7. Условие совместной измеримости средних значений двух наблюдаемых

В макроскопическом мире влиянием процесса наблюдения (и самого наблюдателя) на состояние наблюдаемой системы практически всегда можно пренебречь. Поэтому в рамках классической теории предполагается возможность измерения любых характеристик макроскопической системы со сколь угодно большой точностью в произвольном порядке. Например, для шарика, скатывающегося вниз по наклонной плоскости, можно измерить сначала его скорость, затем координату, и наконец, момент количества движения. Ничего не изменится, если сначала будет измерена координата шарика, затем — его момент, а при последнем измерении найдена скорость[25].

В параграфе 1.2 приведены качественные рассуждения, которые показывают, что в микромире измерение любой характеристики квантовой системы обязано чрезвычайно сильно менять состояние самой микросистемы. Строго это утверждение можно получить непосредственно из постулатов квантовой теории.

Действительно, приготовим квантовый ансамбль, в котором до измерения каждая микросистема находится в состоянии $|\,\psi\,\rangle$. Далее предположим, что мы хотим измерить среднее значение $\langle\, A\,\rangle_\psi$ наблюдаемой A в этом ансамбле. Пусть для простоты наблюдаемая A обладает конечным невырожденным дискретным спектром a_1, ..., a_n. Для экспериментального нахождения $\langle\, A\,\rangle_\psi$ необходимо сначала взять одну микросистему из ансамбля и измерить значение наблюдаемой для этой микросистемы. Пусть это значение равно a_j. Тогда, согласно принципу суперпозиции и проекционному постулату Макса Борна (постулаты №3 и №4 из параграфов 5.1 и 5.2 соответственно), измерение значения a_j означает, что после измерения данная конкретная микросистема перешла в состояние $|\,a_j\,\rangle$. Аналогичное измерение необходимо проделать с остальными

[25] Если только все три измерения происходят в течение достаточно малого промежутка времени Δt.

микросистемами из ансамбля. Тогда для каждого значения a_j будет найдена вероятность его появления $w_j = N_j/N$, где $N \gg 1$ — полное количество микросистем в ансамбле, совпадающее с полным числом измерений, $N_j \gg 1$ — число измерений, в которых было зарегистрировано значение a_j наблюдаемой A. Среднее значение $\langle\, A \,\rangle_\psi$ легко вычисляется по формуле (38). Однако после измерения $\langle\, A \,\rangle_\psi$ в нашем распоряжении уже не имеется квантового ансамбля из N микросистем в состоянии $|\, \psi \,\rangle$, а имеется n ансамблей, каждый из которых включает в себя $N_j \gg 1$ микросистем в состоянии $|\, a_j \,\rangle$.

Следовательно, в общем случае невозможно измерить среднее значение $\langle\, B \,\rangle_\psi$ наблюдаемой B для *того же самого квантового ансамбля* микросистем, в котором было измерено среднее значение наблюдаемой A [26]. Поэтому для квантовых ансамблей имеет смысл исследовать два вопроса:

1. при каком условии на операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ средние значения наблюдаемых A и B могут быть одновременно измерены для одного и того же квантового ансамбля;

2. как найти полный набор совместно измеримых наблюдаемых для микросистемы с известными (или заданными) свойствами?

На первый вопрос можно дать следующий ответ: *если две наблюдаемые A и B могут быть совместно измерены для одного и того же квантового ансамбля, то соответствующие этим наблюдаемым операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют*, то есть $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$. Это и есть искомое условие на операторы.

Для доказательства рассмотрим квантовый ансамбль микросистем в состоянии $|\, \psi \,\rangle$. Пусть для этого ансамбля необходимо измерить средние значения наблюдаемых A и B. Чтобы не усложнять доказательство, предположим, что обе наблюдаемые имеют конечный дискретный невырожденный спектр.

[26] Обычно вместо словосочетания «вместе измерены для одного и того же квантового ансамбля», говорят о **совместной измеримости** или **одновременной измеримости** наблюдаемых A и B.

Если первым измеряется среднее значение наблюдаемой B, то

$$\langle\, B\,\rangle_\psi \;=\; \sum_j w_j^{(b)}\, b_j. \tag{41}$$

Если же первой измеряется наблюдаемая A, а за ней наблюдаемая B, то среднее значение наблюдаемой A есть

$$\langle\, A\,\rangle_\psi \;=\; \sum_i w_i^{(a)}\, a_i.$$

После измерения наблюдаемой A каждое состояние $|\,\psi\,\rangle$ переходит в состояние $|\,a_i\,\rangle$, которое может быть разложено по базису

$$|\,a_i\,\rangle \;=\; \sum_j c_{ij}\;|\,b_j\,\rangle\,.$$

Поэтому среднее значение наблюдаемой B, полученное после измерения среднего значения наблюдаемой A, может быть записано в виде

$$\langle\, B|A\,\rangle_\psi \;=\; \sum_i \left(w_i^{(a)} \sum_j w_{ij}\, b_j \right) \;=\; \sum_{ij} w_i^{(a)}\, w_{ij}\, b_j, \tag{42}$$

где $w_{ij} \;=\; |c_{ij}|^2 \;=\; |\langle\, b_j \mid \; a_i\,\rangle|^2$. Обозначение $\langle\, B|A\,\rangle_\psi$ означает, что измерение среднего наблюдаемой B происходит при условии, что уже выполнено измерение среднего наблюдаемой A. Похожее обозначение использовалось в разделе 6 для записи условных вероятностей[27].

