ДИНАМИКА ГОРИЗОНТА ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О. И. Василенко
Физический факультет МГУ
E-mail: vasilenko@depni.sinp.msu.ru

В последнее время проявляется значительный интерес к процессам образования черных дыр при столкновениях ультрарелятивистских частиц. Новый интерес к проблеме возник после предложения разрешения проблемы иерархии, основанного на введении дополнительных измерений, больших по сравнению с характерным размером слабого взаимодействия. В этом случае величина массы Планка может составить несколько ТэВ, что позволило бы обнаружить связанные с существованием дополнительных измерений эффекты в экспериментах с космическими лучами и астрофизических наблюдениях [1].

Рассмотрим две ультрарелятивистские частицы, движущиеся в пространстве Минковского с координатами $(\overline{t},\overline{z},\overline{x}^i)$ вдоль оси $\overline{z}$ навстречу друг другу с нулевым прицельным параметром ($\overline{x}^i=0$). Введем координаты светового конуса: $\overline{u}=\overline{t}-\overline{z},\overline{v}=\overline{t}+\overline{z}$. В предельном ультрарелятивистском случае для частицы с исчезающе малой массой и фиксированной энергией μ, движущейся в направлении $+z$, метрика описывается решением для ударной волны Айчельбурга-Сексла

$$ds^2=-d\overline{u}d\overline{v}+d\overline{x}^{i2}+\Phi(\overline{x}^i)\delta(\overline{u})d\overline{u}^2. \tag{1}$$

Функция Φ зависит только от поперечного радиуса $\overline{r}=\sqrt{\overline{x}^i\overline{x}_i}$ и имеет вид

$$\Phi=-2a\ln(\overline{r}) \ \textit{при}\ D=4;\quad \Phi=\frac{2a^{D-3}}{(D-4)\overline{r}^{D-4}}\ \textit{при} D>4,\qquad a=\left(\frac{8\pi G_D\mu}{\Omega_{D-3}}\right)^{1/(D-3)}, \tag{2}$$

где Ω_{D-3} — объем единичной $(D-3)$-мерной сферы и G_D — D-мерная гравитационная постоянная. Сингулярность в метрике (1) можно устранить введением новых координат (u,v,x^i)

$$\overline{u}=u,\quad \overline{v}=v+\Phi\theta(u)+\frac{u\theta(u)(\nabla\Phi)^2}{4},\quad \overline{x}^i=x^i+\frac{u}{2}\nabla^i\Phi(x)\theta(u). \tag{3}$$

В этих координатах геодезические и их касательные непрерывны на фронте волны при $u=0$. Метрика (1) является плоской везде, кроме фронта волны при $u=0$. Поэтому метрику для двух ударных волн для моментов времени $\overline{t}<0$, предшествующих столкновению, можно получить, объединив (1) с аналогичной метрикой для частицы, движущейся вдоль $\overline{v}=0$ в направлении $-z$, и отождествив области между волнами. В координатах (3) объединенная метрика имеет вид

$$ds^2=-du\,dv+\left(H^u_{ik}H^u_{jk}+H^v_{ik}H^v_{jk}-\delta_{ij}\right)dx^idx^j, \tag{4}$$

$$H_{ij}^{u}=\delta_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x^i\partial x^j}u\theta(u),\quad H_{ij}^{v}=\delta_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x^i\partial x^j}v\theta(v). \tag{5}$$

Критерием образования черной дыры при столкновении частиц служит появление области пространства, которую не могут покинуть световые лучи. Границей этой области и является ловушечная поверхность [2,3]. Более строгое определение следующее: ловушечная поверхность T это замкнутая пространственноподобная $(D-2)$-поверхность, такая что световые геодезические, пересекающие ее ортогонально, локально сходятся в направлении будущего. Из определения следует, что объем перенесенной $(D-2)$-поверхности, образованной точками ортогональных к T нулевых геодезических, расположенными на равных расстояниях от T, должен уменьшаться при удалении от T.

Далее мы будем использовать следующее сечение пространства-времени: область $I-\ (t=z, t\le T)$; область $II-(t=T, T\le z\le -T)$; область $III-(t=-z,\ \ t\le T)$. Здесь $T\le 0$ и столкновение частиц происходит при ($T=0, z=0$).

