

МГУ

им. М.В. Ломоносова

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

В.В.Балашов, Г.Я.Коренман, Ю.Ф.Смирнов, Н.П.Юдин

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЯДЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Под общей редакцией В.В.Балашова

ТЕМА 1

ВЕКТОРНОЕ СЛОЖЕНИЕ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ

МОСКВА 1971

Настоящее пособие открывает серию выпусков второго издания Теоретического ядерного практикума. За годы, прошедшие после выпуска первого издания, Теоретический ядерный практикум занял постоянное место в системе обучения на отделении ядерной физики физического факультета МГУ. Время показало, что главное достоинство новой формы занятий — промежуточной между учебным семинаром и практикой в лаборатории — состоит в организованном стимулировании самостоятельной работы студентов. Практикум дает навыки проведения стандартных расчетов в ядерной физике, необходимые каждому научному работнику — экспериментатору и теоретику. Он стал важной ступенью подготовки студентов к дипломной работе. Многолетние наблюдения за студентами, прошедшими теоретический практикум в Москве и в филиале НИИЯФ МГУ в Дубне, показали, что он оказывается равно полезным как для тех, кто выполняет дипломную работу по физике ядра, так и для тех, кто специализируется по физике элементарных частиц.

Второе издание отличается от первого, главным образом системой расположения материала. Задачи первого издания были слишком крупными, и, когда их изучение растягивалось на несколько учебных занятий, это часто мешало четкой организации занятий. Теперь мы располагаем весь материал УП семестра по трем темам: "Векторное сложение моментов", "Алгебра тензорных операторов" и "Спиновая матрица плотности". Каждая из них состоит из трех-четырёх законченных разделов, снабженных своим списком

упражнений. Мы стремимся приблизиться к тому, чтобы каждый такой раздел мог быть освоен за одну неделю.

Пособия по теме "Векторное сложение угловых моментов" написаны доцентом Ю.Ф.Смирновым.

Авторский коллектив "Теоретического ядерного практикума" будет искренне благодарен всем, кто выскажет свои замечания по поводу нового издания.

Профессор В.В. БАЛАШОВ

Занятие I.

Сферические гармоники

Это вводное занятие преследует цель напомнить общие положения теории момента количества движения в квантовой механике и показать свойства сферических гармоник-собственных функций оператора орбитального момента одной частицы.

§I. Момент количества движения в квантовой механике.

Как известно / 1-4 /, момент количества движения \vec{J} некоторой системы ("угловой момент") является векторной величиной и в квантовой механике ему сопоставляются три эрмитовых оператора J_x, J_y, J_z - проекции момента количества движения системы на оси координат x, y, z . Они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[J_x, J_y] = iJ_z, [J_y, J_z] = iJ_x, [J_z, J_x] = iJ_y \quad (1)$$

Коммутационные соотношения (1) можно записать также в несколько иной форме

$$[\vec{J} \times \vec{J}] = i\vec{J}, \quad (3)$$

где $[\vec{a} \times \vec{b}]$ - векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} .

Напомним, что оператор момента количества движения связан с оператором бесконечно малого поворота. Например, если производится поворот системы координат x, y, z на угол $\delta\varphi$ вокруг оси z , то некоторая функция от этих переменных $\Psi(x, y, z)$ превращается в результате такого преобразования в новую функцию

$$\Psi'(x, y, z) = R_z(\delta\varphi) \Psi(x, y, z), \quad (4)$$

где оператор бесконечно малого поворота записывается следующим образом:

$$R_z(\delta\varphi) = 1 - i\delta\varphi J_z \quad (5)$$

Из (5) следует, что оператор поворота на конечный угол φ вокруг оси z имеет вид:

$$R_z(\varphi) = e^{-i\varphi J_z}, \quad (6)$$

где экспоненту, содержащую оператор в показателе степени, нужно понимать как сокращенную запись соответствующего ряда Тейлора, составленного из степеней оператора J_z . Более подробно операторы конечных поворотов мы будем рассматривать в занятии № 5, а сейчас вернемся к оператору момента количества движения.

Из (5) и (6) ясно, что операторы J_x, J_y, J_z являются инфинитезимальными операторами группы вращений в трехмерном пространстве R_3 . Поэтому теория момента количества движения в квантовой механике по существу совпадает с теорией неприводимых представлений группы R_3 . Групповую трактовку этого вопроса см. в книгах /5-9/.

Вместо операторов J_x, J_y, J_z можно ввести другую тройку операторов $J_+, J_-, J_0 = J_z$,

коммутационные соотношения для которых имеют вид:

$$[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}; \quad (7)$$

$$[J_+, J_-] = 2J_0; \quad (8)$$

$$(J_+)^{\dagger} = J_-. \quad (9)$$

Приведем коммутационные соотношения для степеней этих операторов:

$$[J_0, J_{\pm}^k] = \pm k J_{\pm}^k; \quad (10)$$

$$[J_+, J_-^k] = k J_-^{k-1} (2J_0 - k + 1); \quad (11)$$

$$[J_+^a, J_-^b] = \sum_{i=1}^{\min(a,b)} \frac{a! b!}{i! (a-i)! (b-i)!} J_-^{b-i} J_+^{a-i} \prod_{k=0}^{i-1} (2J_0 - b + a - k), \quad (12)$$

которые легко доказываются методом индукции. Эти операторы полезны тем, что, если мы имеем собственную функцию Ψ_M оператора

J_z , принадлежащую к собственному значению M :

$$J_0 \Psi_M = M \Psi_M, \quad (13)$$

то собственные функции $\Psi_{M \pm k}$ с другими значениями проекции момента на ось z $M \pm k$ легко получить с помощью операторов J_{\pm} :

$$\Psi_{M \pm k} \sim (J_{\pm})^k \Psi_M \quad (14)$$

Действительно, ввиду ¹⁰(7)

$$J_0(J_{\pm}^k \Psi_M) = (M \pm k)(J_{\pm}^k \Psi_M) \quad (15)$$

В квантовой механике вводится также оператор квадрата момента количества движения J^2 :

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J_- J_+ + J_0^2 + J_0 = J_+ J_- + J_0^2 - J_0 \quad (16)$$

Он коммутирует со всеми операторами J_x, J_y, J_z и любыми их степенями и комбинациями

$$[J^2, J_i] = 0, \quad i = x, y, z \quad (17)$$

Поскольку J^2 и J_0 коммутируют друг с другом, можно построить также волновые функции Ψ_{JM} , которые являются собственными функциями обоих операторов:

$$\begin{aligned} J_0 \Psi_{JM} &= M \Psi_{JM}; \\ J^2 \Psi_{JM} &= J(J+1) \Psi_{JM}. \end{aligned} \quad (18)$$

Функции Ψ_{JM} описывают состояние квантовомеханической системы с моментом J и проекцией M этого момента на ось z .

Приведем без вывода хорошо известные результаты:

1) момент количества движения квантовомеханической системы J может принимать только целые или полуцелые значения

$$J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \quad (19)$$

2) при заданном J проекция M принимает $2J+1$ значений:

$$M = J, J-1, J-2, \dots, -J+1, -J; \quad (20)$$

3) для состояния с максимальным значением проекции $M = J$ имеет место соотношение

$$J_+ \Psi_{JJ} = 0; \quad (21)$$

4) волновые функции ортонормированы

$$\int \Psi_{JM}^* \Psi_{J'M'} d\tau = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (22)$$

С помощью соотношений (8,9,II) нетрудно показать, что

$$\Psi_{JM} = \sqrt{\frac{(J+M)!}{(2J)!(J-M)!}} (J_-)^{J-M} \Psi_{JJ}; \quad (23)$$

здесь Ψ_{JM} и Ψ_{JM} удовлетворяют условию (22).

Из (23) видно, что

$$J_- \Psi_{JM} = \sqrt{(J+M)(J-M+1)} \Psi_{JM-1} \quad (24)$$

Используя соотношения (9), можно получить и формулу для матричного элемента оператора J_+ :

$$\langle JM' | J_+ | \Psi_{JM} \rangle = \delta_{M', M+1} \sqrt{(J-M)(J+M+1)} \quad (25)$$

Матричные элементы степеней этих операторов имеют вид

$$\langle JM' | (J_\pm)^k | JM \rangle = \delta_{M', M \pm k} \sqrt{\frac{(J \mp M)! (J \mp M + k)!}{(J \pm M)! (J \pm M - k)!}} \quad (26)$$

В приведенном выше рассмотрении никак не использовалась конкретная природа момента количества движения (орбитальная, спиновая и т.д.). Соотношения (1) - (26) справедливы для любых угловых моментов, а также для произвольных операторов, подчиняющихся соотношениям (1,2), например, для операторов изотопического спина T , различных видов квазиспинов, псевдospина, операторов U - спина, V - спина и т.д., используемых в теории элементарных частиц и в теории ядра. Если рассматривается полный момент \vec{J} некоторой системы, состоящей из подсистем 1, 2, ... n, то

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^n \vec{J}(i), \quad (27)$$

где моменты различных подсистем $\vec{J}(i)$ коммутируют друг с другом. Именно это выражение (27) следует подставить в этом случае в формулы (1-26).

Ниже мы подробнее рассмотрим специфические свойства одного из видов угловых моментов - орбитального момента количества движения отдельной частицы \vec{l} .

§ 2. Сферические гармоники.

Компоненты орбитального момента отдельной частицы \vec{l} записываются следующим образом (в декартовых и сферических координатах)

$$\begin{aligned} l_z &= -i \left[x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right] = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ l_x &= -i \left[y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right] = i \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ l_y &= -i \left[z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right] = -i \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Оператор квадрата орбитального момента

$$l^2 = - \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \quad (29)$$

совпадает с угловой частью оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} l^2 \quad (30)$$

Собственными функциями операторов l^2 и l_z являются сферические функции, или сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$l^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (31)$$

$$l_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = m Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad (32)$$

причем квантовые числа l и m принимают только целочисленные значения:

$$l = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

$$m = l, l-1, \dots, -l+1, -l$$

Явный вид сферических гармоник обычно задается следующими формулами:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta_{lm}(\theta) \Phi_m(\varphi); \quad (34)$$

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}; \quad (35)$$

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta), \quad m \geq 0, \quad (36)$$

где $P_l^m(\cos \theta)$ - присоединенные полиномы Лежандра; сферические гармоники при $m < 0$ определяются следующим образом

$$\Theta_{l-|m|} = (-1)^m \Theta_{l|m|} \quad (36a)$$

При таком определении справедливы формулы (23) - (26).

Сферические гармоники обладают следующими свойствами:

1) При инверсии $\hat{I}(\vec{r} \rightarrow -\vec{r}, \theta \rightarrow \pi - \theta, \varphi \rightarrow \pi + \varphi)$ они умножаются на фазовый множитель $(-1)^l$:

$$\hat{I} Y_{lm} = (-1)^l Y_{lm}; \quad (37)$$

то-есть гармоники с четными l обладают положительной, а с нечетными l - отрицательной четностью.

2) При обращении времени \hat{K} (операции комплексного сопряжения) они ведут себя следующим образом:

$$\hat{K} Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l-m}(\theta, \varphi) \quad (38)$$

Иногда в литературе используется другое определение сферических гармоник

$$\tilde{Y}_{lm} = i^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

эти функции преобразуются при обращении времени по закону

$$\hat{K} \tilde{Y}_{lm} = \tilde{Y}_{lm}^* = (-1)^{l-m} \tilde{Y}_{l-m}$$

Удобство этих функций заключается в том, что они преобразуются так же, как и спиновые функции χ_{SM_S} :

$$\hat{K} \chi_{SM_S} = (-1)^{S-M_S} \chi_{S-M_S}$$

Однако мы ниже всюду будем использовать обычные гармоники (34-38),

3) Условие ортонормированности

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (39)$$

Из (39) и из того факта, что функция $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ не зависит от углов θ, φ , следует, что

$$\int Y_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{l0} \delta_{m0} \sqrt{4\pi} \quad (40)$$

то есть при $l \neq 0$ сферическая гармоника является знакопеременной функцией на сфере и вклады положительных и отрицательных участков в интеграл (40) компенсируют друг друга.

4) Сферические гармоники образуют полную систему функций на сфере. Условие полноты:

$$\sum_{l,m} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (41)$$

3) Для сферических гармоник имеет место "теорема сложения": если на сфере имеются две точки с координатами θ_1, φ_1 и θ_2, φ_2 , а θ - угол между радиус-векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , соединяющие эти точки с началом координат (рис.1), то

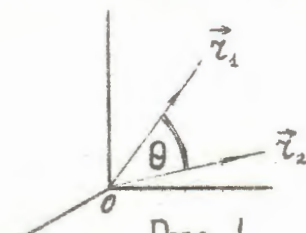


Рис. 1.

$$\sum_m Y_{lm}^*(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}(\theta_2, \varphi_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta), \quad (42)$$

где

$$\cos \theta = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

(доказательство этой теоремы см. в книге /10/ т. II стр. 145; см. также занятие № 3).

Из (42) следует равенство

$$\sum_m |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}, \quad (43)$$

то-есть такая сумма не зависит от углов. Эта формула часто используется для получения угловых распределений ядерных реакций и т.п.

