

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

МГУ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

В.В.Балашов, Г.Я. Коренман, Ю.Ф. Смирнов, Н.П. Юдин

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЯДЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Под общей редакцией В.В.Балашова

Т Е М А 2

Москва 1972

ЗАНЯТИЕ 5.

Матрица конечных поворотов ж)

При решении квантово-механических задач возникает необходимость производить переход от одной системы координат к другой системе, повернутой относительно первой. Классическим примером такого рода задачи является анализ опыта Штерна-Герлаха (такой анализ очень наглядно и обстоятельно проделан в Фейнмановских лекциях /1/). Далее, при описании угловых распределений и поляризации продуктов ядерных реакций, при рассмотрении угловых корреляций между различными испускаемыми ядром частицами ($\gamma\gamma$ -корреляции в каскадных γ -переходах, $\beta\gamma$ -корреляции при β -распаде и т.д.) оказывается удобным в начале выбрать систему координат так, чтобы ее ось Z была направлена по импульсу \vec{p} той или иной вылетающей частицы, а затем осуществить поворот и перейти от этой вспомогательной системы координат к лабораторной. Иногда возникает потребность и в обратном переходе от исходной лабораторной системы координат к другой, более удобной для решения.

Все эти задачи решаются с использованием матрицы поворота, которая описывает преобразование собственных функций момента количества движения при повороте системы координат. Целью данной задачи является ознакомление со свойствами матриц конечных поворотов, установление их связи со сферическими функциями. Для уяснения роли матриц конечных поворотов в квантовой механике и приобретения практических навыков вычислений с ними предлагается несколько упражнений.

ж) Пособие по теме 2 написано Ю.Ф.Смирновым.

Мы сочли целесообразным дать несколько простейших примеров на вычисление угловых распределений и корреляций, которые иллюстрируют применение матриц поворота в теории этих явлений и вскрывают механизм появления неизотропных распределений. Общему рассмотрению этих вопросов посвящены занятия темы 3.

§ I. Преобразование собственных функций момента количества движения при конечных поворотах. \mathcal{D} - функции.

Пусть имеется правая система координат. Назовем положительным вращение вокруг некоторой оси, испытываемое правым винтом при его движении в положительном направлении вдоль этой оси.

Любой поворот системы координат в трехмерном пространстве вокруг начала координат можно представить в виде произведения трех поворотов. Сначала производится поворот вокруг оси Oz на угол α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), затем поворот на угол β ($0 \leq \beta \leq \pi$) вокруг нового положения Oy' оси Oy и, наконец, поворот на угол γ ($0 \leq \gamma \leq 2\pi$) вокруг нового положения Oz'' оси Oz :

$$g(\alpha \beta \gamma) = g_{z''}(\gamma) g_{y'}(\beta) g_z(\alpha) \quad (1)$$

Углы α , β , γ называются углами Эйлера.

Поворот вокруг некоторой оси Ou на угол ξ , можно выразить через поворот на тот же угол вокруг другой оси Ov следующим образом

$$g_u(\xi) = g(v \rightarrow u) g_v(\xi) g^{-1}(v \rightarrow u) \quad (2)$$

где $g(v \rightarrow u)$ поворот, который переводит ось Ov в ось Ou . Поскольку $g(z' \rightarrow z'') = g_{y'}(\beta)$, а $g(y \rightarrow y') = g_z(\alpha)$, то поворот $g(\alpha \beta \gamma)$ можно представить в виде трех поворотов вокруг неподвижных осей

$$g(\alpha \beta \gamma) = g_z(\alpha) g_\beta(\gamma) g_z(\gamma) \quad (3)$$

Пусть у нас имеется некоторое тело, с которым связана некоторая функция $\Psi(x, y, z)$ (она характеризует, например, распределение плотности вещества в теле и т.п.). Осуществим некоторый поворот $g(\alpha \beta \gamma)$ этого тела вокруг начала координат на углы Эйлера α, β, γ . Теперь можно ввести две системы координат: исходную L и повернутую L' , связанную с телом. Некоторая точка тела P , имевшая до поворота координаты (x_0, y_0, z_0) будет иметь те же координаты \vec{r}' ($x' = x_0, y' = y_0, z' = z_0$) в повернутой системе, но по отношению к неподвижной системе она займет новое положение \vec{r} . Для того чтобы найти эти новые координаты точки P , рассмотрим преобразование координат при поворотах вокруг осей z и y :