Согласно выбранному сечению ловушечную поверхности M в области II можно определить соотношениями: $t=T=const, z=\delta f(r), \delta=\operatorname{sgn} z$. Нулевые нормали N к этой поверхности имеют вид ($f'=df/dr$, $\varepsilon=\pm 1$)

$$N(\varepsilon,\delta)=\left[N^t,N^z,N^r,\overline{N^{\phi}}\right](\varepsilon,\delta)=\left[1,-\frac{\varepsilon\delta}{\sqrt{1+f'^2}},\frac{\varepsilon f'}{\sqrt{1+f'^2}},\vec{0}\right]. \tag{6}$$

Нулевая геодезическая, нормально пересекающая ловушечную поверхности в точке $(T, z_0=f(r_0)\equiv f_0, r_0, \vec{\phi}_0)$, является прямой линией, описываемой уравнениями

$$t=T+\tau,\quad z=\delta f_0-\tau\frac{\varepsilon\delta}{\sqrt{1+f'^2_0}},\quad r=r_0+\tau\frac{\varepsilon f'_0}{\sqrt{1+f'^2_0}},\quad \vec{\phi}=\vec{\phi}_0. \tag{7}$$

Подобные геодезические переносят ловушечную поверхность M на расстояние τ. Обозначим перенесенную поверхность через $M(\varepsilon,\tau)$. Ее объем $S(\varepsilon,\tau)$ равен

$$S(\varepsilon,\tau)=\Omega_{D-3}\int r^{D-3}\,dl, \tag{8}$$

где dl — элемент образующей поверхности $M(\varepsilon,\tau)$ в плоскости (z,r), который согласно (7) может быть выражен через не зависящий от τ элемент dr_0 как

$$dl=\sqrt{dr^2+dz^2}=\sqrt{\left(\frac{dr}{dr_0}\right)^2+\left(\frac{dz}{dr_0}\right)^2}\,dr_0=\sqrt{1+f'^2_0}\left[1+\frac{\tau\varepsilon f''_0}{\left(1+f'^2_0\right)^{3/2}}\right]dr_0. \tag{9}$$

Для малых τ выражение (8) может быть записано в форме

$$S(\varepsilon,\tau)=\Omega_{D-3}\int r_0^{D-3}\sqrt{1+f'^2_0}\left\{1+\frac{\tau\varepsilon}{\sqrt{1+f'^2_0}}\left[\frac{(D-3)f'_0}{r_0}+\frac{f''_0}{1+f'^2_0}\right]+O(\tau^2)\right\}dr_0. \tag{10}$$

Согласно определению ловушечной поверхности уравнение для функции $f(r)$ можно получить из требования, чтобы для малых τ объем $S(\varepsilon,\tau)$ уменьшался при увеличении τ для обоих значений $\varepsilon=\pm 1$. Необходимым условием этого является равенство нулю линейного по τ члена в правой части соотношения (10). Интегрирование получающегося уравнения дает явную форму соотношения, описывающего внутреннюю ловушечную поверхность

$$z=\delta R\int_1^{r/R}\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^{2(D-3)}-1}}, \tag{11}$$

где $R=R(T)$ — радиус поверхности при $z=0$. В случае $D=4$ поверхность представляет собой катеноид: $r=R\cosh(z/R)$.

С точки зрения наблюдателя во внешних областях ($|z|>-t$) столкновение происходит при

$$\bar{u}=+0, \quad \bar{v}=+0. \tag{12}$$

Поскольку метрика в этих областях минковская и задача аксиально симметрична, то нулевые геодезические ортогональные плоскости (12) являются параллельными прямыми, имеющими нулевое схождение. Таким образом, плоскость (12) удовлетворяет условиям, предъявляемым к ловушечной поверхности, и уравнения (12) можно рассматривать, как соотношения, определяющие ее вид на фронтах, т.е. в областях I и III. В новых координатах (u,v,r,ϕ^k) уравнения ловушечной поверхности в области I с нулевыми нормалями $n=\left[n^u,n^v,n^r,\overrightarrow{n^\phi}\right]$ согласно (3),(12) принимает вид

$$u=+0,\ v+\Phi(r)-\Phi(r_c)=0, \tag{13}$$

$$n_1=\left[0,1,0,\vec{0}\right],\ n_2=\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{D-3},\left(\frac{a}{r}\right)^{D-3},1,\vec{0}\right].$$

Аналогично описывается ловушечная поверхность в области III

$$v=+0,\ u+\Phi(r)-\Phi(r_c)=0, \tag{14}$$

$$n_3=\left[1,0,0,\vec{0}\right],\ n_4=\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{D-3},\left(\frac{r}{a}\right)^{D-3},1,\vec{0}\right].$$

Гладкость перехода от (13) к (14) обеспечивается при выполнении в момент столкновения $u=v=0$ равенства $n_2=n_4$. Это условие определяет радиус r_c ловушечной поверхности в момент столкновения $r_c\equiv r_b(T=0)=a$. Требуя непрерывности ловушечной поверхности на границе областей I и II и принимая во внимание (13) и (11), получаем уравнения для $R(T)$ и радиуса ловушечной поверхности на границе $r_b(T)$

$$T=\frac{1}{2}\left[\Phi(a)-\Phi(r_b)\right]=-R\int_1^{r_b/R}\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^{2(D-3)}-1}}. \tag{15}$$

Такие же соотношения получаются при рассмотрении границы областей II и III.

