проекционному постулату М.Борна в каждом отдельном измерении происходит случайная редукция вектора состояния $|\psi\rangle$ к одному из макроскопически различимых состояний $|a_j\rangle$. Стандартный вывод из проекционного постулата гласит, что если у нас имеется только одна микросистема, приготовленная в неизвестном состоянии, то после измерения этой системы мы абсолютно ничего не можем сказать о ее начальном состоянии. Необходимо много одинаково приготовленных квантовых систем (ансамбль), над каждой из которых проводится измерение. И только на основе серии измерений можно высказать суждение о структуре неизвестного начального состояния.

Но, может быть, все-таки существует какая-нибудь «магическая» последовательность измерений, которой можно подвергнуть уникальное неизвестное состояние $|\psi\rangle$, чтобы сделать утверждение об этом состоянии? Просто мы еще не смогли такую последовательность открыть. Нетрудно заметить, что подобная «магическая» последовательность, если бы она действительно существовала, эквивалентна процедуре клонирования неизвестного чистого состояния. А это, как мы доказали выше, невозможно. Таким образом, только при помощи квантовых ансамблей и проведения однократных измерений над каждым

³⁸Чтобы почувствовать это, предположим, что скалярное произведение векторов состояния i -й частицы первого макрообъекта и соответствующей ей i -й частицы второго макрообъекта не превосходит 0.999999999. Тогда скалярное произведение векторов состояния двух макрообъектов не превосходит величины $(0.999999999)^{10^{20}} \approx 10^{-4342944819}$. То есть даже при ничтожном отличии векторов состояния микрочастиц, вектора состояния макрообъектов оказываются практически ортогональными друг другу!

³⁹Но может попасть под действие законов о защите интеллектуальной собственности.

из членов ансамбля можно изучать неизвестные квантовые состояния. Похоже, что другого пути нет.

Задача. Сформулируйте аргументы «за» и аргументы «против» существования вектора состояния Вселенной как целого.

Теорема о невозможности клонирования произвольного чистого состояния является хорошим примером, как первые принципы квантовой теории можно применить к решению вполне жизненных задач. На основе доказанной выше теоремы (пусть читателей не обманывает ее шуточная формулировка!) в настоящее время бурно развивается прикладная наука — **квантовая криптография**, основной задачей которой является создание каналов передачи информации, защищенных от подслушивания. Такие каналы могут найти широкое применение не только в военной, но и в коммерческой сфере. В последнее время также ведутся активные экспериментальные исследования по созданию методов квантовой защиты денежных банкнот от подделки на основе теоремы о невозможности клонирования. Предполагается, что в банкноты будут включать элементы чистых квантовых состояний, которые созданы по определенному алгоритму. Поэтому денежные знаки принципиально невозможно будет подделать даже самым искусным мошенникам.

В конце параграфа без приведения доказательства дадим ответ на вопрос, который, хотя и далеко выходит за рамки данного учебного пособия, но является одним из ключевых для практического использования теоремы о невозможности клонирования. Именно: можно ли клонировать произвольное смешанное состояние? Поскольку любое смешанное состояние является набором чистых состояний, то из соображений банальной эрудиции можно заключить, что произвольное смешанное состояние клонировать невозможно. Это правильный ответ. Однако строгое доказательство данного утверждения сложно и существенно опирается на результаты квантовой теории информации (так называемая «No-broadcast theorem») [30]. Хотя нельзя клонировать неизвестное квантовое состояние, но приближенное копирование смешанного квантового состояния осуществимо. Это впервые было показано в работе [31].

