НЕСТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРОДЕ С КАТОДНЫМ ПЯТНОМ ГАЗОВОГО ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА

Г.Г. Бондаренко[1,2], В.И. Кристя[3], М.И.Супельняк[3]
[1] *Научно-исследовательский институт перспективных материалов и технологий Московского государственного института электроники и математики (технического университета);* [2] *Московский государственный институт электроники и математики (технический университет);* [3]*Калужский филиал МГТУ им.Н.Э.Баумана*
E-mail: bondarenko_gg@rambler.ru

ВВЕДЕНИЕ

Тлеющий разряд в газе атмосферного давления используется в ряде технологических приложений [1-3]. При величине разрядного тока до 1 А он обычно стягивается на катоде в пятно с радиусом порядка 1 мм, т.е. горит в нормальном режиме [4]. В результате поверхность катода в пятне и газ вблизи него нагревается потоком тепла, выделяющегося при движении заряженных частиц в катодном слое разряда. Повышение температуры газа у катода приводит к локальному снижению его концентрации, уменьшению нормальной плотности разрядного тока и увеличению радиуса пятна. Следовательно, после зажигания разряда происходит согласованное изменение температуры катода, радиуса пятна и параметров разряда. Экспериментальные и теоретические исследования параметров разряда и температуры газа в катодном слое нормального тлеющего разряда атмосферного давления и температуры поверхности катода проведены в ряде работ [5-13] в установившемся режиме разряда. Динамика же указанных величин на этапе установления изучалась лишь экспериментально в [8].

В данной работе рассчитано нестационарное распределение температуры в объеме цилиндрического электрода с катодным пятном после зажигания нормального тлеющего разряда атмосферного давления (на этапе установления). Решена система уравнений, связывающая среднюю температуру поверхности электрода в катодном пятне с параметрами катодного слоя разряда, и найдена зависимость ее величины от времени.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть электрод, представляющий собой цилиндр радиуса R и длины L, выполняет функции катода в газовом разряде, причем его начальная температура равна T_0. После зажигания нормального тлеющего разряда в момент времени $t=0$ в центре одного из торцов электрода формируется катодное пятно разряда радиуса $r_s(t)$ (рис. 1). Будем считать ось симметрии цилиндрической системы координат совпадающей с осью электрода и направленной от его рабочей поверхности, лежащей вместе с пятном в плоскости $z=0$, в разрядный объем. В результате протекания тока в

катодном слое разряда на поверхность электрода в пятне падает нагревающий его однородный тепловой поток с плотностью $q_s(t)$, а температура нижнего торца электрода, расположенного в плоскости $z=-L$, через который происходит отвод тепла, остается постоянной и равной T_0. Так как теплопроводность газа много меньше теплопроводности материала электрода, тепловым потоком через его боковую поверхность можно пренебречь. Охлаждение же электрода, обусловленное тепловым излучением с поверхности, в тлеющем разряде не оказывает большого влияния на его тепловой баланс и может не приниматься во внимание. Поэтому распределение температуры в объеме электрода описывается нестационарным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \tag{1}$$

с граничными условиями на торцах

$$\frac{\partial T}{\partial z}(r,0,t)=\begin{cases} q_s(t)/\lambda, & r\le r_s(t) \\ 0, & r_s(t)<r\le R \end{cases}, \tag{2}$$

$$T(r,-L,t)=T_0, \tag{3}$$

на боковой поверхности

$$\frac{\partial T}{\partial r}(R,z,t)=0, \tag{4}$$

и с начальным условием

$$T(r,z,0)=T_0, \tag{5}$$

где $a=\sqrt{\lambda/\rho c}$, λ, ρ и c – коэффициент теплопроводности, плотность и удельная теплоемкость материала электрода, которые будем считать не зависящими от температуры.

