О ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА В НЕОДНОРОДНОЙ СТЕНКЕ

Гладышев Ю.А., Дворянчикова Ю.В.
Калужский государственный педагогический университет им. К.Э. Циолковского
E-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru

В процессах переноса важной задачей является построении решения типа точечного источника субстанции расположенного в данной точке слоя вещества, при различных граничных условиях. Обычно такое решение уравнений переноса называют функцией Грина. В работе дается построения функции Грина для уравнения переноса субстанции при наличии её притока пропорционального разности концентраций типа

$$a_2 \frac{d}{dx}\left(a_1 \frac{d\varphi}{dx} \right) - \alpha^2 \varphi = \rho \tag{1}$$

в неоднородной среде a_1=D, a_2=X.

Здесь D – коэффициент диффузии, а X – коэффициент определяющий возникновение субстанции в единице объема, ρ – плотность носителя.

Если $\rho(x)$ задано, то решением неоднородного уравнения удовлетворяющего данным граничным условиям находится путем интегрирования функции Грина с весом $\rho(x)$.

Предположим, что на отрезке $[x_1, x_2]$ заданы операторы Берса (рис.1.).

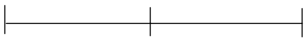

Рис. 1.

$D_1^{(1)}, D_2^{(1)}$ с весовыми функциями $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}$, а на $[x_2, \infty)$ операторы $D_1^{(2)}, D_2^{(2)}$ с $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}$. Здесь верхний индекс означает область оси X. Функция *f(x)* определена на $[x_1, x_2]$ как $f^{(1)}$ и на $[x_2, \infty)$ как $f^{(2)}$.

Таким образом функции a_1, a_2 испытывают в точках x_2 разрыв первого рода. В приложениях это контакт материалов с различными физическими свойствами.

Наложим на функции, что они удовлетворяют на соответствующем промежутке уравнения

$$\begin{aligned} &D_1^{(1)} D_2^{(1)} f^{(1)} = \alpha_1^2 f^{(1)}, x_1 \le x \le x_2 \\ &D_1^{(2)} D_2^{(2)} f^{(2)} = \alpha_2^2 f^{(2)}, x_2 \le x < \infty \end{aligned} \tag{2}$$

Согласно общей теории [1] решения (1) определено как

$$\begin{aligned} &f^{(1)} = Ach\alpha_1 x_1(x, x_1) + Dsh\alpha_1 x_1(x, x_1) \\ &f^{(2)} = Bch\alpha_2 x_2(x, x_2) + Csh\alpha_2 x_2(x, x_2) \end{aligned}, \tag{3}$$

где *A, D, B, C* произвольные константы.

Здесь $f^{(1)}, f^{(2)}$ выражены как ряды ОСБ с нуль точками x_1 и x_2.

Поставим задачу: построить функцию *f(x)* на $\left[x_{1,}\infty\right)$ и обладающую свойствами

$$D_1^{(1)} f^{(1)}\Big|_{x_1} = 0, \tag{4}$$

$$f^{(1)}\Big|_{x_2} = f^{(2)}\Big|_{x_2}, \tag{5}$$

$$-D_1^{(1)} f^{(1)}\Big|_{x_2} + D_1^{(2)} f^{(2)}\Big|_{x_2} = M. \tag{6}$$

Чтобы удовлетворить первому условию (4) равенства нулю потока, т.е. обращение в ноль D_1 – производной в точке x_1 решения (3) возьмем положив D=0.

$$f^{(1)}(x) = Ach\alpha_1 X_1(x, x_1),$$

$$f^{(2)}(x) = Bch\alpha_2 X_2(x, x_2) + Csh\alpha_2 X_2(x, x_2)$$

Условие непрерывности (5) функции *f(x)* в точке $x=x_2$ дает значение *B*.

$$B = Ach\alpha_1 X_1(x_2, x_1) = Aa, \tag{7}$$

где, $a = ch\alpha_1 X_1(x_2, x_1)$.

Из условия наличия разрыва D_1 – производной найдем

$$C = A\frac{\alpha_1}{\alpha_2} sh\alpha_1 \tilde{X}_1(x_2, x_1) + \frac{1}{\alpha_2}M = Ab + \frac{1}{\alpha_2}M, \qquad 8)$$

где, $b = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} sh\alpha_1 \tilde{X}_1(x_2, x_1)$.

Таким образом, если величины *A, M* заданы, то функция определена полностью.

Таким образом, искомая функция может быть записана

$$f^{(1)} = Ach\alpha_1 X_1(x, x_1),$$

$$f^{(2)} = A\left[ach\alpha_2 X_2(x, x_2) + bsh\alpha_2 X_2(x, x_2)\right] + \frac{1}{\alpha_2} Msh\alpha_2 X(x, x_2).$$