Если домножить сферическую гармонику Y_{lm} на r^l , то получится полином

$$Y_{lm}(\vec{r}) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (44)$$

который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta Y_{lm}(\vec{r}) = 0, \quad (45)$$

то-есть является гармоническим полиномом. Полином $Y_{lm}(\vec{r})$ часто называют также пространственной или телесной сферической гармоникой. Она выражается через декартовы координаты следующим образом:

$$Y_{lm}(\vec{r}) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} (x+iy)^m x^m \sum_{s=0}^m (-1)^s z^{l-m-2s} r^{2s} \frac{(2l-2s)!}{2^l s!(l-s)!(l-m-2s)!} \quad (46)$$

Приведем некоторые частные значения сферических гармоник:

$$Y_{\ell 0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_{\ell}(\cos \theta), \quad (47)$$

где $P_{\ell}(\cos \theta)$ - полином Лежандра. Из (46) и (47) легко видеть, что

$$Y_{\ell m}(0, 0) = \delta_{m0} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \quad (48)$$

Сферические гармоники с $\ell=1$ можно связать с компонентами вектора. Из (46) следует, что

$$\begin{aligned} Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (x+iy) = -r\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta, \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z = r\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ Y_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (x-iy) = +r\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (49)$$

Отсюда видно, что при $\ell=1$ теорема сложения (42) превращается в простое равенство

$$(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = r_1 r_2 \cos \theta,$$

где слева записано скалярное произведение векторов \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , а справа его обычное выражение через модули векторов r и косинус угла между ними.

Приведем явный вид сферических гармоник с $\ell=2$:

$$\begin{aligned} Y_{2+2} &= \sqrt{\frac{15}{2\pi \cdot 16}} (x+iy)^2 = r^2 \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{+2i\varphi}, \\ Y_{2+1} &= r \sqrt{\frac{15}{2\pi \cdot 4}} z(x+iy) = r^2 \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{+i\varphi}, \\ Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{2\pi \cdot 3}} (2z^2 - x^2 - y^2) = r^2 \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2 \theta - 1). \end{aligned} \quad (50)$$

Из этих выражений ясно, что гармоники с $\ell=2$ связаны с компонентами квадрупольного момента отдельной частицы

$$Q_{2m} = e \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_{2m} \quad (51)$$

где e - заряд частицы.

В приложениях часто используются также следующие свойства сферических гармоник.

$$I. \quad \cos \theta \Theta_{\ell m}(\theta) = \sqrt{\frac{(\ell+m)(\ell-m+1)}{(2\ell+1)(2\ell+3)}} \Theta_{\ell+1 m} + \sqrt{\frac{(\ell+m)(\ell-m)}{(2\ell-1)(2\ell+1)}} \Theta_{\ell-1 m}; \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta \cdot \Theta_{lm}(\theta) = & + \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} \Theta_{l+1, m+1} \mp \\ & \mp \sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-1)}} \Theta_{l-1, m+1} ; \end{aligned} \quad (53)$$

$$2 \frac{d\Theta_{lm}(\theta)}{d\theta} = \sqrt{(l+m+1)(l-m)} \Theta_{lm+1} - \sqrt{(l-m+1)(l+m)} \Theta_{lm-1}. \quad (54)$$

2. Для произведения двух сферических функций от одного и того же аргумента имеет место равенство:

$$\begin{aligned} Y_{l_1, m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2, m_2}(\theta, \varphi) = & \sum_{L=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)}} \times \\ & \times (l_1, m_1, l_2, m_2 | LM)(l_1, 0, l_2, 0 | L, 0) Y_{LM}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (55)$$

Используя его, можно уменьшить в каком-то выражении число сферических гармоник, зависящих от данного аргумента, до одной-двух с тем, чтобы можно было воспользоваться соотношением ортонормированности (39) или (40). В правую часть этого выражения входят коэффициенты Клебша-Гордана $(l_1, m_1, l_2, m_2 | LM)$ (см. занятие 2; доказательство формулы (55) дано в занятии 3). В правой части (55) имеет место суммирование только по значениям L , имеющим ту же четность, что и сумма $l_1 + l_2$ (что отражено знаком у знака суммы). Это ограничение на возможные значения L непосредственно следует из (37).

3. Для разложения различных выражений по сферическим гармоникам важно следующее соотношение

$$z^k = \sum_{l=k, k-2, \dots, 1 \text{ или } 0} \sqrt{4\pi} Y_{l, 0}(z) \frac{2^l k! (\frac{k+l}{2})!}{(k+l+1)! (\frac{k-l}{2})!} \cdot r^k \cdot \sqrt{2e+1} \quad (56)$$

ИЛИ

$$(\cos \theta)^k = \sum_{l=k, k-2, \dots, 1 \text{ или } 0} P_l(\cos \theta) \cdot \frac{(2l+1) 2^l k! (\frac{k+l}{2})!}{(k+l+1)! (\frac{k-l}{2})!} \quad (57)$$

которое доказано, например, в книге / 10 / (стр.120).

4. Если мы имеем пространственную гармонику $Y_{lm}(\vec{r})$, где \vec{r} - это сумма векторов $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$, то ее можно представить в виде разложения по пространственным гармоникам от каждого из слагаемых:

$$Y_{lm}(\vec{r}) = \sum_{m_1, m_2, l_1} (l_1 m_1 l_2 m_2 | lm) \sqrt{\frac{4\pi(2l+1)!}{(2l_1+1)!(2l_2+1)!}} Y_{l_1 m_1}(\vec{r}_1) Y_{l_2 m_2}(\vec{r}_2), \quad (58)$$

где $l_1 + l_2 = l$ (см. (55))

Эта формула может быть использована для того, чтобы выразить сферические гармоники $Y_{lm}(\vec{r})$, отнесенные к некоторому началу координат, через гармоники $Y_{l_1 m_1}(\vec{r}_1)$, которые записаны в системе координат, смещенной относительно первой на расстояние \vec{r}_2 .

ЛИТЕРАТУРА.

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц "Квантовая механика" (1963)
2. А.С.Давыдов "Квантовая механика" (1963)
3. А.А.Бандзайтис, А.П.Юцис "Теория момента количества движения в квантовой механике". Вильнюс (1965)
4. А.Эдмондс "Угловые моменты в квантовой механике" в сборнике "Деформация атомных ядер". ИЛ (1958)
5. Е.Вигнер "Теория групп" ИЛ (1961)
6. Б.Ф.Бейман "Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии". (1961).
7. М.Хамермеш "Теория групп". Мир, (1966)
8. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, Э.Я. Шапиро "Представления группы трехмерных вращений и группы Лоренца" (1958)
9. Н.Я.Виленькин "Специальные функции и теории представлений групп" (1965)
10. Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон "Курс современного анализа." т. II (1963)
11. Э.А. Варшавский, А.Н. Москолев, В.К. Херсонский "Квантовая теория углового момента". "Наука", Ленинград, 1975, т. 5.

Упражнения

1. Записать в сферических координатах трехмерную δ - функцию $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.
2. Нарисовать картину электронного облака в состоянии с $l=2$; $m=2, 1, 0$.
3. В модели жидкой капли форма поверхности ядра описывается выражением $R_0(1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu})$. Нарисовать вид ядерной поверхности в случае: а) квадрупольной деформации ($\lambda=2, \mu=0$); б) октупольной деформации ($\lambda=3, \mu=0$).
4. Используя свойства полиномов Лежандра, доказать соотношения (52 - 54).

5. Разложить по сферическим гармоникам $\cos^4 \theta$.

6. Радиальная волновая функция трехмерного осциллятора, соответствующая собственному значению энергии $E_n = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega$ и орбитальному моменту l , имеет вид:

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\frac{2^{l+1}}{\sqrt{\pi} r_0^{2l+1}}} e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}} \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-l)} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k+l} \frac{\sqrt{(n-l)!!(n+l+1)!!}}{(n-l-2k)!!(2l+2k+1)!!}; r_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega}.$$

Выразить функции $\Psi_{200}(\vec{r})$, $\Psi_{220}(\vec{r})$ через осцилляторные функции в декартовых координатах.

7. Получить разложение плоской волны e^{ikz} по сферическим гармоникам. (Указание: разложить e^{ikz} в ряд по степеням z и воспользоваться формулой (56), далее выделить коэффициент при Y_{l0} и выразить его через сферическую функцию Бесселя).

8. Найти распределение направлений импульсов частицы в состоянии Ψ_{lm} с $l=1$; $m=1$ (эта величина определяет угловое распределение частицы, испускаемой распадающейся системой, находящейся в состоянии Ψ_{lm}).

9. Получить разложение плоской волны с произвольно направленным импульсом \vec{k} по сферическим гармоникам.
10. Найти разложение энергии кулоновского взаимодействия частиц $\frac{e^2}{|\vec{z}_1 - \vec{z}_2|}$ по сферическим гармоникам от координат $\theta_1 \varphi_1$ и $\theta_2 \varphi_2$.

Занятие 2.

Векторное сложение двух моментов количества движения. Коэффициенты Клебша-Гордана.

Цель настоящего и следующих занятий состоит в выработке навыков решения различных задач, связанных со сложением нескольких моментов количества движения. Наиболее подробное и современное изложение квантовой теории момента количества движения содержится в книгах /1,2/ и обзоре /3/; мы в основном следуем этим работам.

§ I. Векторное сложение двух моментов количества движения.

Пусть имеется система, состоящая из двух частей: 1 и 2. Момент количества движения одной части равен \vec{J}_1 , второй - \vec{J}_2 . Такую систему, например, составляют две частицы, движущиеся в центральном поле с моментами J_1 и J_2 , другим примером может служить совокупность орбитального момента частицы ℓ и ее спина S и т.д.

Если подсистемы не взаимодействуют друг с другом, то состояние системы описывается волновой функцией, являющейся произведением волновых функций двух подсистем:

$$\Psi_{J_1 M_1 J_2 M_2}(1,2) = \Psi_{J_1 M_1}(1) \Psi_{J_2 M_2}(2) \quad (1)$$

т.е. состояние системы характеризуется квантовыми числами J_1 , J_2 (моменты подсистем) и M_1, M_2 (проекции этих моментов на ось z).

Если между подсистемами имеется взаимодействие, то моменты отдельных подсистем и их проекции не сохраняются, и хорошими квантовыми числами могут быть лишь полный момент количества движения системы J и его проекция M . Однако, если взаимо-

действие не слишком сильно, то в нулевом приближении можно считать, что не сохраняются только проекции моментов подсистем M_1 и M_2 , а моменты J_1 и J_2 сохраняют свои значения. В этом случае состояние системы характеризуется четырьмя квантовыми числами J_1, J_2, J, M и описывается волновой функцией $\Psi_{J_1 J_2 J M}(1,2)$, представляющей собой линейную комбинацию функций (1):

$$\Psi_{J_1 J_2 J M}(1,2) = \sum_{m_1 m_2} (J_1 m_1 J_2 m_2 | J M) \Psi_{J_1 m_1}(1) \Psi_{J_2 m_2}(2). \quad (2)$$

Коэффициенты этой линейной комбинации называются коэффициентами векторного сложения или коэффициентами Клебша-Гордана, а сама процедура перехода от моментов J_1, J_2 и их проекций к суммарному моменту количества движения называется векторным сложением угловых моментов J_1 и J_2 . Оператор полного момента системы J равен сумме операторов моментов подсистем $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$.

При рассмотрении векторного сложения моментов возникает два основных вопроса: 1) Какие значения может принимать полный момент J при заданных моментах подсистем J_1 и J_2 ? 2) Как вычисляются коэффициенты векторного сложения, необходимые для построения волновых функций (2)?

Ответ на первый вопрос дает известное из квантовой механики правило векторного сложения моментов количества движения, которое гласит, что при сложении двух моментов J_1 и J_2 суммарный момент J может принимать значения

$$J = |J_1 - J_2|, |J_1 - J_2| + 1, \dots, J_1 + J_2 - 1, J_1 + J_2 \quad (3)$$

Что касается коэффициентов векторного сложения, то они должны удовлетворять условию:

$$J^2 \Psi_{J_1 J_2 J M}(1,2) = J(J+1) \Psi_{J_1 J_2 J M}(1,2)$$

то-есть они должны быть выбраны так, чтобы диагонализировалась матрица оператора $(\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2$.

В квантовой механике получен целый ряд формул и соотношений, позволяющих вычислить необходимые коэффициенты Клебша-Гордана. Рассмотрим основные свойства этих коэффициентов.

На основе принципа суперпозиции можно выяснить физический смысл коэффициентов векторного сложения. Соотношение (2) показывает, что величина $|(J_1 M_1, J_2 M_2 | JM)|^2$ представляет собой вероятность того, что в системе с полным моментом J и проекцией M момент первой системы J_1 имеет проекцию M_1 , а момент второй подсистемы J_2 имеет проекцию M_2 .