Решение данной краевой задачи может быть найдено с помощью конечных интегральных преобразований Ханкеля и Фурье [14] и имеет вид:

$$\begin{gathered} T(r,z,t)=T_0+\frac{2a}{\lambda LR^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\int_0^t q_s(\tau)r_s^2(\tau)\exp\left[-av_m^2(t-\tau)\right]d\tau+\right. \\ \left.+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2J_0(s_i r)}{s_i J_0^2(s_i R)}\int_0^t q_s(\tau)r_s(\tau)J_1(s_i r_s(\tau))\exp\left[-a\left(s_i^2+v_m^2\right)(t-\tau)\right]d\tau\right\}\cos(v_m z). \end{gathered} \tag{6}$$

где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ - функции Бесселя нулевого и первого порядка, $v_m=\pi(2m+1)/2L$, а s_i - корень уравнения $J_1(s_i R)=0$.

Из (6) следует, что среднее значение температуры в пятне равно

$$\begin{gathered} T_s(t)=\frac{2}{r_s^2(t)}\int_0^{r_s(t)}T(r,0,t)rdr= \\ =T_0+\frac{2a}{\lambda LR^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\int_0^t q_s(\tau)r_s^2(\tau)\exp\left[-av_m^2(t-\tau)\right]d\tau+\right. \end{gathered} \tag{7}$$

$$+\frac{4}{r_s(t)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_1(s_i r_s(t))}{s_i^2 J_0^2(s_i R)}\int_0^t q_s(\tau) r_s(\tau) J_1(s_i r_s(\tau))\exp\left[-a\left(s_i^2+\nu_m^2\right)(t-\tau)\right]d\tau\Bigg\}.$$

Так как ширина катодного слоя разряда d_c много меньше радиуса пятна r_s [8,12], температура газа в нем близка к T_s, а практически вся тепловая мощность, выделяемая в катодном слое разряда, уходит в катод через пятно, причем плотность теплового потока в нем равна [8,9]

$$q_s = jU_c, \tag{8}$$

где j и U_c – нормальные плотность тока и катодное падение напряжения разряда.

Плотность тока в пятне нормального тлеющего разряда постоянна по его сечению [4б8], следовательно

$$r_s = (I/\pi j)^{1/2}, \tag{9}$$

где I – разрядный ток.

Значения d_c и U_c определяются уравнениями катодного слоя разряда [13]:

$$d_c = (2/pA)\exp(1/g)\ln(1+1/\gamma_i), \tag{10}$$

$$U_c = Bgpd_c/2, \tag{11}$$

а плотность разрядного тока равна [15]:

$$j = K_0 T_s^{1/2} U_c^{3/2} d_c^{-5/2}, \tag{12}$$

где $g = 1.639$, A и B – постоянные для данного рода газа, входящие в формулу для зависимости коэффициента ионизации газа от напряженности электрического поля [], γ_i – коэффициент ионно-электронной эмиссии материала катода, $K_0 = 4\varepsilon_0(1+\gamma_i)(ek/\sigma p_0 M)^{1/2}$, ε_0 – диэлектрическая постоянная, σ – сечение резонансной перезарядки иона в газе, e и M – заряд и масса иона, k – постоянная Больцмана.

Уменьшение же концентрации газа при его нагреве может быть учтено путем введения эффективного давления газа p 7,16[]:

$$p = p_0 T_0/T_s, \tag{13}$$

где p_0 – давление газа при температуре T_0.

Соотношения (7) - (13) образуют замкнутую систему, описывающую изменение средней температуры поверхности катода в пятне и параметров катодного слоя разряда с течением времени на этапе разогрева после зажигания разряда. Исключая из нее величины q_s, r_s, p, d_c, U_c, j, можно получить уравнение для $T_s(t)$ вида

$$T_s(t) = T_0 + \frac{2\beta}{LR^2}\left[\delta^2\xi(t) + \frac{4a}{T_s(t)}\psi(t)\right], \tag{14}$$

где

$$\xi(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[1-\exp\left(-a\nu_m^2 t\right)\right]\Big/\nu_m^2,$$

$$\psi(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_1\left(s_i\delta T_s(t)\right)}{s_i^2J_0^2\left(s_iR\right)}\int_0^t\frac{J_1\left(s_i\delta T_s(\tau)\right)}{T_s(\tau)}\exp\left[-a\left(s_i^2+v_m^2\right)(t-\tau)\right]d\tau$$

$$\delta=\left[\frac{2I\exp(1/g)\ln(1+1/\gamma_i)}{\pi AK_0\left(Bg/2\right)^{3/2}\left(p_0T_0\right)^{5/2}}\right]^{1/2},\ \beta=\frac{K_0}{\lambda}\left(\frac{1}{2}Bgp_0T_0\right)^{5/2},$$

решение которого может быть найдено численно.