Поставим граничные условия третьего типа в некоторой точке x_3 второй области

$$\left(nD_1^{(2)} f^{(2)} + mf^{(2)}\right)\Big|_{x_3} = 0 \tag{9}$$

Покажем, что этим условием при заданной мощности М источников субстанции постоянная А полностью определена. По (9) имеем

$$n(B\alpha_2 sh\alpha_2 \tilde{X}_2(x_3, x_2) + C\alpha_2 ch\alpha_2 \tilde{X}_2(x_3, x_2)) +$$
$$+m(Bch\alpha_2 X_2(x_3, x_2) + Csh\alpha_2 X_2(x_3, x_2)) = 0,$$
$$A\alpha_2 n\left(ash\alpha_2 \tilde{X}_2(x_3, x_2) + bch\alpha_2 \tilde{X}_2(x_3, x_2)\right) +$$
$$+nMch\alpha_2 \tilde{X}_2(x_3, x_2) + mA(ash\alpha_2 X_2(x_3, x_2) +$$
$$+bsh\alpha_2 X_2(x_3, x_2)) + m\frac{1}{\alpha_2} Msh\alpha_2 X_2\left(x_3, x_2\right) = 0,$$

$$A\alpha_2 n\left(ash\alpha_2\tilde{X}_2(x_3,x_2)+bch\alpha_2\tilde{X}_2(x_3,x_2)\right)+$$
$$+mA\left(ach\alpha_2 X_2(x_3,x_2)+bsh\alpha_2 X_2(x_3,x_2)\right)= \qquad (10)$$
$$=-M\left[nch\alpha_2\tilde{X}_2(x_3x_2)+\frac{m}{\alpha_2}sh\alpha_2 x_2(x_3x_2)\right].$$

Поэтому для M имеем:

$$M=\frac{-\left[\alpha A(\alpha_2 nsh\alpha_2\tilde{X}_2(x_3,x_2)+mch\alpha_2 X_2(x_3,x_2))\right.}{nch\alpha_2\tilde{X}_2(x_3,x_2)+\frac{m}{\alpha_2}sh\alpha_2 X(x_3,x_2)}+$$
$$+\frac{\left.bA(\alpha_2 nch\alpha_2\tilde{X}_2(x_3,x_2)+msh\alpha_2 X_2(x_3,x_2))\right]}{nch\alpha_2\tilde{X}_2(x_3,x_2)+\frac{m}{\alpha_2}sh\alpha_2 X(x_3,x_2)}=$$
$$-A\left[\frac{a\alpha_2\left[\alpha_2 nsh\alpha_2\tilde{X}(x_3,x_2)+mch\alpha_2 X_2(x_3,x_2\right]}{n\alpha_2 ch\alpha_2\tilde{X}_2(x_3,x_2)+msh\alpha_2 X_2(x_3,x_2)}+\alpha_2 b\right].$$

Рассмотрим частный, но важный случай, когда на границе x_3 поставлены условия I рода. Тогда $n=0,\ m=1$ и из (10) имеем:

$$A(ach\alpha X_2+bsh\alpha_2 X_2)+\frac{M}{\alpha_2}Msh\alpha_2 X_2=0$$
$$A=-\frac{M}{\alpha_2}\frac{ach\alpha_2 X_2+bsh\alpha_2 X_2}{sh\alpha_2 X_2}$$

Следовательно, из уравнений (7) и (8) найдем коэффициенты B и C.

$$B=-\frac{M}{\alpha_2}\frac{ach\alpha_2 X_2+bsh\alpha_2 X_2}{sh\alpha_2 X_2}ch\alpha_1 X_1(x_2,x_1).$$
$$C=-\frac{M\alpha_1}{\alpha_2^2}\frac{ach\alpha_2 X_2+bsh\alpha_2 X_2}{sh\alpha_2 X_2}sh\alpha_1\tilde{X}_1(x_2,x_1)+\frac{1}{\alpha_2}M.$$

Подставим найденные коэффициенты в решение (3):

$$f^{(1)}(x)=-\frac{M}{\alpha_2}\frac{ach\alpha_2 X_2+bsh\alpha_2 X_2}{sh\alpha_2 X_2}ch\alpha_1 X_1(x,x_1),$$
$$f^{(2)}(x)=-\frac{M}{\alpha_2}\left(\frac{ach\alpha_2 X_2+bsh\alpha_2 X_2}{sh\alpha_2 X_2}\cdot\right.$$
$$\cdot ch\alpha_1 X_1(x_2,x_1)\cdot ch\alpha_2 X_2(x,x_2)+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{ach\alpha_2 X_2+bsh\alpha_2 X_2}{sh\alpha_2 X_2}\cdot$$
$$\left.\cdot sh\alpha_1\tilde{X}_1(x_2,x_1)sh\alpha_2 X_2(x,x_2)+sh\alpha_2 X_2(x,x_2)\right).$$

Введем обозначение

$$k=\frac{ach\alpha_2 X_2+bsh\alpha_2 X_2}{sh\alpha_2 X_2}.$$

Тогда

$$f^{(1)}(x) = -\frac{M}{\alpha_2} kch\alpha_1 X_1(x, x_1),$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{M}{\alpha_2}\Big(kch\alpha_1 X_1(x_2, x_1) \cdot ch\alpha_2 X_2(x, x_2) + \qquad 11)$$

$$+\frac{\alpha_1}{\alpha_2} ksh\alpha_1 \tilde{X}_1(x_2, x_1) sh\alpha_2 X_2(x, x_2) + sh\alpha_2 X_2(x, x_2)\Big).$$

Подставляя конкретные значения α_1 *и* α_2, использованные в (11), дает возможность рассмотреть большое количество частных примеров.

1. Гладышев Ю.А. Формализм Бельтрали-Берса и его приложения в математической физике. – Калуга, 1997 г.;