Коэффициенты векторного сложения осуществляют унитарное преобразование от ортогональных и нормированных функций (1) к ортонормированным функциям (2). Поэтому обратное преобразование

выполняется с помощью тех же самых коэффициентов Клебша-Гордана (коэффициенты Клебша-Гордана обычно выбираются действительными).

$$\Psi_{J_1 M_1}(1) \Psi_{J_2 M_2}(2) = \sum_{JM} (J_1 M_1, J_2 M_2 | JM) \Psi_{J, J_1 J_2 M}(1, 2) \quad (4)$$

Из (4) видно, что $|(J_1 M_1, J_2 M_2 | JM)|^2$ является также вероятностью того, что система, образованная из двух подсистем в состояниях $J_1 M_1$ и $J_2 M_2$, имеет полный момент, равный J . Из правила векторного сложения (3) следует, что коэффициенты векторного сложения $(J_1 M_1, J_2 M_2 | JM)$ отличны от нуля только в том случае, когда моменты J_1, J_2 и J удовлетворяют так называемому "правилу треугольника", т.е. если

$$|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2,$$

$$|J - J_2| \leq J_1 \leq J + J_2,$$

$$|J - J_1| \leq J_2 \leq J + J_1.$$

Кроме того, в соответствии с законом сохранения проекции момента количества движения должно выполняться равенство

$$M = M_1 + M_2 \quad (6)$$

Из соотношения (2) и (4) (то-есть из унитарности этих преобразований) вытекают следующие свойства ортонормированности коэффициентов векторного сложения

$$\sum_{M_1, M_2} (J_1 M_1 J_2 M_2 | JM) (J_1 M_1 J_2 M_2 | J' M') = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (7)$$

$$\sum_{JM} (J_1 M_1 J_2 M_2 | JM) (J_1 M_1' J_2 M_2' | JM) = \delta_{M_1 M_1'} \delta_{M_2 M_2'}$$

Поскольку коэффициенты векторного сложения широко применяются в практических расчетах, приведем еще ряд свойств этих коэффициентов:

$$(JM_{00} | J' M') = \delta_{JJ'} \delta_{MM'},$$

$$(J_1 M_1 J_2 M_2 | 00) = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} (-1)^{J_1 - M_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2J_1 + 1}}; \quad (8)$$

$$(J_1 M_1 J_2 M_2 | JM) = (-1)^{J_1 + J_2 - J} (J_1 - M_1 J_2 - M_2 | J - M) \quad (9)$$

Свойства симметрии относительно перестановки моментов:

$$(J_1 M_1 J_2 M_2 | JM) = (-1)^{J_1 + J_2 - J} (J_2 M_2 J_1 M_1 | JM) =$$

$$= (-1)^{J_2 + M_2} \sqrt{\frac{2J_1 + 1}{2J_2 + 1}} (J - M_1 J_2 M_2 | J_1 - M_1) =$$

$$= (-1)^{J_1 - M_1} \sqrt{\frac{2J_1 + 1}{2J_2 + 1}} (J_1 M_1 J - M | J_2 - M_2).$$
(10)

Отсюда следует, что, если моменты J_1 и J_2 одинаковы и равны j , то функция (2) симметрична относительно перестановки переменных 1 и 2, если величина $2j - J$ четна, и антисимметрична, если $2j - J$ - нечетно. В то же время, если $J_1 \neq J_2$, то функция (2)

не обладает какими-либо определенными свойствами симметрии по переменным 1 и 2, и ее можно как симметризовать, так и антисимметризовать. Эти обстоятельства нужно учитывать при построении волновых функций двух тождественных частиц, подчиняющихся статистике Бозе-Эйнштейна или Ферми-Дирака.

Из (7) и (10) можно получить новое соотношение ортогональности:

$$\sum_{M, M'} (J_1 M_1 J_2 M_2 | JM) (J_1 M_1 J_2 M_2' | JM) = \frac{2J+1}{2J_2+1} \delta_{J_1 J_1'} \delta_{M_1 M_1'}. \quad (11)$$

В литературе часто используются не сами коэффициенты векторного сложения, а более симметричные величины, так называемые $3j$ - символы.

§ 2. $3j$ - символы.

$3j$ - символы $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ связаны с коэффициентами векторного сложения следующим образом

$$(j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3) = \sqrt{2j_3+1} (-1)^{j_1-j_2+m_3} (-1)^{j_2-m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Из этого равенства следует, что $3j$ - символ отличен от нуля только в случае, когда j_1, j_2, j_3 удовлетворяют "правилу треугольника" и $m_1 + m_2 + m_3 = 0$.

Перечислим основные свойства $3j$ - символов.

Свойства симметрии по отношению к перестановке столбцов:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} = (-1)^{j_2+j_3+j_1} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, при циклической перестановке столбцов $3j$ - символ не меняется, а при нециклической - умножается на $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$.
Изменение знака проекции всех моментов, входящих в $3j$ - символ:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Свойства ортонормированности:

$$\sum_{j_3, m_3} (2j_3+1)(-1)^{j_3-m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1' & -m_2' & -m_3' \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-m_1+j_2-m_2} \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'},$$

$$\sum_{m_1, m_2} (-1)^{j_1-m_1+j_2-m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & m_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{2j_3+1} (-1)^{j_3-m_3} \delta_{j_3 j_3'} \delta_{m_3 m_3'}. \quad (15)$$

Коэффициент Вигнера с нулевым моментом:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & 0 \\ m_1 & m_2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2j_1+1}} (-1)^{j_1-m_1} \delta_{j_1 j_1'} \delta_{m_1 m_1'}. \quad (16)$$

Свойства симметрии (13), (14) связывают между собой

$3j$ -символы с одними и теми же моментами j_1, j_2, j_3 . Однако для $3j$ -символов также имеют место соотношения, связывающие друг с другом $3j$ -символы с различными наборами моментов j_1, j_2, j_3 . Эти свойства симметрии были открыты Т.Редже [4]. Наиболее выпукло эти свойства проявляются в такой форме записи, когда $3j$ -символ изображается в виде матрицы порядка 3×3 :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j_1+j_2+j_3 & j_1-j_2+j_3 & j_1+j_2-j_3 \\ j_1+m_1 & j_2+m_2 & j_3+m_3 \\ j_1-m_1 & j_2-m_2 & j_3-m_3 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Различные свойства симметрии получаются следующим образом.

В матрице $\| a_{ik} \|$ можно переставлять столбцы или строчки, а также поворачивать ее вокруг обеих диагоналей на 180° .

В результате таких операций получится некоторая новая матрица

$\| b_{ik} \|$, которой мы сопоставляем новый $3j$ - символ

$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ с $j'_i = \frac{1}{2}(b_{2i} + b_{3i})$, $m'_i = \frac{1}{2}(b_{2i} - b_{3i})$,
умноженный на $(-1)^{j_1 + j_2 + j_3}$, если производилась нечетная перестановка строк или столбцов.

Легко видеть, что перестановка столбцов в матрице (18) приводит к соотношениям (13), перестановка второй и третьей строки дает соотношение (14). Новые нетривиальные результаты возникают при перестановке строк 1 и 2, 1 и 3, а также при повороте вокруг главной диагонали. Соответствующие соотношения имеют вид:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - m_1) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - m_2) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - m_3) \\ \frac{1}{2}(j_2 + j_3 + m_1) - j_1 & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 + m_2) - j_2 & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + m_3) - j_3 \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(j_2 + j_3 + m_1) & \frac{1}{2}(j_1 + j_3 + m_2) & \frac{1}{2}(j_1 + j_2 + m_3) \\ j_1 - \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - m_2) & j_2 - \frac{1}{2}(j_1 + j_3 - m_2) & j_3 - \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - m_3) \end{pmatrix} = (19)$$

$$= \begin{pmatrix} j_1 & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 - m_1) & \frac{1}{2}(j_2 + j_3 + m_1) \\ -j_1 + j_3 & \frac{1}{2}(j_2 - j_3 - m_1) - m_3 & \frac{1}{2}(j_2 - j_3 + m_1) + m_3 \end{pmatrix}$$

Всего таким способом можно получить 72 соотношения симметрии для $3j$ - символов.

Из соотношений (19) видно, что в некоторых случаях с помощью свойств симметрии Редже можно упростить вычисление $3j$ - символов, уменьшив значения входящих в него моментов, поскольку эти соотношения позволяют перейти к $3j$ - символу, содержащему моменты типа $\frac{1}{2}(j_i + j_k \pm m_l)$, ($i \neq k \neq l$).

Полезны они и для получения других результатов (см. упр. №10)

§ 3. Вычисление коэффициентов Клебша-Гордана и
 $3j$ - символов.

Общую формулу для нахождения коэффициентов векторного сложения вывел Вигнер /5/ теоретико-групповыми методами. Рака /6/ получил общую формулу этих коэффициентов, исходя из рекуррентных соотношений. В дальнейшем другими авторами было предложено еще несколько вариантов таких формул (см. книгу /2/). Эти формулы имеют довольно громоздкий вид. Например, формула Рака записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (J_1 M_1 J_2 M_2 | JM) = & \delta_{M, M_1 + M_2} \left[\frac{(2J+1)(J_1+J_2-J)!(J+J_2-J_1)!(J_1+M_1)!}{(J_1+J_2+J+1)!} \right. \\
 & \times (J_1+M_2)!(J_2-M_2)!(J+M)!(J-M)! \left. \right]^{1/2} \cdot \sum_n (-1)^n \left\{ n! (J_1+J_2-J-n)! \times \right. \\
 & \times (J_1-M_1-n)!(J_2+M_2-n)!(J-J_2+M_1-n)! \times \\
 & \left. (J-J_1-M_2+n)! \right\}^{-1};
 \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$, но при суммировании берутся только такие значения, когда аргументы факториалов, стоящих в знаменателе, неотрицательны. Несколько других разновидностей этой формулы приведены в книге /2/ (§13). Там же подробно обсуждается связь между различными эквивалентными аналитическими выражениями для коэффициентов Клебша-Гордана.

Для коэффициентов векторного сложения с нулевыми проекциями $(l_1 0 l_2 0 | l 0)$, которые часто встречаются в расчетах, имеет место более простая формула:

$$\begin{aligned}
 (l_1 0 l_2 0 | l 0) = & (-1)^{q-l} (2l+1)^{1/2} \frac{q!}{(q-l_1)!(q-l_2)!(q-l)!} \times \\
 & \times \left[\frac{(l_1+l_2-l)!(l_1-l_2+l)!(l_1+l_2+l)!}{(l_1+l_2+l+1)!} \right]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь $2q = l_1 + l_2 + l$, если $l_1 + l_2 + l$ -четно.

Если нечетно $l_1 + l_2 + l$, то $(l_1 0 l_2 0 | l_0) = 0$

Для вычисления коэффициентов вместо общей формулы удобнее использовать таблицы формул конкретных значений $J_2 = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

Эти таблицы приведены в книге Кондона и Шортли /7/ и др.

/1,3,9,10/. Имеются численные таблицы коэффициентов векторного сложения. Например, Саймон /8/ затабулировал коэффициенты $(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)$ для значений

$$j_1 = 0, 1, 2, 3, 4; j_2, J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \frac{q}{2}.$$

Целый ряд полезных рекуррентных соотношений и других свойств коэффициентов векторного сложения приведен в книгах /1,2/. Там же даны таблицы формул для этих коэффициентов $(\frac{1}{2} \leq j_2 \leq 4)$.

Следует иметь в виду, что в литературе используется несколько различных обозначений для коэффициентов векторного сложения $(J_1 M_1 J_2 M_2 | JM)$, например, $(J_1 M_1 J_2 M_2 | J_1 J_2 JM)$, $C_{J_1 M_1 J_2 M_2}^{JM}$ и т.п. В заключении этого раздела приведем таблицу коэффициентов векторного сложения $(J_1 M_1 \frac{1}{2} M_2 | JM)$ и рассмотрим пример.

Таблица I.

Коэффициенты $(J_1 M_1 \frac{1}{2} M_2 | JM)$

J	$M_2 = \frac{1}{2}$	$M = -\frac{1}{2}$
$J_1 + \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{J_1 + M + \frac{1}{2}}{2J_1 + 1}}$	$\sqrt{\frac{J_1 - M + \frac{1}{2}}{2J_1 + 1}}$
$J_1 - \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{J_1 - M + \frac{1}{2}}{2J_1 + 1}}$	$\sqrt{\frac{J_1 - M + \frac{1}{2}}{2J_1 + 1}}$

Пример. Последний нуклон в ядре O^{17} имеет орбитальный момент $l = 2$, спин $s = 1/2$, полный момент количества движения $j = 5/2$. Построим волновую функцию этого нуклона Ψ_{jm} при $m = 3/2$ из спиновых функций $\chi_{\frac{1}{2}m_s}$ и функций орбитального движения Y_{lm_l} :

$$\Psi_{\frac{5}{2}\frac{3}{2}}(\vec{r}, \sigma) = \sum_{m_l m_s} (2m_l \frac{1}{2}m_s | \frac{5}{2} \frac{3}{2}) Y_{2m_l} \chi_{\frac{1}{2}m_s}.$$

Вычисляя с помощью таблицы I коэффициенты с $m_l = 1$,

$$m_s = \frac{1}{2} \text{ и } m_l = 2, \quad m_s = -\frac{1}{2}, \quad \text{находим:}$$

$$\Psi_{\frac{5}{2}\frac{3}{2}}(\vec{r}, \sigma) = \frac{2}{\sqrt{5}} Y_{21} \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} Y_{22} \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, в состоянии $\Psi_{jm} (j = \frac{5}{2}, m = \frac{3}{2})$ нуклон имеет с вероятностью 80% спин, направленный вверх, и с вероятностью 20% - спин, направленный вниз.

Итак, основное назначение коэффициентов Клебша-Гордана заключается в том, что с их помощью из волновых функций различных подсистем с моментами J_1 и J_2 строятся волновые функции системы в целом с фиксированным полным моментом J .

Теоретико-групповой смысл коэффициентов Клебша-Гордана состоит в том, что они образуют матрицу, осуществляющую разложение прямого произведения $D^{J_1} \times D^{J_2}$ двух неприводимых представлений группы трехмерных вращений R_3 в прямую сумму неприводимых представлений D^J этой же группы (см. / 1, 2, 4 /)

$$D^{J_1} \times D^{J_2} = \sum_J D^J.$$

Однако, как уже отмечалось в предыдущем занятии, можно использовать эти коэффициенты также для того, чтобы выразить произведение нескольких функций, относящихся к одной и той же системе, а именно произведение нескольких сферических гармоник от одного и того же аргумента, через меньшее количество таких функций:

$$Y_{l_1 m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) = \sum_L \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)}} \times$$

$$\chi(l_1 m_1, l_2 m_2 | LM)(l_1 0, l_2 0 | L 0) Y_{LM}(\theta, \varphi).$$

Напомним, что суммирование по L в этом выражении ведется только по значениям:

$$L = |l_1 - l_2|, |l_1 - l_2| + 2, \dots, l_1 + l_2.$$

Литература.