Переходя в нем к пределу $t\to\infty$ с учетом того, что при этом температура стремится к своему стационарному значению $T_{se}=T_s(\infty)$, вычисляя интеграл по τ и суммируя ряд по индексу m [], можно получить уравнение для T_{se} вида

$$T_{se}=T_0+\frac{\beta}{T_{se}^2}\chi(T_{se}),\qquad(15)$$

где

$$\chi\left(T_{se}\right)=\left(\frac{\delta T_{se}}{R}\right)^2L+\frac{4}{R^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_1^2\left(s_i\delta T_{se}\right)\mathrm{th}(s_iR)}{s_i^3J_0^2\left(s_iR\right)}.$$

Если размеры электрода много больше радиуса пятна ($R\to\infty, L\to\infty$), сумма в выражении для $\chi(T_{se})$ превращается в интеграл [17], после вычисления которого из (23) следует уравнение для средней температуры в пятне на электроде, занимающем полупространство $z\le 0$, полученное в работе [13], что подтверждает правильность выражений (14) и (15).

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты проводились для разряда в гелии атмосферного давления с цилиндрическим стальным электродом, используемым в качестве катода ($p_0=10^5$ Па, $T_0=300$ К, $\sigma=2\times10^{-19}$ м^2, $A=2.31$ 1/(м Па), $B=61.0$ В/(м Па), $\gamma_i=0.13$, $\lambda=45$ Вт/(м К) [4,8,11]).

На Рис. 2 приведена зависимость установившейся температуры поверхности электрода в пятне T_{se} от длины электрода L, найденная из уравнения (15) для разрядного тока I =1 А и двух значений его радиуса. Температура поверхности электрода в пятне как функция времени $T_s(t)$, полученная путем численного решения уравнения (14) в последовательные моменты времени, приведена на Рис. 3. Видно, что за время порядка 10 с она достигает значения 450 К, а затем медленно приближается к стационарному значению, которое, как следует из Рис. 2, составляет 460 К.

Экспериментальное исследование зависимости температуры поверхности электрода в пятне от времени горения разряда проведено в работе [8] для электрода радиуса $R=0.018$ м и длины $L=0.01$ м. В ней показано, что за время порядка 200 с она достигает стационарного значения около 750 К. Из Рис. 2, следует, однако, что для электрода указанного радиуса такое стационарное значение температуры достигается лишь при его длине $L=0.12$ м . Такое различие может быть объяснено тем,

что в [8] отвод тепла от электрода происходил через детали его крепления и был существенно затруднен (в частности, при разрядном токе I =2 А он разогревался до красного цвета). Поэтому происходил существенный нагрев также и нижнего торца электрода, т.е. не выполнялось граничное условие (3).

Следовательно, уравнения (14) и (15) можно использовать для разряда с неохлаждаемым катодом лишь при низких величинах разрядного тока (до 0,3 А как показывает сравнение результатов расчета с данными [8]). В случае же использования катода с охлаждаемым нижним торцом условие (3) справедливо также и при высоких разрядных токах. В частности, при $L = 0.0025$ м и $I = 1$ А рассчитанная из (15) средняя температура катода в пятне равна 410 К, что согласуется с найденной в [8] величиной 430 К.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассчитано нестационарное распределение температуры в объеме цилиндрического электрода с катодным пятном на его торце после зажигания нормального тлеющего разряда атмосферного давления. Найдено аналитическое решение нестационарного уравнения теплопроводности и получено уравнение для средней температуры поверхности электрода в пятне, учитывающее влияние нагрева газа у пятна на его размер. Получено также уравнение для стационарной средней температуры поверхности электрода в пятне T_{se}, устанавливающейся после достаточно большого времени горения разряда. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными показывает, что при использовании стального катода с охлаждаемым нижним торцом уравнение для T_{se} справедливо для разрядных токов до 1 А. В случае же неохлаждаемого катода при $I > 0{,}3$ А оно дает значения T_{se} меньшие экспериментальных вследствие использования при его выводе не выполняющегося в таких условиях предположения о фиксированной температуре нижнего торца электрода.