$$x = x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha; \quad x = x_0 \cos \beta + z_0 \sin \beta \quad (4)$$

$$y = x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha; \quad y = y_0$$

$$z = z_0; \quad z = -x_0 \sin \beta + z_0 \cos \beta$$

Отсюда с помощью (3) получаем, что

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g(\alpha \beta \gamma) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Здесь мы ввели матричные обозначения. Матрица преобразования координат при повороте имеет вид

$$g(\alpha \beta \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma; & -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma; & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma; & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma; & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta \cos \gamma; & \sin \beta \sin \gamma; & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (5')$$

Из (5) следует, что координаты \vec{r} и \vec{r}' одной и той же точки P в системах L и L' связаны равенствами

$$\vec{r} = g(\alpha \beta \gamma) \vec{r}', \quad \vec{r}' = g^{-1}(\alpha \beta \gamma) \vec{r} \quad (6)$$

Поскольку матрица g - ортогональна, то матрица g^{-1} получается из (5) транспонированием $g^{-1} = \tilde{g}$, т.е. заменой строк на столбцы.

Если задан какой-то поворот тела и нам необходимо определить углы Эйлера, характеризующие этот поворот, то нужно рассмотреть вначале, как изменяются при данном повороте координаты каких-то двух точек тела, например, точек, расположенных на осях координат, а затем из соотношений (4), (5) определить, какие значения углов Эйлера, заключенные в интервалах $0 < \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, соответствуют такому изменению координат. Решение соответствующих уравнений будет единственным во всех случаях, кроме $\beta = 0$ и π , когда любые значения $\alpha + \gamma = const$ или $\alpha - \gamma = const$ соответственно описывают один и тот же поворот. При этом следует заметить, что, если мы осуществляем поворот на угол ξ вокруг оси u , направление которой задается углами θ, φ , то, вообще говоря, тройка углов φ, θ, ξ не совпадает с углами Эйлера α, β, γ , отвечающими такому повороту (см. ф-лу (3)). Например, проследив за тем, как изменяется ориентация осей x, y, z , при повороте на угол π вокруг оси, проходящей через начало координат и точку $[101]$, легко убедиться, что такой поворот задается углами Эйлера $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = \pi$, в то время как $\varphi = 0$, $\theta = \pi/4$, $\xi = \pi$.

В общем случае с помощью (2) мы можем записать, что

$$g_u(\xi) = g(0, \theta, \pi + \varphi) g(\pi + \varphi, \theta, \xi) \quad (7)$$

Если последовательно выполняются два поворота: сначала $g(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ а затем $g(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, то параметры результирующего поворота

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = g(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) g(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \quad (8)$$

который называется произведением этих двух поворотов, задаются следующими формулами (см. [2]):

$$\cos \beta = \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos(\gamma_1 + \alpha_2)$$

$$e^{i(\alpha+\gamma)} = e^{i(\alpha_1+\gamma_2)} \frac{e^{\frac{i}{2}(\gamma_1+\alpha_2)} \cos \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_2}{2} - e^{-\frac{i}{2}(\gamma_1+\alpha_2)} \sin \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2}}{e^{\frac{i}{2}(\gamma_1+\alpha_2)} \cos \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_2}{2} - e^{-\frac{i}{2}(\gamma_1+\alpha_2)} \sin \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2}} \quad (9)$$

$$e^{i(\alpha-\gamma)} = e^{i(\alpha_1-\gamma_2)} \frac{e^{\frac{i}{2}(\gamma_1+\alpha_2)} \cos \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2} + e^{-\frac{i}{2}(\gamma_1+\alpha_2)} \sin \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_2}{2}}{e^{\frac{i}{2}(\gamma_1+\alpha_2)} \cos \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2} + e^{-\frac{i}{2}(\gamma_1+\alpha_2)} \sin \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_2}{2}}$$

Заметим, что α , β , γ нужно искать в следующих интервалах $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq 4\pi$, при этом повороты на углы γ и $\gamma' = \gamma \pm 2\pi$ следует считать физически эквивалентными. С помощью соотношений (7,9) можно найти значения углов Эйлера для любого поворота вокруг произвольной оси, проходящей через начало координат.