1. А.П.Юцис, И.Б.Левинсон, В.В.Ванагас "Математический аппарат теории момента количества движения". Вильнюс, 1960г.
 2. А.П.Юцис, А.А.Банзайтис "Теория момента количества движения в квантовой механике". Вильнюс, 1965г.
 3. А.Эдмонс, в сборнике "Деформация атомных ядер" ИЛ, 1958г. стр. 305-351.
 4. T. Regge *Nuovo Cimento* 10, 544 (1958)
 5. Е.Вигнер "Теория групп" ИЛ, 1961г.
 6. G. Racah *Phys Rev.* 62, 438 (1942), 63, 1315 (1943)
- Перевод этих статей имеется в книге И.Б.Левинсон, А.А.Никитин, "Руководство по теоретическому вычислению интенсивностей линий в атомных спектрах", изд. ЛГУ, 1962г.
7. Е.Кондон, Г.Шорли "Теория атомных спектров". 1949г.
 8. А.Саймон, в сборнике "Деформация атомных ядер" ИЛ, 1958г. стр. 355-379.
 9. А.М.Балдин, В.И.Гольданский, И.Л.Розенталь "Кинематика ядерных реакций" М. 1959, 2-ое изд. 1967г.

Упражнения.

1. Получить общую формулу для коэффициентов Клебша-Годана вида: $(J_1 M_1 J_2 M_2 | J_1 + J_2 M)$

Указание: учесть, что $\Psi_{J_1+J_2, J_1+J_2}(x_1 x_2) =$

$$= Y_{J_1, M_1}(x_1) Y_{J_2, M_2}(x_2)$$

и воспользоваться формулой:

$$\Psi_{J, M} = \sqrt{\frac{(J_1+M)!}{(2J_1)!(J_1-M_1)!}} (y_-)^{J_1-M} \Psi_{J_1, J_1},$$

где $J_- = J_-(x_1) + J_-(x_2)$.

2. Доказать формулу (58) из описания занятия № 1.

Указание: Показать справедливость этой формулы при $M=L$ используя явный вид пространственных гармоник $Y_{L, L}(\vec{r})$, затем связать оператор момента количества движения по переменной \vec{r} с угловыми моментами по переменным \vec{r}_1 и \vec{r}_2 и воспользоваться результатом предыдущего упражнения.

3. По общей формуле (20) вычислить коэффициенты векторного сложения: $(3 2 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | \frac{7}{2} \frac{7}{2}), (\frac{7}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{1}{2} | 3 2)$.

4. С помощью сокращенных формул для коэффициентов типа

$(j_1 m_1 j_2 m_2 | j m)$ вычислить коэффициенты:

$$(\frac{5}{2} \frac{3}{2} 1 1 | \frac{5}{2} \frac{5}{2}), (1 -1, \frac{3}{2} - \frac{1}{2} | \frac{5}{2} - \frac{3}{2}),$$

$$(2 1 3 -1 | 1 0).$$

5. Выразить через одночастичные функции волновую функцию двух электронов $|l_1 l_2 : LM \rangle$ с орбитальными моментами $l_1 = 2$

$l_2 = 3$ в случае, когда полный момент $L = 2$ и его проекция $M = 1$.

6. Две частицы со спинами $S_1 = 1$ и $S_2 = 2$ находятся в состоянии, в котором проекции обоих спинов на ось Z равны 0.

Выразить волновую функцию этого состояния через собственные функции оператора S^2 . Показать, что в этом состоянии полный спин двух частиц $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ не может принимать значения

$$S = 2.$$

7. Два электрона находятся в f -оболочке атома ($l_1 = l_2 = 3$)

Выяснить, какие значения полного орбитального момента совместимы с полным спином $S = 0$ и $S = 1$. Провести аналогичное рассмотрение возможных состояний конфигурации df ($l_1 = 1, l_2 = 3$).

В чем заключается различие между этими двумя случаями?

8. В ядерной физике рассматриваются коллективные колебания поверхности ядра различной мультипольности $\lambda = 2, 3, \dots$

Квадрупольные колебания ($\lambda = 2$) отвечают эллипсоидальной деформации сферических (в равновесном состоянии) ядер. Каждый квант этих колебаний (его можно рассматривать как некоторую квазичастицу — фонон, являющуюся бозоном) несет момент количества движения $l = 2$ и имеет положительную четность. Выяснить, какие значения полного момента L допустимы в системе двух квадрупольных фононов. Какие значения L возможны в системе двух октупольных фононов (квазичастицы с моментом $l = 3$ и отрицательной четностью, отвечающие грушевидной деформации ядра).

9. Показать, что волновая функция системы трех частиц вида:

$$\Psi_{j_1 j_2 j_3}(1, 2, 3) = \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \Psi_{j_1 m_1}(1) \Psi_{j_2 m_2}(2) \Psi_{j_3 m_3}(3)$$

является скаляром. Исходя из этого факта, показать, что система трех октупольных фононов не может обладать нулевым полным моментом.

10. С помощью свойств симметрии Редже, показать, что $3j$ -символ

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

равен нулю.

Занятие 3.

Векторное сложение трех и четырех моментов.

Целью настоящего занятия является рассмотрение ряда вопросов, связанных со сложением нескольких моментов количества движения (трех, четырех и т.д.). Обсуждаемые здесь величины (коэффициенты Рака, $6j$ и $9j$ - символы) используются также в теории угловых распределений ядерных реакций и угловых корреляций. Основной литературой является уже цитированные книги /1-3/.

§ I. Коэффициенты Рака, $6j$ - символы и их свойства.

Если складываются три момента количества движения j_1, j_2, j_3 то можно сначала сложить j_1 и j_2 ($\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{J}_{12}$), затем к их сумме добавить j_3 и получить состояние системы трех моментов с полным моментом J и его проекцией M на ось z ($\vec{J}_{12} + \vec{j}_3 = \vec{J}$). Волновую функцию, полученную таким образом, обозначим

$$|j_1 j_2 (J_{12}), j_3 : JM\rangle. \quad \text{Очевидно, что}$$

$$|j_1 j_2 (J_{12}), j_3 : JM\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3, M_{12}} (j_1 m_1 j_2 m_2 | J_{12} M_{12}) \times \quad (1)$$

$$\times (J_{12} M_{12} j_3 m_3 | JM) \times \Psi_{j_1 m_1}(1) \Psi_{j_2 m_2}(2) \Psi_{j_3 m_3}(3).$$

Отметим, что функции

$|j_2 j_1 (J_{12}), j_3 : JM\rangle$ и $|j_3, j_1 j_2 (J_{12}) : JM\rangle$, отличающиеся от (1) порядком сложения моментов j_1, j_2 и J_{12}, j_3 , соответственно, совпадают с (1) с точностью до фазы

$$|j_2 j_1 (J_{12}), j_3 : JM\rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J_{12}} |j_1 j_2 (J_{12}), j_3 : JM\rangle = \quad (2)$$

$$= (-1)^{J_{12} + j_3 - J} |j_3, j_1 j_2 (J_{12}) : JM\rangle$$

Однако можно провести сложение моментов по другой схеме. Именно, сначала сложить j_2 и j_3 ($\vec{j}_2 + \vec{j}_3 = \vec{J}_{23}$), а полученную сумму прибавить к j_1 ($\vec{j}_1 + \vec{J}_{23} = \vec{J}$). Получится состояние системы, описываемое волновой функцией:

$$|j_1, j_2, j_3(J_{23}); JM\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3, M_{23}} (j_2, m_2, j_3, m_3 | J_{23}, M_{23}) \times$$

$$\times (j_1, m_1, J_{23}, M_{23} | JM) \times \Psi_{j_1, m_1}(1) \Psi_{j_2, m_2}(2) \Psi_{j_3, m_3}(3). \quad (3)$$

Функции (1) и (3) можно связать друг с другом унитарным преобразованием:

$$|j_1, j_2(J_{12}), j_3; JM\rangle = \sum_{J_{23}} \langle j_1, j_2(J_{12}), j_3; J | j_1, j_2, j_3(J_{23}); J \rangle \times$$

$$\times |j_1, j_2, j_3(J_{23}); JM\rangle, \quad (4)$$

$$|j_1, j_2, j_3(J_{23}); JM\rangle = \sum_{J_{12}} \langle j_1, j_2(J_{12}), j_3; J | j_1, j_2, j_3(J_{23}); J \rangle \times$$

$$\times |j_1, j_2(J_{12}), j_3; JM\rangle.$$

Коэффициенты $\langle j_1, j_2(J_{12}), j_3; J | j_1, j_2, j_3(J_{23}); J \rangle$ перехода от одной схемы связи трех моментов (1) к другой схеме связи (3) называются коэффициентами Рака и более кратко обозначаются символом $U(j_1, j_2, J, j_3; J_{12}, J_{23})$. Переход (4) между двумя рассмотренными схемами связи трех моментов называется стандартным переходом. Можно показать (см.упраж. 6), что переход между двумя любыми другими схемами связи выполняется с помощью тех же самых коэффициентов $U(abcd; ef)$, в которых несколько иначе расположены моменты j_1, j_2, j_3 или с помощью более простых величин - фазовых множителей. Поэтому в литературе обычно табулируются только коэффициенты $U(j_1, j_2, J, j_3; J_{12}, J_{23})$, для стандартного перехода (4).

Коэффициенты Рака U диагональны по полному моменту и его проекции M , они не зависят от величины этой проекции. Из (1) и (3) видно, что коэффициенты Рака выражаются через коэффициенты Клебша-Гордана следующим образом:

$$\sum_{m_1, m_2, m_3, M_{12}, M_{23}} (j_1, m_1, j_2, m_2 | J_{12}, M_{12}) (J_{12}, M_{12}, j_3, m_3 | JM) (j_2, m_2, j_3, m_3 | J_{23}, M_{23}) \times$$

$$\times (j_1, m_1, J_{23}, M_{23} | JM') = \delta_{J, J'} \delta_{M, M'} U(j_1, j_2, J, j_3; J_{12}, J_{23}). \quad (5)$$

Для них справедливы соотношения ортонормированности:

$$\sum_{J_{23}} U(j_1 j_2 J_{23}; J_{12} J_{23}) U(j_1 j_2 J_{23}; J_{12} J_{23}) \times$$

$$\times (j_1 m_1 J_{23} M_{23} | J_{12} M_{12}) = \delta_{J_{12}} \delta_{M_{12}} U(j_1 j_2 J_{23}; J_{12} J_{23}) \quad (6)$$

Коэффициенты U с точностью до множителя совпадают с коэффициентами $W(j_1 j_2 J_{23}; J_{12} J_{23})$, введенными в работе /4/, а также с $6j$ - символами $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & J & J_{23} \end{Bmatrix}$

$$U(abcd; ef) = \sqrt{(2l+1)(2f+1)} W(abcd; ef) =$$

$$= (-1)^{a+b+c+d} \sqrt{(2e+1)(2f+1)} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Коэффициенты Рака обладают довольно простыми свойствами симметрии относительно перестановки моментов, от которых они зависят. Однако наибольшей симметрией обладают $6j$ - символы. Они не изменяются при любой перестановке столбцов:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ l_1 & l_3 & l_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ l_3 & l_1 & l_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

и при замене двух любых моментов в верхней строке соответствующими моментами нижней строки:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ j_1 & j_2 & l_3 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Отметим также свойства симметрии $6j$ -символов, установленные

Редже /5/:

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & s_1 - b & s_1 - e \\ d_1 & s_1 - c & s_1 - f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_2 - a & b & s_2 - e \\ s_2 - d & c & s_2 - f \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} s_3 - a & s_3 - b & e \\ s_3 - d & s_3 - c & f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_2 - d & s_3 - c & s_1 - f \\ s_2 - a & s_3 - b & s_1 - e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_3 - d & s_1 - c & s_2 - f \\ s_3 - a & s_1 - b & s_2 - e \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Здесь

$$s_1 = \frac{1}{2}(b+c+e+f), \quad s_2 = \frac{1}{2}(a+d+e+f), \quad s_3 = \frac{1}{2}(a+b+c+d). \quad (11)$$

Свойства Редже удобно использовать в том случае, если какая-либо величина s_i равна одному из параметров, из которых

она же построена. В этом случае один из параметров $6j$ - символа превращается в нуль, что существенно облегчает вычисление.

Дело в том, что когда из моментов один равен нулю, то для $6j$ - символа имеем простое выражение

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\} = \delta_{l_2 j_2} \delta_{l_3 j_3} (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \left(\sqrt{(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)} \right)^{-1} \quad (12)$$

Связь $6j$ -символов с $3j$ -символами имеет следующий вид

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\} = \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \\ n_1, n_2, n_3}} \left(\begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & n_2 & n_3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -n_1 & -m_2 & n_3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ n_1 & -n_2 & m_3 \end{matrix} \right) \times (-1)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2 + j_3 - m_3 + l_1 - n_1 + l_2 - n_2 + l_3 - n_3} \quad (13)$$

Для коэффициентов $W(abcd; ef)$ в работе /4/ получена общая формула (см. также /2/ §22). Во многих работах приводятся формулы этих коэффициентов для конкретных значений моментов (например, для случаев $e = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ коэффициенты затабулированы в работе /6/, а для $e = \frac{5}{2}$ в работе /7/). Имеются обширные численные таблицы коэффициентов Рака /8/. Более подробное описание существующих таблиц коэффициентов Рака можно найти в книгах /1,2/.

§ 2. $2j$ - СИМВОЛЫ.

