

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА С ПЕРЕМЕННЫМ СЕЧЕНИЕМ И НЕОДНОРОДНЫМ ПОГЛОЩАЮЩИМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Д.Ю. Кудрявцев

*Московский государственный институт электроники и математики  
(технический университет)  
E-mail: lorenz.o@mail.ru*

The dispersion equation for rectangular waveguide with three-layered isotropic dielectric filling is obtained. The dependencies of the basic waveguide parameters on frequency and space factor are explored. Mathematical model is developed and results of calculations of electromagnetic and temperature fields in dielectric are represented.

Частично заполненные волноводы приобрели большое распространение в технике СВЧ. Они используются для построения таких узлов волноводного тракта, как фазовращатели, аттенюаторы, циркуляторы, коммутаторы, замедляющие системы.

Некоторые частично заполненные волноводы отличаются от однородно заполненных рядом принципиальных особенностей. Для них характерны: аномальная дисперсия, инверсия критических частот волн различных типов при изменении параметров заполнения, распространение волн с комплексными волновыми числами в отсутствие потерь и т. п.

В данной работе исследуется изотропный слоистый волновод, заполненный несовершенным диэлектриком. Представленная модель может быть использована при анализе как вышеуказанных узлов волноводных линий передачи, так и устройств электромагнитного нагрева.

Рассмотрим отрезок прямоугольного волновода с поперечными размерами  $a$  и  $b$ , имеющий длину  $l$ . Ширина широкой стенки  $a$  линейно изменяется вдоль продольной оси волновода от  $a_1$  до  $a_2$ .

Расположим прямоугольную систему координат  $x, y, z$  так, чтобы плоскость  $yOz$  совпадала с плоскостью симметрии волновода, а плоскость  $xOz$  - с его широкой стенкой. Поместим в волновод прямоугольную пластинку из однородного диэлектрика с относительной проницаемостью  $\tilde{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon''$  таким образом, чтобы она была параллельна узкой стенке волновода, а плоскость симметрии пластинки совпадала с плоскостью симметрии волновода (рис. 1). Активной проводимостью диэлектрика  $\sigma$  и потерями в стенках волновода пренебрегаем.

В волновод со стороны плоскости  $z=0$  поступает основная мода (волна  $H_{10}$ ). В этом случае пластина оказывается тангенциально ориентированной относительно вектора  $\mathbf{E}$ , максимум электрического поля находится в середине широкой стенки волновода, что позволяет наиболее эффективно осуществлять взаимодействие поля с диэлектриком. На противоположном конце располагается согласованная нагрузка, при этом отражение отсутствует.

Рассмотрим поперечное сечение полученного частично заполненного

волновода, разделив его на три части: I область  $(-a(z)/2 \leq x < -d/2)$ , II область  $(-d/2 \leq x \leq d/2)$ , III область  $(d/2 < x \leq a(z)/2)$  [1].

Общий вид распределения электрического и магнитного полей:

$$\dot{\vec{E}}(x, y, z, t) = \dot{\vec{E}}_m(x, y, z) \exp(j\omega t) = \dot{\vec{E}}_0(x, y) \exp(j(\omega t - k_z z));$$

$$\dot{\vec{H}}(x, y, z, t) = \dot{\vec{H}}_m(x, y, z) \exp(j\omega t) = \dot{\vec{H}}_0(x, y) \exp(j(\omega t - k_z z));$$

где  $k = \sqrt{k_n^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}\mu}$  – волновое число,  $k_z = \beta - j\alpha$  – постоянная распространения.