9.7. Теорема о невозможности уничтожения копии произвольного чистого состояния

В разделе 9.6 была доказана теорема о невозможности клонирования (произвольного) чистого состояния. Для этой теоремы существует, в некотором смысле, обратная теорема о невозможности уничтожения одной из копий (произвольного) чистого состояния («No-deleting theorem»). Теорема была сформулирована в 2000 году и ее доказательство опубликовано в журнале «Nature» [32]. Условие теоремы гласит, что если имеются две копии неизвестного чистого состояния, то невозможно безвозвратно удалить одну из копий, чтобы другая осталась нетронутой, то есть невозможен процесс

$$|\phi\rangle |\phi\rangle \rightarrow |\phi\rangle |0\rangle.$$

Для доказательства рассмотрим некоторое чистое состояние

$$|\psi\rangle = C_1 |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle,$$

которое разложено по базису $|\varphi_i\rangle$ в двумерном гильбертовом пространстве. Коэффициенты C_1 и C_2 подчиняются стандартному условию нормировки

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1.$$

Для придания смысла принципу суперпозиции дополнительно потребуем, чтобы $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$. В остальном коэффициенты C_1 и C_2 являются абсолютно произвольными.

Предположим, что существует процедура уничтожения одной из копий произвольного чистого состояния. Тогда применим эту процедуру к вектору $|\psi\rangle$. Получим

$$|\psi\rangle |\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle |0\rangle \rightarrow C_1 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle |0\rangle. \quad (61)$$

Теперь будем рассматривать $|\psi\rangle$ как линейную комбинацию $|\varphi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle$ и применим процедуру уничтожения к произведению линейных комбинаций. Тогда получим

$$\begin{aligned} |\psi\rangle |\psi\rangle &= C_1^2 |\varphi_1\rangle |\varphi_1\rangle + C_2^2 |\varphi_2\rangle |\varphi_2\rangle + \\ &+ C_1 C_2 (|\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle + |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle) \rightarrow \\ &\rightarrow C_1^2 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2^2 |\varphi_2\rangle |0\rangle + \sqrt{2} C_1 C_2 |\Phi\rangle, \end{aligned} \quad (62)$$

где $|\Phi\rangle$ — некоторое вспомогательное состояние, которое не должно зависеть от коэффициентов C_1 и C_2 .

Найдем, при каких условиях выражения (61) и (62) совпадают. Решаем уравнение:

$$\begin{aligned} \text{const} \times (C_1 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle |0\rangle) &= \\ = C_1^2 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2^2 |\varphi_2\rangle |0\rangle + \sqrt{2} C_1 C_2 |\Phi\rangle. \end{aligned}$$

Оно превращается в тождество, если $\text{const} = C_1 + C_2$ и

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) |0\rangle.$$

Задача. Докажите истинность данного утверждения.

Заметим, что если $\text{const} = 0$ (то есть, $C_1 = -C_2$), то результаты (61) и (62) невозможно согласовать друг с другом и процедура уничтожения становится противоречивой. Таким образом, например, копию состояния

$$|\chi^{(1)}\rangle = \left| \psi \left(C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle)$$

уничтожить нельзя.

Теперь рассмотрим уничтожение одной из копий чистого состояния

$$|\psi^{(\perp)}\rangle = C_2^* |\varphi_1\rangle - C_1^* |\varphi_2\rangle.$$

Задача. Проверить, что $\langle \psi^{(\perp)} | \psi \rangle = 0$.

Применим искомую процедуру к самому вектору

$$|\psi^{(\perp)}\rangle |\psi^{(\perp)}\rangle \rightarrow |\psi^{(\perp)}\rangle |0\rangle \rightarrow C_2^* |\varphi_1\rangle |0\rangle - C_1^* |\varphi_2\rangle |0\rangle \quad (63)$$

и к его разложению в суперпозицию

$$\begin{aligned} |\psi^{(\perp)}\rangle |\psi^{(\perp)}\rangle &= (C_2^*)^2 |\varphi_1\rangle |\varphi_1\rangle + (C_1^*)^2 |\varphi_2\rangle |\varphi_2\rangle - \\ &- C_1^* C_2^* (|\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle + |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle) \rightarrow \\ &\rightarrow (C_2^*)^2 |\varphi_1\rangle |0\rangle + (C_1^*)^2 |\varphi_2\rangle |0\rangle - \sqrt{2} C_1^* C_2^* |\Phi\rangle, \end{aligned} \quad (64)$$

