# ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ABCD-МАТРИЦ НА СЛУЧАЙ НЕПЛОСКОГО КОЛЬЦЕВОГО ОПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

И.И. Савельев, Ю.В. Стахмич

*Московский государственный институт электроники и математики*

*E-mail: i.saveliev@gmail.com, stakhmich@gmail.com*

In article the method of ABCD-matrixes on a case of the nonplanar ring optical resonator is generalised. This method simplifies calculation of spatial parametres of the resonator and is more comprehensible to numerical modelling of such devices.

Неплоские кольцевые оптические резонаторы получили распространение как в отечественных, так и в некоторых зарубежных устройствах лазерной гироскопии [1]. В таких резонаторах оптические моды обладают круговыми поляризациями, что позволяет решить вопрос с явлением «захвата» частот не прибегая к механическим методам или введению в резонатор дополнительных оптических элементов. Кроме того, фазовая анизотропия, свойственная такого рода резонаторам, позволяет применять их в четырехчастотных приборах на модах с ортогональными круговыми поляризациями.

Для совершенствования конструкции существующих двухчастотных и проектирования более совершенных четырехчастотных приборов необходим определенный математический аппарат, который позволил бы проводить комплексный расчет и оптимизацию как пространственных, так и поляризационных параметров неплоских резонаторов. В работе [2] рассмотрен подход, основанный на методе интегрального уравнения, но этот метод неудобен для численных расчётов пространственных характеристик.

Пространственные характеристики лазерных резонаторов удобно рассчитывать с помощью метода ABCD-матриц, суть которого заключается в следующем[3]. Резонатор представляется в виде системы, состоящей из последовательности оптических промежутков, в которых лазерный луч свободно распространяется, и преломляющих поверхностей, которые оказывают некоторое воздействие на луч. Каждый такой элемент последовательности характеризуется своей матрицей вида

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Для лучевого вектора

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}$$

на границах элемента можно записать:

$$\vec{r}\,' = \hat{m} \cdot \vec{r} \; .$$

Для того, чтобы записать общую матрицу оптического резонатора, состоящего из $N$ элементов с матрицами $m_i$, необходимо проследить путь луча от одного элемента к другому, затем к следующему и т.д. по всему периметру резонатора. Полная матрица резонатора описывается произведением матриц соответствующих участков. Для прямой волны порядок перемножения матриц обратный порядку расположения соответствующих оптических элементов и участков:

$$\hat{M} = \hat{m}_N \cdot \hat{m}_{N-1} \cdot \hat{m}_{N-2} \ldots \hat{m}_3 \cdot \hat{m}_2 \cdot m_1 .$$

Для обратной волны:

$$\hat{M} = \hat{m}_1 \cdot \hat{m}_2 \cdot \hat{m}_3 \cdot \ldots \cdot \hat{m}_{N-2} \cdot \hat{m}_{N-1} \cdot \hat{m}_N .$$

Метод ABCD-матриц для плоского кольцевого оптического резонатора был рассмотрен в работе [4]. При его рассмотрении необходимо перейти к двумерной модели лучевого вектора. Тогда:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha \\ y \\ \beta \end{pmatrix}, \ \hat{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}, \ \vec{R}' = \hat{M} \cdot \vec{R} .$$

При таком подходе матрицы оказываются довольно сложного вида и, как правило, не имеют разделяющихся переменных, т.к. происходит поворот системы координат. Чтобы упростить аналитические преобразования матриц, рассмотрим лучевой вектор в другом представлении:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрицы становятся блочного вида, что упрощает аналитические вычисления.