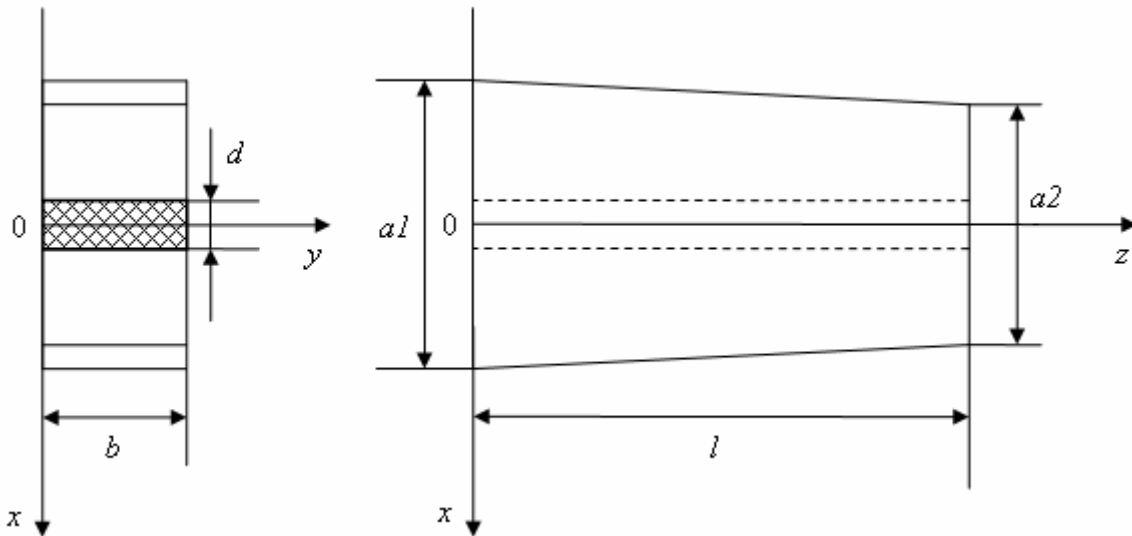


Рис. 1. Вид исследуемой структуры.

Для волны  $H_{10}$  векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  имеют следующий вид:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{E}_{my} \vec{j}, \quad \dot{\vec{H}}_m = \dot{H}_{mx} \vec{i} + \dot{H}_{mz} \vec{k}; \quad (1)$$

Получим вид распределения электрического поля в волноводе. Поскольку вектор  $\mathbf{E}$  параллелен оси  $Oy$ , величина напряженности  $E$  определяется только компонентой  $E_y$ . Для каждой из выделенных ранее областей решение однородного уравнения Гельмгольца  $\nabla^2 \vec{L} + k^2 \vec{L} = 0$  для  $E_y$  с учетом условия симметрии поля относительно плоскости  $yOz$  и граничных условий I рода на стенках волновода имеет вид

$$\left. \begin{aligned} E_{0y1} &= B_1 \sin(k_{n1}(x + a/2)) \\ E_{0y2} &= A_2 \cos(k_{n2}x) + B_2 \sin(k_{n2}x) \\ E_{0y3} &= B_1 \sin(k_{n1}(a/2 - x)) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $k_{n1} = \sqrt{k_1^2 - k_z^2} = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ ,  $k_{n2} = \sqrt{k_2^2 - k_z^2} = \sqrt{k^2 \tilde{\epsilon} - k_z^2}$  – поперечные волновые числа.

Функция  $E_{0y}(x)$  должна быть непрерывной на границах раздела сред, т.е. на границах областей. Проведя ряд преобразований (2) с учетом условий

непрерывности и преобразования координат  $x \rightarrow x - a/2$ , получим дисперсионное уравнение:

$$\frac{k_{n2} \left[ \operatorname{tg}(k_{n2} a/2) - \operatorname{tg}(k_{n2} (a-d)/2) \right]}{k_{n1} \left[ \operatorname{tg}(k_{n2} a/2) \operatorname{tg}(k_{n2} (a-d)/2) + 1 \right]} \operatorname{tg}(k_{n1} (a-d)/2) - 1 = 0 \quad (3)$$

Трансцендентное уравнение (3) решается численно относительно  $k_{n2}$ . Корни данного уравнения определяют различные конфигурации параметров  $k_{n1}$ ,  $k_{n2}$ ,  $k_z$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ , т. е. различные виды распределений поля, способных существовать в волноводе. Для основной моды необходимо взять первый положительный корень (3). Постоянные  $A_2$ ,  $B_2$  определяются из условий непрерывности функции  $E_{0y}(x)$  и имеют вид

$$A(z) = \frac{B_1 \sin(k_{n1} (a(z) - d)/2) / \cos(k_{n2} (a(z) - d)/2)}{1 + \operatorname{tg}(k_{n2} a(z)/2) \operatorname{tg}(k_{n2} (a(z) - d)/2)}, \quad B(z) = A \operatorname{tg}(k_{n2} a(z)/2).$$

Постоянная  $B_1$  зависит от мощности источника и определяется из теоремы Умова-Пойнтинга.

Электромагнитное поле в волноводе определяется из выражений:

$$\dot{E}_y = E_{0y}(x, z) \exp(j(\omega t - k_z z)), \quad \dot{H}_x = -\frac{k_z}{\omega \mu_0} \dot{E}_y, \quad \dot{H}_z = -\frac{1}{j\omega \mu_0} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x};$$

Рассматривая  $E_{0y}(x, z)$  во II области, получим распределение электрического поля в диэлектрике:

$$\dot{E}_2(x, y, z, t) = E_{0y2}(x, z) \exp(j(\omega t - \beta z) - \alpha z) \quad (4)$$

Следует отметить, что при неизменных геометрических параметрах системы при увеличении параметра  $\varepsilon'$  поперечное распределение электрического поля изменяется от слабовозмущенного, близкого к синусоидальному, до сильновозмущенного, достаточно точно описываемого функцией Гаусса, т. е. поле постепенно концентрируется в объеме диэлектрика.