где состояние $|\Phi\rangle$ должно быть точно таким же, как и в выражении (62). Для согласования процедур уничтожения (63) и (64) необходимо решить уравнение:

$$\begin{aligned} \text{const} &\times (C_2^* |\varphi_1\rangle |0\rangle - C_1^* |\varphi_2\rangle |0\rangle) = \\ &= (C_2^*)^2 |\varphi_1\rangle |0\rangle + (C_1^*)^2 |\varphi_2\rangle |0\rangle - \sqrt{2} C_1^* C_2^* |\Phi\rangle. \end{aligned}$$

Задача. Докажите, что процедуры (63) и (64) будут согласованы, если выбрать: $\text{const} = C_2^* - C_1^*$.

Исключением является случай, когда $C_2^* = C_1^*$ или $C_1 = C_2$. Для такого выбора констант процедура уничтожения не определена. Поэтому копию состояния

$$|\chi^{(2)}\rangle = \left| \psi \left(C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)$$

невозможно уничтожить, так же как и копию состояния $|\chi^{(1)}\rangle$.

Задача. Покажите, что состояния $|\chi^{(1)}\rangle$ и $|\chi^{(2)}\rangle$ образуют базис в двумерном гильбертовом пространстве.

Если $|\chi^{(1)}\rangle$ и $|\chi^{(2)}\rangle$ являются базисом, то любое состояние $|\phi\rangle$ можно разложить по этому базису:

$$|\phi\rangle = \alpha |\chi^{(1)}\rangle + \beta |\chi^{(2)}\rangle.$$

Для завершения доказательства применим процедуру уничтожения к $|\phi\rangle|\phi\rangle$. С одной стороны она должна давать

$$|\phi\rangle|\phi\rangle \rightarrow |\phi\rangle|0\rangle = \left(\alpha |\chi^{(1)}\rangle + \beta |\chi^{(2)}\rangle\right)|0\rangle.$$

С другой стороны, эта процедура невыполнима, поскольку

$$\begin{aligned} |\phi\rangle|\phi\rangle &= \alpha^2 |\chi^{(1)}\rangle|\chi^{(1)}\rangle + \beta^2 |\chi^{(2)}\rangle|\chi^{(2)}\rangle + \\ &+ \alpha\beta \left(|\chi^{(1)}\rangle|\chi^{(2)}\rangle + |\chi^{(2)}\rangle|\chi^{(1)}\rangle \right) \rightarrow ?, \end{aligned}$$

а уничтожение копий состояния $|\chi^{(1)}\rangle$ и $|\chi^{(2)}\rangle$ невозможно. Таким образом, невозможно уничтожить копию ни одного чистого состояния $|\phi\rangle$ в двумерном гильбертовом пространстве. Анализ многомерного случая аналогичен двумерному. Его мы оставляем читателю. Теорема доказана.

Задача. Как изменится доказательство теоремы о невозможности уничтожения копии произвольного чистого состояния, если принять во внимание вектор состояния $|A_\phi\rangle$ измерительного прибора?

Если уважаемый читатель внимательно прочел этот и предыдущий параграфы и понял все условия, при которых выполняются теоремы о невозможности клонирования и невозможности уничтожения, то он без труда решит следующую задачу.

Задача. Теорема о невозможности уничтожения говорит нам, что состояние $|\phi\rangle|\phi\rangle$ невозможно превратить в состояние $|\phi\rangle|0\rangle$. В то же самое время теорема о невозможности клонирования утверждает, что состояние $|\phi\rangle|\phi\rangle$ нельзя создать из состояния $|\phi\rangle|0\rangle$. Казалось бы, имеется противоречие, поскольку одна из теорем утверждает, что невозможно уничтожить такую систе-

му, про которую вторая теорема говорит, что ее нельзя создать. И наоборот. То есть на первый взгляд одна из теорем (а может быть, обе?) является бессмысленной. Так ли это на самом деле? Или обе теоремы все-таки могут выполняться одновременно?