Теперь определим преобразование функции $\Psi(x, y, z)$ при повороте. Будем считать, что описываемое ею распределение вращается вместе с телом, и тем самым функция в повернутых координатах сохраняет свой аналитический вид $\Psi(x', y', z')$. Однако по отношению к исходной системе она представляет собою некоторую новую функцию $\Psi'(x, y, z)$. Из соотношений (6) видно, что эта функция получается заменой аргумента \vec{r} на $\vec{r}' = g^{-1}\vec{r}$. Поэтому имеем

$$\Psi(\vec{r}') = \Psi'(\vec{r}) = R(\alpha, \beta, \gamma) \Psi(\vec{r}) = \Psi(g^{-1}\vec{r}) \quad (10)$$

Здесь $R(\alpha, \beta, \gamma)$ - оператор конечного поворота, задающий преобразование функций $\Psi(\vec{r})$ при повороте $g(\alpha, \beta, \gamma)$. Он является произведением трех операторов поворота на отдельные углы Эйлера

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) \quad (11)$$

Используя операторы момента количества движения, которые пропорциональны операторам бесконечно малых поворотов, можно переписать в виде

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} \quad (12)$$

(Экспоненту, в показателе которой стоит оператор, следует рассматривать как сокращенную запись соответствующего степенного ряда, составленного из этих операторов). Отсюда ясно, что, если мы возьмем в качестве функций $\Psi(x, y, z)$ собственные функции оператора углового момента $\Psi_{JM}(x, y, z)$, $M = -J, \dots, J$, то каждая из этих функций при поворотах превращается в линейную комбинацию тех же самых функций

$$\begin{aligned} \Psi_{JM}(x', y', z') &= R(\alpha \beta \gamma) \Psi_{JM}(x, y, z) = \\ &= \sum_M (JM | R(\alpha \beta \gamma) | JK) \Psi_{JM}(x, y, z) \equiv \sum_M \mathcal{D}_{MK}^J(\alpha \beta \gamma) \Psi_{JM}(x, y, z) \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $(JM | R(\alpha \beta \gamma) | JK)$ - матричный элемент оператора конечного поворота. Для него введено специальное обозначение

$$(JM | R(\alpha \beta \gamma) | JK) \equiv \mathcal{D}_{MK}^J(\alpha \beta \gamma) \quad (14)$$

Из соотношения (12) следует, что

$$\mathcal{D}_{MK}^J(\alpha \beta \gamma) = e^{-iM\alpha} d_{MK}^J(\beta) e^{-iK\gamma} \quad (15)$$

$$d_{MK}^J(\beta) = (JM | e^{-i\beta J_y} | JK) \quad (16)$$

Элементы $\mathcal{D}_{MK}^J(\alpha \beta \gamma)$ образуют унитарную квадратную матрицу размерности $(2J+1) \times (2J+1)$, которая называется матрицей конечного поворота.* Ее элементы часто называются \mathcal{D} -функциями

Вигнера. Их можно найти, используя формулу (15) и выражение ^{13/}

$$d_{MK}^J(\beta) = \sum_x (-1)^x \frac{[(J+M)!(J-M)!(J+K)!(J-K)!]^{1/2}}{x!(J-M-x)!(J-K-x)!(x+M-K)!} \times \quad (17)$$

$$\times \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2J+K-M-2x} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{2x+M-K}$$

Суммирование здесь производится по всем целым $x \geq 0$, для которых аргументы факториалов неотрицательны.

* Совокупность таких матриц для всех поворотов $\mathcal{D}(\alpha \beta \gamma)$ образует неприводимое представление \mathcal{D}^J группы трехмерных вращений R_3 .

