5. Ключевое предположение о математической природе символов $|\,\psi\,\rangle$

Сделаем основное и самое важное предположение, которое необходимо для построения математического аппарата квантовой механики: *наиболее естественно с математической точки зрения принцип суперпозиции* (22) *и* (23) *реализуется в гильбертовых пространствах, где символы* $|\,\psi\,\rangle$ *и* $\langle\,\psi\,|$ *совпадают с кет- и бра-векторами соответственно*. Тогда символ «$\oplus$» соответствует сложению двух векторов в линейном пространстве, то есть операции «$+$». А символ «$\otimes$» необходимо сопоставить скалярному произведению, то есть считать, что $\langle\, a_j\,|\,\otimes\,|\,\psi\,\rangle \;\equiv\; \langle\, a_j\,|\;\psi\,\rangle$. В этом случае величины C_j и $C_j^\dagger$ представляют собой комплексные числа или функции. Естественно полагать, что эти величины должны быть каким-либо образом нормированы, поэтому из всех возможных линейных пространств для реализации математического аппарата квантовой механики логично выбрать гильбертово пространство.

Симметричные символы измерения Швингера $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}$ в подобной трактовке совпадают с проекционными операторами $\hat{P}_{a_j}$, что делает предположение параграфа 3.5 полностью обоснованным. При этом символы $|\,a_j\,\rangle$ и $\langle\,a_j\,|$ начинают жить «собственной жизнью» независимо друг от друга, разрушая целостность символа измерения $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}$.

Ниже мы сформулируем предположения о математическом формализме квантовой теории в виде постулатов квантовой механики. Прежде чем начать чтение следующих параграфов, рекомендуется освежить в памяти информацию, связанную со свойствами гильбертовых пространств, векторов и линейных операторов.

5.1. Математический формализм квантовой механики. Базовые постулаты

Наши рассуждения о математических структурах, описывающих поведение квантовых объектов, изобиловали «разумными» предположениями и «очевидными» аналогиями. Они подвели нас к выбору математического формализма квантовой теории. В настоящем параграфе этот выбор будет оформлен в виде трех первых аксиом, или постулатов, нерелятивистской квантовой механики. *Справедливость этих постулатов может быть проверена только сравнением предсказаний квантовой теории с экспериментами.* После формулирования необходимых постулатов все предыдущие рассуждения в терминах символов измерения и аналогий между этими символами и проекционными операторами должны быть отброшены за ненадобностью. Они прекрасно сыграли роль «строительных лесов» при создании величественного здания теории микромира. Им на смену придет линейная алгебра и теория операторов.

Постулат №1. *Квантовая система описывается при помощи вектора состояния $|\,\psi\,\rangle$ в конечномерном или бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

Как правило, дополнительно предполагается, что *вектор состояния $|\,\psi\,\rangle$ несет максимально возможное количество информации о свойствах квантовой системы*. Это предположение является до сих пор дискуссионным. Мнения основоположников квантовой механики в этом вопросе разделились. Нильс Бор, Вернер Гейзенберг, Поль Дирак, Макс Борн и многие другие были сторонниками утверждения о максимально возможном количестве информации, в то время как Альберт Эйнштейн, Эрвин Шредингер, Луи де Бройль и некоторые другие — противниками. Отдельные аргументы А. Эйнштейна и его сторонников будут изложены в конце раздела 8. В то же время результаты квантовой теории информации прекрасно согласуются с утверждением о том, что вектор состояния $|\,\psi\,\rangle$ содержит максимально возможное количество информации о квантовой системе.

К сожалению, изучение даже основ квантовой теории информации, которая в настоящее время переживает бурное развитие, далеко выходит за рамки данного пособия. Заинтересовавшимся читателям можно порекомендовать две прекрасные монографии на эту тему [17] и [18]. Первая из двух монографий написана так, что одновременно может рассматриваться как учебник по квантовой теории для желающих изучить эту науку с нуля.

Состояние микросистемы, которое допускает описание в терминах векторов состояния $|\,\psi\,\rangle$, называется **чистым состоянием**. Чистые состояния являются частным случаем так называемых **смешанных состояний**, которые в данном учебном пособии обсуждаться не будут. Отметим только, что смешанные состояния напрямую связаны с символами измерения, а не с их «половинками». Настойчивый и *очень умный* читатель сам может попытаться построить теорию смешанных состояний, или теорию **матрицы плотности**, как она называется в квантовой механике. Менее настойчивый может заглянуть, например, в книгу [19].