Подсказка. В качестве первого шага при решении данной задачи покажите, что процедура приготовления квантовых ансамблей не противоречит теореме о невозможности клонирования. Затем поразмышляйте над тем, известно или нет состояние микросистемы в приготовленном квантовом ансамбле. После этого ответ на поставленный в задаче вопрос должен стать очевидным.

9.8. Правила суперотбора

При анализе принципа суперпозиции (26) возникает естественный вопрос: все ли состояния $|\psi\rangle$ в разложении (26) имеют физический смысл и могут быть реализованы на квантовых микросистемах? Или имеются дополнительные ограничения, которые отбирают лишь некоторые из всех математически возможных состояний $|\psi\rangle$? Впервые этот вопрос был поставлен в статье [33]. Там же дан и ответ: не все состояния микросистемы, которые можно записать при помощи принципа суперпозиции, имеют физический смысл и реализуются в Природе.

Рассмотрим простой, но несколько вычурный пример, иллюстрирующий сказанное выше. Пусть имеется одномерный мир на окружности длины L . В таком мире можно ввести оператор координаты $\hat{x}$ с непрерывным набором собственных векторов $|x_j\rangle$ и собственных значений x_j , отвечающих положению одномерной микрочастицы на окружности. Тогда вектор состояния $|\psi(x)\rangle$, отвечающий положению микрочастицы в точке x , может быть записан в виде разложения (26):

$$|\psi(x)\rangle = \sum_j C_j(x) |x_j\rangle.$$

В силу того что данный мир замкнут, должно выполняться интуитивно понятное условие, гарантирующее однозначность описания поведения микроча-

стицы в подобном мире: $|\psi(x+L)\rangle = e^{i\alpha} |\psi(x)\rangle$, где α — действительное число (нефизическая фаза). Это условие накладывает дополнительные (*не следующие из принципа суперпозиции!*) ограничения на коэффициенты $C_j(x)$. Подобные ограничения, которые обусловлены физикой задачи, а не следуют из принципа суперпозиции или любого другого постулата квантовой механики, называются **правилами суперотбора**.

Однако читатель может продолжать сомневаться в реальности правил суперотбора, поскольку приведенный выше пример не имеет прямого отношения к окружающему нас миру. Чтобы переубедить читателя, рассмотрим оператор заряда частицы $\hat{Q}$. Он следующим образом действует на зарядовые состояния электрона $|e^-\rangle$ и позитрона $|e^+\rangle$:

$$\hat{Q} |e^-\rangle = -e |e^-\rangle \quad \text{и} \quad \hat{Q} |e^+\rangle = +e |e^+\rangle,$$

где $e = |e| > 0$ — элементарный заряд. То есть, векторы $|e^-\rangle$ и $|e^+\rangle$ являются собственными векторами оператора $\hat{Q}$, которые образуют двумерное гильбертово пространство зарядов. Имеет ли в этом пространстве какой-либо физический смысл, например, вектор состояния вида $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}} (2|e^-\rangle + 3|e^+\rangle)$? Очевидно, что не имеет, поскольку средний электрический заряд микросистемы, описываемой таким вектором, равен $\langle Q \rangle_\psi = \left(-\frac{4}{13} + \frac{9}{13}\right) e = \frac{5}{13} e$. Однако в природе заряды всех микросистем и микрочастиц (исключая кварки, которые, впрочем, легко можно включить в данный пример непринципиальным изменением определений) кратны $|e|$. Кроме того, частица, которая находится в состоянии $|\psi\rangle$, должна очень нетривиально вести себя в постоянном магнитном поле. С вероятностью $4/13$ она должна вращаться в одну сторону, а с вероятностью $9/13$ — в противоположную. Ничего подобного ни в одном эксперименте не наблюдается. Таким образом, на состояния $|\psi\rangle$ необходимо наложить дополнительные условия, никак не связанные с принципом суперпозиции (26). Именно чтобы в пространстве зарядов векторы состояний физических систем были коллинеарны одному из базисных векторов.