Если наблюдаемые A и B могут быть измерены для одного квантового ансамбля, то измерение среднего наблюдаемой A не влияет на измерение средне-

[27]Стоит специально обратить внимание читателей, что обозначение $\langle\, B|A\,\rangle_\psi$ не следует путать с весьма похожим по написанию обозначением $\langle\, b \mid \; a\,\rangle$ скалярного произведения двух векторов состояния. Условное среднее $\langle\, B|A\,\rangle_\psi$ несет дополнительный нижний индекс ψ, характеризующий состояние, по которому происходит усреднение. В записи скалярного произведения подобный нижний индекс, очевидно, отсутствует.

го наблюдаемой B, и наоборот: измерение среднего наблюдаемой B не должно влиять на измерение среднего наблюдаемой A. Математически оба утверждения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_{\psi} &= \langle B|A \rangle_{\psi}\,; \\ \langle A \rangle_{\psi} &= \langle A|B \rangle_{\psi}\,. \end{aligned} \tag{43}$$

Учитывая (41) и (42) из первого равенства (43), получаем:

$$w_j^{(b)} = \sum_i w_i^{(a)}\, w_{ij}. \tag{44}$$

Задача. Пользуясь вторым равенством из формулы (43), показать, что

$$w_i^{(a)} = \sum_{\ell} w_{\ell}^{(b)}\, w_{i\ell}. \tag{45}$$

Подставляя (45) в (44), находим, что

$$w_j^{(b)} = \sum_{i,\,\ell} w_{\ell}^{(b)}\, w_{ij}\, w_{i\ell},$$

откуда следует

$$\sum_i w_{ij}\, w_{i\ell} = \delta_{j\ell}. \tag{46}$$

Рассмотрим последнее уравнение при $j = \ell$. Тогда $\sum\limits_i (w_{ij})^2 = 1$. С другой стороны, поскольку все w_{ij} положительны и не превосходят единицы, то выполняется очевидное неравенство $\sum\limits_i (w_{ij})^2 \le \sum\limits_i w_{ij} = 1$. Из обоих выражений следует, что

$$\sum_i (w_{ij})^2 = \sum_i w_{ij} = 1. \tag{47}$$

Равенство в (47) достигается только тогда, когда одна из вероятностей w_{ij} строго равна единице, а остальные вероятности равны нулю. Учитывая (46) при $j \neq \ell$ для вероятности w_{ij} можно написать, что $w_{ij} = \delta_{ij}$, то есть и $c_{ij} = \delta_{ij}$. Поэтому должно выполняться равенство $|\, a_i \,\rangle \equiv |\, b_i \,\rangle \equiv |\, a_i, b_i \,\rangle$, где используется стандартное обозначение для общих векторов операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Таким образом, мы доказали, что если средние значения двух наблюдаемых A и B могут быть измерены для одного и того же квантового ансамбля, то операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют общую систему собственных векторов. Для эрмитовых операторов это эквивалентно условию коммутативности операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в гильбертовом пространстве векторов состояния микросистемы. Доказательство закончено. Случай непрерывного и/или вырожденного спектров читателю предлагается разобрать самостоятельно.

В виде задачи сформулируем не менее важное обратное утверждение.

Задача. Докажите, что *из коммутативности операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ следует совместная измеримость наблюдаемых A и B*.

На совместную измеримость наблюдаемых A и B можно взглянуть и с формальной математической точки зрения. Из определения (38) следует, что для наблюдаемых A и B должно существовать совместное распределение вероятностей $w(a_j, b_k)$, при помощи которого вычисляются средние значения $\langle\, A \,\rangle_\psi$ и $\langle\, B \,\rangle_\psi$:

$$\langle\, A \,\rangle_\psi = \sum_j w(a_j, b_k)\, a_j \quad \text{и} \quad \langle\, B \,\rangle_\psi = \sum_k w(a_j, b_k)\, b_k.$$

Известная из теории вероятностей **теорема Нельсона** утверждает, что *две наблюдаемые A и B имеют совместное распределение вероятностей $w(a_j, b_k)$ во всех состояниях $|\, \psi \,\rangle$ тогда и только тогда, когда соответствующие им операторы коммутируют*, то есть $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$. Выше мы фактически доказали теорему Нельсона при помощи физических соображений.

Задача. Проведите полное доказательство теоремы Нельсона.

Теперь ответим на вопрос о максимальном количестве совместно измеримых наблюдаемых, характеризующих данную микросистему. Очевидно, что если имеются наблюдаемые A, B, C, D, ..., то максимальный набор будет соответствовать максимальному количеству попарно коммутирующих операторов. Например, пусть $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=0$, $\left[\hat{A},\hat{C}\right]=0$ и $\left[\hat{B},\hat{C}\right]=0$, но $\left[\hat{C},\hat{D}\right]\neq 0$. Тогда максимальный набор наблюдаемых составят A, B и C, а любой вектор состояния может быть разложен по базису $|\,a,b,c\,\rangle$. Заметим, что для многих задач базис можно выбрать не единственным образом. Действительно, пусть дополнительно $\left[\hat{A},\hat{D}\right]=0$ и $\left[\hat{B},\hat{D}\right]=0$. Тогда альтернативный набор наблюдаемых включает в себя величины A, B и D. Этот набор продуцирует базис $|\,a,b,d\,\rangle$.

Задача. Найдите связь между базисами $|\,a,b,c\,\rangle$ и $|\,a,b,d\,\rangle$.

Задача. В гильбертовом пространстве даны три оператора $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$, удовлетворяющие условиям $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=0$ и $\left[\hat{A},\hat{C}\right]=0$. Следует ли из первых двух равенств, что $\left[\hat{B},\hat{C}\right]=0$?