Постулат №2. *Состояние микросистемы определяется только направлением вектора $|\,\psi\,\rangle$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, но не длиной самого вектора*. Иначе говоря, состояние микросистемы задается лучом в гильбертовом пространстве.

Этот постулат естественно вытекает из философии символов измерения Швингера, в которой понятие «длины» символа измерения или какой-либо его части не фигурирует. Таким образом, в нашей теории норма вектора состояния $|\,\psi\,\rangle$ является свободным параметром, от которого не должны зависеть физические предсказания теории. Имея в виду дальнейшее развитие теории, удобно положить $||\psi|| = 1$. Отсюда сразу следует, что для любого вектора $|\,\psi\,\rangle$, который описывает физическую систему, выполняется **условие нормировки**

$$\langle\,\psi\,|\;\psi\,\rangle \;=\; 1, \tag{24}$$

где запись «1» означает обычную единицу из поля действительных чисел. Заметим, что после введения Постулата №1 в формуле (17) символы $\tilde{1}$ и $\tilde{0}$ также следует трактовать как обычные единицу и ноль, то есть

$$\langle\,a_i\,|\;a_j\,\rangle \;=\; \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a_i \;\equiv\; a_j; \\ 0, & \text{если} \quad a_i \;\neq\; a_j. \end{cases} \tag{25}$$

Перейдем теперь к принципу суперпозиции, который мы сформулируем в виде следующего постулата.

Постулат №3, или **принцип суперпозиции**. *Пусть некоторая микросистема до измерения описывалась вектором состояния* $|\,\psi\,\rangle$. *И пусть в результате измерения микросистема может переходить в одно из нескольких состояний, которые возможно различить между собой при помощи макроприборов (иначе, макроскопически различимые состояния). Каждому такому состоянию сопоставим вектор* $|\,a_j\,\rangle$. *Тогда* $|\,\psi\,\rangle$ *можно представить в виде линейной комбинации (суперпозиции) состояний* $|\,a_j\,\rangle$ *по формуле*

$$|\,\psi\,\rangle\;=\;\sum_j C_j\;|\,a_j\,\rangle\,, \tag{26}$$

где C_j *— набор комплексных чисел (и/или функций), которые определены через операцию скалярного произведения*

$$C_j = \langle\,a_j\,|\;\psi\,\rangle\,. \tag{27}$$

Задача. Доказать, что формула (27) следует из разложения (26), если принять во внимание два первых постулата квантовой механики и условие (25).

Рассмотрим пример. Когда линейно поляризованный свет проходит через призму Николя, то он разделяется на два макроскопически различимых состояния: необыкновенный и обыкновенный лучи. Поэтому, согласно Постулату №3, вектор состояния $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$ падающего на призму Николя света может быть разложен в суперпозицию

$$|\,\gamma(\alpha)\,\rangle\;=\;C_e(\alpha)\;|\,e\,\rangle\;+\;C_o(\alpha)\;|\,o\,\rangle \tag{28}$$

с комплексными коэффициентами $C_e(\alpha)$ и $C_o(\alpha)$, которые являются функциями угла α.

Задача. Записать принцип суперпозиции для вектора состояния $\langle\,\psi\,|$.

Задача. Записать коэффициенты $C_e(\alpha)$ и $C_o(\alpha)$ через векторы состояний $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$ $|\,e\,\rangle$ и $|\,o\,\rangle$.

Из Постулата №1, Постулата №3 и условия нормировки следует, что эволюция замкнутых квантовых систем во времени задается унитарным оператором. Действительно, если вектор $|\,\psi(t_0)\,\rangle$ полностью описывает состояние квантовой системы в начальный момент времени t_0, то в близкий момент времени $t_0 + \Delta t$ вектор состояния $|\,\psi(t_0 + \Delta t)\,\rangle$ должен определятся действием некоторого оператора $\hat{U}(t_0 + \Delta t, t_0)$ только на вектор состояния $|\,\psi(t_0)\,\rangle$. И это действие должно быть линейно, чтобы удовлетворять принципу суперпозиции, то есть

$$|\,\psi(t_0 + \Delta t)\,\rangle = \hat{U}(t_0 + \Delta t, t_0)\;|\,\psi(t_0)\,\rangle \tag{29}$$