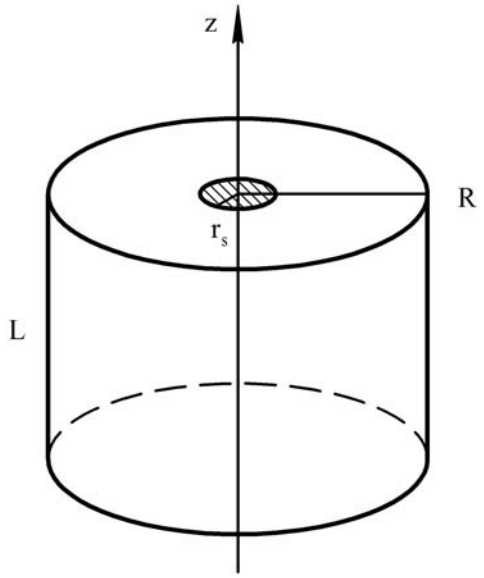

Рис. 1. Геометрия электрода с катодным пятном.

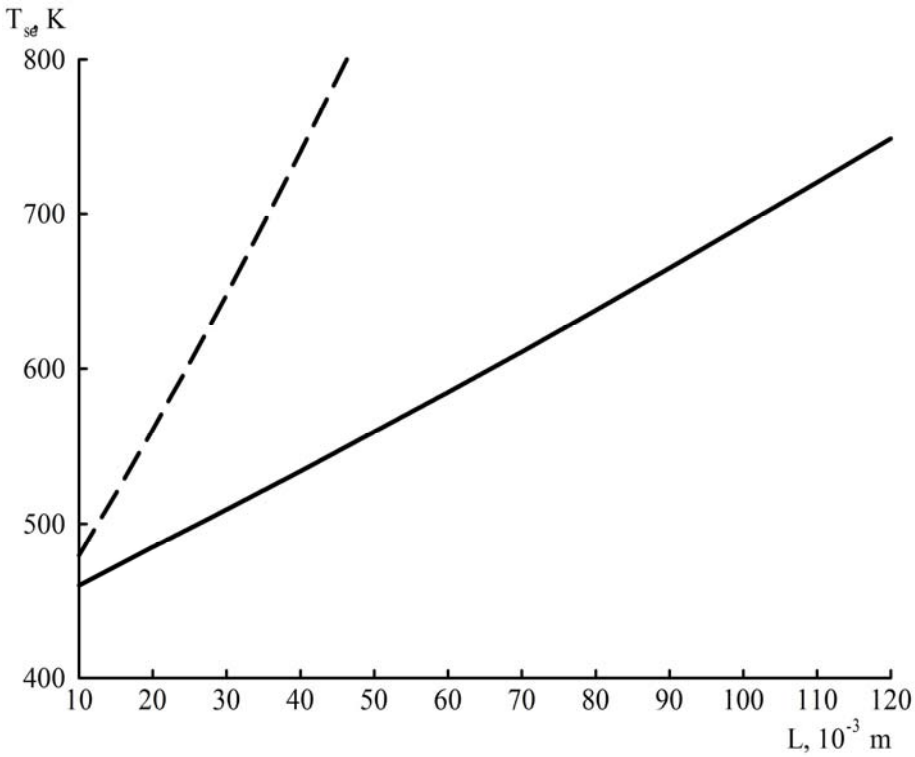

Рис. 2. Зависимость установившейся средней температуры в пятне T_{se} от длины электрода L при $I = 1$ А и двух значениях его радиуса $R = 0.01$ м (сплошная линия) и $R = 0.02$ м (штриховая линия).