Если складываются четыре момента количества движения j_1, j_2, j_3, j_4 , то можно сначала сложить j_1 и j_2 ($\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{J}_{12}$), затем j_3 и j_4 ($\vec{j}_3 + \vec{j}_4 = \vec{J}_{34}$), а после этого промежуточные моменты \vec{J}_{12} и \vec{J}_{34} сложить в полный момент \vec{J} . Полученную в результате волновую функцию обозначим $|j_1 j_2(\vec{J}_{12}), j_3 j_4(\vec{J}_{34}); JM\rangle$. Можно изменить схему связи моментов:

$$\vec{j}_1 + \vec{j}_3 = \vec{J}_{13}, \quad \vec{j}_2 + \vec{j}_4 = \vec{J}_{24}, \quad \vec{J}_{13} + \vec{J}_{24} = \vec{J}. \quad (14)$$

При этом получится функция

$$|j_1 j_3(\vec{J}_{13}), j_2 j_4(\vec{J}_{24}); JM\rangle. \quad (15)$$

Коэффициенты перехода от первой связи четырех моментов ко второй называются обобщенными коэффициентами Рака и обозначаются

$$\langle j_1 j_2 (J_{12}), j_3 j_4 (J_{34}); J | j_1 j_3 (J_{13}), j_2 j_4 (J_{24}); J \rangle. \quad (16)$$

Более симметричной величиной является так называемый $9j$ -символ:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{14} & J \end{matrix} \right\} = \left[(2J_{12}+1)(2J_{34}+1)(2J_{13}+1)(2J_{14}+1) \right]^{-\frac{1}{2}} \times \langle j_1 j_2 (J_{12}), j_3 j_4 (J_{34}); J | j_1 j_3 (J_{13}), j_2 j_4 (J_{24}); J \rangle \quad (17)$$

С помощью $9j$ -символов можно записать

$$\begin{aligned} & | j_1 j_2 (J_{12}), j_3 j_4 (J_{34}); JM \rangle = \\ & = \sum_{J_{13}, J_{14}} \left[(2J_{12}+1)(2J_{34}+1)(2J_{13}+1)(2J_{14}+1) \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{14} & J \end{matrix} \right\} | j_1 j_3 (J_{13}), j_2 j_4 (J_{24}); JM \rangle \end{aligned} \quad (18)$$

Коэффициенты перехода между двумя любыми другими схемами связи четырех моментов могут быть сведены к $9j$ -символам, являющимся табличными величинами. В некоторых случаях коэффициенты перехода будут иметь более простой вид (см. упражнение 6).

$9j$ -символ легко выразить через $6j$ -символы или $3j$ -символы:

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right\} = \sum_k (-1)^{2k} (2k+1) \begin{Bmatrix} a & d & g \\ h & i & k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & h \\ d & k & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & f & i \\ k & a & b \end{Bmatrix}, \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix} \right\} = \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \\ n_1, n_2, n_3 \\ q_1, q_2, q_3}} (-1)^{\sum_{i=1}^3 (j_i - m_i + l_i - n_i + k_i - q_i)} \times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \times \quad (20)$$

$$\times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & l_1 & k_1 \\ m_1 & n_1 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & l_2 & k_2 \\ m_2 & n_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & l_3 & k_3 \\ m_3 & n_3 & q_3 \end{pmatrix}.$$

При четной перестановке столбцов или строк, а также при отражении относительно обеих диагоналей $9j$ -символ остается неизменным. При нечетной перестановке столбцов или строк он умножается на $(-1)^S$, где S - сумма всех девяти входящих в него моментов.

Ввиду унитарности преобразования (18) для $9j$ -символов имеет место условие ортонормированности:

$$\sum_{gh} (2c+1)(2f+1)(2g+1)(2h+1) \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & c' \\ d & e & f' \\ g & h & i \end{Bmatrix} = \delta_{cc'} \delta_{ff'}. \quad (21)$$

Когда один из моментов в $9j$ -символе равен нулю, то последний сводится просто к $6j$ -символу.

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & e \\ f & f & 0 \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{b+e+f}}{\sqrt{(2e+1)(2f+1)}} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$9j$ -символы используются при переходе от LS к jj связи (или наоборот). Если имеются две частицы с орбитальными моментами l_1 и l_2 и спинами $s_1 = 1/2, s_2 = 1/2$, то в LS -связи схема сложения моментов следующая: $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{L}, \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \vec{S}, \vec{L} + \vec{S} = \vec{J}$.

В jj -связи схема сложения моментов имеет вид:

$$\vec{l}_1 + \vec{s}_1 = \vec{j}_1, \vec{l}_2 + \vec{s}_2 = \vec{j}_2, \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{J}.$$

Поэтому переход от LS к jj -связи можно осуществить с помощью такого преобразования:

$$|l_1 l_2 (L), s_1 s_2 (S); JM\rangle = \sum_{j_1 j_2} [(2L+1)(2S+1)(2j_1+1)(2j_2+1)]^{\frac{1}{2}} \times \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & L \\ s_1 & s_2 & S \\ j_1 & j_2 & J \end{Bmatrix} |l_1 s_1 (j_1), l_2 s_2 (j_2); JM\rangle. \quad (23)$$

Обратный переход выполняется с помощью тех же $9j$ -символов.

$$|l_1 s_1 (j_1), l_2 s_2 (j_2); JM\rangle = \sum_{LS} [(2L+1)(2S+1)(2j_1+1)(2j_2+1)]^{\frac{1}{2}} \times \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & L \\ s_1 & s_2 & S \\ j_1 & j_2 & J \end{Bmatrix} |l_1 l_2 (L), s_1 s_2 (S); JM\rangle. \quad (24)$$

Алгебраические формулы коэффициентов $\begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & L \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ j_1 & j_2 & J \end{Bmatrix}$ даны в

сборнике /9/, там же имеются численные таблицы этих коэффициентов для $l_1, l_2 = 0, 1, 2, 3, 4$ /9, 10/. Ссылки на другие таблицы

$9j$ -символов и ряд полезных формул и таблиц можно найти в книгах/1,2/.

При изменении схемы связи пяти моментов количества движения появляются $12j$ -символы и т.д. Но они пока еще не нашли широкого применения в практических расчетах.

Литература.

1. В.В.Ванагас, И.В.Левинсон, А.П.Юцис "Математический аппарат теории момента количества движения" Вильнюс, 1960г.
2. А.А.Бандзайтис, А.П.Юцис "Теория момента количества движения в квантовой механике" Вильнюс, 1965г.
3. А.Эдмондс "Угловые моменты в квантовой механике" в сборнике "Деформация атомных ядер" ИЛ, 1958.
4. G. Racah, Phys. Rev. 62, 438 (1942).
5. T. Regge, Nuovo Cimento 11, 116 (1959).
6. H.A. Jahn, Proc. Roy Soc A205, 192 (1951).
7. A.R. Edmonds, B.H. Flowers Proc. Roy. Soc. A214, 515 (1952)
8. A. Simon et al. Ann. Tokyo Astron. Obs. 3, 89 (1953).
9. "Гамма-лучи" сборник М-Д 1961 (АН СССР, Физико-Технический институт им.А.Ф.Иоффе).
10. А.М.Балдин, В.И.Гольданский, В.М.Максименко, И.Л.Розенталь "Кинематика ядерных реакций" 1959, 2-ое изд.1967г.

Указания.

1. Рассмотреть переходы между различными схемами связи трех моментов, и именно выразить волновые функции вида $|j_1 j_2 (J_{12}) j_3; J\rangle$ через волновые функции, отвечающие следующим схемам связи
- а) $\vec{j}_1 + (\vec{j}_2 + \vec{j}_3)$, б) $\vec{j}_3 + (\vec{j}_1 + \vec{j}_2)$, в) $\vec{j}_2 + (\vec{j}_3 + \vec{j}_1)$, г) $\vec{j}_1 + (\vec{j}_3 + \vec{j}_2)$,
 д) $\vec{j}_2 + (\vec{j}_1 + \vec{j}_3)$, е) $\vec{j}_3 + (\vec{j}_2 + \vec{j}_1)$, ж) $(\vec{j}_3 + \vec{j}_1) + \vec{j}_2$, з) $(\vec{j}_1 + \vec{j}_3) + \vec{j}_2$,
 и) $(\vec{j}_3 + \vec{j}_1) + \vec{j}_2$, к) $(\vec{j}_2 + \vec{j}_1) + \vec{j}_3$, л) $(\vec{j}_3 + \vec{j}_2) + \vec{j}_1$, м) $(\vec{j}_1 + \vec{j}_2) + \vec{j}_3$.

Выразить коэффициенты перехода через стандартные табличные величины (коэффициенты Рака $U(abcd; ef)$ или $6j$ -символы; в некоторых случаях возможны и более простые выражения для коэффициентов перехода - просто фазовые множители).

2. Исходя из свойств симметрии $3j$ -символов, доказать свойства симметрии $6j$ -символов. Доказать формулу (I2)

3. Найти численные значения $6j$ -символа $\left\{ \begin{matrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{matrix} \right\}$.

Указание: с помощью свойств симметрии Редже понизить значения входящих в этот $6j$ -символ параметров, затем воспользоваться таблицами (например, из работы /3/).

4. Перейти от jj -связи к LS -связи в волновой функции двух электронов (найти численные значения коэффициентов перехода).

5. Перейти от LS -связи к jj -связи в волновых функциях двух f -электронов $|f^2: L=3, S=1, J=2\rangle$ и $|f^2: L=4, S=0, J=4\rangle$.

6. Найти коэффициенты перехода от схемы четырех моментов

$(\vec{j}_1 + \vec{j}_2) + (\vec{j}_3 + \vec{j}_4)$ к другой схеме связи тех же моментов $(\vec{j}_2 + \vec{j}_4) + \vec{j}_1 + \vec{j}_3$ Выразить их через $6j$ -символы.

7. Доказать формулу (I9).

Занятие 4.

Вычисление сумм произведений коэффициентов векторного сложения.

§ I. Введение

Часто при рассмотрении угловых распределений ядерных реакций или рассеяния, в расчетах по модели ядерных или атомных оболочек возникает необходимость в суммировании произведений большого количества коэффициентов векторного сложения по входящим в них моментам и их проектам. Прямое вычисление таких сумм оказывается весьма трудоемким делом, поскольку, например, суммирование по проекциям моментов j_1, j_2, \dots, j_n приводит к сумме, содержащей число слагаемых порядка $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \dots (2j_n + 1)$. В связи с этим возникает естественное стремление преобразовать эти суммы таким образом, чтобы уменьшить насколько возможно количество индексов суммирования. Для этой цели можно использовать $6j, 9j$ и т.д. - символы. Одним $6j$ -символом можно заменить сумму по 6 индексам произведений четырех коэффициентов векторного сложения, $9j$ - символ заменяет сумму по 9 индексам произведений шести коэффициентов Клебша-Гордана и т.д. Если разбить какую-то рассматриваемую сумму произведений коэффициентов векторного сложения на несколько парциальных сумм, совпадающих с $6j, 9j$ и т.д. - символами, вычисление ее существенно упрощается: мы получим сумму значительно меньшей кратности, в которую войдут табличные величины - $6j$ и $9j$ - символы.

Существует два способа вычисления такого рода сумм: алгебраический и графический. Оба они основаны на использовании свойств ортонормированности коэффициентов Клебша-Гордана или $3j$ -символов, а также соотношений, выражающих $6j, 9j$ -символы через коэффициенты Клебша-Гордана. Каждый из методов облада-

ет своими достоинствами и недостатками. Так, графический метод является очень наглядным, позволяет легко проанализировать различные способы упрощения рассматриваемого выражения и выбрать наилучший. Однако при использовании этого метода возникает известное неудобство, связанное с тем, что для получения правильного результата необходимо внимательно следить за ориентацией узлов и линий на графике, за наличием в суммах необходимых фазовых множителей.

Алгебраический метод является менее формальным, нахождение фазовых множителей, входящих в конечный результат, в нем не представляет трудностей. Однако он менее прозрачен и элегантен, чем графический способ. На практике часто используют комбинацию обоих методов. А именно с помощью графического способа выбирают более подходящий способ упрощения рассматриваемого выражения (при этом можно не обращать внимания на ориентации узлов и линий) Это дает нам конечный результат с точностью до фазовых множителей, а фазовые множители можно легко найти, используя алгебраические соотношения.

В связи с этим в данном занятии мы кратко изложим оба метода. Вначале будет описан алгебраический метод. Материал этого раздела важен также потому, что приведенные в нем соотношения являются алгебраической основой графического метода, который мы изложим в рецептурном плане, не приводя доказательств. Детальное изложение графического метода можно найти в книгах /1,2,3/.

§ 2. Алгебраический метод.

Сформулируем некоторые общие принципы, которыми следует руководствоваться при вычислении указанных выше сумм. Рассмотрим сначала суммы по проекциям моментов. Пусть имеется выраже-

ние $F(j_1 m_1; j_2 m_2; \dots; j_k m_k; j_{k+1}, \dots, j_n)$, которое представляет собой сумму произведений коэффициентов Клебша-Гордана, причем суммирование ведется по проекциям m_{k+1}, \dots, m_n моментов j_{k+1}, \dots, j_n , а по m_1, \dots, m_k суммирования нет. Кроме того, потребуем, чтобы каждый из моментов j_{k+1}, \dots, j_n входил в эту сумму дважды; большинство сумм, встречающихся на практике, удовлетворяют этому требованию.