Теперь разобьем промежуток Δt на два промежутка длительностью $\Delta t/2$. Рассуждая аналогично тому, как мы это уже делали выше, можно получит следующие соотношения

$$\begin{aligned} |\,\psi(t_0 + \Delta t/2)\,\rangle &= \hat{U}(t_0 + \Delta t/2, t_0)\;|\,\psi(t_0)\,\rangle \\ |\,\psi(t_0 + \Delta t)\,\rangle &= \hat{U}(t_0 + \Delta t, t_0 + \Delta t/2)\;|\,\psi(t_0 + \Delta t/2)\,\rangle\,. \end{aligned}$$

Подставляя первое равенство во второе получаем, что

$$|\,\psi(t_0 + \Delta t)\,\rangle = \;\hat{U}(t_0 + \Delta t, t_0 + \Delta t/2)\,\hat{U}(t_0 + \Delta t/2, t_0)\;\;|\,\psi(t_0)\,\rangle\,. \tag{30}$$

Из сравнения (29) и (30) находим **групповое свойство**

$$\hat{U}(t_0 + \Delta t, t_0)\;=\;\hat{U}(t_0 + \Delta t, t_0 + \Delta t/2)\,\hat{U}(t_0 + \Delta t/2, t_0),$$

которое для конечных промежутков времени может быть записано в следующем виде

$$\hat{U}(t_2, t_0)\;=\;\hat{U}(t_2, t_1)\,\hat{U}(t_1, t_0) \tag{31}$$

Задача. Обоснуйте справедливость группового свойства (31) для конечных промежутков времени. Чтобы это сделать, разбейте конечные промежутки времени на совокупность бесконечно малых, для которых справедливость группового свойства уже доказана.

При помощи группового свойства можно расширить (29) на конечные промежутки времени. Имеем:

$$| \, \psi(t) \, \rangle = \hat{U}(t, t_0) \; | \, \psi(t_0) \, \rangle \qquad \text{и} \qquad \langle \, \psi(t) \, | \; \psi(t) \, \rangle = 1, \tag{32}$$

откуда сразу следует, что $\hat{U}^{\dagger}(t, t_0) \, \hat{U}(t, t_0) = \hat{1}$, то есть $\hat{U}(t, t_0)$ — унитарный оператор, что и требовалось доказать.

Задача. Обоснуйте справедливость формулы (32).

Поскольку унитарный оператор обратим, то эволюция замкнутой квантовой системы обратима во времени.

Задача. Докажите, что $\hat{U}^{\dagger}(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t, t_0) = \hat{U}(t_0, t)$.

Оператор $\hat{U}(t, t_0)$ носит название **оператора эволюции**. Его связь с уравнением Шредингера и гамильтонианом квантовой системы будет рассмотрена в учебном пособии, посвященном нестационарному уравнению Шредингера.

В самых авторитетных учебниках по квантовой механике, к которым авторы без сомнения причисляют книги [1], [2] и целый ряд других, утверждается, что именно принцип суперпозиции отличает квантовую теорию от классической. Если бы квантовая механика имела единственную формулировку в терминах векторов состояния (так называемая **дираковская формулировка**), то это утверждение можно было бы считать верным. Однако все гораздо сложнее. Вспомним, что векторы состояния появились при «делении пополам» символа измерения, который сам квадратичен относительно таких векторов. Поэтому если формулировать квантовую механику в терминах «неделимых» символов измерения, то неизбежно возникают матрицы плотности (как обобщение проекционных операторов). В теории матрицы плотности принцип суперпозиции теряет все свое изящество и становится довольно искусственной, даже уродливой конструкцией, которую рука не поднимается положить в основания квантовой физики. Более того, существуют формулировки квантовой механики, в которых не появляются ни векторы состояния, ни символы измерения. Это, например, формулировка квантовой механики в терминах **интегралов по траекториям** [20], принадлежащая великому американскому физику-теоретику Р. Фейнману, или интенсивно развивающаяся в последнее время **томографическая формулировка** квантовой механики, основы которой можно найти в работах [21]. Обе формулировки не используют принцип суперпозиции. Невозможно не упомянуть еще два подхода к построению оснований квантовой механики, которые восходят к пионерским работам гениального американского математика Джона фон Неймана. Это **алгебраический подход** и построение формализма квантовой теории при помощи аппарата **квантовой логики**. В обоих подходах принцип суперпозиции играет второстепенную роль. Для начального знакомства с результатами фон Неймана и их современным развитием можно рекомендовать книгу [22].