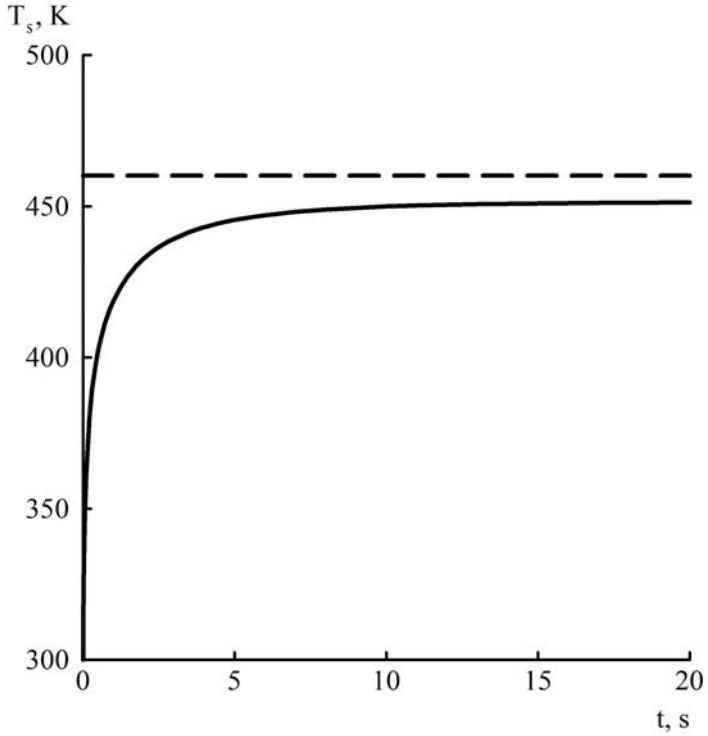

Рис. 3. Зависимость средней температуры в пятне T_s от времени t горения разряда при $I = 1$ А , $R = 0.018$ м, L=0.01 м (сплошная линия) и установившееся значение температуры T_{se}, взятое из Рис. 2 (штриховая линия).

1. J.J. Shi, M.G. Kong // J. Appl. Phys. 2003. V.94. №9. P.5504.
2. M.J. Kushner // J. Phys. D: Appl. Phys. 2005. V.38. №11. P.1633.
3. K.H.Becker, K.H.Schoenbach, J.G.Eden // J. Phys. D: Appl. Phys. 2006. V.39. №3. P.R55.
4. Ю.П. Райзер. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987, 592 с.
5. В.И.Архипенко, С.М. Згировский, А.А. Кириллов, Л.В.Симончик // Физика плазмы. 2002. Т.28. №10. С.930.
6. Q.Wang, I.Koleva, V.M.Donelly, D.J.Economou // J. Phys. D: Appl. Phys. 2005. V.38. №11. P.1690.
7. D.Staack, B.Farouk, A.Gustol, A.Fridman // Plasma Sources Sci. Technol. 2008. V.17. №2. 025013.
8. V.I. Arkhipenko, A.A.Kirillov, Y.A. Safronau, L.V.Simonchik, S.M. Zgirovski // Plasma Sources Sci. Technol. 2008. V.17. №4. 045017.
9. Q.Wang, D.J. Economou, V.M. Donelly // J. Appl. Phys. 2006. V.100. №2. 023301.
10. T.Farouk, B.Farouk, D.Staack, A.Gustol, A.Fridman // Plasma Sources Sci. Technol. 2006. V.15. №4. P.676.
11. S.G.Belostotskiy, V.M.Donelly, D.J.Economou // Plasma Sources Sci. Technol. 2008. V.17. №4. 045018.
12. V.I. Arkhipenko, A.A. Kirillov, Y.A. Safronau, L.V. Simonchik, S.M. Zgirouski // Plasma Sources Sci. Technol. **18** (045013) 2009.
13. В.И. Кристя // Поверхность. Рентген., синротр. и нейтрон. исслед. 2010. №3. С.107.
14. К.Д. Трантер. Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехтеориздат, 1956. 204 с.
15. В.И. Кристя // Изв. РАН. Серия физическая. 2008. Т. 72. № 7. С. 1021.
16. Г.А.Баранов, С.А. Смирнов // ЖТФ. 1999. Т.69. №11. С.42.

17. А.П.Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Марычев Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
18. А.Кратцер, В.Франц.Трансцендентные функции. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. 466 с.