Уравнение (3) позволяет определить дисперсионные характеристики составляющих постоянной распространения в случае неидеального диэлектрика и вычислить критическую частоту. На рис. 2 представлены результаты моделирования при следующих параметрах:  $a_1=72$  мм,  $a_2=67$  мм,  $b=34$  мм,  $l=500$  мм,  $d=6$  мм,  $\varepsilon' = 6$ ,  $\varepsilon'' = 0,12$ .

Зависимости показывают, что при переходе к поглощающему диэлектрику критическая частота несколько увеличивается, коэффициент поглощения имеет минимум вблизи критической частоты и линейно увеличивается с ростом частоты вследствие повышения реактивной проводимости диэлектрика.

Критическая частота  $f_{кр}$  уменьшается с ростом коэффициента заполнения  $d/a$  по закону, близкому к экспоненциальному.

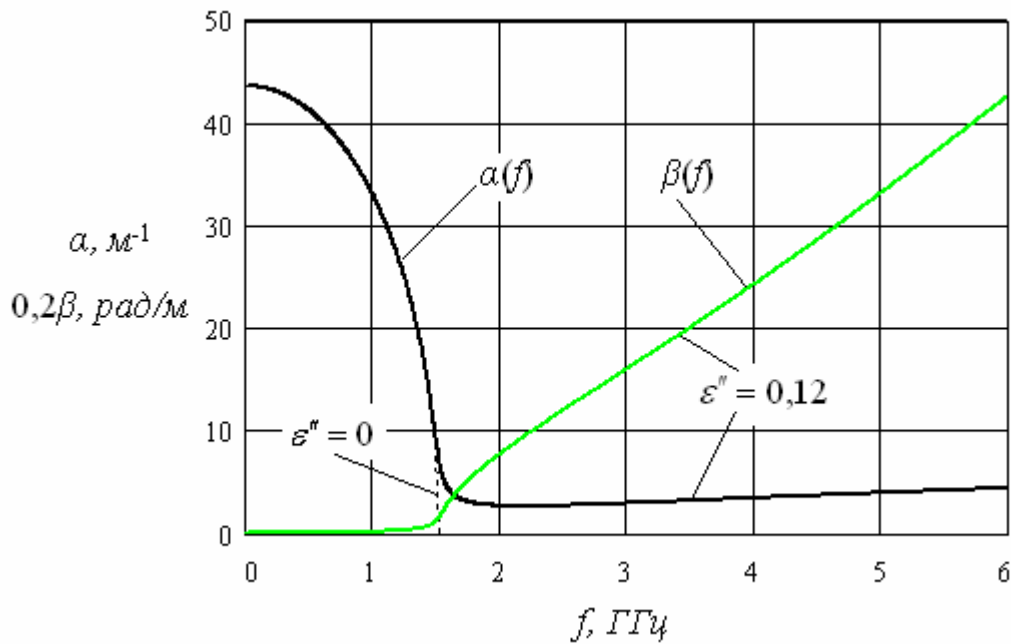


Рис. 2. Дисперсионные характеристики постоянной затухания  $\alpha$  и фазовой постоянной  $\beta$  для идеального и поглощающего диэлектрика.

Для определения температурного поля в поглощающем диэлектрике необходимо решить начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности [3]. Вариация электрического поля вдоль оси  $Oy$  отсутствует, поэтому можно ограничиться двумерной задачей. Полагаем, что тепловые потери диэлектрической пластины пренебрежимо малы. Объемная плотность диссипируемой мощности и эквивалентная проводимость диэлектрика:

$$q(x, y, z, t) = \sigma_{\text{экв}} \left| \dot{\vec{E}}_2(x, y, z, t) \right|^2; \quad \sigma_{\text{экв}} = \omega \varepsilon'' \varepsilon_0.$$

Представим аналитическое решение указанной задачи  $T(x, y, z, t)$  методом трехмерного преобразования Фурье с ядром  $K_{nmk}(x, y, z)$  [3]. Решение исходной задачи имеет вид:

$$T(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \left( \tilde{T}_{0nmk} + \frac{1}{c\rho} \int_0^t \exp\left(\frac{\lambda}{c\rho} (s_{nmk})^2 \tau\right) \cdot \tilde{q}_{nmk}(\tau) d\tau \right) \exp\left(-\frac{\lambda}{c\rho} (s_{nmk})^2 t\right) K_{nmk}(x, y, z) \right]; \quad (5)$$