Если не принцип суперпозиции, то что же отличает квантовый мир от классического? Окончательного ответа на данный вопрос до сих пор не найдено. Однако есть несколько интересных гипотез. Согласно одной из них в квантовом мире максимальная степень корреляции между двумя физическими системами, которые связаны каким-либо законом сохранения (например, законом сохранения полного момента), выше, чем в классическом мире. Пользуясь методами квантовой теории информации, степень корреляции можно найти численно. К сожалению, даже беглое обсуждение этого вопроса потребует от читателя глубокого знания квантовой теории и виртуозного владения ее математическим аппаратом. На данном этапе изучения квантовой механики это не представляется возможным. Но если заинтересовавшийся читатель захочет позже вернуться к вопросу о корреляциях в квантовой физике, то для вхождения в тему ему можно порекомендовать статьи [23]. Какова же роль принципа суперпозиции в этой картине? С помощью принципа суперпозиции в терминах векторов состояния необходимая максимальная степень корреляции между двумя микроскопическими системами может быть достигнута почти автоматически.

5.2. Физический смысл коэффициентов разложения в принципе суперпозиции и понятие условной вероятности

Вернемся, однако, к формулировке квантовой механики в терминах векторов состояния и выясним физический смысл коэффициентов C_j в принципе суперпозиции (26). Для этого продолжим рассмотрение «мысленного эксперимента» на рис. 15. Векторы состояния $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$, $|\,e\,\rangle$ и $|\,o\,\rangle$ удовлетворяют условию нормировки (24), то есть $\langle\,\gamma(\alpha)\,|\;\gamma(\alpha)\,\rangle = \langle\,e\,|\;e\,\rangle = \langle\,o\,|\;o\,\rangle = 1$. Кроме того, векторы $|\,e\,\rangle$ и $|\,o\,\rangle$ подчиняются условию ортогональности (25), которое дает $\langle\,e\,|\;o\,\rangle = \langle\,o\,|\;e\,\rangle = 0$. Тогда с помощью разложения (28) получаем:

$$
\begin{aligned}
1 = \langle\,\gamma(\alpha)\,|\;\gamma(\alpha)\,\rangle \;&=\; |C_e(\alpha)|^2\,\langle\,e\,|\;e\,\rangle + |C_o(\alpha)|^2\,\langle\,o\,|\;o\,\rangle \;+\\
&+\; C_e^*(\alpha)C_o(\alpha)\,\langle\,e\,|\;o\,\rangle + C_o^*(\alpha)C_e(\alpha)\,\langle\,o\,|\;e\,\rangle =\\
&=\; |C_e(\alpha)|^2 + |C_o(\alpha)|^2\,,
\end{aligned}
$$

то есть

$$
|C_e(\alpha)|^2 + |C_o(\alpha)|^2 = 1.
$$

Если оптическая ось поляризатора совпадает с оптической осью призмы, то на николь падает свет, поляризованный параллельно оптической оси призмы. Тогда по физическим соображениям мы ожидаем, что из призмы будет выходить только необыкновенный луч с интенсивностью $I_e = I_i$. Следовательно, в этом случае величину $|C_e(\alpha = 0)|^2$ необходимо положить равной единице, а величину $|C_o(\alpha = 0)|^2$ — равной нулю. Когда оптическая ось поляризатора перпендикулярна оптической оси призмы Николя, то из физики эксперимента мы предсказываем регистрацию только обыкновенного луча с $I_o = I_i$, что на языке векторов состояния эквивалентно условиям $|C_e(\alpha = \pi/2)|^2 = 0$ и $|C_o(\alpha = \pi/2)|^2 = 1$.

Теперь рассмотрим эксперимент, представленный на рис. 15, в терминах фотонов. Пусть N_e — число необыкновенных, а N_o — число обыкновенных фотонов, зарегистрированных каждым из двух ФЭУ. Их сумма — $N_{\gamma(\alpha)}$ — равна числу фотонов, прошедших поляризатор и попавших на призму Николя. Тогда из частотного определения вероятности необыкновенного $w_e(\alpha) = N_e/N_{\gamma(\alpha)}$ и обыкновенного $w_o(\alpha) = N_o/N_{\gamma(\alpha)}$ фотонов находим, что

$$w_e(\alpha) + w_o(\alpha) = 1.$$

Если оптическая ось анализатора параллельна оптической оси призмы Николя, то $w_e(\alpha = 0) = 1$ и $w_o(\alpha = 0) = 0$. В случае когда оптические оси обоих приборов ортогональны, вероятности регистрации необыкновенного и обыкновенного фотонов равны $w_e(\alpha = \pi/2) = 0$ и $w_o(\alpha = \pi/2) = 1$.