Для того, чтобы выделить в этой сумме блоки, отвечающие $6j$ и $9j$ -символам, которые включают в себя суммы по проекциям всех входящих моментов, нужно сначала тождественно преобразовать эту сумму, вводя в нее с помощью соотношения ортогональности для коэффициентов Клебша-Гордана суммирование также и по индексам

$$m_1, \dots, m_k.$$

Возьмем, например, сумму:

$$F(j_1 m_1, j_5 m_5, j_6 m_6; j_2 j_3 j_4) = \sum_{m_1 m_3 m_4} (j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m_3) \times (j_3 m_3, j_4 m_4 | j_5 m_5) (j_2 m_2, j_4 m_4 | j_6 m_6). \quad (1)$$

Учитывая, что

$$\sum_{j_5 m_5} (j_1 m_1, j_6 m_6 | j_5 m_5) (j_2 m_2, j_4 m_4 | j_5 m_5) = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_6 m_6'}, \quad (2)$$

можно записать:

$$F(j_1 m_1, j_5 m_5, j_6 m_6; j_2 j_3 j_4) = \sum_{j_5 m_5} \left\{ \sum_{m_1 m_2 m_3 m_4 m_6} (j_1 m_1', j_2 m_2 | j_3 m_3) \times (j_3 m_3, j_4 m_4 | j_5 m_5) (j_2 m_2, j_4 m_4 | j_6 m_6) (j_1 m_1', j_6 m_6 | j_5 m_5) \right\} (j_1 m_1, j_6 m_6 | j_5 m_5). \quad (3)$$

Сумма в фигурных скобках совпадает с матрицей перехода от одной схемы связи трех моментов $|j_1 j_2 j_4(j_6); j_5 m_5\rangle$ к другой схеме их связи $|j_1 j_2(j_3) j_4; j_5 m_5\rangle$, то-есть она равна $\delta_{j_5 j_5'} \delta_{m_5 m_5'} \times \mathcal{U}(j_1 j_2 j_5 j_4; j_3 j_6)$. Окончательно можно записать:

$$\sum_{m_1 m_3 m_4} (j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m_3) (j_3 m_3, j_4 m_4 | j_5 m_5) (j_2 m_2, j_4 m_4 | j_6 m_6) = \mathcal{U}(j_1 j_2 j_5 j_4; j_3 j_6) (j_1 m_1, j_6 m_6 | j_5 m_5). \quad (4)$$

Рассмотрим теперь более сложный пример:

$$F(j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3, j_4 m_4, j_5, j_6, j_7, j_8) = \sum_{m_5, m_6, m_7, m_8} (j_1 m_1 j_5 m_5 | j_6 m_6) \times \quad (5)$$

$$\times (j_3 m_3 j_8 m_8 | j_7 m_7) (j_5 m_5 j_8 m_8 | j_2 m_2) (j_6 m_6 j_7 m_7 | j_4 m_4)$$

Для того, чтобы ввести суммирование по проекциям моментов

$$j_1, j_2, j_3 \text{ домножим это выражение на } \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2} = \quad (6)$$

$$\sum_{a, m_6} \sum_{a, m_7, m_8} (j_2 m_2 j_1 m_1 | a m_a) (j_1 m'_1 j_1 m'_1 | a m_a) (a m_a j_3 m_3 | b m_b) (a m'_a j_3 m'_3 | b m_b)$$

и просуммируем по m'_1, m'_2, m'_3 . Результат можно символически представить в виде

$$F = \sum_{a, m_a, b, m_b} V(a) (j_2 m_2 j_1 m_1 | a m_a) (a m_a j_3 m_3 | b m_b) \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что сумма $V(a)$ по индексам $m'_1, m'_2, m'_3, m_5, m_6, m_7, m_8$,

составленная из произведений шести коэффициентов

Клебша-Гордана, представляет собой с точностью до множителя

элемент матрицы перехода от одной схемы связи четырех моментов

$$\vec{j}_1 + \vec{j}_5 = \vec{j}_6, \vec{j}_2 + \vec{j}_8 = \vec{j}_7, \vec{j}_6 + \vec{j}_7 = \vec{j}_4 \text{ к другой схеме их связи } \vec{j}_5 + \vec{j}_8 = \vec{j}_2, \vec{j}_2 + \vec{j}_1 = \vec{j}_3$$

$$= a, \vec{a} + \vec{j}_3 = b, \text{ то есть она пропорциональна } \delta_{j_2, b} \delta_{m_2, m_b}$$

В итоге

$$F = \sum_a V(a) \sum_{m_a} (j_2 m_2 j_1 m_1 | a m_a) (a m_a j_3 m_3 | j_4 m_4) \quad (8)$$

Следовательно, мы выделим в сумме F часть $V(a)$ (она представляет собой матрицу перехода от одной схемы связи нескольких моментов к другой схеме связи и может быть в дальнейшем разбита на $6j$ - символы) и минимальное число коэффициентов Клебша-Гордана, включающих в себя проекции m_1, m_2, m_3, m_4 , по которым нет суммирования в первоначальном выражении (5). Кроме того, появилось одно дополнительное суммирование по промежуточному моменту a .

Приводя аналогичные рассуждения, можно показать, что в об-

дем случае, если некоторая комбинация F коэффициентов Клебша-Гордана содержит n проекций m_i , по которым нет суммирования, то в большинстве встречающихся на практике случаев она может быть с помощью формул типа (2), (6) сведена к сумме произведений $n-2$ коэффициентов Клебша-Гордана, содержащих указанные проекции, на некоторую матрицу перехода $V(j_i, a_k)$ от одной схемы связи моментов j_i , входящих в F , к другой схеме их связи. Индексами суммирования в этой сумме, как в (8), будут служить $n-3$ промежуточных момента a_k и их проекции m_{a_k} .

Выбор этих промежуточных моментов и выделение $n-2$ коэффициентов Клебша-Гордана, содержащих проекции моментов, по которым нет суммирования, производится в общем случае неоднозначно. При этом разные варианты выбора промежуточных моментов приводят к разным конечным выражениям. Тем самым при выполнении этой процедуры целесообразно рассмотреть несколько вариантов преобразования исходного выражения и выбрать тот, который дает наиболее удобную для вычислений конечную формулу. Например, ту же самую комбинацию коэффициентов векторного сложения (5) можно было трансформировать несколько иначе. Домножим ее на сумму

$$\sum_{d m_d c m_c} (j_1 m_1 j_2 m_2 | c m_c) (j_1 m'_1 j_3 m'_3 | c m'_c) (c m_c j_2 m_2 | d m_d) \times (c m'_c j_2 m'_2 | d m_d) = \delta_{m, m'_1} \delta_{m_2, m'_2} \delta_{m, m'_3} \quad (9)$$

и просуммируем получившееся выражение по m'_1, m'_2, m'_3 . При этом F приобретает вид:

$$F = \sum_{c m_c} V(c) (j_1 m_1 j_2 m_2 | c m_c) (c m_c j_2 m_2 | j_4 m_4), \quad (10)$$

где $V(c) \sim \delta_{j_4} d \delta_{m_4 m_d}$ - матрица перехода от схемы связи $\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{j}_c, \vec{j}_3 + \vec{j}_2 = \vec{j}_2, \vec{j}_c + \vec{j}_2 = \vec{j}_4$ к новой схеме связи $\vec{j}_1 + \vec{j}_3 = \vec{c}, \vec{j}_c + \vec{j}_2 = \vec{j}_4$

$\vec{c} + \vec{j}_2 = \vec{d}$, то-есть с точностью до множителя - это обычный 9_j -
- символ.

$$V(c) = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ j_3 & j_8 & j_7 \\ c & j_2 & j_4 \end{matrix} \right\} [(2j_2+1)(2c+1)(2j_6+1)(2j_7+1)]^{1/2} \quad (11)$$

Таким образом, $V(c)$ в этом случае сводится к одному 9_j -
-символу или к сумме по одному индексу произведений трех 6_j -
-символов.

Рассмотрим теперь, как выражается через 6_j -символы матрица перехода $V(a)$ из формулы (8). Общий принцип сведения сложных трансформационных матриц к 6_j -символам заключается в том, что нужно представить переход от начальной схемы связи рассматриваемых моментов к их конечной схеме связи в виде нескольких последовательных переходов, в каждом из которых изменяется схема связи только трех каких-то моментов. Тогда каждому промежуточному переходу можно поставить в соответствие определенный 6_j -символ и как результат промежуточного перехода появляется, вообще говоря, суммирование по одному индексу (суммирование исчезает, если этот индекс совпадает с одним из моментов, фигурирующих в конечной схеме связи). Например, изменение схемы связи четырех моментов, отвечающее обычному 9_j -символу, может быть выполнено в три этапа (это минимальное число этапов для 9_j -символа).

$$\begin{aligned} & j_1 j_2 (J_{12}), j_3 j_4 (J_{34}); J \longrightarrow J_{12} j_3 (J_{123}), j_4; J \longrightarrow \\ & \longrightarrow j_1 j_3 (J_{13}), j_2 (J_{123}), j_4; J \longrightarrow j_1 j_3 (J_{13}), j_2 j_4 (J_{24}); J \end{aligned} \quad (12)$$

Из этой цепочки видно, что 9_j -символ, как и должно быть, сводится к сумме по одному индексу J_{123} произведений трех коэффициентов Рака $U(J_{12} j_3 J_{34}; J_{123} J_{34}), U(j_2 j_4 J_{123} j_3, J_{12} J_{13})$, $x(-1)^{j_2-j_1-j_3} (-1)^{j_3-j_1-j_2}$ и $U(J_{13} j_4 J_{34}; J_{123} J_{124})$.

Если теперь вернуться к выражению $V(a)_k$, то из формулы (8) видно, что оно соответствует изменению схемы связи четырех моме-

тов, которое может быть выполнено в два этапа:

$$j_1 j_5(j_6), j_2 j_8(j_7): j_4 \rightarrow j_6 j_8(a), j_3: j_2 \rightarrow j_5 j_7(j_6) j_1(a), j_3: j_4 \quad (13)$$

при этом появятся два коэффициента Рака, дополнительных индексов суммирования не будет, так как моменты a и j_2 , по которым оно должно было бы выполняться, фигурируют как квантовые числа в конечной схеме связи:

$$V(a) = (-1)^{j_1+j_2+j_3-j_4+j_6-a} U(j_6 j_8 j_4 j_3; a j_7) U(j_5 j_7 a j_3; j_6 j_2) \quad (14)$$

Заметим, что изменение схемы связи (12) четырех моментов отвечает обычный 9_j -символ (9_j -символ II рода), элементы матрицы перехода (13) сводятся к так называемому 9_j -символу I рода. Из формулы (14) видно, что 9_j -символ I рода проще по конструкции, чем 9_j -символ II рода, он просто равен произведению двух 6_j -символов на фазовый множитель.

Итак, мы смогли представить сумму (5) в двух видах

$$\sum_{m_1 m_2 m_3 m_4} (j_1 m_1 j_5 m_5 | j_6 m_6) (j_3 m_3 j_8 m_8 | j_7 m_7) (j_6 m_6 j_8 m_8 | j_2 m_2) \times \\ \times (j_6 m_6 j_7 m_7 | j_4 m_4) = \sum_{a m_2} (-1)^{j_1+j_2+j_3-j_4+j_6-a} U(j_6 j_8 j_4 j_3; a j_7) \times \\ U(j_1 j_5 a j_2; j_6 j_2) \times (j_2 m_2 j_6 m_6 | a m_2) (a m_2 j_3 m_3 | j_4 m_4) \quad (15)$$

или

$$= \sum_{c m_c} \sqrt{(2j_2+1)(2j_6+1)(2j_7+1)(2c+1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ j_3 & j_8 & j_7 \\ c & j_2 & j_4 \end{Bmatrix} (j_1 m_1 j_5 m_5 | c m_c) \times \\ \times (c m_c j_6 m_6 | j_4 m_4) \quad (16)$$

Ясно, что вычислить суммы, стоящие во второй или третьей строке этого выражения, значительно проще, чем исходную сумму, так как в них останутся только два индекса суммирования вместо четырех. На вопрос о том, какая из двух форм проще: (15) или (16) - нельзя дать однозначного ответа. Все зависит от того, какие таблицы или какие программы для ЭВМ имеются в нашем распоряжении. Если имеются достаточно обширные таблицы 9_j -символов, то несколько легче вести вычисления по формуле (16),

если их нет, то следует предпочесть форму (15), поскольку для $6j$ -символов имеются многочисленные подробные таблицы, кроме того, при ручном счете легче вычислить два коэффициента Рака, чем один $9j$ -символ.

Подобным образом можно получить ряд алгебраических соотношений, которые можно использовать для суммирования некоторых комбинаций $6j$ и $9j$ -символов по отдельным входящим в них моментам j . Например, переход от схемы связи трех моментов $j_2 j_1 (J_{12}) j_3 J$ к другой схеме связи $j_2 j_1 j_3 (J_{13}) J$ можно выполнить непосредственным путем, что приводит к коэффициенту Рака $U(j_2 j_1, J_{13}; J_2 J_3)$, а можно произвести тот же переход в два этапа $j_2 j_1 (J_{12}) j_3 J \rightarrow j_1 j_2 j_3 (J_{12}) J \rightarrow j_2 j_1 j_3 (J_{13}) J$, в результате чего получается сумма по индексу J_{12} произведений двух коэффициентов Рака. В результате получим полезное равенство

$$\sum_{J_{12}} (-1)^{J_{12}} U(j_1 j_2 J_{12}; J_{12} J_{23}) U(j_2 j_3 J_{12}; J_{23} J_{13}) = (-1)^{J_{12} + J_{13} - J - j_1 - j_2 - j_3} U(j_2 j_1 J_{13}; J_{12} J_{13}). \quad (17)$$

Рассмотренные выше примеры дают представление о том, как нужно сводить сложные суммы коэффициентов Клебша-Гордана к более простым суммам, содержащим $6j$ и $9j$ -символы.

Теперь перейдем к изложению графического метода. Он оперирует не коэффициентами векторного сложения моментов, а $3j$ -символами.

§ 3. Графический метод суммирования произведений

$3j$ -символов.