Здесь  $(K_{nmk}(x, y, z), s_{nmk})$  – собственное решение задачи Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа с граничными условиями II рода, определяемое выражениями

$$K_{nmk}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{lbd}} \cos\left(\frac{\pi nx}{d}\right) \cos\left(\frac{\pi my}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi kz}{l}\right); \quad s_{nmk} = \pi \sqrt{(n/d)^2 + (m/b)^2 + (k/l)^2}$$

$\tilde{q}_{nmk}(t)$  – образ Фурье функции  $q(x, y, z, t)$ ;  $\tilde{T}_{0nmk}$  – образ Фурье функции

$T_0(x, y, z)$ . Для перехода к вышеуказанному двумерному случаю достаточно положить  $m = 0$ . Выражение (5), однако, требует больших затрат вычислительной мощности, поэтому при моделировании тепловых процессов часто бывает целесообразно использовать численные методы.

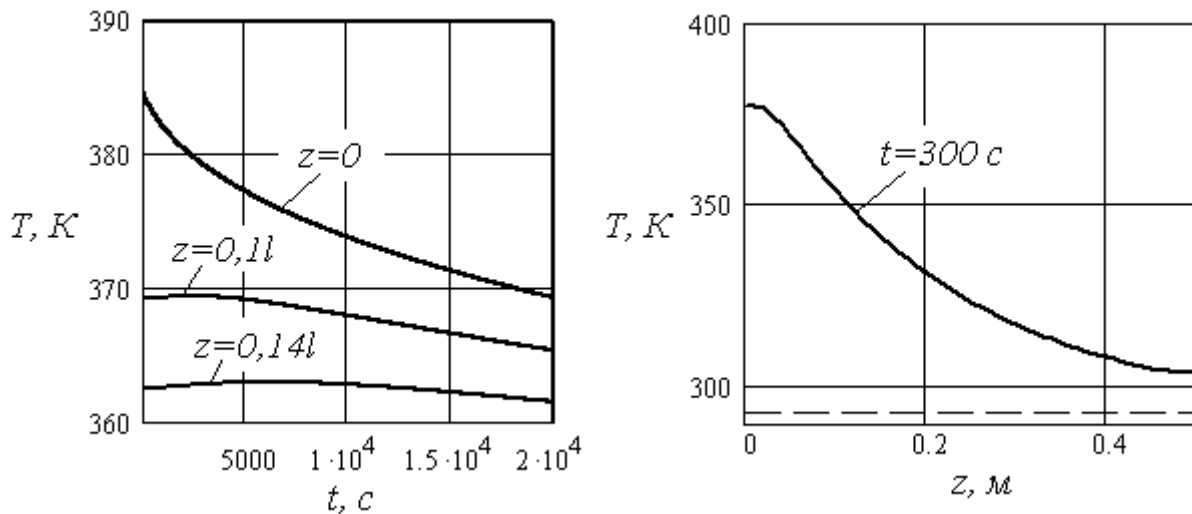


Рис. 3. Изменение температуры в различных поперечных сечениях диэлектрика со временем и продольное распределение температуры для заданного момента времени (после отключения источника СВЧ энергии в момент  $t=\tau=100$  с).

На рис. 3 представлены результаты численного моделирования температурного поля в диэлектрике с параметрами  $c=0,8$  Дж/(г·К),  $\rho=2,4$  г/см<sup>3</sup>,  $\lambda=0,17$  Вт/(м·К) при частоте  $f=2450$  МГц и мощности источника  $P=600$  Вт. На левом графике хорошо видны процессы распространения тепловой волны и установления температурного баланса.

Численное моделирование показало, что для материалов с большим значением  $\varepsilon''$  и малым  $\lambda$  затухание амплитуды  $E$  вдоль оси  $Oz$  происходит достаточно быстро, но уменьшение поперечного сечения вдоль оси  $Oz$  позволяет частично его компенсировать. После отключения источника процесс установления температурного баланса длится достаточно долго, скорость его зависит от величины  $\lambda$ .

1. Левин Л.И. Теория волноводов. Методы решения волноводных задач. – М.: Радио и связь, 1981.
2. Лебедев И.В. Техника и приборы СВЧ. В 2 т. Т. 1. – М: Высшая школа, 1970.
3. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – М.: Наука, 1976.
4. Потапова Т.А., Нефедов В.Н., Назаров И.В., Мамонтов А.В. // Метрология. 2006, № 3, с. 26-37.