Третий и последний пример, касающийся правил суперотбора, будет тесно связан с определением условной вероятности (33). Пусть монохроматический пучок света низкой интенсивности⁴⁰ проходит сквозь непрозрачный экран с тремя щелями. За этим экраном на некотором расстоянии находится еще один экран или детектор, с помощью которого может наблюдаться интерференционная картина. Схематически такая ситуация показана на рис. 28. Прохождению фотона через первую щель непрозрачного экрана сопоставим базисный вектор $|1\rangle$, через вторую — вектор $|2\rangle$, а через третью — вектор $|3\rangle$. Если пучок достаточно однороден, то вектор состояния фотонов до падения на экран с тремя щелями можно написать в виде

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle).$$

На пути от первого экрана до второго фотоны интерферируют друг с другом. Результат интерференции зависит от взаимного расположения щелей и расстояния между экранами. Предположим, что интерференционная картина на втором экране соответствует вектору состояния

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1\rangle - |2\rangle + |3\rangle),$$

условная вероятность возникновения которой $w(\varphi|\psi) = 1/3$.

Теперь поставим около щели «3» детектор фотонов и переставим экраны так, чтобы вектор состояния $|\varphi\rangle$ не изменился. Принцип суперпозиции, как и любой другой постулат квантовой теории, не запрещает нам это сделать. Тогда с какой вероятностью мы зарегистрируем, что фотон прошел через третью щель? Очевидно, что с вероятностью

$$w_3 = 1 - \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \varphi | (|1\rangle + |2\rangle) \right|^2 = 1 - 0 = 1,$$

⁴⁰ Будем считать, что в каждый момент времени на экран со щелями падает только один фотон.

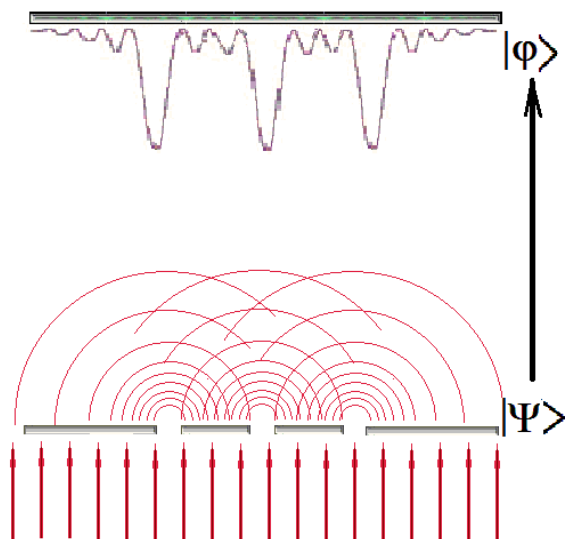


Рис. 28: Схематическое изображение трехщелевого эксперимента с заданными начальным $|\psi\rangle$ и конечным $|\varphi\rangle$ состояниями

то есть фотон всегда будет проходить через щель «3»! Но если фотон всегда проходит через одну щель, как же тогда может возникнуть интерференция? Однако на этом сюрпризы не заканчиваются. Поместим теперь детектор фотонов перед первой щелью и зададимся тем же самым вопросом про вероятность прохождения фотонов. Рассуждая аналогично получим, что $w_1 = 1$! Поскольку суммарная вероятность пройти фотону сквозь любую из трех щелей тоже равна единице, то приходим к очередному парадоксальному выводу, что вероятность прохождения фотона через вторую щель $w_2 = 1 - w_1 - w_3 = -1$. То есть мы получили отрицательную вероятность, которую невозможно измерить экспериментально! Однако никто нам не запрещает поставить детектор фотонов у второй щели. Тогда что он должен показать?