Рассмотрим некоторое произведение коэффициентов Вигнера или $3j$ -символов. Пусть необходимо просуммировать его ^{ПС} проекции некоторого входящего в него момента j . Будем рассматривать только суммы, удовлетворяющие требованиям:

1. Момент j , по проекции которого происходит суммирование, содержится в данном произведении коэффициентов Вигнера два раза. Один раз с проекцией m , другой раз - с проекцией $-m$.
2. Под знаком суммы по m должен стоять фазовый множитель

$$(-1)^{j-m} \quad (18)$$

Встречающиеся на практике суммы всегда можно привести к нужному виду.

Первому требованию можно удовлетворить, используя правило изменения знака проекций всех моментов в $3j$ -символе.

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Правильный фазовый множитель можно получить с помощью равенств

$$(-1)^{2j} = (-1)^{2m}, \quad (-1)^{j+m} = (-1)^{j-m} (-1)^{2j}, \quad m_1 + m_2 + m_3 = 0. \quad (20)$$

Сумма произведений коэффициентов Вигнера по проекциям моментов называется $j m$ -символами. Если суммирование производится по проекциям всех $3n$ моментов, входящих в коэффициенты Вигнера, то такая сумма называется $3nj$ -символом ($6j$ -символ, $9j$ -символ, $12j$ -символ и т.д.).

Теперь перейдем к графическому изображению коэффициентов Вигнера и различных $j m$ -символов.

А. Графическое изображение $j m$ -символов.

Коэффициент Вигнера $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ изображается ориентированным узлом, связывающим три линии. Эти линии соответствуют моментам j_1, j_2, j_3 , а свободные концы линий - проекциям $m_1, m_2,$

m_3 . Если при обходе вокруг узла против часовой стрелки от линии j_1 моменты расположены в порядке $j_1 j_2 j_3$, то узел называется ориентированным положительно и около него ставится знак плюс "+". Если при обходе против часовой стрелки моменты встречаются в порядке $j_1 j_3 j_2$, то узел называется ориентированным отрицательно и помечается знаком минус "-".

Линии также ориентируются. Если проекция m_i входит в коэффициент Вигнера со знаком плюс, то линия снабжается стрелкой, направленной из узла наружу. Проекции $-m_i$ соответствует стрелка, направленная к вершине узла.

Так, коэффициент $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$ можно изобразить двумя способами:

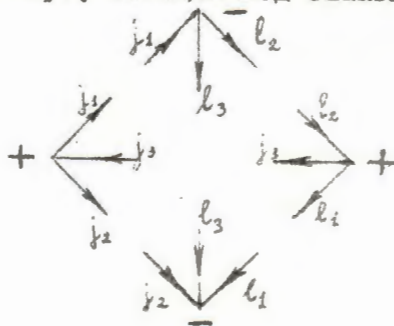


Суммирование по проекции m какого-либо момента j графически осуществляется путем соединения двух свободных концов, отвечающих проекциям m и $-m$ этого момента, в одну линию. Построим, например, изображение 6 j -символа:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} = \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 \\ n_1 n_2 n_3}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -n_1 & -m_2 & -n_3 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ n_1 & -n_2 & m_3 \end{pmatrix} (-1)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2 + j_3 - m_3 + l_1 - n_1 + l_2 - n_2 + l_3 - n_3} \quad (22)$$

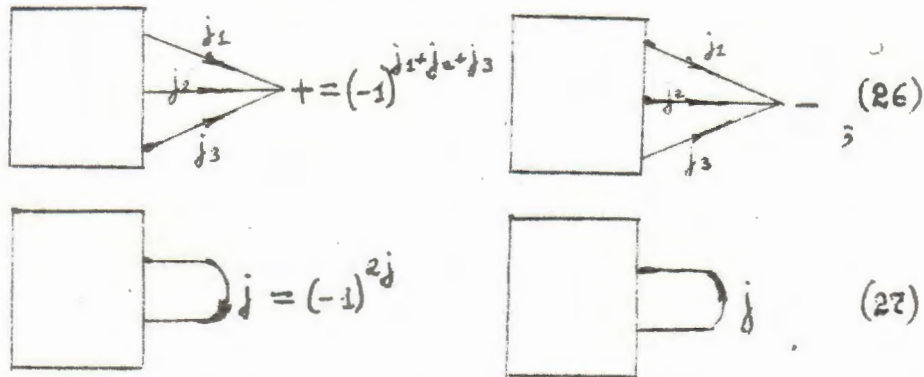
Коэффициенты Вигнера, стоящие под знаком суммы, имеют вид:



Следует отметить три важных свойства диаграмм.

1. Искажение геометрической формы диаграммы, при которой не изменяется ориентация узлов и линий, не изменяет величины j_m - символа, изображаемого диаграммой.
2. Изменение ориентации узла, связывающего линии $j_1 j_2 j_3$, изменяет j_m - символ на множитель $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$.
3. Изменение ориентации линии j , связывающей два узла, изменяет j_m символ на $(-1)^{2j}$.

Графически условия 2 и 3 можно представить следующим образом:



Прямоугольник на этих последующих диаграммах заменяет всю совокупность линий j_m - символа, за исключением тех, которые показаны явно.

Эти соотношения позволяют получать свойства симметрии j_m символов относительно перестановок моментов и, кроме того, позволяют приводить к стандартному виду нестандартные j_m - символы.

Рассмотрим пример. Повернем диаграмму j -символа (23) на 180° вокруг линии j_3 . При этом изменятся ориентации всех узлов. Для того, чтобы выражение осталось неизменным, нужно одновременно с поворотами поменять знаки у всех узлов. В результате получим, что

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\} = - \begin{array}{c} + \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ j_2 \quad l_3 \quad l_1 \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ j_1 \quad l_2 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ - \\ + \end{array} \quad (28)$$

Приведенная здесь диаграмма отличается от стандартной диаграммы (25). Для того, чтобы преобразовать ее к стандартному виду, нужно сначала по правилу (26) поменять знаки у всех узлов на противоположные, а затем с помощью равенства (27) изменить ориентации линий l_1, l_2, l_3 . В результате диаграмма (28) превратится в стандартную диаграмму $6j$ -символа $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\}$. При этом получаем известное свойство симметрии $6j$ -символов:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ l_2 & l_1 & l_3 \end{matrix} \right\} \quad (29)$$

поскольку фазовый множитель

$$(-1)^{j_1+j_2+j_3} (-1)^{l_1+l_2+l_3} (-1)^{l_1+l_2+j_3} (-1)^{l_1+j_2+l_3} (-1)^{2l_1+2l_2+2l_3},$$

появляющийся в результате изменения ориентации узлов и линий, равен +1, ибо

$$(-1)^{2l} = (-1)^{-2l} \quad (30)$$

$$(-1)^{2j_1+2j_2+2j_3} = +1, \quad (31)$$

если линии j_1, j_2, j_3 связываются в один узел. Заметим, что если

\vec{J} является векторной суммой моментов j_1, j_2, \dots, j_k :

$$\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \dots + \vec{j}_k, \quad \text{то}$$

справедливо равенство:

$$(-1)^{2J+2j_1+2j_2+\dots+2j_k} = +1. \quad (32)$$

Поэтому в $6j$ -символе удвоенная сумма любых четырех моментов, линии которых образуют замкнутый контур на диаграмме (23), четна. Например,

$$(-1)^{2j_1+2j_2+l_3+l_2} = (-1)^{2j_1+2j_2+l_2+l_3} = \dots = +1 \quad (33)$$

Отсюда ясно, что в формуле, связывающей $9j$ -символы с $6j$ -символами,

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix} \right\} = \sum_x (-1)^{2x} (2x+1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k_3 & l_3 & x \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ x & j_1 & k_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ j_2 & x & l_2 \end{matrix} \right\} \quad (34)$$

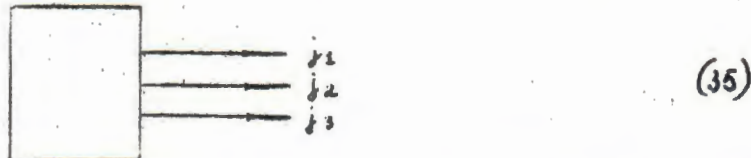
можно вынести множитель $(-1)^{2x}$ из-под знака суммы, поскольку в силу (33) имеет место равенство:

$$(-1)^{2x} = (-1)^{2j_2 + 2j_3 + 2l_3}$$

Б. Сведение j_m символов к $3n_j$ - символам.

Теперь рассмотрим, как графически выполняется операция, подобная преобразованию (4).

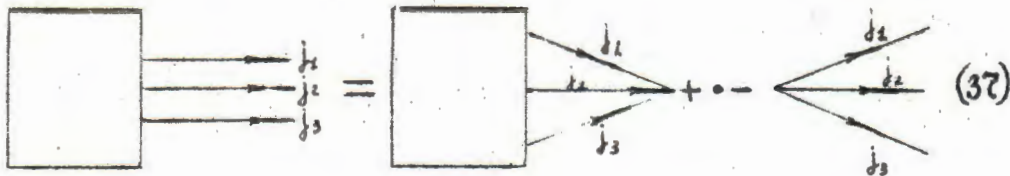
Пусть имеется j_m символ, содержащий только три свободных линии $j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3$ и изображаемый диаграммой:



Вместо равенства (2) теперь используем аналогичное соотношение для 3 j -символов:

$$\sum_{j_2 m_2} (-1)^{j_3 - m_2} (2j_2 + 1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1 - m_1} (-1)^{j_1 - m_2} \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \quad (36)$$

Умножая j_m -символ (35) на (36) и суммируя по $m_1' m_2'$, получим по аналогии с (4) результат, который графически можно представить следующим образом:



Это означает, что j_m -символ (35) является произведением $3j$ -символа $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ и неусторого $3nj$ -символа, полученного объединением трех свободных концов в один узел.

Отметим, что если в j_m символе (35) несколько свободных линий (одна, две или все три) имеют противоположную ориентацию, то для такого j_m -символа можно записать соотношение (37) с соответствующей ориентацией линий, однако в нем появятся дополнительные множители $(-1)^{2j_i}$, соответствующие каждой линии, имеющей направленную ориентацию.

Так, например,

$$\square \begin{matrix} \leftarrow j_1 \\ \leftarrow j_2 \\ \leftarrow j_3 \end{matrix} = \square \begin{matrix} \leftarrow j_1 \\ \rightarrow j_2 \\ \leftarrow j_3 \end{matrix} + \square \begin{matrix} \rightarrow j_1 \\ \rightarrow j_2 \\ \rightarrow j_3 \end{matrix} \times (-1)^{2j_1 + 2j_2} \quad (38)$$

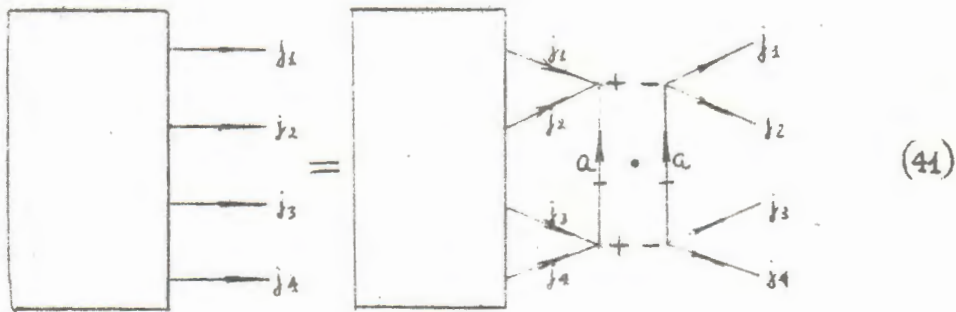
Из (37) легко получить формулы для сведения j_m -символов к $3nj$ -символам в случае, когда j_m -символ имеет 2 или 1 свободный конец. В частности, полагая, в (37) $j_3 = 0$, наложим

$$\square \begin{matrix} \leftarrow j_1 \\ \leftarrow j_2 \end{matrix} = \square \begin{matrix} \leftarrow j_1 \\ \text{loop} \end{matrix} \times \frac{\delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 - m_2}}{2j_1 + 1} \times (-1)^{j_1 - m_1} \quad (39)$$

Аналогично получаем

$$\square \begin{matrix} \leftarrow j_m \end{matrix} = \square \times \delta_{l_0} \delta_{m_0} \quad (40)$$

Наконец, рассмотрим сведение к $3n_j$ -символу j_m символа, имеющего четыре свободных конца, то есть найдем графический аналог преобразователя (8). Для этого случая имеем



Здесь и ниже черточка на линии "а" означает, что в правой части (41) имеет место суммирование по индексу "а" с множителем $(2a+1)$, то есть это сокращенная запись выражения $\sum_a (2a+1) \dots$

Обращаем внимание на то, что ориентации линий j_1, j_2, j_3, j_4 в двух сомножителях в (41) противоположны, а ориентация линий "а" одинакова, направление ее можно выбрать произвольно. Если нас интересует случай, когда в левой части (41) какая-то линия j_i или несколько линий имеют противоположную ориентацию, то нужно изменить ориентации этих линий также и в правой части и добавить соответствующее число множителей $(-1)^{2j_i}$ аналогично (38). Отметим также, что четыре момента j_1, j_2, j_3, j_4 можно объединять в пары любым способом. В этом заключается неоднозначность сведения таких j_m -символов к $3n_j$ -символам, отмеченная в разделе 2. Данную неоднозначность можно использовать для того, чтобы выбрать такой вариант объединения моментов в пары, который приводит к более простому результату (см.обсуждение выражений

(I5), (I6)).

Соотношения типа (41) можно получить также для j_m -символов с пятью и более свободными концами. Мы не будем обсуждать эти случаи, отсылая читателя к книгам /1,2/.

В. Разложение $3lj$ -символов по $6j$ и $9j$ символам.

