ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОСНОВНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКЕ

Е.В. Серегина[1,2], А.М. Макаренков[2], М.А. Степович[1]
[1] *Калужский государственный педагогический университет им. К.Э. Циолковского;*
[2] *Калужский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана*
E-mail: evfs@yandex.ru

The present article devoted to a determination of statistical characteristics of a solution of a differential diffusion equation of minority carriers of a charge (MCs) with use of the projection method based on the theory of matrix operators. It was supposed, that lifetime MC was random and had a Gaussian distribution law. Influence of a dispersion of this magnitude on allocation MC on depth in a semiconductor material from silicon surveyed.

Постановка задачи. При проведении расчетов использовалась модель коллективного движения носителей заряда, согласно которой на диффузию генерированных внешним энергетическим воздействием неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) из любого микрообъема полупроводника оказывают влияния другие электроны или дырки из других микрообластей материала. В этом случае для одномерной диффузии в полупроводник распределение по глубине ННЗ находится как решение дифференциального уравнения [1]

$$D\frac{d^2\Delta p(z)}{dz^2}-\frac{\Delta p(z)}{\tau}=-\rho(z) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$D\left.\frac{d\Delta p(z)}{dz}\right|_{z=0}=v_s\Delta p(0),\quad \Delta p(T)=0. \tag{2}$$

Функция $\Delta p(z)$ описывает искомое распределение по глубине ННЗ в мишени в результате их диффузии; z – координата, отсчитываемая от плоской поверхности в глубь полупроводника.

Здесь $\rho(z)$ – плотность энергии первичного внешнего воздействия, рассеянной в тонком слое мишени на глубине z, а D, τ и v_s – коэффициент диффузии, время жизни и скорость поверхностной рекомбинации ННЗ соответственно. Для широкого электронного пучка зависимость $\rho(z)$ находится по формуле [1]:

$$\rho(z)=\frac{1{,}085(1-\eta)P_0}{\sqrt{\pi}\left(1-\eta+\eta z_{ss}/z_{ms}\right)}\left\{\exp\left[-\left(\frac{z-z_{ms}}{z_{ms}}\right)^2\right]+\frac{\eta}{1-\eta}\exp\left[-\left(\frac{z-z_{ss}}{z_{ss}}\right)^2\right]\right\}.$$

Здесь P_0 - мощность электронного пучка, рассеянная в мишени, z_{ms} – глубина максимальных потерь энергии первичными электронами, испытавшими малоугловое рассеяние; z_{ss} – глубина максимальных потерь энергии обратно рассеянными электронами; η – коэффициент обратного рассеяния электронов зонда.

Целью работы является нахождение статистических характеристик решения уравнения (1), (2), а именно математического ожидания и автокорреляционной функции распределения ННЗ с учетом случайной составляющей в коэффициенте τ с использованием проекционного метода, основанного на теории матричных операторов [2].

Для реализации проекционного метода был выбран базис из классических ортогональных многочленов Чебышева 1-го рода.

Проекционная аппроксимация исходной модели.

Каждую функцию от переменной z, входящую в систему уравнений (1), (2), аппроксимируем частичной суммой порядка m ее ряда Фурье-Чебышева, а затем последовательно к каждому уравнению системы применим оператор проектирования Q^m на подпространство с базисом из m первых многочленов Чебышева 1-го рода смещенных на отрезок $\left[0,T\right]$.

Далее перейдем от системы уравнений (1), (2) к приближенной системе уравнений

$$\begin{cases} D\tau\, Q^m\left(\dfrac{d}{dz}Q^m\left(\dfrac{d\Delta p^m(z)}{dz}\right)\right)-\Delta p^m(z)=-\tau\,\rho^m(z), \\ Q^m\left(\dfrac{d\Delta p^m(z)}{dz}\right)\Bigg|_{z=0}-D^{-1}\nu_s\Delta p^m(0)=0, \\ \Delta p^m(T)=0, \end{cases} \tag{3}$$