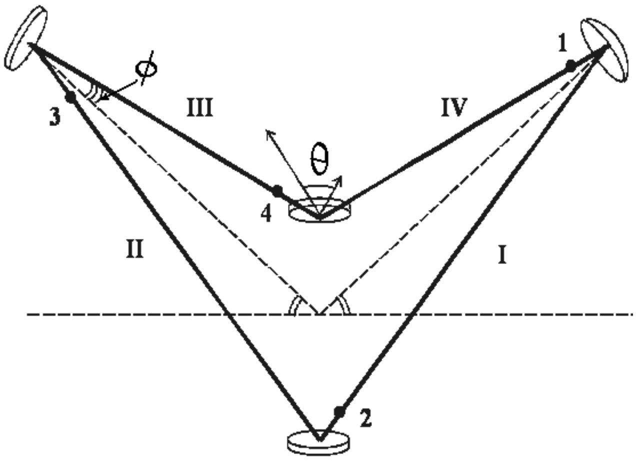


*Рис 1. Оптическая схема симметричного неплоского четырехзеркального кольцевого резонатора.*

Рассмотрим резонатор с неплоским оптическим контуром, приведенный на рис. 1, состоящий из трех плоских зеркал и одного сферического, расстояния $a$ между которыми одинаковы и которые повернуты друг относительно друга на один и тот же угол $\phi$, то есть резонатор симметричный.

На рис. 1 участок пути луча из точки 1 в точку 2 обозначен I. Из точки 1 луч попадает на зеркало, отражается от него, затем перемещается вдоль оптической оси резонатора в точку 2. Тогда, матрица перемещения луча:

$$\hat{M}_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица поворота:

$$\hat{S}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Необходимо помнить, что в замкнутом контуре кольцевого резонатора генерируются две бегущие навстречу друг другу световые волны. Соответственно матрица перехода из одной системы координат в другую записывается по-разному для каждого направления волны.

Матрица плоского зеркала:

$$\hat{M}_Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица сферического зеркала:

$$\hat{M}_R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{2}{R\cos(\theta)} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-2\cdot\cos(\theta)}{R} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Расчет спектра собственных частот резонатора с неплоским контуром проводится на основе известного матричного уравнения:

$$\hat{M}\cdot\vec{D} = \lambda\cdot\vec{D}.$$

Выражение для определения собственных значений $\lambda$ - характеристическое уравнение матрицы $\hat{M}$ - записывается следующим образом:

$$\left|\hat{M} - \lambda\cdot\hat{E}\right| = 0,$$

где $\hat{E}$ – единичная матрица.

Далее, решая уравнение четвертой степени можно получить $\lambda$ и собственные вектора.

Комплексный параметр пучка ($q$) для двумерного случая:

$$\mu = \hat{P} \cdot \hat{Q}^{-1};$$
$$\hat{Q} = (\vec{q}_1, \vec{q}_2);$$
$$\hat{P} = (\vec{p}_1, \vec{p}_2);$$
$$f(x, y, z) = \exp\left(-ikz + \frac{1}{2}\rho\mu\rho^T\right),$$

где $\rho^T = (x, y)$.

В двумерном случае понятие комплексного параметра заменяется на комплексную матрицу $\hat{Q}$, которая содержит собственные лучевые векторы $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, а зависимость пространственного распределения задается $\mu$.

Радиус кривизны волнового фронта:

$$\frac{1}{R_f} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\mathrm{Re}(q_1)}{(|q_1|)^2}.$$

Радиус пучка:

$$W_1^2 = \frac{-2 \cdot (|q_1|)^2}{k \cdot \mathrm{Im}(q_1)}.$$

В частном случае резонатора с углами $\phi$ кратными $\frac{\pi}{8}$ результаты расчета спектра частот и геометрических параметров мод совпадают с результатами статьи [2].

Вывод: обобщенный метод ABCD-матриц в случае кольцевого неплоского оптического резонатора позволяет получить те же результаты, что и метод интегрального уравнения, но является более наглядным и приемлемым для численного моделирования таких устройств.


1. В.В.Азарова, Ю.Д.Голяев, В.Г.Дмитриев. Кольцевые газовые лазеры с магнитооптическим управлением в лазерной гироскопии. // Квантовая электроника, 30, №2, 2000.
2. И.И.Савельев, А.М.Хромых. Продольные моды объемного кольцевого резонатора. // Квантовая электроника, 3, №7, 1976.
3. А.Джеррард, Дж.М.Бёрч. Введение в матричную оптику: Пер. с англ./ Под ред. В.В. Коробкина. М.: Мир, 1978.
4. Е.Ф.Ищенко. Открытые оптические резонаторы. М.: Советское радио. 1980.