При сравнении описания эксперимента рис. 15 в терминах векторов состояния и в терминах фотонов прослеживается очевидная аналогия между величиной $|C_e(\alpha)|^2$ (или $|C_o(\alpha)|^2$) и вероятностью $w_e(\alpha)$ (или $w_o(\alpha)$). Более того, хочется записать, что

$$w_e(\alpha) = |C_e(\alpha)|^2 \qquad \text{и} \qquad w_o(\alpha) = |C_o(\alpha)|^2 .$$

То есть разумно предположить, что в квантовой теории квадраты модулей коэффициентов разложения *нормированного на единицу* вектора состояния $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$ по нормированным векторам состояния необыкновенного $|\,e\,\rangle$ и обыкновенного $|\,o\,\rangle$ лучей дают вероятности $w_e(\alpha)$ и $w_o(\alpha)$ регистрации этих лучей соответствующими макроприборами (в качестве которых на рис. 15 выступает пара ФЭУ).

Задача. Покажите, что в случае если вектор $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$ НЕ нормирован на единицу, а векторы $|\,e\,\rangle$ и $|\,o\,\rangle$ нормированы на единицу, связь между вероятностями и коэффициентами разложения должна иметь вид:

$$w_e(\alpha) = \frac{|C_e(\alpha)|^2}{|C_e(\alpha)|^2 + |C_o(\alpha)|^2} \qquad \text{и} \qquad w_o(\alpha) = \frac{|C_o(\alpha)|^2}{|C_e(\alpha)|^2 + |C_o(\alpha)|^2}.$$

Проверим, не противоречит ли сделанное нами выше предположение о связи вероятностей и квадратов модулей коэффициентов разложения в принципе суперпозиции одному из важнейших свойств вероятности: полная вероятность двух последовательных *независимых* событий равна произведению вероятностей каждого из событий. Для этого рассмотрим «мысленный эксперимент» рис. 16: свет, поляризованный под углом α, падает на призму Николя, которая выделяет из него только необыкновенную компоненту. Затем эта компонента падает на второй поляризатор, оптическая ось которого составляет угол β с оптической осью призмы. Прошедший через поляризатор свет регистрируется ФЭУ.

С точки зрения экспериментатора события, отвечающие прохождению света через николь и прохождению света через второй поляризатор, должны быть независимыми. Поэтому интенсивность света I_f на выходе из второго поляризатора следующим образом связана с интенсивностью света I_i, падающего на призму Николя:

$$I_f \;=\; w_e(\beta)\, w_e(\alpha)\, I_i \;=\; \cos^2\beta\, \cos^2\alpha\, I_i. \tag{33}$$

Теперь рассмотрим тот же самый эксперимент в терминах символов измерения, которые будем отождествлять с проекционными операторами на соответствующие векторы состояния. Поместим николь и поляризаторы в «черный ящик», которому по физике дела должен соответствовать символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_{\beta\,\alpha} \;=\; |\,\gamma(\beta)\,\rangle\,\langle\,\gamma(\alpha)\,|$. С другой стороны, система рис. 16 описывается произведением символов измерения:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{P}}_\beta\,\hat{\mathcal{P}}_e\,\hat{\mathcal{P}}_\alpha \;&=\; |\,\gamma(\beta)\,\rangle\;\big(\langle\,\gamma(\beta)\,|\;e\,\rangle\;\langle\,e\,|\;\gamma(\alpha)\,\rangle\big)\;\langle\,\gamma(\alpha)\,| \;= \\
&=\; C_e^*(\beta)\,C_e(\alpha)\;|\,\gamma(\beta)\,\rangle\,\langle\,\gamma(\alpha)\,| = C_e^*(\beta)\,C_e(\alpha)\,\hat{\mathcal{P}}_{\beta\,\alpha}.
\end{aligned}$$