Данный результат можно интерпретировать следующим образом: хотя указанная нами экспериментальная ситуация формально не противоречит ни одному из постулатов квантовой теории, но ни в одном эксперименте она не может быть реализована. Следовательно, должны быть введены дополнительные правила суперотбора, которые бы запрещали такую ситуацию. Например правило, что в природе не возможны такие конфигурации макроприборов, которые приводят к отрицательным вероятностям для наблюдаемых величин⁴¹. Дальнейшее развитие этих рассуждений привело к созданию интерпретации квантовой механики в терминах **совместных историй** [34] и к попытке сформулировать квантовую механику при помощи понятий C^* - **алгебры** [35].

Задача. Докажите, что векторы состояния $|1\rangle$, $|2\rangle$ и $|3\rangle$ образуют базис.

Задача. Прямым вычислением найдите $w(\varphi|\psi)$, w_1 и w_2 .

⁴¹Заметим, что в результате вычисления для одновременно ненаблюдаемых величин совместные вероятности в квантовой механике могут получиться отрицательными. Но такие вероятности не могут быть измерены по определению, а потому не имеют никакого физического смысла.

Список литературы

- [1] П. Дирак, «Принципы квантовой механики», М. «Наука», 1979 и все последующие издания.
- [2] Д.И. Блохинцев, «Принципиальные вопросы квантовой механики», М. «Наука», 1987; «Квантовая механика. Лекции по избранным вопросам», М. «Издательство МГУ», 1988.
- [3] Д.В. Сивухин, «Атомная и ядерная физика», т.5 «Общего курса физики», М. «ФИЗМАТЛИТ», 2002.
- [4] Д. Гринштейн, А.Г. Зайонц, «Квантовый вызов. Современные исследования оснований квантовой механики», М. «Интеллект», 2008.
- [5] Н.В. Никитин, П.Р. Шарапова, Н.В. Колотинский, «Сборник задач по квантовой физике», М. «КДУ», 2015.
- [6] Ю. Швингер, «Квантовая кинематика и динамика», М. «Наука», 1992.
- [7] J. Schwinger, «Quantum Mechanics», «Springer», 2001.
- [8] G. Chiribella, G. M. D'Ariano, and P. Perinotti, «Probabilistic theories with purification», Phys. Rev. **A81**, 062348, 2010; G. Chiribella, G. M. D'Ariano, P. Perinotti, «Informational derivation of Quantum Theory», Phys. Rev. **A84**, 012311, 2011.
- [9] Ф. Кемпфер, «Основные положения квантовой механики», М. «Мир», 1967.
- [10] J.J. Sakurai, J.J. Napolitano, «Modern Quantum Mechanics », 2nd Edition, «Addison-Wesley», 2010.
- [11] M. Beck, «Quantum mechanics. Theory and experiment», «Oxford University Press», 2012.

- [12] J.A. Wheeler, In «Quantum Theory and Measurement», ed. by J.A. Wheeler and W.H. Zurek, «Princeton University Press», Princeton NJ, pp. 182-213, 1984.
- [13] К.Р. Поппер, «Логика и рост научного знания», М. «Прогресс», 1983 и многочисленные переиздания.
- [14] Ю.М. Белоусов, В.П. Кузнецов, В.П. Смилга, «Практическая математика», М. «Интеллект», 2009.
- [15] М. Нильсен, И. Чанг, «Квантовые вычисления и квантовая информация», М. «Мир», 2006.
- [16] Дж. Прескилл, «Квантовая информация и квантовые вычисления», М. — И. «РХД — ИКИ», 2011.
- [17] К. Блум, «Теория матрицы плотности и ее приложения», М. «Наука», 1983.
- [18] Р. Фейнман, А. Хибс, «Квантовая механика и интегралы по траекториям», М. «Мир», 1968 и все последующие издания; Ж. Зинн-Жюстен, «Континуальный интеграл в квантовой механике», М. «Физматлит», 2010.
- [19] В.И. Манько, «Обычная квантовая механика без волновой функции», сб. «Фундаментальная оптика и спектроскопия», Вып.1, стр.162, М. ФИАН, 1998; Ю.М. Белоусов, В.И. Манько, «Матрица плотности. Представления и применения в статистической механике», ч.1-2, М. МФТИ, 2004.
- [20] S. Popescu, «Nonlocality beyond quantum mechanics», Nature Physics **10**, pp.264–270, 2014; W. van Dam, «Implausible consequences of superstrong nonlocality», Preprint at <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0501159>, 2005; M. Pawłowski et al., «Information causality as a physical principle», Nature **461**, pp.1101–1104, 2009.