Пользуясь унитарностью матрицы поворота, легко написать преобразование, обратное преобразованию (I3)

$$\Psi_{JM}(x, y, z) = \sum_K D_{MK}^{J*}(\alpha \beta \gamma) \Psi_{JK}(x', y', z') \quad (I8)$$

Из формул (I4), (I6) следует, что значения элементов матрицы поворота не зависят от конкретной природы функции Ψ_{JM} , которая подвергается преобразованию. Так же, как матричные элементы операторов J_x, J_y, J_z они целиком определяются значениями квантовых чисел J, M, K и, естественно, величиной угла поворота. Поэтому формула (I3) позволяет выразить с помощью D -функций собственные функции Ψ_{JK} любого углового момента орбитального, спинового, полного момента системы и т.п. в повернутой системе координат L' (здесь K - проекция момента J на ось z') через собственные функции с тем же моментом Ψ_{JM} в исходной системе координат L (в этом случае M проекция J на ось z), т.е. они дают разложение собственных функций момента, квантованного по одной оси (z'), через собственные функции этого момента, полученные при другом выборе оси квантования. Отсюда следует, что, если частица (или система частиц) имела момент количества движения J и его проекция на ось z' некоторой системы координат L' равнялась K , то вероятность того, что его проекция на ось z той системы координат L , которая переходит в при повороте $g(\alpha \beta \gamma)$, равна M , определяется величиной $|D_{MK}^J(\alpha \beta \gamma)|^2$. Из формулы (I8) видно, что та же величина определяет вероятность того, что проекция момента на ось z' равна K , если проекция на ось z равна M . В этом заключается непосредственный физический смысл D -функций. Их важная роль в квантовой механике заключается в том, что они позволяют легко преобразовывать спиновые, сферические функции и любые другие собственные функции углового момента из одной системы координат

в другую, повернутую.

Следует отметить, что \mathcal{D} - функции являются также собственными функциями квантово-механического гамильтониана, описывающего вращение твердого тела, закрепленного в одной точке и имеющего два одинаковых момента инерции в главных осях (симметричный волчок) (см. например /4,5/). Поэтому в литературе иногда \mathcal{D} -функции называются функциями симметричного волчка.

§ 2. Свойства \mathcal{D} - функций, их связь со сферическими функциями.

Отметим важнейшие свойства \mathcal{D} - функций:

1. \mathcal{D} - функции являются элементами унитарной матрицы

$$\sum_M \mathcal{D}_{Mk'}^{j*}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{D}_{Mk}^j(\alpha\beta\gamma) = \delta_{kk'} \quad (19)$$

2. Соотношения ортонормированности для \mathcal{D} - функций

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin\beta d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma \mathcal{D}_{Mk}^{j*}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{D}_{M'k'}^j(\alpha\beta\gamma) = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{kk'} \delta_{MM'} \quad (20)$$

3. Теорема сложения для \mathcal{D} - функций

$$\mathcal{D}_{M_1k_1}^{j_1}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{D}_{M_2k_2}^{j_2}(\alpha\beta\gamma) = \sum_J (j_1 m_1 j_2 m_2 | j m) (j_1 k_1 j_2 k_2 | j k) \mathcal{D}_{Mk}^j(\alpha\beta\gamma) \quad (21)$$

или обратно

$$\mathcal{D}_{Mk}^j(\alpha\beta\gamma) = \sum_{\substack{M_1k_1 \\ M_2k_2}} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j m) (j_1 k_1 j_2 k_2 | j k) \mathcal{D}_{M_1k_1}^{j_1}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{D}_{M_2k_2}^{j_2}(\alpha\beta\gamma) \quad (22)$$

Из (20) и (21) находим, что

$$\int \mathcal{D}_{Mk}^{j*}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{D}_{M_1k_1}^{j_1}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{D}_{M_2k_2}^{j_2}(\alpha\beta\gamma) \sin\beta d\alpha d\beta d\gamma = \frac{8\pi^2}{2j+1} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j m) (j_1 k_1 j_2 k_2 | j k) \quad (23)$$

4. Если последовательно производятся два поворота g и g' характеризуемые соответственно углам Эйлера $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$, то матрица оператора $R'R$ для результирующего поворота $g'g$ равна произведению матриц для отдельных поворотов. Поэтому для \mathcal{D} -