Поэтому соответствующая вероятность

$$|C_e^*(\beta)\,C_e(\alpha)|^2 = w_e(\beta)\,w_e(\alpha),$$

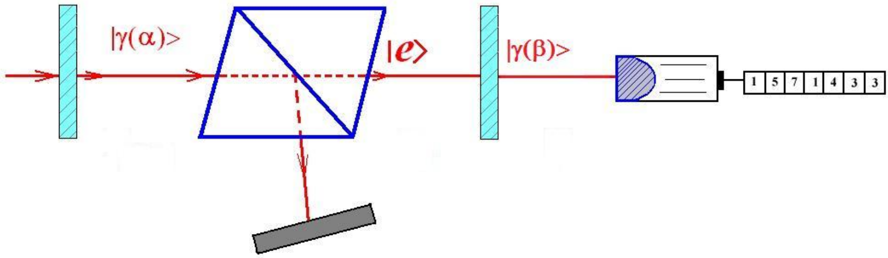

Рис. 16: «Мысленный эксперимент» для проверки свойства перемножения вероятностей двух последовательных независимых событий

то есть равна произведению вероятностей, что находится в полном согласии с правилом вычисления вероятностей независимых событий и формулой (33).

Задача. Используя условие нормировки (24), показать, что коэффициенты C_j разложения (26) удовлетворяют равенству:

$$\sum_j |C_j|^2 = 1.$$

На основании проведенных выше нестрогих, но достаточно убедительных рассуждений мы можем ввести четвертый постулат квантовой механики, который раскрывает физический смысл коэффициентов C_j принципа суперпозиции (26).

Постулат №4, или **постулат о физическом смысле коэффициентов разложения в принципе суперпозиции**. *В условиях Постулата №3 вероятность w_j найти микросистему после измерения в состоянии $|\, a_j \,\rangle$ задается формулой*

$$w_j = |C_j|^2 = |\langle\, a_j \,|\, \psi \,\rangle|^2 = \langle\, \psi \,|\, a_j \,\rangle \, \langle\, a_j \,|\, \psi \,\rangle \,. \tag{34}$$

Коэффициенты C_j в разложении (26) носят название **амплитуд вероятности** нахождения системы в состоянии $|\, a_j \,\rangle$. Этимология данного термина очевидна из формулировки Постулата №4.

В литературе Постулат №4 называют **проекционным постулатом Макса Борна** — по имени немецкого физика-теоретика, который в 1926 году первым предложил вероятностное толкование коэффициентов C_j для принципа суперпозиции (26). Постулат №4 задает алгоритм сравнения предсказаний квантовой механики с экспериментальными результатами, то есть открывает возможность экспериментальной проверки квантовой теории. Это делает квантовую механику научной теорией по К . Попперу [15].

Еще раз подчеркнем (поскольку это крайне важно!), что w_j — это вероятность найти квантовую систему в состоянии $|\, a_j \,\rangle$ **ПОСЛЕ ИЗМЕРЕНИЯ**, а не до измерения. Таким образом, в процессе любого измерения наблюдаемой A происходит «схлопывание» (или иначе — **редукция**) вектора состояния $|\, \psi \,\rangle$ к одному из возможных значений $|\, a_j \,\rangle$. Наблюдатель узнает о факте редукции, когда его макроприбор выдает информацию об измерении одного из возможных значений a_j, принадлежащих спектру наблюдаемой A.

Проекционный постулат автоматически решает вопрос о приготовлении ансамблей квантовых систем в заданном начальном состоянии только при помощи макроприборов. Действительно, проведем множество измерений наблюдаемой A для большого количества микросистем, каждая из которых находится в неизвестном состоянии $\left|\, \psi_k^{(in)} \right\rangle$. По результатам измерения будем отбирать для дальнейшего использования только те микросистемы, в которых было измерено одно и то же значение a_j спектра наблюдаемой A. Тогда согласно Постулату №4 все отобранные микросистемы будут находиться в одинаковых состояниях $|\, a_j \,\rangle$ вне зависимости от того, каково было исходное состояние $\left|\, \psi_k^{(in)} \right\rangle$.

Хотя проекционный постулат явно не содержит параметра времени, но этот постулат можно рассматривать как один из динамических принципов нерелятивистской квантовой механики, поскольку согласно Постулату №4 квантовая система меняет свое состояние при взаимодействии с макроприбором. Другой динамический принцип, который явно описывает эволюцию квантовой системы во времени, носит название **нестационарного уравнения Шредингера**. Он тоже является одним из постулатов квантовой механики и играет в квантовой теории ту же роль, что и второй закон Ньютона в классической механике. Уравнение Шредингера будет всесторонне изучено в одном из следующих учебных пособий. Здесь только отметим, что связь проекционного постулата и уравнения Шредингера представляет собой одну из интригующих, до сих пор удовлетворительно не решенных, проблем квантовой механики.