Зависимости R от T для D = 4,5,6,7,8,9,10 показаны на рис.1.

Ловушечная поверхность появляется в момент времени $t = T_{min}$, когда $r_b = r_b(T_{min})$. Далее r_b увеличивается с ростом T и достигает своего максимального значения a к моменту столкновения $T = 0$ (рис.2). Зависимости T_{min}, $R(T_{min})$ и $r_b(T_{min})$ от D представлены в таблице.

D	T_{min} / a	R_{min} / a	$r_b(T_{min}) / a$
4	–0.43	0.36	0.65
5	–0.32	0.47	0.76
6	–0.26	0.54	0.81
7	–0.22	0.60	0.85
8	–0.19	0.64	0.87
9	–0.17	0.67	0.89
10	–0.15	0.69	0.90

Литература

1. S. B.Giddings , arXiv:0709.1107 [hep-ph]; P.Kanti, arXiv:0802.2218 [hep-th].
2. D.M.Eardley and S. B. Giddings, Phys.Rev. D, **66** (2002) 044011
3. О.И.Василенко // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2004, № 4, С. 42–45; O.I.Vasilenko// Class. Quantum Grav. 25 (2008) 175021

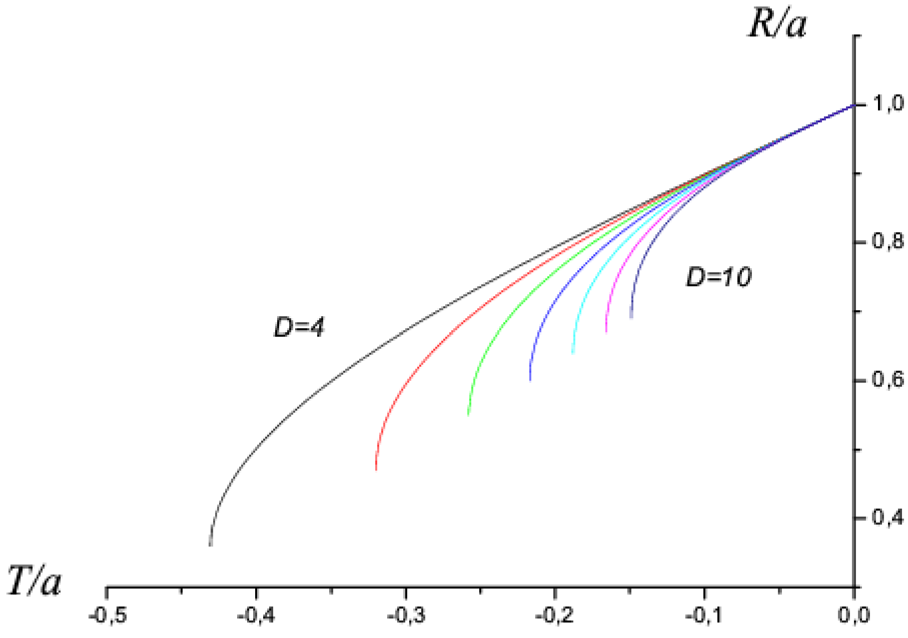

Рис. 1. Зависимости R от T для $D = 4,\ldots,10$.

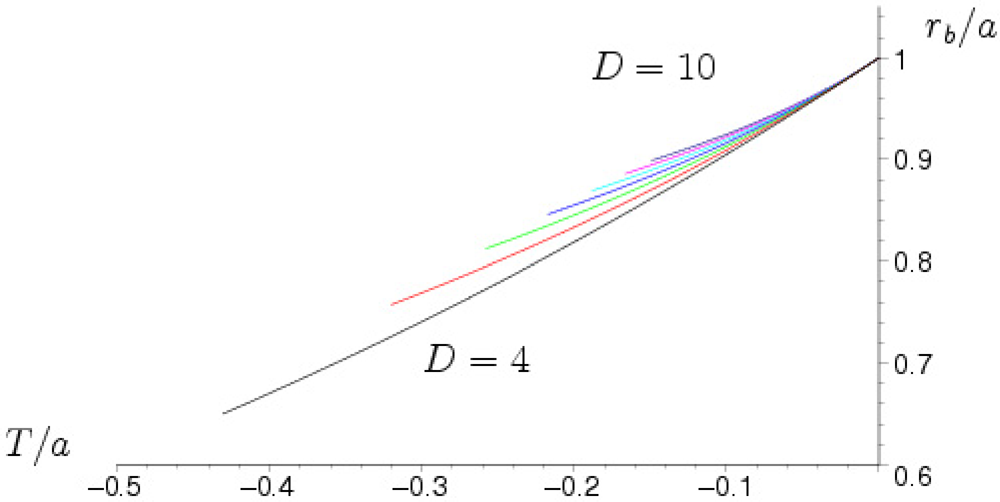

Рис. 2. Зависимости r_b от T для $D = 4,\ldots,10$.