Теперь рассмотрим вопрос о представлении $3lj$ символа в виде комбинации $6j$ и $9j$ символов, то-есть сведения диаграммы $3lj$ -символа к диаграммам более простых символов. Эта операция называется разрезанием диаграммы. Она выполняется по следующим правилам, которые следует из (33-41)

$$\boxed{A} \xrightarrow{l} \boxed{B} = \boxed{A} \cdot \boxed{B} \cdot \delta_{l_0} \quad (42)$$

$$\boxed{A} \xrightarrow{l_1, l_2} \boxed{B} = \boxed{A} \cdot \boxed{B} \cdot \delta_{l_1, l_2 / 2l_1 + 1} \quad (43)$$

$$\boxed{A} \xrightarrow{j_1, j_2, j_3} \boxed{B} = \boxed{A} \cdot \boxed{B} \cdot \delta_{j_1, j_2, j_3} \quad (44)$$

$$\boxed{A} \xrightarrow{j_1, j_2, j_3, j_4} \boxed{B} = \boxed{A} \cdot \boxed{B} \cdot \delta_{j_1, j_2, j_3, j_4} \quad (45)$$

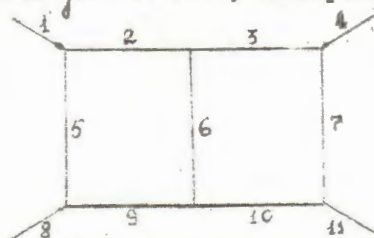
Напомним, что если нужно в левых частях равенств (43-45) изменить ориентацию какой-то линии j_i , то следует сделать соответствующее изменение в правой части и добавить множитель $(-1)^{2j_i}$.

Кроме того, в (45) возможно любое объединение моментов j_1, j_2, j_3, j_4 в пары.

Равенства (42) - (45) позволяют разрезать диаграммы комплекса АВ на более простые части, содержащие по отдельности блоки А и В. В (42-45) мы разрезали соответственно 1, 2, 3, 4 линии. Можно разрезать диаграммы и по большому числу линий (см. /1, 2/). Повторяя процедуру разрезания соответствующее число раз, можно прийти к результату, который содержит только 6_j и 9_j -символы.

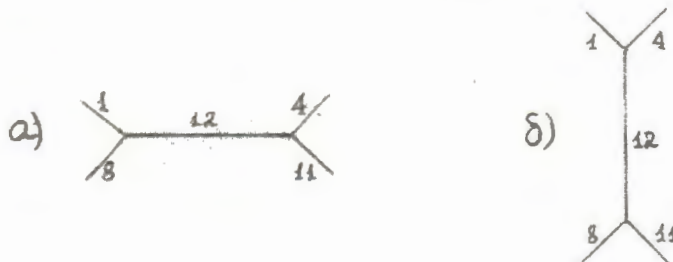
Для того, чтобы продемонстрировать, как используется в конкретных расчетах рецептура, описанная в пунктах Б и В данного раздела, рассмотрим пример.

Пусть имеется j_m -символ, которому соответствует график:

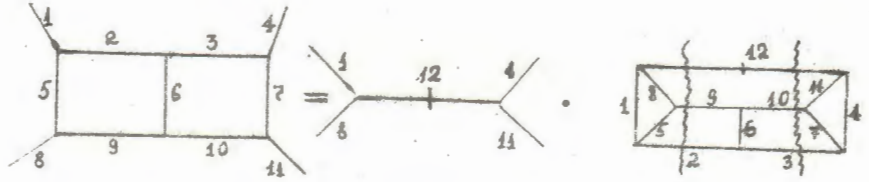


Здесь цифры обозначают номера соответствующих моментов. Ориентация узлов и линий на этом графике не указана, так как она не влияет на общую схему преобразований.

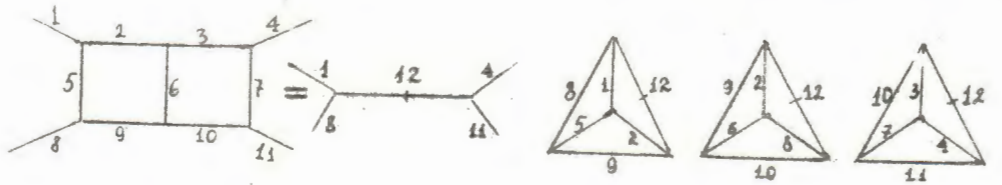
Сначала сведем этот j_m символ к некоторому 12_j -символу. Для этого в соответствии с (41) надо попарно соединить свободные концы и соединить образовавшиеся при этом узлы дополнительной линией с номером 12. Имеется несколько способов объединения концов 1, 4, 8, 11 в пары. Рассмотрим два варианта.



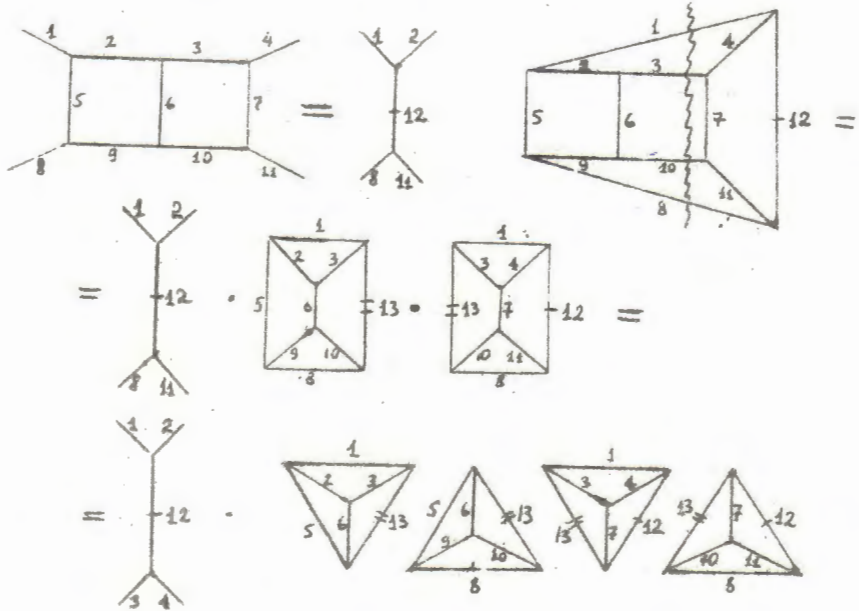
В первом случае получим:



Напомним, что черточка на линии j заменяет выражение $\sum (2j+1)$. Разложение полученного $12j$ -символа на $6j$ символы проводится путем двукратного разрезания диаграммы. Способ разрезания указан волнистыми линиями. В результате получим



В случае б) преобразование j^m -символа проводится в таком порядке:

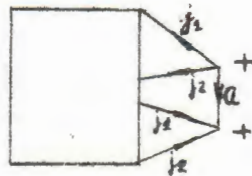


Из этого примера видно, что простота конечного результата зависит от удачного выбора способа упрощения. Вариант а) приводит к явно более простому результату, чем б).

Наконец, рассмотрим последнюю операцию над j_m символами.

Г. Суммирование j_m -символов по моменту j

Пусть имеется j_m символ в виде:



Его нужно просуммировать по моменту a . Отметим, что в нижнем узле диаграммы сходятся те же моменты j_1, j_2 , что и в верхнем. Суммирование j_m -символов по некоторому моменту j , входящему в j_m -символ, основано на свойстве ортонормированности коэффициентов Вигнера (36).

С его помощью получаем:

(46)

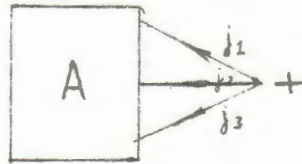
Следовательно, если узлы на концах линии "а" связывают одинаковые моменты и одинаково ориентированы, причем один из них связывает сходящиеся линии, а другой - расходящиеся, то для

суммирования по "а" нужно вырезать часть диаграммы, содержащую "а", и соединить в оставшейся части концы одноименных линий.

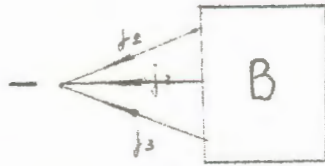
Если нужно просуммировать по какому-то моменту произведение нескольких Z_{nj} символов на j_m символ, то следует сначала объединить все эти множители в единый символ, а затем провести суммирование с помощью правила (46).

Что касается объединения Z_{nj} символа и j_m символа в единый j_m символ, то это процедура обратная разрезанию диаграмм, и производится она следующим образом.

Пусть некоторый узел Z_{nj} символа



и один из узлов j_m символа:

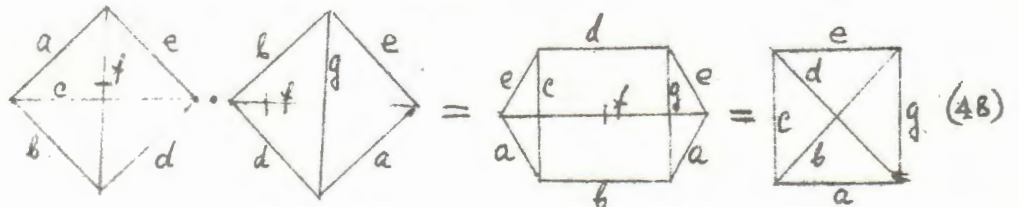


связывают одни и те же моменты j_1, j_2, j_3 .

Согласно (44) их можно объединить в единый комплекс, вырезать одинаковые узлы и соединить одноименные линии:



В качестве иллюстрации вычислим сумму вида:



Это равенство является графическим аналогом соотношения (17).

Литература.

1. А.П.Юцис, И.Б.Левинсон, В.В.Ванагас „Математический аппарат теории момента количества движения.“ Вильнюс, 1960г.
2. А.П.Юцис, А.А.Бандзайтис. „Теория момента количества движения в квантовой механике“. Вильнюс, 1965г.
3. А.М.Балдин, В.И.Гольданский, В.М.Максименко, И.Л.Розенталь "Кинематика ядерных реакций" 1967г.
4. А.Эдмондс В сб. Деформация атомных ядер, ИД, 1958, стр.305

Упражнения.

1. Какое свойство симметрии $6j$ символов получается при повороте диаграммы (23) на 90° ?
2. Доказать соотношение (34) (алгебраически и графически).
3. Доказать соотношения (графическим методом, без учета фазовых множителей):

а)

$$\sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} (-1)^{l_1 + l_2 + l_3 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & \mu_2 & -\mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -\mu_1 & m_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ \mu_1 & -\mu_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\};$$

$$\text{б) } \sum_{m'} (-1)^{j_3 + m'} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j' \\ m_3 & m_2 & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j' \\ m_3 & m_4 & -m' \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j, m} (-1)^{2j_4 + j + m} (2j + 1) \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j \\ m_3 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j \\ m_3 & m_4 & -m \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j' \\ j_3 & j_4 & j \end{matrix} \right\};$$

в)

$$\sum_j (-1)^{j + j' + j''} (2j + 1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j' \\ j_3 & j_4 & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j \\ j_1 & j_4 & j'' \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & j' \\ j_3 & j_4 & j'' \end{matrix} \right\};$$

2)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l'_1 & l'_2 & l'_3 \end{matrix} \right\} &= \sum_x (-1)^{x+j_1+j_2+j_3+l_1+l_2+l_3+l'_1+l'_2+l'_3} \\ &\times (2x+1) \left\{ \begin{matrix} l_1 & x & l'_1 \\ l'_3 & j_2 & l_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_2 & x & l'_2 \\ l'_1 & j_3 & l_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_3 & x & l'_3 \\ l'_2 & j_1 & l_3 \end{matrix} \right\}; \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l'_1 & l'_2 & l'_3 \end{matrix} \right\} &= \sum_{x, l} (-1)^{2j_1+2l} (2x+1)(2l+1) \times \\ &\times \left\{ \begin{matrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ x & l'_2 & l'_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_1 & j_2 & l'_3 \\ x & l'_2 & l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l'_1 & j_2 & l'_3 \\ x & l_2 & l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l'_1 & l'_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l \end{matrix} \right\}; \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} (2\lambda+1) \left\{ \begin{matrix} k & c & \lambda \\ J_2 & a & J_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J_2 & a & \lambda \\ x_2 & d & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} x_2 & d & \lambda \\ c & b & x_1 \end{matrix} \right\} &= \\ = (-1)^{x_2} \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} (2\lambda+1) \left\{ \begin{matrix} b & d & \lambda \\ a & J & x_1 \\ J_1 & J_2 & c \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} d & c & x_1 \\ x_2 & b & \lambda \end{matrix} \right\}; \end{aligned}$$

ж)

$$\begin{aligned} (-1)^{2x_2} \left\{ \begin{matrix} J_1 & a & x_2 \\ J & c & J_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a & d & x_1 \\ x_2 & b & J_1 \end{matrix} \right\} &= \\ = \sum_{\lambda} (2\lambda+1) \left\{ \begin{matrix} \lambda & c & x_1 \\ c & J_1 & a \\ J & J_2 & d \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda & c & x_1 \\ x_2 & b & J \end{matrix} \right\}; \end{aligned}$$

з)

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \mu} (-1)^{\lambda} (2\lambda+1)(2\mu+1) \left\{ \begin{matrix} J & b & a \\ c & \lambda & \mu \\ J_2 & d & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} x_1 & d & a \\ c & \lambda & \mu \\ x_2 & b & J \end{matrix} \right\} &= \\ = (-1)^{J_2+x_2+2J} \left\{ \begin{matrix} a & d & x_1 \\ b & J & x_2 \\ J_1 & J_2 & c \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Формулы а) - з) взяты из книги /4/. Соотношения в) - з) полезно доказать в обе стороны - справа налево и слева направо, то есть методом разрезания диаграмм и методом суммирования по моменту.