а затем к алгебраической векторно-матричной системе уравнений

$$A_{p(m+2)\times m}C^p_{m\times 1}=G_{(m+2)\times 1} \tag{4}$$

где A_p – матрица переопределенной системы (4) , которая имеет вид

$$A_{p(m+2)\times m}=\begin{bmatrix} D\tau\, D_m^2-E \\ \left(T^m(0)\right)^T D_m-D^{-1}\nu_s\left(T^m(0)\right)^T \\ \left(T^m(T)\right)^T \end{bmatrix}.$$

Здесь D_m – матрица дифференцирования в базисе $T^m(z)$ из m первых многочленов Чебышева 1-го рода по переменной z, смещенных на отрезок $\left[0,T\right]$, а $C^p_{m\times 1}$ – столбец из коэффициентов Фурье-Чебышева функции $\Delta p(z)$. Столбец, стоящий в правой части системы уравнений (4) определяется как:

$$G_{(m+2)\times 1} = \left[-\tau C_m^{\rho} \quad 0 \quad 0 \right]^T .$$

Тогда нормальное псевдорешение переопределенной системы уравнений (4) можно найти с помощью псевдообратной матрицы, т.е.

$$C^{p^+} = \left(A_p^T A_p \right)^{-1} A_p^T G . \tag{5}$$

Приближенное решение исходной задачи (1), (2) восстанавливается по формуле:

$$\Delta p(z) \approx \Delta p^m(z) = \left(T^m(z) \right)^T C^{p^+}, \quad z \in [0, T].$$

Решение задачи статистического анализа. Если полученная выше проекционная модель (4) включает случайный параметр τ, потому решение $\Delta p(z)$ будет случайной функцией. Была принята гипотеза о нормальности закона распределения параметра τ. Таким образом, возникает задача статистического анализа, которая формулируется следующим образом: необходимо определить статистические характеристики распределения ННЗ $\Delta p(z)$, а именно, математическое ожидание и автокорреляционную функцию, при условии, что время жизни τ является случайной величиной, которая распределена по нормальному закону, с математическим ожиданием m_τ, дисперсией D_τ и средним квадратическим отклонением σ_τ.

Перейдем от системы (4) к равносильной системе

$$W_{p_0}(r) W_p(r) C^p = W_{p_0}(r) Y_p \tag{6}$$

где $W_p = A_p^T A_p$, $Y_p = A_p^T G$, $W_{p_0}(r) = \exp\left(-r^2/\alpha \right) \cdot \left(W_p(0) \right)^{-1}$, $\alpha > 0$.

Матрица W_p имеет следующую структуру: $W_p = \tau^2(r) W_1 + \tau(r) W_2 + W_3$. Матрицы W_i, $i = \overline{1,3}$ и Y_p - неслучайные матрицы, а r – непрерывная случайная величина, распределенная по нормальному закону, и имеющая нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию.

Итерационный процесс, определяющий проекционную характеристику математического ожидания решения уравнения диффузии ННЗ по глубине:

$$\begin{gathered} C_i^{m_p} = M\left[C_i^p(r) \right] = M\left[C_{i-1}^p(r) \right] - h_i^k M\left[\hat{W}_p(r) C_{i-1}^p(r) \right] + \\ + h_i^k M\left[W_{p_0}(r) Y_p \right], \quad i = 1, 2, ..., \end{gathered} \tag{7}$$