Задача. Проверить, что если $\hat{P}_{a_j}$ — проекционный оператор на состояние $|\, a_j \,\rangle$, то формулу (34) можно переписать в виде

$$w_j = \left\langle \psi \,\middle|\, \hat{P}_{a_j} \,\middle|\, \psi \right\rangle \equiv \left\langle \hat{P}_{a_j} \right\rangle_{\psi} . \tag{35}$$

Задача. Показать, что в самом общем виде коэффициенты разложения вектора $|\, \gamma(\alpha) \,\rangle$ по базисным состояниям $|\, e \,\rangle$ и $|\, o \,\rangle$ можно записать как $C_e(\alpha) = \cos\alpha\, e^{i\,\delta_e}$ и $C_o(\alpha) = \sin\alpha\, e^{i\,\delta_o}$, где δ_e и δ_o — произвольные действительные числа.

Заметим, что при записи вектора состояния $|\, \gamma(\alpha) \,\rangle$ важны не абсолютные фазы δ_e и δ_o, а только **относительная фаза** $\delta = \delta_o - \delta_e$. Действительно

$$\begin{aligned} |\, \gamma(\alpha) \,\rangle &= \cos\alpha\, e^{i\,\delta_e}\, |\, e \,\rangle + \sin\alpha\, e^{i\,\delta_o}\, |\, o \,\rangle = e^{i\,\delta_e} \Big(\cos\alpha\, |\, e \,\rangle + \sin\alpha\, e^{i\,\delta}\, |\, o \,\rangle \Big) = \\ &= e^{i\,\delta_e}\, |\, \tilde{\gamma}(\alpha) \,\rangle . \end{aligned}$$

Читатель легко может проверить, что с точки зрения всех введенных до сих пор постулатов квантовой механики и правил вычисления вероятностей векторы $|\, \gamma(\alpha) \,\rangle$ и $|\, \tilde{\gamma}(\alpha) \,\rangle$ абсолютно эквивалентны. Эта эквивалентность сохранится и после формулировки остальных постулатов квантовой теории. Если векторы $|\, \gamma(\alpha) \,\rangle$ и $|\, \tilde{\gamma}(\alpha) \,\rangle$ эквивалентны, то это значит, что никакое физическое измерение не сможет их различить, и следовательно, измерить **абсолютную фазу** δ_e.

Поэтому эту фазу обычно называют **нефизической** общей, или абсолютной, **фазой** и полагают равной нулю, чтобы сразу исключить из всех промежуточных вычислений. Сказанное выше легко можно обобщить на разложение произвольного вектора $|\,\psi\,\rangle$ по любому базису $|\,a_j\,\rangle$.

Согласно проекционному постулату М. Борна в процессе измерения микросистемы макроприбором переход из состояния $|\,\psi\,\rangle$ в состояние $|\,a_j\,\rangle$ происходит за время Δt, много меньшее характерного времени срабатывания макроприбора, так что можно считать, что данный переход происходит мгновенно (скачком). Это очень хорошая модель для описания абсолютного большинства измерений в квантовом мире. Вопрос о том, какие состояния проходила микросистема при переходе из состояния $|\,\psi\,\rangle$ в состояние $|\,a_j\,\rangle$, не имеет никакого смысла, поскольку эти промежуточные состояния (если предположить, что они существуют) не могут быть измерены при помощи макроприборов. Тут мы следуем фундаментальному принципу, который был положен В. Гейзенбергом в основание квантовой теории[23]. Необходимость введения подобного принципа обсуждалась в конце параграфа 2.2.

Если читателя не убедили рассуждения о фундаментальных принципах, то для уяснения бессмысленности вопроса о промежуточных состояниях можно предложить, например, аналогию с вопросом «Каково на вкус вдохновение?». Хотя вопрос о вкусе вдохновения не противоречит нормам русского языка, но в реальной жизни он не имеет абсолютно никакого смысла, и ответ на него не может быть получен.

Выражение (35) для вероятности допускает более общую запись при помощи следа двух проекционных операторов:

$$w_j \;=\; \mathrm{Tr}\left(\hat{P}_\psi \hat{P}_{a_j}\right), \tag{36}$$

[23]Напомним, что В. Гейзенберг предложил включать в квантовую теорию только те величины, которые могут быть измерены при помощи макроприборов (наблюдаемые). Этот принцип можно уточнить. При теоретическом описании любого эксперимента можно оперировать только с теми наблюдаемыми, которые могут быть измерены совместно. Условия совместной измеримости наблюдаемых нам еще предстоит изучить в разделе 7.