- [21] Л. Биберман, Н. Сушкин, В. Фабрикант, «Диффракция одиночных поочередно летящих электронов», «Доклады Академии наук СССР», т. LXVI, стр.185, 1949; В.Л. Гинзбург, «Из текущей литературы. Диффракция одиночных поочередно летящих электронов», «Успехи физических наук», т. XXXVIII, стр.570, 1949.
- [22] А.И. Ахиезер, Р.В. Половин, «Почему невозможно ввести в квантовую механику скрытые параметры», «Успехи физических наук», т. 107, стр.463, 1972; А.А. Гриб, «Неравенства Белла и экспериментальная проверка квантовых корреляций на макроскопических расстояниях», «Успехи физических наук», т. 142, стр.619, 1984. Обе статьи доступны в электронном виде на сайте «УФН».
- [23] A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, «Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern», Am. J. Phys. **57**, pp.117-120, 1989.
- [24] P. Grangier, G. Roger and A. Aspect, «Experimental Evidence for a Photon Anticorrelation Effect on a Beam Splitter: A New Light on Single-Photon Interferences», Europhys. Lett. **1**, pp.173-179, 1986.
- [25] V. Jacques et al. «Experimental Realization of Wheeler's Delayed-Choice Gedanken Experiment», Science **315**, pp. 966-968, 2007.
- [26] J. D. Franson, K. A. Potocki, «Single-photon interference over large distances», Physical Review A **37**, p.2511, 1988.
- [27] A.C. Elitzur and L. Vaidman, «Quantum mechanical interaction-free measurements», Found. Phys. **23**, pp.987-97, 1993.
- [28] P.G. Kwiat, H. Weinfurter, T. Herzog, A. Zeilinger, and M. A. Kasevich, «Interaction-free Measurement», Physical Review Letters **74**, p.4763, 1995.
- [29] W.K. Wootters, W. Zurek, «A Single Quantum Cannot be Cloned», Nature **299**, pp.802–803, 1982.

- [30] H. Barnum, C. M. Caves, C. A. Fuchs, R. Jozsa, B. Schumacher, «Noncommuting mixed states cannot be broadcast», *Physical Review Letters* **76**, p.2818, 1996.
- [31] V. Buzek, M. Hillery, «Quantum copying: Beyond the no-cloning theorem», *Physical Review A* **54**, p.1844, 1996.
- [32] A.K. Pati and S.L. Braunstein, «Impossibility of Deleting an Unknown Quantum State», *Nature* **404**, p104, 2000.
- [33] G.C. Wick, A.S. Wightman and E.P. Wigner, «The intrinsic parity of elementary particles», *Phys. Rev.* **88**, p.101, 1952.
- [34] R.B. Griffiths, «Consistent Quantum Theory», «Cambridge Un. Press», 2003.
- [35] F. Strocchi, «An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics», 2nd Edition, «World Scientific» , 2008.

Учебное издание

Никитин Николай Викторович

Томс Константин Сергеевич

Фотина Ольга Владиленовна

АКСИОМЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен авторами

Подписано в печать 20.10.2015. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая. Усл. печ. л. 9. Тираж 50 экз. Заказ № .

Издательство: ООО «Книжный Дом Университет». 119234, Россия, г. Москва, а/я 587.

Отпечатано с материалов, предоставленных авторами, в типографии «КДУ». Тел. (495) 638-57-34; <http://www.kdu.ru/> e-mail:

