

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Application 1

Фазовый анализ упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния Phase shifts analysis of the ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ scattering

Введение

Во многих задачах ядерной физики низких энергий и ядерной астрофизики требуется знать ядерные фазы упругого рассеяния, которые могут быть определены из дифференциальных сечений упругого рассеяния различных ядерных частиц. Задача определения ядерных фаз из упругих сечений обычно называется фазовым анализом, который, в математическом плане, сводится к многопараметрической вариационной задаче. Когда известны экспериментальные сечения рассеяния ядерных частиц и математические выражения, полученные в квантовой механике, которые описывают эти сечения в зависимости от некоторых параметров δ_L , называемых ядерными фазами рассеяния, возникает многопараметрическая вариационная задача нахождения этих параметров. В разных ядерных системах и в зависимости от энергии сталкивающихся частиц, число этих параметров (фаз упругого рассеяния) может меняться от $1 \div 3$ до $30 \div 40$. Например, в ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеянии мы использовали до 40 парциальных волн, а в ${}^{12}\text{C}$ системе при низких энергиях всего 1 парциальную фазу.

Рассмотрим данные измерения дифференциальных сечений упругого рассеяния и результаты фазового анализа, полученного из этих сечений, для ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ системы при разных энергиях. Основные данные таких исследований относятся к области энергий до 120 МэВ, но не во всей этой области был выполнен последовательный фазовый анализ экспериментально измеренных дифференциальных сечений упругого рассеяния [46].

П1.1 Обзор экспериментальных данных

Приведем краткий обзор экспериментальных данных и результатов фазового анализа упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния, выполненных в разных работах для энергий меньше 120 МэВ:

1. Измерение дифференциальных сечений упругого рассеяния и фазовый анализ в области энергий $0.6 \div 3.0$ МэВ (л.с.) выполнены в работе [218], где сечения и фазы приведены в таблицах, что очень удобно для их использования и в любой момент позволяет повторить все результаты по нахождению фаз рассеяния.

2. Область энергий $3.0 \div 5.0$ МэВ была рассмотрена в работе [219], но фазы и сечения рассеяния приведены только на рисунках.

3. Энергии $3.8 \div 11.9$ МэВ анализировались в работе [220], где результаты фазового анализа приведены в таблице, а дифференциальные сечения рассеяния показаны только на рисунках.

4. Очень аккуратные измерения дифференциальных сечений упругого рассеяния и фазовый анализ выполнены в работах [221,222], где для области энергий $12.3 \div 22.9$ МэВ экспериментальные сечения и фазы рассеяния приведены в таблицах.

5. Область $12.9 \div 21.6$ МэВ рассматривалась и в работе [223], но сечения и фазы рассеяния приведены в ней только на рисунках.

6. Очень хорошие данные для энергий $18.0 \div 29.5$ МэВ приведены в работе [224], где сечения упругого рассеяния и результаты фазового анализа приведены в подробных таблицах.

7. При энергиях $23.1 \div 38.4$ МэВ выполнены экспериментальные измерения сечений и проведен фазовый анализ в работе [225], однако в таблицах приведены только сечения рассеяния.

8. Измерение сечений и фазовый анализ в области $53 \div 120$ МэВ были выполнены в работе [226], но там приведены только табличные фазы, а сечения рассеяния даны на рисунках.

9. Экспериментальные исследования сечений упругого рассеяния для энергий $36.8 \div 47.3$ МэВ были проведены в работе [227], где в подробных таблицах даны результаты измерений дифференциальных сечений, но фазовый анализ этих данных вообще не проводился. Теоретические исследования некоторых энергий из этой области имеются только в работе [228], где выполнен поиск параметров оптического потенциала, а затем, расчетным путем, были получены фазы упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния. Качество оптической подгонки, сделанной в этой области энергий, оставляет желать много лучшего, что непосредственно видно из рисунков работы [228]. Кроме того, при извлечении фаз рассеяния из оптических потенциалов вычислялась только их действительная часть, а мнимая часть фаз считалась малой, находящейся на уровне $1^\circ \div 2^\circ$, что представляется не вполне оправданным для энергий в области 40 МэВ и выше.

10. Энергии 38.5, 49.9 и 51.1 МэВ были рассмотрены в работах [229,230,231] соответственно, где измерены дифференциальные сечения, но фазовый анализ этих данных не проводился. Вместо этого в работах [229,231] получены параметры оптических потенциалов, и в [231], на их основе, вычислены фазы упругого рассеяния.

Из приведенного обзора видно, что стандартный фазовый анализ экспериментальных данных, т.е. дифференциальных сечений упругого рассеяния в ${}^4\text{He}^4\text{He}$ системе при энергиях $36.85 \div 51.1$ МэВ, до сих пор не выполнен. Качество подгонки параметров оптических потенциалов для области энергий $23 \div 47$ МэВ [228] вряд ли можно считать удовлетворительным, что неудивительно, поскольку все эти результаты были получены в 60-е годы.

Поэтому представляется интересным выполнить точный и максимально полный фазовый анализ экспериментальных

дифференциальных сечений упругого рассеяния в области энергий $37 \div 51$ МэВ. Провести такой анализ позволяет табличное представление экспериментальных сечений упругого ${}^4\text{He}$ рассеяния в этой области энергий, приведенное в работах [46,227,229,230].

П1.2 Методы фазового анализа

Рассмотрим задачу фазового анализа и методы определения фаз из экспериментальных данных, т.е. определим способы и подходы, которые использовались в нашем фазовом анализе.

Дифференциальное сечение упругого рассеяния определяется через фазы рассеяния тождественных частиц следующим образом [45]:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2, \quad (\text{П1.1})$$

где амплитуда рассеяния представляется в виде суммы кулоновской и ядерной амплитуд

$$f(\theta) = f_c(\theta) + f_N(\theta) \quad (\text{П1.2})$$

и выражается через ядерные δ_l и кулоновские σ_l фазы рассеяния [45]:

$$f_c(\theta) = -\left(\frac{\eta}{2k \sin^2(\theta/2)}\right) \exp\{i\eta \ln[\sin^{-2}(\theta/2)] + 2i\sigma_0\}, \quad (\text{П1.3})$$

$$f_N(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) \exp(2i\sigma_l) [S_l - 1] P_l(\cos\theta),$$

где k – волновое число относительного движения частиц $k^2 = 2\mu E/\hbar^2$, E – энергия сталкивающихся частиц в центре масс, μ – приведенная масса, η – кулоновский параметр, θ – угол

рассеяния, $P_l(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра.

Ядерные фазы рассеяния представляются в виде

$$\delta_l = \text{Re}\delta_l + i\text{Im}\delta_l ,$$

тогда для матрицы рассеяния и параметра неупругости получим

$$S_l(k) = \eta_l(k)\exp[2i\text{Re}\delta_l(k)] ,$$

$$\eta_l(k) = \exp[-2\text{Im}\delta_l(k)] .$$

Суммирование в выражении (П1.3) выполняется только по четным l , поскольку нечетные парциальные волны не дают вклада в полное сечение, и проводится до некоторого L , величина которого зависит от энергии.

Кулоновскую амплитуду рассеяния (П1.3), используя выражение

$$D = \sin^{-2}(\theta/2) = 2/[1 - \cos(\theta)] ,$$

можно записать в виде

$$f_c = -\eta D/2k [\cos(C) + i\sin(C)] ,$$

где

$$C = 2\sigma_0 + \eta \ln A .$$

Ядерная амплитуда может быть представлена в следующей форме

$$f_n = \frac{1}{2k} \sum_L^{\hat{L}} \left\{ \begin{array}{l} [B\cos(2\sigma_L) + A\sin(2\sigma_L)] + \\ + i[B\sin(2\sigma_L) - A\cos(2\sigma_L)] \end{array} \right\} P_L(x), \quad (\text{П1.4})$$

где

$$x = \cos(\theta) , \quad \hat{L} = 2l + 1 , \quad A = \eta_l \cos(2\delta_l) - 1 , \quad B = \eta_l \sin(2\delta_l)$$

зависят только от ядерных фаз, параметра неупругости и орбитального момента.

Кулоновские фазы рассеяния выражаются через Гамма - функцию [45]

$$\sigma_l = \arg\{\Gamma(l + 1 + i\eta)\}$$

и удовлетворяют рекуррентному процессу

$$\sigma_l = \sigma_{l+1} - \text{Arctg}\left(\frac{\eta}{l+1}\right) .$$

Откуда сразу можно получить следующее выражение для кулоновских фаз

$$\alpha_l = \sigma_l - \sigma_0 = \sum_{n=1}^l \text{Arctg}\left(\frac{\eta}{n}\right) , \quad \alpha_0 = 0 .$$

Величина α_l используется в преобразованных выражениях (П1.3), если вынести общий множитель $\exp(2i\sigma_0)$. Тогда $\sigma_l \rightarrow \alpha_l$ с $\alpha_0 = 0$, что избавляет нас от необходимости вычислять кулоновские фазы в явном виде, и кулоновская амплитуда принимает следующую форму

$$f_c(\theta) = -\left(\frac{\eta}{2k \sin^2(\theta/2)}\right) \exp\{i\eta \ln[\sin^2(\theta/2)]\} .$$

В ${}^4\text{He}^4\text{He}$ задаче с нулевым спином набор фаз $\delta_{S,l}^J$, зависящий от полного момента J и спина S , переходит в δ_l . Поскольку $S = 0$, то полный момент равен орбитальному моменту $J = l$.

Для поиска ядерных фаз рассеяния по экспериментальным сечениям выполняется процедура минимизации функ-

ционала χ^2 , как функции $2L+2$ переменных, каждая из которых является фазой δ_l определенной парциальной волны рассеяния и неупругостью η_l в этой волне [46].

В этих расчетах задавались целые значения масс частиц, константа \hbar^2/m_0 принималась равной 41.4686 МэВ·Фм², а кулоновский параметр определен во второй главе.

П1.3 Проверка компьютерной программы

Для выполнения данного фазового анализа была написана компьютерная программа на языке "Basic" для компилятора "Turbo Basic" фирмы "Borland International Inc." [232], использующая режим двойной точности, которая затем переведена на Fortran - 90 системы PS - 4. Программа тестировалась по выполненному ранее фазовому анализу из различных работ при разных энергиях. Приведем здесь некоторые из этих тестов.

Например, при энергии 6.47 МэВ (л.с.) в работе [220] приводятся следующие фазы: $\delta_0 = 79.5^\circ \pm 2^\circ$, $\delta_2 = 80.8^\circ \pm 2^\circ$. В нашем фазовом анализе для них получаются значения $\delta_0 = 80.43^\circ$, $\delta_2 = 80.73^\circ$ при $\chi^2 = 0.18$. Ошибка определения сечений из рисунков работы [220] принималась равной 10%, что и объясняет столь малую величину χ^2 . При энергии 12.3 МэВ в работе [222] получено $\delta_0 = 29^\circ \pm 4^\circ$, $\delta_2 = 103^\circ \pm 8^\circ$, $\delta_4 = 3^\circ \pm 1.5^\circ$, а наш анализ дает $\delta_0 = 28.37^\circ$, $\delta_2 = 105.03^\circ$, $\delta_4 = 2.62^\circ$ при $\chi^2 = 3.43$. В этой же работе для 17.8 МэВ найдено $\delta_0 = 7^\circ \pm 2^\circ$, $\delta_2 = 104^\circ \pm 4^\circ$, $\delta_4 = 16.2^\circ \pm 2^\circ$, а в наших вычислениях мы приходим к значениям $\delta_0 = 7.25^\circ$, $\delta_2 = 103.93^\circ$, $\delta_4 = 17.0^\circ$ при $\chi^2 = 0.46$. В работе [222] рассмотрена и энергия 22.9 МэВ, для которой получены следующие фазы: $\delta_0 = 169.7^\circ \pm 2^\circ$, $\delta_2 = 94.0^\circ \pm 2^\circ$, $\delta_4 = 59.2^\circ \pm 2^\circ$, $\delta_6 = 1.09^\circ$. Наш фазовый анализ этих данных дает величины $\delta_0 = 169.30^\circ$, $\delta_2 = 94.49^\circ$, $\delta_4 = 59.55^\circ$, $\delta_6 = 1.0^\circ$ при $\chi^2 = 1.46$.

При энергиях 12.3, 17.8 и 22.9 МэВ дифференциальные сечения, их ошибки, фазы рассеяния и величина χ^2 приведе-

ны в таблицах [222], но сравнивать можно только сами фазы рассеяния. Сравнить χ^2 достаточно сложно, потому что в работах [220,222] рассматривается не величина χ^2 , определенная выше во второй главе (2.12), а ее производная, зависящая от некоторых констант, связанных с экспериментальной методикой.

Приведем более подробно вариант контрольного счета, который выполнен для упругого $^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния при энергии 29.5 МэВ. В работе [224], где даны экспериментальные сечения и результаты фазового анализа (см. табл.П1.1), для среднего χ^2 была получена величина 0.68, но методы ее расчета несколько отличаются от изложенных выше, поэтому значение 0.68 также нельзя напрямую сравнивать с нашими результатами.

Табл.П1.1. Сравнение результатов фазового анализа из работы [224] и наших результатов при 29.5 МэВ.

δ_l , град.	Результаты [224]	Наши результаты
δ_0	150.88 ± 0.17	150.76
δ_2	86.90 ± 0.13	86.61
δ_4	121.19 ± 0.17	120.00
δ_6	2.20 ± 0.11	2.16
δ_8	0.11 ± 0.08	0.09

В результате наших расчетов с фазами из работы [224] для среднего χ^2 по всем точкам получено 1.086. Если учесть весовые множители из [224] можно получить величину 0.6, вполне согласующуюся с результатами этой работы.

Далее нами выполнены подробные расчеты с минимизацией χ^2 по нашей программе, приведенной далее, и сравнение результатов с экспериментальными данными [224]. Для среднего χ^2 было получено 0.600 (вместо 1.086), т.е. наблюдается улучшение качества описания эксперимента почти в 2 раза при очень небольшом изменении значений самих фаз, которые показаны в табл.П1.1.

В работе [224] получены данные и при энергии 25.5 МэВ,

для которой найдены фазы $\delta_0 = 160,36^\circ \pm 1.01^\circ$, $\delta_2 = 89.37^\circ \pm 1.54^\circ$, $\delta_4 = 88.64^\circ \pm 1.77^\circ$, $\delta_6 = 1.61^\circ \pm 0.39^\circ$, $\delta_8 = 0.36^\circ \pm 0.19^\circ$. Наш расчет с этими фазами приводит к $\chi^2 = 2.127$. Выполняя дополнительное варьирование фаз рассеяния, получим заметное улучшение описания имеющихся данных с $\chi^2 = 0.886$. Для фаз получены следующие значения: $\delta_0 = 160.49^\circ$, $\delta_2 = 89.00^\circ$, $\delta_4 = 88.60^\circ$, $\delta_6 = 1.41^\circ$, $\delta_8 = 0.18^\circ$, которые совпадают с результатами [224] в пределах, приведенных в этой работе, ошибок фаз рассеяния.

Небольшие отличия в фазах рассеяния могут быть обусловлены различными значениями констант или масс частиц, которые используются в таких расчетах. Например, можно использовать точные значения масс частиц или же их целые величины, а константа \hbar^2 / m_0 может быть равна 41.47 или, например, 41.4886 МэВ·Фм². Поэтому, в целом можно считать, что во всех рассмотренных выше случаях, которые можно считать контрольными, наши результаты, в пределах, приведенных в различных работах ошибок фаз, совпадают с данными, полученными ранее и разными авторами.

П1.4 Результаты фазового анализа

Приведем теперь результаты нашего фазового анализа в области энергий $30 \div 40$ МэВ, которая исследовалась в работе [225], где в таблицах приведены экспериментальные сечения упругого рассеяния, а результаты фазового анализа даны на рисунках.

В работе [225] рассматривалась энергия 30.3 МэВ, для которой получены фазы рассеяния 135 ± 5 , 75 ± 5 , 110 ± 5 , -2 ± 1 (здесь и далее фазы приведены в градусах), в целом описывающие экспериментальные данные. Приведенные здесь ошибки определяют точность определения этих фаз из рисунков работы [225]. Используя их в качестве начальных и выполняя варьирование фаз с шестью парциальными волнами, получим $\chi^2 = 2.11$ с фазами 135.89, 76.51, 116.29, 0.0, которые вполне согласуются с результатами [225]. Видно, что

достаточно четырех парциальных волн ($l = 0,2,4$), чтобы сравнительно хорошо описать такие сечения. Для получения $\chi^2 = 0.177$ требуется уже $L = 16$ и учет мнимой части фаз, но парциальный χ^2_i при 85 градусах все же остается порядка 1.6. И только увеличение L до 20 позволяет получить $\chi^2 = 0.108$ со всеми парциальными χ^2_i меньше единицы и фазами

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Re}} &= 134.4998; 69.7085; 116.0319; 0.0; 0.0476; 2.5423; 0.8548; \\ &\quad 4.4579; 0.1409; 0.0; 1.0187; \\ \delta_{\text{Im}} &= 1.8530; 3.1955; 0.4002; 3.6621; 0.0; 4.0655; 1.5142; \\ &\quad 3.7219; 2.1339; 0.0; 0.1611, \end{aligned}$$

действительная часть которых в пределах ошибок вполне согласуется с результатами работы [225].

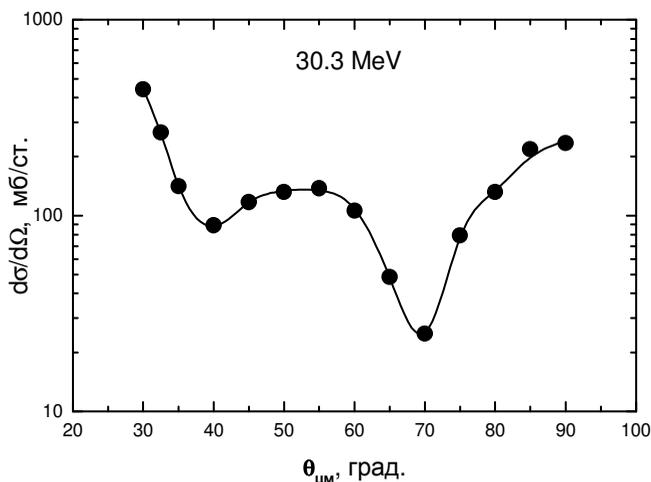


Рис.П1.1. Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа - частиц на ядрах гелия при энергии 30.3 МэВ [225].

Точки – экспериментальные данные [225], сплошная кривая – расчет сечений с найденными фазами.

Приведенная точность фаз обусловлена тем, что их округление даже до сотых долей при L порядка 20 может изменить χ^2 в $2 \div 3$ раза. На рис.П1.1 показаны результаты расче-

тов сечений с этими фазами.

В работе [225] была рассмотрена также энергия 31.8 МэВ и на рисунках приведены фазы рассеяния 144 ± 5 , 79 ± 5 , 126 ± 5 при $l = 0, 2, 4$. Используя их в качестве начальных фаз, т.е. входных параметров для нашей программы, и выполняя варьирование, получим $\chi^2 = 1.99$. Для фаз рассеяния, приводящих к такому минимуму χ^2 , найдены величины $\delta_{\text{Re}} = 143.78, 78.39, 125.71$, которые полностью совпадают с результатами работы [225].

Дальнейшее увеличение числа парциальных волн без учета мнимой части не приводит к заметному улучшению описания экспериментальных данных. И только если учесть мнимую часть фаз и выполнить варьирование с десятью парциальными волнами, можно получить улучшение величины χ^2 до 1.10 со следующими фазами

$$\delta_{\text{Re}} = 142.89; 78.09; 125.80; 0.0; 0.14; 0.41;$$

$$\delta_{\text{Im}} = 0.0; 0.0; 0.0; 0.0; 1.26; 0.59.$$

Однако при таком значении $L = 10$ некоторые парциальные χ^2_i заметно превышают единицу. И только при $L = 16$ можно получить хорошее описание экспериментальных данных со средним $\chi^2 = 0.088$, всеми парциальными χ^2_i лежащими в области $0.003 \div 0.5$, и фазами

$$\delta_{\text{Re}} = 152.5263; 69.4016; 126.8901; 0.0; 1.3442; 4.5831; 0.0918;$$

$$2.1935; 0.1769;$$

$$\delta_{\text{Im}} = 0.0; 2.0620; 5.3600; 1.4498; 0.2164; 5.6597; 2.2074;$$

$$2.8611; 0.4500.$$

Из этих результатов видно, что увеличение числа парциальных волн заметно сказывается на величине S - и D - фаз рассеяния, практически не меняя G - волну, а мнимая часть фаз при 30.3 и 31.8 МэВ уже оказывает существенное влияние на качество описания дифференциальных сечений, хотя мнимые части фаз сравнительно малы.

Энергия 34.2 МэВ также была рассмотрена в работе

[225], где на рисунках приведены фазы рассеяния 145 ± 5 , 65 ± 5 , 145 ± 5 , 5 ± 2 при $l = 0, 2, 4, 6$, с которыми можно получить $\chi^2 = 6.4$. Выполняя далее варьирование фаз, и включая восьмую парциальную волну, находим заметное улучшение описания экспериментальных данных с $\chi^2 = 0.976$. Для фаз рассеяния были получены следующие величины: $\delta_{Re} = 145.18$, 69.10 , 143.52 , 4.20 , 0.65 , которые практически совпадают с данными [225] в шести парциальных волнах.

Дальнейшее увеличение числа парциальных волн до 20 и учет мнимой части фаз приводит к уменьшению χ^2 только до 0.56 и уже не оказывает существенного влияния на качество описания экспериментальных данных, поскольку некоторые парциальные χ^2_i имеют величину порядка трех. И только увеличение числа парциальных волн до 26 приводит к достаточно гибкому вариационному базису, который дает среднее $\chi^2 = 0.065$ со всеми парциальными χ^2_i меньше 0.4 и фазами

$$\begin{aligned} \delta_{Re} &= 140.8989; 54.4378; 133.2759; 0.9489; 0.3164; 0.7580; \\ &5.3713; 0.1052; 0.0; 0.3722; 2.6026; 0.1765; 0.9466; 3.0101; \\ \delta_{Im} &= 1.2698; 3.0833; 3.3667; 2.9079; 1.4433; 0.0; 3.2185; \\ &0.0400; 1.8923; 0.3312; 1.6748; 0.6881; 0.0; 0.8276. \end{aligned}$$

Здесь мы наблюдаем заметное изменение значений D - и G - фаз рассеяния, по сравнению с результатами при $L = 8$.

Следующая энергия, которая была рассмотрена в работе [225] - это 35.1 МэВ и для нее были получены фазы 147 ± 5 , 80 ± 5 , 150 ± 5 , 7 ± 2 при $l = 0, 2, 4, 6$. Используя их в качестве начальных, нами выполнено варьирование при $L = 8$ без мнимой части. В результате получено $\chi^2 = 2.2$ с фазами 142.29, 76.95, 147.46, 5.42, 1.67, которые вполне согласуются с результатами [225] для первых значений l .

При увеличении L до 16 и учете мнимой части фаз получается очень хорошее описание экспериментальных данных при $\chi^2 = 0.015$ с парциальными χ^2_i меньше 0.06 и фазами

$$\begin{aligned} \delta_{Re} &= 155.1029; 70.2311; 137.7721; 0.0; 1.0646; 3.1268; 1.9988; \\ &0.4711; 1.7829; \end{aligned}$$

$$\delta_{lm} = 3.3855; 0.4609; 4.6500; 0.8327; 1.1338; 1.5133; 5.1306; 0.0; 3.3445.$$

При увеличении числа парциальных волн наблюдается заметное изменение фаз рассеяния уже для трех первых l . Результаты расчетов дифференциальных сечений для этой энергии представлены на рис.П1.2.

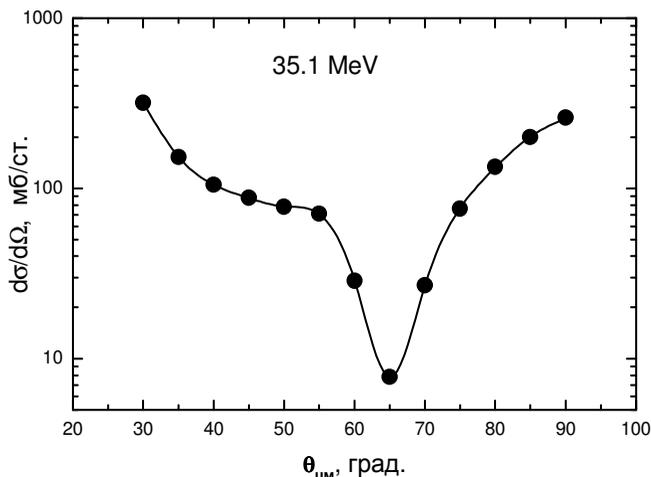


Рис.П1.2. Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа - частиц на ядрах гелия при энергии 35.1 МэВ [225]. Точки – экспериментальные данные [225], сплошная кривая – расчет сечений с найденными фазами.

Далее в [225] была рассмотрена энергия 37.0 МэВ, для которой на рисунках приведены следующие фазы: 137 ± 5 , 72 ± 5 , 145 ± 5 , -2 ± 2 . Выполняя варьирование фаз с этими начальными условиями при $L = 6$, имеем $\chi^2 = 5.95$ и фазы 135.07, 73.23, 147.97, 0.95, которые хорошо согласуются с данными работы [225].

При $L = 20$ удается получить $\chi^2 = 0.20$, но некоторые парциальные χ^2_i остаются больше единицы, а именно, равными 1.5 при 85 градусах. И только увеличение L до 24 позволяет получить практически нулевое $\chi^2 = 0.003$ при всех парциаль-

ных χ^2_i меньше 0.01 и фазы

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Re}} &= 111.5375; 55.9449; 138.4665; 8.1425; 0.0; 10.6324; 3.1546; \\ &7.1735; 2.6095; 1.8621; 3.6626; 0.0; 0.7932; \\ \delta_{\text{Im}} &= 3.5728; 1.5788; 10.0754; 6.7187; 0.0515; 7.7003; 7.8696; \\ &9.2205; 1.9690; 0.0; 1.2802; 0.0562; 0.2180, \end{aligned}$$

которые заметно отличаются от результатов работы [225] и наших вычислений при $L = 6$ без учета мнимой части.

В работе [225] была рассмотрена и энергия 38.4 МэВ, для которой на рисунках приведены следующие фазы рассеяния: 135 ± 5 , 75 ± 5 , 170 ± 5 , 5 ± 2 . С такими фазами без варьирования их значений по нашей компьютерной программе получается $\chi^2 = 19.5$. Варьируя значения фаз, находим существенное улучшение описания эксперимента при шести парциальных волнах с $\chi^2 = 1.39$. Для фаз рассеяния были получены следующие значения: 137.65, 89.62, 175.80, 6.35. Здесь только D -волна заметно отличается от результатов работы [225]. Увеличим теперь L до 10 и учтем мнимую часть фаз. Величина χ^2 уменьшается до 0.91 с фазами $\delta_{\text{Re}} = 134.09$, 86.30, 170.78, 5.39, 1.25, 0.78 и $\delta_{\text{Im}} = 0.0$, 0.0, 1.00, 0.49, 0.39, 0.62, но некоторые парциальные χ^2_i все же остаются намного больше единицы.

В спектрах ядра ${}^8\text{Be}$ в области 19 МэВ имеется несколько узких уровней, которые должны оказывать определенное влияние на экспериментальные сечения при энергии 38.4 МэВ. Возможно поэтому увеличение L даже до 28 приводит к $\chi^2 = 0.207$ с почти всеми парциальными χ^2_i меньше единицы, за исключением одного угла при 66 градусах, при котором экспериментальное сечение равно 2.7 ± 0.5 мб, а расчетное не поднимается больше 2.0 мб, что приводит к величине χ^2_i около 2 и фазам

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Re}} &= 129.8968; 76.4875; 167.6839; 1.7278; 0.0; 2.0189; 0.1684; \\ &0.0051; 0.6075; 0.5257; 0.0056; 0.0211; 0.3073; 0.3494; 0.0575; \\ \delta_{\text{Im}} &= 4.2386; 2.3498; 0.5185; 0.3036; 1.6971; 0.0; 1.4852; \\ &1.7773; 0.0747; 0.1783; 0.6247; 2.1599; 0.0; 1.0262; 0.5343. \end{aligned}$$

Дальнейшее увеличение числа парциальных волн не приводит к улучшению описания экспериментальной точки при 66 градусах и практически не меняет величину χ^2 . Полученные таким образом фазы несколько отличаются от наших результатов при $L = 6 \div 10$, но вполне согласуются с результатами работы [225] для первых l .

В работе [229] в таблице приведены дифференциальные сечения при энергии 38.5 МэВ, но фазовый анализ этих данных не выполнялся. Используем в качестве начальных фазы, полученные в предыдущем случае при $L = 16$, находим $\chi^2 = 0.55$. Для $L = 24$ получаем $\chi^2 = 0.50$, и только при 26 парциальных волнах χ^2 начинает уменьшаться, и оказывается равен 0.265, а для $L = 30$ χ^2 достигает своего предела, равного 0.207 с фазами

$$\delta_{\text{Re}} = 129.9036; 77.1998; 165.6615; 1.5187; 0.5671; 2.1129; \\ 0.0601; 0.0; 0.6059; 0.4907; 0.0005; 0.0896; 0.3055; 0.4272; \\ 0.1328; 0.0;$$

$$\delta_{\text{Im}} = 3.8528; 2.4699; 1.1513; 0.9460; 1.4118; 0.0; 1.7083; \\ 2.0442; 0.0; 0.2196; 0.8160; 2.4573; 0.0; 0.9449; 0.4563; 0.0.$$

И здесь, как и в предыдущем случае, все парциальные χ^2_i меньше единицы, за исключением того же угла при 66 градусах, при котором разница экспериментального и расчетного сечений приводит к величине χ^2_i около 2.

Далее, в первой из работ [233] на рисунках приведены данные для энергий 39, 40 и 41 МэВ – используем одну из них, а именно 40 МэВ, для фазового анализа. Принимая в качестве начальных фаз результаты предыдущего анализа, для $L = 12$ получим $\chi^2 = 0.22$ со следующими фазами

$$\delta_{\text{Re}} = 69.4967; 49.5392; 81.4271; 1.3593; 0.0; 0.9287; 0.0255; \\ \delta_{\text{Im}} = 0.8975; 0.0; 4.5934; 7.1150; 1.2930; 0.0; 0.1762.$$

Дальнейшее увеличение числа парциальных волн не приводит к заметному уменьшению χ^2 . Полученные фазы рассеяния заметно отличаются от найденных ранее для энер-

гии 38.4 МэВ и далее рассмотренной энергии 40.77 МэВ. Отметим, что в работе [228] для энергии 40 МэВ из оптических потенциалов были получены следующие фазы: 75.4, 22.3, 84.6, 5.1, 0.35, которые существенно отличаются от наших результатов только в D - волне.

Из приведенного анализа видно, что в рассмотренной области энергий практически во всех случаях наши результаты при малом числе парциальных волн, в пределах приведенных ошибок, совпадают с данными, полученными ранее. Поскольку мы учитывали большее число парциальных волн, можно считать такие результаты уточнением известных данных по фазам упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния в области $30 \div 40$ МэВ.

Перейдем теперь к рассмотрению данных по дифференциальным сечениям в области энергий $40 \div 50$ МэВ, для которых проводилась только оптическая подгонка потенциалов, а фазовый анализ не выполнялся.

В работе [227] была рассмотрена энергия 40.77 МэВ и в таблицах приведены дифференциальные сечения упругого рассеяния. На основе этих данных в [228] была проведена подгонка параметров оптических потенциалов, а фазы рассеяния рассчитывались на их основе, причем приведена только их действительная часть. В результате были получены фазы 94.4, 21.8, 86.0, 5.4, 0.38 для $l = 0, 2, 4, 6, 8$.

Используя их в качестве начальных и выполняя варьирование при $L = 8$ и учете мнимой части фаз, получим $\delta_{\text{Re}} = 146.46, 44.09, 92.40, 9.48, 0.0$ и $\delta_{\text{Im}} = 28.32, 0.02, 0.0, 1.78, 0.0$ при $\chi^2 = 5.0$. Увеличение L до 34 приводит нас к $\chi^2 = 1.34$, а при $L = 40$ к $\chi^2 = 1.21$ с фазами рассеяния (некоторые парциальные χ^2 ; заметно больше единицы)

$$\delta_{\text{Re}} = 124.9455; 37.3915; 86.8874; 1.8977; 0.0; 1.1045; 1.9122; \\ 0.0897; 4.1335; 2.7145; 4.0382; 0.3077; 0.0; 0.1285; 0.7936; \\ 1.1646; 0.4322; 0.0; 0.1584; 0.0; 0.1347;$$

$$\delta_{\text{Im}} = 18.7685; 4.3167; 0.0011; 1.5199; 0.0001; 1.4317; 1.9380; \\ 0.9304; 0.0; 0.3225; 0.4839; 2.2038; 1.0627; 0.6151; 0.0822; 0.0; \\ 0.5439; 0.4801; 0.1615; 0.1930; 0.0.$$

Результаты расчетов дифференциальных сечений при этой энергии показаны на рис.П1.3.

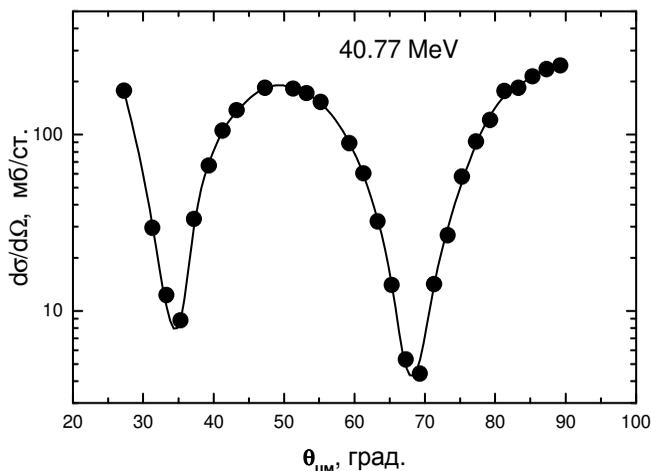


Рис.П1.3. Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа - частиц на ядрах гелия при энергии 40.77 МэВ [227].

Точки – экспериментальные данные [227], сплошная кривая – расчет сечений с найденными фазами.

Далее в работе [227] была рассмотрена энергия 41.9 МэВ, измеренные сечения приведены в таблице, а теоретический анализ вообще не проводился. С фазами рассеяния для предыдущей энергии и $L = 8$, но при 41.9 МэВ, получаем очень большое значение χ^2 , равное 1300. Варьирование фаз с восемью парциальными волнами и учетом мнимой части приводит к следующему результату: $\delta_{Re} = 108.91, 56.36, 110.12, 12.53, 2.44$ и $\delta_{Im} = 22.74$ при $L = 0$, а остальные мнимые фазы равны нулю, и величине $\chi^2 = 10.3$. Увеличение L до 14 приводит к несколько лучшему результату $\chi^2 = 5.66$, при $L = 30$ находим $\chi^2 = 4.10$, и только увеличение L до 40 позволяет получить заметно меньшее $\chi^2 = 0.857$ со следующими фазами рассеяния

$\delta_{Re} = 105.8962; 53.0717; 103.3716; 16.0950; 0.0; 0.0710; 3.9094;$

1.5391; 0.0; 0.5518; 1.4615; 0.0091; 0.4501; 0.0; 1.1544; 0.0631;
0.1885; 0.8750; 0.0000; 0.4869; 0.0;
 $\delta_{\text{im}} = 19.0395; 0.0005; 0.0; 0.2844; 0.0; 0.1207; 0.4153; 0.0;$
0.2214; 0.1117; 0.0968; 0.0069; 0.5820; 0.2484; 0.2132; 0.3826;
0.3416; 0.3118; 0.0642; 0.1986; 0.1950.

И при этой энергии 41.9 МэВ, несмотря на сравнительно малое среднее χ^2 , некоторые парциальные χ^2_i оказываются больше единицы.

Следующая энергия, рассмотренная в работе [227] – это 44.41 МэВ. Используем в качестве начальных фаз результаты предыдущего анализа, тогда при $L = 8$ получим величину $\chi^2 = 10.85$ с фазами $\delta_{\text{Re}} = 98.46, 73.53, 128.64, 17.86, 3.93$ и $\delta_{\text{Im}} = 12.31, 3.97, 4.85, 0.0, 0.88$. При $L = 20$ получаем некоторое улучшение описания дифференциальных сечений с $\chi^2 = 4.97$, а, увеличивая L до 30, находим $\chi^2 = 0.97$. Для $L = 34$ можно получить еще некоторое улучшение $\chi^2 = 0.68$, и только увеличение L до 40 приводит к заметному улучшению описания экспериментальных данных при $\chi^2 = 0.48$ и фазам

$\delta_{\text{Re}} = 117.3916; 72.1036; 115.9565; 16.7765; 3.3375; 0.3926;$
0.0756; 0.0270; 0.0; 2.6021; 2.2519; 0.2051; 0.1094; 0.0091; 0.0;
0.2321; 0.3424; 0.0896; 0.0557; 0.0609; 0.0279;
 $\delta_{\text{Im}} = 30.1833; 9.4258; 3.4545; 0.1919; 1.4489; 2.9905; 1.8006;$
1.2168; 0.0054; 0.1728; 0.3725; 0.0587; 0.3169; 0.1322; 0.0572;
0.0; 0.0583; 0.0817; 0.0583; 0.0316; 0.0383.

Но и здесь некоторые парциальные χ^2_i имеют величину несколько больше единицы.

В работе [227] приведены и данные по дифференциальным сечениям для энергии 47.1 МэВ. Измеренные сечения даны в таблицах, а извлечение фаз [228] из оптических потенциалов приводит к следующим действительным фазам рассеяния: 99, 51.8, 145.5, 18.7, 2.8. Наши вычисления с такими фазами дают $\chi^2 = 156$, а учет мнимой части фаз и их варьирование позволяет улучшить согласие с экспериментом почти на 1.5 порядка и получить $\chi^2 = 2.63$. Фазы рассеяния

для этой энергии и $L = 8$ оказались следующими: $\delta_{\text{Re}} = 105.34, 55.05, 140.60, 18.85, 2.84$ и $\delta_{\text{Im}} = 5.48, 0.52, 0.78, 0.85, 0.03$, действительная часть которых практически совпадает с результатами [228].

Увеличим теперь L и посмотрим, сколько парциальных волн нужно учитывать для получения χ^2 порядка единицы. При 14 парциальных волнах получаем $\chi^2 = 1.33$, для $L = 20$ находим $\chi^2 = 1.02$, и только при 30 парциальных волнах имеем $\chi^2 = 0.70$ с фазами

$$\delta_{\text{Re}} = 106.1704; 51.6346; 134.1084; 17.2203; 2.3269; 0.3964; 0.6347; 0.0; 0.4220; 0.2338; 0.4530; 0.0; 0.0020; 0.0; 0.1307; 0.3588;$$

$$\delta_{\text{Im}} = 11.9789; 3.4758; 1.2031; 0.0; 0.0544; 1.0305; 1.1103; 0.5890; 0.2763; 0.1363; 0.4951; 0.2665; 0.2795; 0.0; 0.0; 0.1021.$$

И при этой энергии некоторые парциальные χ^2_i имеют величину несколько больше единицы.

Рассмотрим теперь энергию 51.1 МэВ. Сечения были измерены в работе [231] и приведены на рисунках, а фазовый анализ вообще не проводился. Поэтому используем в качестве начальных фаз результаты работы [226] при 53.4 МэВ, где для реальной части фаз получено $\delta_0 = 104.8 \pm 2.4$, $\delta_2 = 47.9 \pm 1.7$, $\delta_4 = 137.9 \pm 1.3$, $\delta_6 = 27.5 \pm 0.6$, $\delta_8 = 2.0 \pm 0.5$. Для мнимой части соответственно найдено 12.1 ± 3.1 , 22.1 ± 1.7 , 16.3 ± 1.1 , 3.2 ± 0.5 , 0 ± 0.4 .

Выполняя варьирование этих фаз при $L = 10$, получим $\chi^2 = 1.12$, а для самих фаз рассеяния находим $\delta_{\text{Re}} = 111.30, 54.76, 152.85, 24.97, 3.34, 0.03$ и $\delta_{\text{Im}} = 14.03, 19.98, 23.36, 1.91, 0.27, 0.12$. В качестве экспериментальных ошибок использовались ошибки определения сечений из рисунка работы [231], которые принимались равными 10%.

Увеличение L до 20 позволяет получить несколько лучшее $\chi^2 = 0.97$ и фазы рассеяния

$$\delta_{\text{Re}} = 110.8739; 55.0885; 151.8536; 24.9089; 3.2213; 0.0379; 0.0;$$

$$0.2313; 0.1331; 0.2534; 0.2644;$$

$$\delta_{\text{Im}} = 14.9625; 20.3880; 23.6627; 1.8434; 0.3412; 0.1910; 0.0009;$$

$$0.0; 0.0; 0.0; 0.1214.$$

Эти фазы мало отличаются от наших результатов при 10 парциальных волнах, а увеличение числа парциальных волн до 30 приводит к $\chi^2 = 0.56$, что принципиально не меняет качество описания экспериментальных данных.

Отметим, что в работе [231] была выполнена подгонка оптического потенциала, а затем вычислены следующие фазы рассеяния δ_l и неупругости η_l

$$\delta_{\text{Re}} = 111 \pm 4; 65 \pm 4; 163 \pm 4; 28 \pm 3; 4.2 \pm 0.6;$$

$$\eta = 0.51 \pm 0.07; 0.51 \pm 0.07; 0.53 \pm 0.07; 0.855 \pm 0.03; 0.985 \pm 0.004;$$

$$0.998 \pm 0.001.$$

Как видно, их действительная часть довольно близка к результатам нашего фазового анализа.

И в заключение проведем фазовый анализ экспериментальных данных при энергии 49.9 МэВ [230,234], принимая в качестве начальных фаз результаты предыдущего анализа. При $L = 20$ получим довольно большую величину $\chi^2 = 20.2$, и только увеличивая L до 30, находим заметное улучшение согласия расчета с экспериментальными данными с $\chi^2 = 0.019$, всеми парциальными χ^2_i меньше 0.2 и фазами

$$\delta_{\text{Re}} = 127.5003; 34.3877; 141.3168; 8.0940; 0.0092; 0.3824;$$

$$1.8194; 0.7321; 4.4653; 2.4917; 0.0005; 0.9836; 0.1437; 0.0018;$$

$$0.5503; 0.3922;$$

$$\delta_{\text{Im}} = 31.2338; 17.9109; 6.1097; 0.2166; 3.4990; 5.1733; 4.1288;$$

$$0.0; 1.8539; 1.1013; 0.0491; 0.9386; 0.3148; 0.0746; 0.2505;$$

$$0.1446.$$

Результаты расчета дифференциальных сечений с этими фазами показаны на рис.П1.4.

В сводных табл.П1.2 и П1.3 приведены фазы рассеяния (от 360 градусов при нулевой энергии, поскольку в S - волне

имеется два запрещенных состояния [25], которые на рис. П1.5 ÷ П1.8 приведены в более привычной форме - от 180 градусов), полученные в наших расчетах при рассмотренных здесь энергиях.

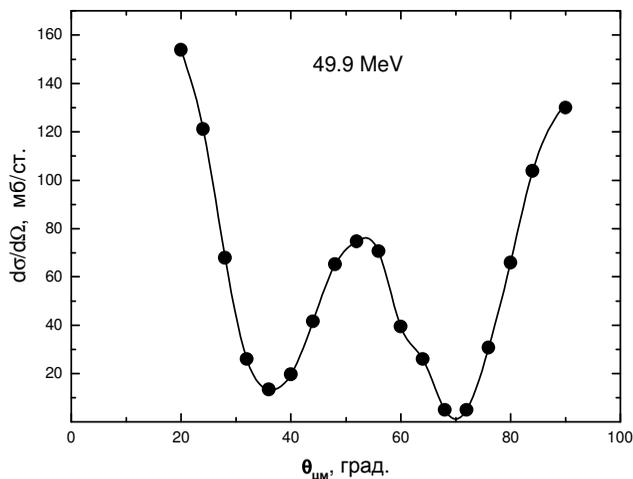


Рис.П1.4. Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа - частиц на ядрах гелия при энергии 49.9 МэВ.

Точки – экспериментальные данные [230,234], сплошная кривая – расчет сечений с найденными фазами.

В табл.П1.2 даны результаты для $L < 12$ без учета мнимой части, при которых проводился фазовый анализ, а в табл.П1.3, при $L > 12$ с учетом мнимой компоненты. Почти для всех энергий имеется заметное различие этих фазовых анализов хотя бы в одной парциальной фазе – при анализе с небольшим числом парциальных волн, т.е. когда $L = 4 \div 10$ и при максимальном учете высших парциальных волн, когда L достигает $20 \div 40$.

На рис.П1.5 ÷ П1.8 крестиками приведены фазы из табл.П1.2, а треугольниками из табл.П1.3. Приведены также известные на сегодняшний день результаты других фазовых анализов при энергиях в области $20 \div 60$ МэВ.

Табл.П1.2. Фазы рассеяния (в град.) и величина χ^2 для $L < 12$.
(При $E = 49.9$ МэВ приведены результаты для $L = 20$).

$E_{lab}, \text{МэВ}$	δ_0	δ_2	δ_4	δ_6	δ_8	χ^2
29.5	150.7	86.4	120.7	2.0	0.01	0.6
30.3	135.9	76.5	116.3	0.0	0.0	2.1
31.8	142.9	78.1	125.8	0.0	0.1	1.1
34.2	145.2	69.1	143.5	4.2	0.7	1.0
35.1	142.3	77.0	147.5	5.4	1.7	2.2
37.0	135.1	73.2	148.0	1.0	0.0	6.0
38,4	137.7	89.6	175.8	6.4	0.0	1.4
40.77	146.5	44.1	92.4	9.5	0.0	5.0
41.9	108.9	56.4	110.1	12.5	2.4	10.3
44.41	98.5	73.5	128.6	17.9	3.9	10.9
47.1	105.3	55.1	140.6	18.9	2.8	2.6
49.9	128.5	26.1	138.5	6.9	0.0	20.2
51.1	111.3	54.8	152.8	25.0	3.3	1.1

Табл.П1.3. Фазы рассеяния (в град.) и величина χ^2 для $L > 12$.
(При $E = 49.9$ МэВ приведены результаты для $L = 30$).

$E_{lab}, \text{МэВ}$		δ_0	δ_2	δ_4	δ_6	δ_8	χ^2
30.3	Re δ_L	134.5	69.7	116.0	0.0	0.04	0.11
	Im δ_L	1.8	3.2	0.4	3.7	0.0	
31.8	Re δ_L	152.5	69.4	126.9	0.0	1.3	0.09
	Im δ_L	0.0	2.1	5.4	1.5	0.2	
34.2	Re δ_L	140.9	54.4	133.3	0.9	0.3	0.06
	Im δ_L	1.3	3.1	3.4	2.9	1.4	
35.1	Re δ_L	155.1	70.2	137.8	0.0	1.1	0.015
	Im δ_L	3.4	0.5	4.6	0.8	1.1	
37.0	Re δ_L	111.5	55.9	138.5	8.1	0.0	0.003
	Im δ_L	3.6	1.6	10.1	6.7	0.1	
38.4	Re δ_L	129.9	76.5	167.7	1.7	0.0	0.21
	Im δ_L	4.2	2.3	0.5	0.3	1.7	
40.0	Re δ_L	69.5	49.5	81.4	1.4	0.0	0.22

40.77	Im δ_L	0.9	0.0	4.6	7.1	1.3	1.21
	Re δ_L	124.9	37.4	86.9	1.9	0.0	
41.9	Im δ_L	18.8	4.3	0.0	1.5	0.0	0.86
	Re δ_L	105.9	53.1	103.4	16.1	0.0	
44.41	Im δ_L	19.0	0.0	0.0	0.3	0.0	0.48
	Re δ_L	117.4	72.1	116.0	16.8	3.3	
47.1	Im δ_L	30.2	9.4	3.4	0.2	1.4	0.70
	Re δ_L	106.2	51.6	134.1	17.2	2.3	
49.9	Im δ_L	12.0	3.5	1.2	0.0	0.0	0.02
	Re δ_L	127.5	34.4	141.3	8.1	0.0	
51.1	Im δ_L	31.2	17.9	6.1	0.2	3.5	0.97
	Re δ_L	110.9	55.1	151.8	24.9	3.2	
	Im δ_L	15.0	20.4	23.7	1.8	0.3	

Рассмотрим теперь, как полученные фазы рассеяния согласуются с энергетическими уровнями, присутствующими в составном ядре ${}^8\text{Be}$ [235]. В спектрах этого ядра при энергиях 19.86, 20.1 и 20.2 МэВ находятся уровни с ширинами 0.7, примерно 1.1 и около 1.0 МэВ и моментами 4^+ , 2^+ и 0^+ при нулевом изоспине, которые могут присутствовать как резонансы в ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ системе. В лабораторной системе они попадают в область энергий $39.7 \div 40.4$ МэВ и влияют на поведение фаз рассеяния при 40.0 и 40.77 МэВ, приводя к их скачку в парциальных волнах с 0, 2 и 4 орбитальными моментами.

Этот скачок фаз очень хорошо виден в S - и G - волнах, а в G - волне можно видеть даже подъем фазы, который наблюдается до 47 МэВ. В наших расчетах нет столь явного провала фазы в D - волне рассеяния при 40 МэВ, какой имеется в результатах работы [228], но, тем не менее, он также присутствует и виден на рис.П1.6. При энергии 22.2 МэВ [235] в спектре уровней имеется состояние с моментом 2^+ и шириной 0.8 МэВ при нулевом изоспине. Действительно, D - фаза при энергии 44.41 МэВ испытывает заметный скачок вверх. К сожалению, в этой области энергий имеется только одно измерение дифференциальных сечений и нельзя точно воспроизвести поведение D - фазы рассеяния.

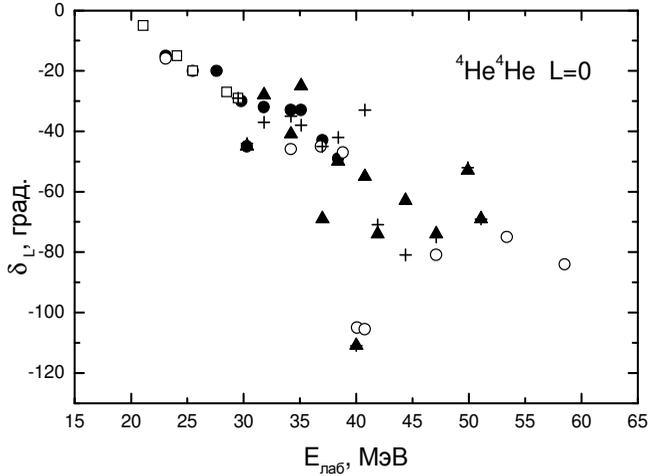


Рис.П1.5. Фазы упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния при $L = 0$.
Точки: \circ – данные работ [228,231] при 51.1 МэВ и [226] при энергии больше 53 МэВ; \bullet – результаты работы [225] при 23÷38 МэВ, которые определялись из рисунков; \square – данные [224] в области энергии 20÷30 МэВ; $+$ и \blacktriangle – наши результаты.

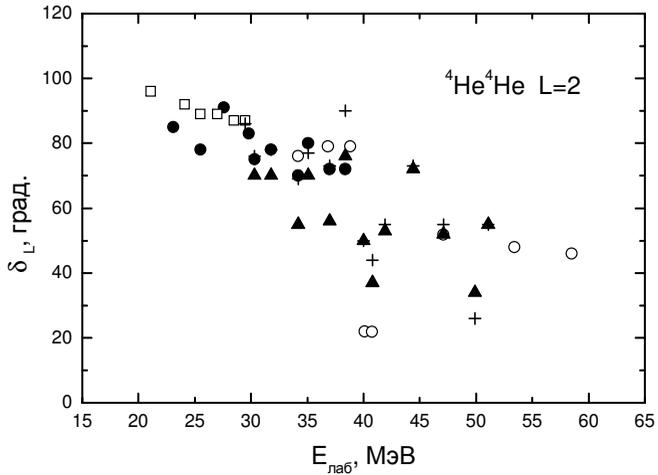


Рис.П1.6. Фазы упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния при $L = 2$.
Точки: \circ – данные работ [228,231] при 51.1 МэВ и [226] при энергии больше 53 МэВ; \bullet – результаты работы [225] при 23÷38 МэВ, которые определялись из рисунков; \square – данные [224] в области энергии 20÷30 МэВ; $+$ и \blacktriangle – наши результаты.

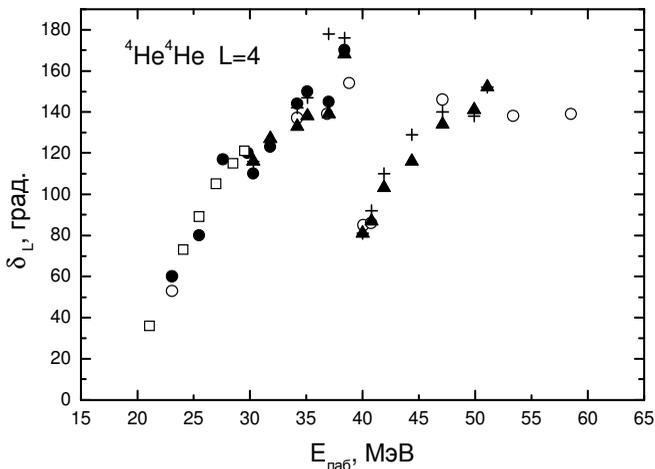


Рис.П1.7. Фазы упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния при $L = 4$. Точки: \circ – данные работ [228,231] при 51.1 МэВ и [226] при энергии больше 53 МэВ; \bullet – результаты работы [225] при 23÷38 МэВ, которые определялись из рисунков; \square – данные [224] в области энергии 20÷30 МэВ; $+$ и \blacktriangle – наши результаты.

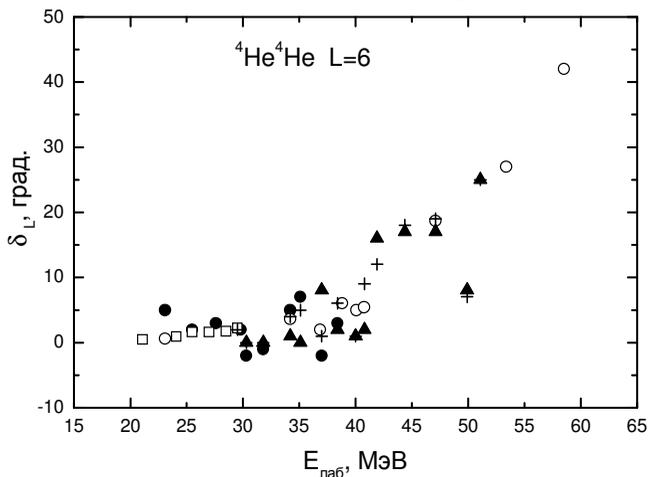


Рис.П1.8. Фазы упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния при $L = 6$. Точки: \circ – данные работ [228,231] при 51.1 МэВ и [226] при энергии больше 53 МэВ; \bullet – результаты работы [225] при 23÷38 МэВ, которые определялись из рисунков; \square – данные [224] в области энергии 20÷30 МэВ. $+$ и \blacktriangle – наши результаты.

В спектрах ядра ${}^8\text{Be}$ при 25.2 и 25.5 МэВ присутствуют уровни с моментом 2^+ и 4^+ и изоспином, равным нулю. Рассматриваемая нами энергия 49.9 МэВ попадает в область первого из них и в D - волне рассеяния наблюдается резкий спад фазы.

Такой же скачок имеется и в S - волне, однако, его нельзя сопоставить какому-либо уровню ядра ${}^8\text{Be}$. То же самое относится к парциальной волне с $L = 6$, где фаза рассеяния также претерпевает резкий скачок. Энергия 51.1 МэВ попадает на резонанс при 25.5 МэВ в G - волне, но ее влияние явно не просматривается - возможно, это очень узкий уровень ядра ${}^8\text{Be}$.

Таким образом, при разных энергиях в области $30 \div 40$ МэВ выполнено уточнение известных значений фаз упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния. Фазовый анализ при энергиях 40.77, 41.9, 44.41, 47.1, 49.9 и 51.1 МэВ приводит нас к вполне разумным результатам и, в целом, согласуется с данными других работ и спектрами ядра ${}^8\text{Be}$ [46,207].

Для более детального изучения поведения фаз рассеяния в различных парциальных волнах желательно иметь более подробные экспериментальные измерения дифференциальных сечений в области энергий $39 \div 41$ МэВ, $43 \div 45$ МэВ и $49 \div 52$ МэВ с шагом порядка $0.1 \div 0.3$ МэВ [46].

П1.5 Программа ${}^4\text{He}^4\text{He}$ и ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ фазового анализа

Приведем распечатку компьютерной программы, предназначенной для ${}^4\text{He}^4\text{He}$ и ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ фазового анализа. Какой именно анализ будет выполняться зависит от значения параметра NYS и LH. В случае ${}^4\text{He}^4\text{He}$ они должны быть равны 1 и 2 соответственно, для выполнения ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ фазового анализа их значения равны 0 и 1. Кроме того, для больших энергий параметр NP должен быть равен $2 * \text{LMA} + \text{LH}$, что позволяет учитывать комплексную часть фаз рассеяния. Обозначения параметров программы в большинстве схожи с описанными ранее в других компьютерных программах, предназначенных

для расчетов других ядерных характеристик.

PROGRAM FAZ_AL_AL

! ПРОГРАММА ФАЗОВОГО АНАЛИЗА ДЛЯ AL-AL AND
!AL-12C

IMPLICIT REAL(8) (A - Z)

INTEGER

L,I,NT,LMI,LMA,LH,NYS,NP,NTT,NV,NI,LMI1,LH1,NPP
DIMENSION ST(0:50),FR(0:50),FM(0:50),ET(0:50),
XP(0:50),ETA(0:50)

COMMON /A/ PI,NT,TT(0:50),GG,SS,LMI,LMA,LH,NYS,NP

COMMON /B/ SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),NTT

COMMON /C/ LH1,LMI1,P1,NPP

! ***** НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ *****

PI=4.0D-000*DATAN(1.0D-000)

P1=PI

Z1=2.0D-000; Z2=2.0D-000

AM1=4.0D-000; AM2=4.0D-000

AM=AM1+AM2

A1=41.46860D-000

PM=AM1*AM2/(AM1+AM2)

B1=2.0D-000*PM/A1

LMI=0; LMI1=LMI; LH=2; LH1=LH

LMA=4; LMA1=LMA

NYS=1; ! IF =1 THEN 4HE4HE, IF = 0 THEN 4HE12C

EP=1.0D-010; NV=1

FH=0.010D-000; NI=10

!NP=2*LMA+LH

NP=LMA; NPP=NP

! ***** CROSS SECTIONS *****

SE(1)=1357.0D-000; SE(2)=1203.0D-000; SE(3)=1074.0D-000;

SE(4)=870.0D-000; SE(5)=759.0D-000

SE(6)=688.0D-000; SE(7)=467.0D-000; SE(8)=271.0D-000;

SE(9)=196.0D-000; SE(10)=130.0D-000

SE(11)=93.90D-000; SE(12)=57.0D-000; SE(13)=32.50D-000;

SE(14)=12.30D-000; SE(15)=2.280D-000

SE(16)=24.7; SE(17)=86.5; SE(18)=157; SE(19)=270

SE(20)=337.0D-000; SE(21)=408.0D-000; SE(22)=418.0D-000

```
DE(1)=39.0D-000; DE(2)=40.0D-000; DE(3)=24.0D-000;
DE(4)=20.0D-000; DE(5)=16.0D-000;
DE(6)=17.0D-000
DE(7)=12.0D-000; DE(8)=7.0D-000; DE(9)=4.10D-000;
DE(10)=3.60D-000; DE(11)=2.20D-000;
DE(12)=1.50D-000
DE(13)=1.1; DE(14)=1.0; DE(15)=0.4; DE(16)=0.7;
DE(17)=2.0; DE(18)=3.6
DE(19)=6.50D-000; DE(20)=7.40D-000; DE(21)=8.20D-000;
DE(22)=8.30D-000
TT(1)=22.0D-000; TT(2)=24.0D-000; TT(3)=26.0D-000;
TT(4)=28.0D-000; TT(5)=30.0D-000
TT(6)=32.0D-000; TT(7)=35.0D-000; TT(8)=40.0D-000;
TT(9)=42.0D-000
TT(10)=45.0D-000; TT(11)=46.0D-000; TT(12)=48.0D-000;
TT(13)=50.0D-000
TT(14)=52.0D-000; TT(15)=55.0D-000; TT(16)=60.0D-000;
TT(17)=65.0D-000
TT(18)=70.0D-000; TT(19)=75.0D-000; TT(20)=80.0D-000;
TT(21)=85.0D-000; TT(22)=90.0D-000
! ***** FOR AL-AL ON E=12.3 *****
NT=22; NTT=NT; EL=12.30D-000
FR(0)=29.0D-000; FR(2)=103.0D-000; FR(4)=3.0D-000
FM(0)= 0.0D-000; FM(2)= 0.0D-000; FM(4)=0.0D-000
OPEN (4,FILE='FAZ.DAT')
DO L=LMI,LMA,LH
READ(4,*) L,FR(L),FM(L)
ENDDO
CLOSE(4)
! ***** ENERGY IN LAB. SYSTEM *****
DO L=LMI,LMA,LH
FM(L)=FM(L)*PI/180.0D-000
FR(L)=FR(L)*PI/180.0D-000
ET(L)=DEXP(-2.0D-000*FM(L))
ENDDO
FH=FH*PI/180.0D-000
DO I=LMI,LMA,LH
XP(I)=FR(I)
```

```

XP(I+LMA+LH)=FM(I)
ENDDO
! ***** TRANSFORM TO C.M. *****
EC=EL*PM/AM1
SK=EC*B1
SS=DSQRT(SK)
GG=3.44476D-002*Z1*Z2*PM/SS
! ***** DIFFERENTIAL CROSS SECTION *****
CALL VAR(ST,FH,NI,XP,EP,XI,NV)
PRINT*, "XI-KV=; NI=; EL=",XI,NI,EL
! ***** TOTAL CROSS SECTION *****
SIGMAR=0.0D-000; SIGMAS=0.0D-000
DO L=LMI,LMA,LH
FR(L)=XP(L)
FM(L)=XP(L+LMA+LH)
A=FR(L)
ETA(L)=1
!ETA(L)=DEXP(-2.0D-000*FM(L))
SIGMAR=SIGMAR+(2*L+1)*(1-(ETA(L)))**2)
SIGMAS=SIGMAS+(2*L+1)*(ETA(L))**2*(DSIN(A))**2
ENDDO
SIGMAR=10.0D-000*4.0D-000*PI*SIGMAR/SK
SIGMAS=10.0D-000*4.0D-000*PI*SIGMAS/SK
PRINT*, "SIGMR-TOT=",SIGMAR
PRINT*, "SIGMS-TOT=",SIGMAS
PRINT*, " T SE ST XI"
! ***** RESULTS *****
DO I=1,NT
WRITE(*,2) TT(I),SE(I),ST(I),DS(I)
ENDDO
PRINT*
PRINT*, " L FR(L) FM(L)"
DO L=LMI,LMA,LH
FM(L)=FM(L)*180.0D-000/PI
FR(L)=FR(L)*180.0D-000/PI
WRITE(*,1) L,FR(L),FM(L)
ENDDO
OPEN (4,FILE='SEC-AL-AL.DAT')

```

```
WRITE(4,*) "      AL-AL LAB E=; XI=",EL,XI
WRITE(4,*) "      T      SE      ST      XI"
DO I=1,NT
WRITE(4,2) TT(I),SE(I),ST(I),DS(I)
ENDDO
WRITE(4,*)
WRITE(4,*) " L  FR(L)  FM(L)"
DO L=LMI,LMA,LH
WRITE(4,1) L,FR(L),FM(L)
ENDDO
CLOSE(4)
OPEN (4,FILE='FAZ.DAT')
DO L=LMI,LMA,LH
WRITE(4,1) L,FR(L),FM(L)
ENDDO
CLOSE(4)
1 FORMAT(1X,I5,E15.6,2X,E15.6)
2 FORMAT(1X,4(E10.3,2X))
3 FORMAT(1X,E15.5,2X,I5)
END
SUBROUTINE VAR(ST,PHN,NI,XP,EP,AMIN,NV)
IMPLICIT REAL(8) (A - Z)
INTEGER I,NP,LMI,LH,NT,NV,NI,IIN,NN,IN
DIMENSION XPN(0:50),XP(0:50),ST(0:50)
COMMON /C/ LH,LMI,PI,NP
COMMON /B/ SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),NT
!SHARED LH,LMI,NT,PI,DS(),NP
! ***** ПОИСК МИНИМУМА *****
DO I=LMI,NP,LH
XPN(I)=XP(I)
ENDDO
NN=LMI
PH=PHN
CALL DET(XPN,ST,ALA)
B=ALA
IF (NV==0) GOTO 3012
DO IIN=1,NI
NN=-LH
```

```
GOTO 1119
1159 XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
1119 NN=NN+LH
IF (NN>NP) GOTO 3012
IN=0
2229 A=B
XPN(NN)=XPN(NN)+PH*XP(NN)
IF (XPN(NN)<0.0D-000) GOTO 1159
IN=IN+1
CALL DET(XPN,ST,ALA)
B=ALA
IF (B<A) GOTO 2229
C=A
XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
IF (IN>1) GOTO 3339
PH=-PH
GOTO 5559
3339 IF (ABS((C-B)/(B))<EP) GOTO 4449
PH=PH/2.0D-000
5559 B=C
GOTO 2229
4449 PH=PHN
B=C
IF (NN<NP) GOTO 1119
AMIN=B
PH=PH/NI
ENDDO
3012 AMIN=B
DO I=LMI,NP,LH
XP(I)=XPN(I)
ENDDO
END
SUBROUTINE DET(XP,ST,XI)
IMPLICIT REAL(8) (A - Z)
INTEGER I,N
DIMENSION XP(0:50),ST(0:50)
COMMON /B/ SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),N
!***** ДЕТЕРМИНАНТ*****
```

```

S=0.0D-000
CALL SEC(XP,ST)
DO I=1,N
S=S+((ST(I)-SE(I))/DE(I))**2
DS(I)=((ST(I)-SE(I))/DE(I))**2
ENDDO
XI=S/N
END
SUBROUTINE SEC(XP,S)
IMPLICIT REAL(8) (A - Z)
INTEGER I,NP,LH,LMI,LMA,NT,NYS,L
DIMENSION S0(0:50),P(0:50),FR(0:50),ET(0:50),
S(0:50),XP(0:50)
COMMON /A/ PI,NT,TT(0:50),GG,SS,LMI,LMA,LH,NYS,NP
! ***** РАСЧЕТ СЕЧЕНИЙ *****
DO I=LMI,LMA,LH
FR(I)=XP(I)
ET(I)=1.0D-000
! IF NP=LMA GOTO 1234
! ET(I)=EXP(-2*XP(I+LMA+LH))
ENDDO
RECU1=0.0D-000; AIMCU1=0.0D-000
CALL CULFAZ(GG,S0)
DO I=1,NT
T=TT(I)*PI/180.0D-000
X=DCOS(T)
A=2.0D-000/(1-X)
S00=2.0D-000*S0(0)
BB=-GG*A
ALO=GG*DLOG(A)+S00
RECU1=BB*DCOS(ALO)
AIMCU1=BB*DSIN(ALO)
IF (NYS==0) GOTO 555
X1=DCOS(T)
A1=2.0D-000/(1.0D-000+X1)
BB1=-GG*A1
ALO1=GG*DLOG(A1)+S00
RECU1=BB1*COS(ALO1)

```

```
AIMCUL1=BB1*SIN(ALO1)
555 RENUC=0.0D-000; AIMNUC=0.0D-000
DO L=LMI,LMA,LH
AL=ET(L)*DCOS(2.0D-000*FR(L))-1.0D-000
BE=ET(L)*DSIN(2.0D-000*FR(L))
LL=2.0D-000*L+1.0D-000
SL=2.0D-000*S0(L)
CALL POLLEG(X,L,P)
RENUC=RENUC+LL*(BE*DCOS(SL)+AL*DSIN(SL))*P(L)
AIMNUC=AIMNUC+LL*(BE*DSIN(SL)-
AL*DCOS(SL))*P(L)
ENDDO
IF (NYS==0) GOTO 556
AIMNUC=2.0D-000*AIMNUC
RENUC=2.0D-000*RENUC
556 RE=RECU+RECU1+RENUC
AIM=AIMCUL+AIMCUL1+AIMNUC
S(I)=10.0D-000*(RE**2+AIM**2)/4.0D-000/SS**2
ENDDO
END
SUBROUTINE POLLEG(X,L,P)
IMPLICIT REAL(8) (A - Z)
INTEGER I,L
DIMENSION P(0:50)
! ***** ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА *****
P(0)=1.0D-000
P(1)=X
DO I=2,L
A=I*1.0D-000
P(I)=(2.0D-000*A-1)*X/A*P(I-1)-(A-1.0D-000)/A*P(I-2)
ENDDO
END
SUBROUTINE CULFAZ(G,F)
! ***** КУЛОНОВСКИЕ ФАЗЫ *****
IMPLICIT REAL(8) (A - Z)
INTEGER I
DIMENSION F(0:50)
C=0.577215665D-000
```

```

S=0.0D-000; N=50
A1=1.202056903D-000/3.0D-000
A2=1.0369277550D-000/5.0D-000
DO I=1,N
AA=I*1.0D-000
A=G/AA-DATAN(G/AA)-(G/AA)**3/3.0D-
000+(G/AA)**5/5.0D-000
S=S+A
ENDDO
FAZ=-C*G+A1 *G**3-A2*G**5+S
F(0)=FAZ
DO I=1,20
A=I*1.0D-000
F(I)=F(I-1)+DATAN(G/A)
ENDDO
END
    
```

Далее приведен контрольный счет поиска фаз упругого рассеяния для энергии 12.3 МэВ при которой в работе [222] было получено $\delta_0 = 29^\circ \pm 4^\circ$, $\delta_2 = 103^\circ \pm 8^\circ$, $\delta_4 = 3^\circ \pm 1.5^\circ$. Эти фазы принимаются в качестве начальных, а при дальнейшем их варьировании и по предыдущей программе на языке TurboBasic [24] и на основе приведенной выше, находим $\delta_0 = 28.37^\circ$, $\delta_2 = 105.03^\circ$, $\delta_4 = 2.62^\circ$ при $\chi^2 = 3.43$, что видно из приведенной далее распечатки работы программы.

Здесь для поиска минимума, как и в работе [24], используется 10 итераций NI. Только в данном случае точность EP задавалась равной 10^{-10} , а в предыдущем варианте счета 10^{-5} [24]. Первые столбцы XI и NI показывают сходимость χ^2 от числа итераций.

XI	NI
3.943880354539536	1
3.437578175376997	2
3.432394633290976	3
3.432107724455588	4
3.432044190539325	5

3.432020692528544	6
3.432007556422437	7
3.432005733725609	8
3.432004938728721	9
3.432004743298262	10

XI-KV =; NI =; EL = 3.43200 10 12.300

T	SE	ST	XI
.22000E+02	.13570E+04	.12796E+04	.39401E+01
.24000E+02	.12030E+04	.11346E+04	.29238E+01
.26000E+02	.10740E+04	.10008E+04	.93096E+01
.28000E+02	.87000E+03	.87464E+03	.53776E-01
.30000E+02	.75900E+03	.75523E+03	.55540E-01
.32000E+02	.68800E+03	.64266E+03	.71117E+01
.35000E+02	.46700E+03	.48793E+03	.30429E+01
.40000E+02	.27100E+03	.27340E+03	.11779E+00
.42000E+02	.19600E+03	.20443E+03	.42244E+01
.45000E+02	.13000E+03	.12007E+03	.76028E+01
.46000E+02	.93900E+02	.97112E+02	.21321E+01
.48000E+02	.57000E+02	.58891E+02	.15896E+01
.50000E+02	.32500E+02	.30767E+02	.24826E+01
.52000E+02	.12300E+02	.12398E+02	.95282E-02
.55000E+02	.22800E+01	.20301E+01	.39027E+00
.60000E+02	.24700E+02	.24774E+02	.11250E-01
.65000E+02	.86500E+02	.85514E+02	.24313E+00
.70000E+02	.15700E+03	.16800E+03	.93323E+01
.75000E+02	.27000E+03	.25509E+03	.52640E+01
.80000E+02	.33700E+03	.33073E+03	.71799E+00
.85000E+02	.40800E+03	.38184E+03	.10177E+02
.90000E+02	.41800E+03	.39987E+03	.47720E+01

L	FR(L)	FM(L)
0	.283717E+02	.000000E+00
2	.105030E+03	.000000E+00
4	.261561E+01	.000000E+00

Далее приведен контрольный счет для энергии 29.5 МэВ,

для которой в [24] были получены фазы $\delta_0 = 150.76$, $\delta_2 = 86.61$, $\delta_4 = 121.00$, $\delta_6 = 2.16$, $\delta_8 = 0.09$ при $\chi^2 = 0.602$. С такими фазами по приведенной выше программе получается $\chi^2 = 0.600$, как это видно из приведенной ниже распечатки. Отличие χ^2 в 0.02 связано с ошибками округления фаз при записи их значений в файл с дальнейшим использованием в другой программе.

XI-KV=; NI=; EL= 6.00328 10 29.50

T	SE	ST	XI
.22040E+02	.15230E+04	.15134E+04	.64891E+00
.24050E+02	.11640E+04	.11664E+04	.55570E-01
.26050E+02	.88590E+03	.86843E+03	.38892E+01
.28050E+02	.61610E+03	.61957E+03	.23236E+00
.30060E+02	.42260E+03	.41922E+03	.35643E+00
.32060E+02	.27000E+03	.26762E+03	.34211E+00
.34060E+02	.16020E+03	.16006E+03	.24306E-02
.36070E+02	.91500E+02	.91163E+02	.44395E-01
.38070E+02	.55530E+02	.55230E+02	.16734E+00
.40070E+02	.44680E+02	.44765E+02	.12421E+00
.42080E+02	.52960E+02	.52530E+02	.76193E+00
.44080E+02	.71740E+02	.71346E+02	.28489E+00
.46080E+02	.95440E+02	.94808E+02	.57926E+00
.48080E+02	.11846E+03	.11754E+03	.12657E+01
.50090E+02	.13558E+03	.13552E+03	.72584E-02
.52090E+02	.14562E+03	.14590E+03	.26152E+00
.54090E+02	.14760E+03	.14758E+03	.53350E-03
.56090E+02	.13986E+03	.14072E+03	.14564E+01
.58100E+02	.12710E+03	.12655E+03	.43671E+00
.60100E+02	.10783E+03	.10745E+03	.23062E+00
.62100E+02	.86660E+02	.86114E+02	.46841E+00
.64100E+02	.66120E+02	.65522E+02	.75651E+00
.66100E+02	.48430E+02	.48481E+02	.10080E-01
.68110E+02	.37430E+02	.37301E+02	.17753E+00
.70110E+02	.33770E+02	.33732E+02	.43056E-01
.72110E+02	.38340E+02	.38461E+02	.13210E+00

.74110E+02	.50740E+02	.51308E+02	.10928E+01
.76110E+02	.70820E+02	.71187E+02	.24362E+00
.78110E+02	.95550E+02	.96239E+02	.60125E+00
.80110E+02	.12420E+03	.12403E+03	.27579E-01
.82110E+02	.15340E+03	.15182E+03	.22344E+01
.84110E+02	.17750E+03	.17683E+03	.42129E+00
.86110E+02	.19700E+03	.19657E+03	.17685E+00
.88110E+02	.20974E+03	.20905E+03	.51222E+00
.90110E+02	.21120E+03	.21302E+03	.29660E+01

L	FR(L)	FM(L)
0	.150760E+03	.000000E+00
2	.866100E+02	.000000E+00
4	.121000E+03	.000000E+00
6	.216000E+01	.000000E+00
8	.900000E-01	.000000E+00

Здесь и далее мнимая часть фазы FM(L) равна нулю. Используя эти фазы в виде начальных, при дополнительном варьировании по новой программе, приведенной выше, с 10 итерациями, получаем приведенный далее результат для фаз рассеяния с наименьшим χ^2 .

XI-KV =; NI =; EL = 5.71434E-001 10 29.500

T	SE	ST	XI
.22040E+02	.15230E+04	.15144E+04	.52763E+00
.24050E+02	.11640E+04	.11671E+04	.90939E-01
.26050E+02	.88590E+03	.86891E+03	.36792E+01
.28050E+02	.61610E+03	.61990E+03	.27763E+00
.30060E+02	.42260E+03	.41943E+03	.31337E+00
.32060E+02	.27000E+03	.26775E+03	.30469E+00
.34060E+02	.16020E+03	.16015E+03	.33034E-03
.36070E+02	.91500E+02	.91219E+02	.30734E-01
.38070E+02	.55530E+02	.55273E+02	.12333E+00
.40070E+02	.44680E+02	.44803E+02	.25848E+00
.42080E+02	.52960E+02	.52569E+02	.62951E+00
.44080E+02	.71740E+02	.71391E+02	.22342E+00

.46080E+02	.95440E+02	.94863E+02	.48325E+00
.48080E+02	.11846E+03	.11761E+03	.10869E+01
.50090E+02	.13558E+03	.13560E+03	.13302E-02
.52090E+02	.14562E+03	.14600E+03	.47518E+00
.54090E+02	.14760E+03	.14770E+03	.17885E-01
.56090E+02	.13986E+03	.14085E+03	.19094E+01
.58100E+02	.12710E+03	.12668E+03	.25354E+00
.60100E+02	.10783E+03	.10757E+03	.10341E+00
.62100E+02	.86660E+02	.86228E+02	.29377E+00
.64100E+02	.66120E+02	.65613E+02	.54400E+00
.66100E+02	.48430E+02	.48542E+02	.48101E-01
.68110E+02	.37430E+02	.37326E+02	.11519E+00
.70110E+02	.33770E+02	.33722E+02	.70632E-01
.72110E+02	.38340E+02	.38419E+02	.55430E-01
.74110E+02	.50740E+02	.51240E+02	.84900E+00
.76110E+02	.70820E+02	.71105E+02	.14712E+00
.78110E+02	.95550E+02	.96154E+02	.46141E+00
.80110E+02	.12420E+03	.12395E+03	.59440E-01
.82110E+02	.15340E+03	.15175E+03	.24240E+01
.84110E+02	.17750E+03	.17678E+03	.48540E+00
.86110E+02	.19700E+03	.19654E+03	.20525E+00
.88110E+02	.20974E+03	.20903E+03	.54586E+00
.90110E+02	.21120E+03	.21300E+03	.29054E+01

L	FR(L)	FM(L)
0	.150729E+03	.000000E+00
2	.865625E+02	.000000E+00
4	.120914E+03	.000000E+00
6	.211725E+01	.000000E+00
8	.662343E-01	.000000E+00

Как видно, удается улучшить χ^2 до 0.571, что оказывается возможным благодаря повышенной на пять порядков, по сравнению с [24], точностью поиска минимума. Ранее [24], приведенные в предыдущей распечатке результаты, считались лучшими.