где $\hat{P}_\psi = |\,\psi\,\rangle\,\langle\,\psi\,|$ — проектор на состояние $|\,\psi\,\rangle$. Отметим, что формула (36) без изменений может быть перенесена на смешанные состояния. Эту формулу удобно доказывать справа налево. Для доказательства запишем след двух проекционных операторов в базисе $|\,a_i\,\rangle$:

$$
\begin{aligned}
\text{Tr}\left(\hat{P}_\psi \hat{P}_{a_j}\right) &= \sum_i \left\langle a_i \middle| \hat{P}_\psi \hat{P}_{a_j} \middle| a_i \right\rangle = \sum_i \langle\, a_i \,|\, \psi \,\rangle\,\langle\, \psi \,|\, a_j \,\rangle\,\langle\, a_j \,|\, a_i \,\rangle = \\
&= \sum_i C_i\, C_j^*\, \delta_{ji} = \sum_i C_j^*\, C_i\, \delta_{ji} = C_j^* C_j = \\
&= \langle\, \psi \,|\, a_j \,\rangle\,\langle\, a_j \,|\, \psi \,\rangle = \left\langle \psi \middle| \hat{P}_{a_j} \middle| \psi \right\rangle = w_j .
\end{aligned}
$$

Скалярное произведение $\langle\, a_j \,|\, \psi\,\rangle$ можно рассматривать как проекцию вектора состояния $|\,\psi\,\rangle$ на базисное состояние $|\,a_j\,\rangle$. Очевидно, что вектор состояния $|\,\psi\,\rangle$ можно спроектировать на любое другое состояние $|\,\varphi\,\rangle$. Тогда величину

$$
w\,(\varphi\,|\,\psi) = |\langle\, \varphi \,|\, \psi\,\rangle|^2 = \text{Tr}\left(\hat{P}_\psi \hat{P}_\varphi\right) \tag{37}
$$

следует трактовать как **условную вероятность** измерения квантовой системы в состоянии $|\,\varphi\,\rangle$, если до этого система находилась в состоянии $|\,\psi\,\rangle$. Такие условные вероятности играют важнейшую роль в квантовой физике.

Задача. Рассмотрим наблюдаемую A, спектр которой состоит всего из двух значений a_1 и $a_2 \neq a_1$. Этим значениям соответствуют базисные векторы $|\,a_1\,\rangle$ и $|\,a_2\,\rangle$. Пусть некоторая квантовая система находится в состоянии

$$
|\,\psi\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\,(|\,a_1\,\rangle + 3\,|\,a_2\,\rangle)
$$

(самостоятельно проверьте правильность нормировки вектора состояния!) . Найти:

а) вероятность измерения значения a_1 наблюдаемой A;

б) вероятность измерения значения a_2 наблюдаемой A;

в) проекционный оператор $\hat{P}_\psi$ на состояние $|\,\psi\,\rangle$;

г) условную вероятность перехода из состояния $|\,\psi\,\rangle$ в состояние

$\left|\,\psi^{(\perp)}\,\right\rangle \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{10}}\,\left(3\,|\,a_1\,\rangle \;-\; |\,a_2\,\rangle\right);$

д) условные вероятности переходов из состояния $|\,\psi\,\rangle$ в состояния $\left|\,\varphi^{(\pm)}\,\right\rangle \;=\; \dfrac{e^{i\delta}}{\sqrt{2}}\,\left(|\,a_1\,\rangle \;\pm\; |\,a_2\,\rangle\right)$, где δ — произвольное действительное число.

В связи с пунктом «**д**» последней задачи имеет смысл еще раз обсудить фундаментальное различие между абсолютной и относительной фазами при записи векторов состояния. Если читатель проделал все вычисления без ошибок, то он должен получить, что $w\left(\varphi^{(+)}\,|\,\psi\right) = 4/5$ и $w\left(\varphi^{(-)}\,|\,\psi\right) = 1/5$. Таким образом, наблюдаемые на эксперименте вероятности не зависят от абсолютной фазы δ, но зависят от того, какой знак выбран между векторами состояния $|\,a_1\,\rangle$ и $|\,a_2\,\rangle$, то есть зависят от величины относительной фазы.