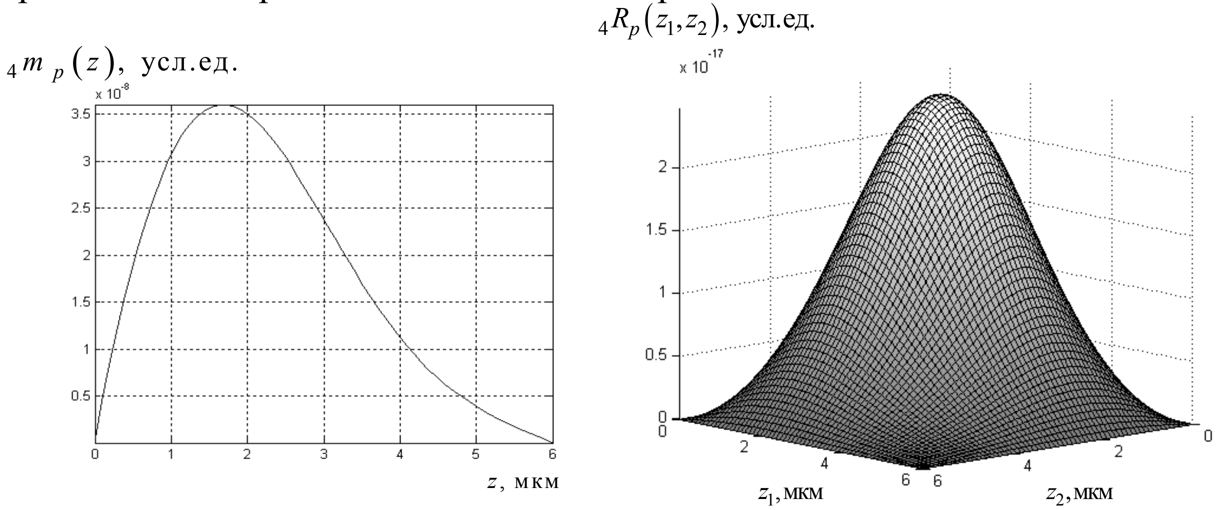
$$h_i^k = 2 \Big/ \left(\hat{M} + \hat{m} + \left(\hat{M} - \hat{m} \right) \cos \frac{\pi(2i-1)}{2k} \right), \quad i = \overline{1, k}. \tag{8}$$

Итерационный процесс, определяющий проекционную характеристику автокорреляционной функции решения задачи (1), (2):

$$\begin{gathered} C_i^{R_p}(r) = M\left[\left(C_{i-1}^p - h_i^k \left(\hat{W}_p(r) C_{i-1}^p - W_{p_0}(r) Y_p \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \left(C_{i-1}^p - h_i^k \left(\hat{W}_p(r) C_{i-1}^p - W_{p_0}(r) Y_p \right) \right)^T \right] - C_i^{m_p} \left(C_i^{m_p} \right)^T, \; i = 1, 2, ... \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $M\left[C_0^p\right]$ – начальное приближение, $\hat{m}=\min\limits_r\left(\min\limits_j\left(\lambda_j\left(\hat{W}_p(r)\right)\right)\right)$, $\hat{M}=\max\limits_r\left(\max\limits_j\left(\lambda_j\left(\hat{W}_p(r)\right)\right)\right)$, $\lambda_j\left(\hat{W}_p(r)\right)$ - собственные значения матрицы $\hat{W}_p(r)$, а $\hat{W}_p(r)=W_{p_0}(r)W_p(r)$.

Результаты расчетов. Время жизни ННЗ τ являлась случайной величиной, распределенной по нормальному усеченному закону с математическим ожиданием $m_\tau=10^{-8}$ с и средним квадратическим отклонением $\sigma_\tau=2\cdot10^{-9}$ с. Использовано 9 членов в разложении функции $\Delta p(z)$ по базису из многочленов Чебышева 1-го рода, что оказалось достаточным для получения приближенного решения с достаточно хорошей точностью.



а) *б)*

Рис. 1. Математическое ожидание (а), вычисленное в 4-м приближении и автокорреляционная функция (б) случайного распределения ННЗ по глубине в полупроводниковом материале из кремния при случайном изменении τ.

Заключение. На примере полупроводникового материала кремния показано, что если закон распределения времени жизни ННЗ будет близок к нормальному усеченному, то статистический разброс (среднее квадратичное отклонение) до 20 процентов относительно его среднего значения не приведет к значительному статистическому разбросу распределения ННЗ по глубине (более 15 процентов) относительно его среднего значения.

1. В.И. Петров, А.А. Самохвалов, М.А. Степович и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2002. Т. 66. № 9. С. 1310.
2. С.В. Лапин,Н.Д. Егупов Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана. 1997. 496 с.