- функций имеем

$$D_{MM'}^J(RR') = \sum_K D_{MK}^J(\alpha\beta\gamma) D_{KM'}^J(\alpha'\beta'\gamma') \quad (24)$$

$$5. D_{MK}^J(\alpha\beta\gamma) = (-1)^{M-K} D_{-M-K}^{J*}(\alpha\beta\gamma) = (-1)^{M-K} D_{KM}^J(\alpha\beta\gamma) \quad (25)$$

$$6. D_{MK}^J(\alpha\beta\gamma) = (-1)^J D_{M-K}^J(\alpha-\pi, \pi-\beta, \gamma) \quad (26)$$

7. Связь со сферическими функциями

$$D_{M0}^L(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} Y_{LM}^*(\alpha\beta) \quad (27)$$

$$D_{0K}^L(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} Y_{L-K}(\beta\gamma) \quad (28)$$

$$D_{00}^L(\alpha\beta\gamma) = P_L(\cos\beta) \quad (29)$$

В виду соотношений (27-29) функции иногда называют обобщенными сферическими функциями.

8. Из (21) и (27) легко получить полезное соотношение для произведения сферических функций, зависящих от одинаковых аргументов

$$Y_{l_1 m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) = \sum_L \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)}} \times \\ \times (l_1, m_1, l_2, m_2 | LM)(l_1, 0, l_2, 0 | L0) Y_{LM}(\theta, \varphi) \quad (30)$$

Отсюда находим, что

$$\int Y_{l_1 m_1}^*(\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) d\Omega = \\ = \left(\frac{4\pi(2l_1+1)}{(2l_1+1)(2l_2+1)} \right)^{-1} (l_1, 0, l_2, 0 | l_1 0) (l_1, m_1, l_2, m_2 | l_1 m_1) \quad (31)$$

Используя ортонормированность коэффициентов векторного сложения, можно из (30) получить следующее соотношение

$$Y_{l_1 m_1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{4\pi(2l_1+1)}{(2l_1+1)(2l_2+1)}} (l_1, 0, l_2, 0 | l_1 0) \sum_{m_2} (l_1, m_1, l_2, m_2 | l_1 m_1) Y_{l_1 m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi) \quad (32)$$

9. В частном случае $K = 0$ формула (13) принимает вид

$$Y_{\ell 0}(\theta, \varphi) = \sum_m \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\alpha, \beta) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (33)$$

Это равенство можно представить в следующей форме

$$\begin{aligned} P_{\ell}(\cos \omega_{12}) &= \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_m Y_{\ell m}^*(\theta_1, \varphi_1) Y_{\ell m}(\theta_2, \varphi_2) = \\ &= \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_m (-1)^m Y_{\ell, -m}(\theta_1, \varphi_1) Y_{\ell m}(\theta_2, \varphi_2) \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь θ_1, φ_1 - углы, характеризующие направление вектора \vec{z}_1 , θ_2, φ_2 - полярные углы вектора \vec{z}_2 , ω_{12} - угол между векторами \vec{z}_1 и \vec{z}_2 , для него имеем

$$\cos \omega_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (35)$$

Соотношение (34) известно под названием теоремы сложения для сферических гармоник.

В связи с этим рассмотрим вопрос о преобразовании нескольких собственных функций углового момента при поворотах.

Пусть имеется набор попарных произведений собственных функций для двух моментов J_1 и J_2 .

$$\begin{aligned} \Psi_{J_1 M_1}(x_1) \Psi_{J_2 M_2}(x_2) \quad \begin{aligned} M_1 &= -J_1, -J_1+1, \dots, J_1; \\ M_2 &= -J_2, -J_2+1, \dots, J_2; \end{aligned} \end{aligned} \quad (36)$$

Это могут быть собственные функции двух разных частиц или подсистем, или орбитальные и спиновые собственные функции одной частицы (системы), или пара собственных функций одной и той же частицы, относящихся к собственным значениям момента J_1 и J_2 . В последнем случае мы имеем дело с двумя функциями одинаковых переменных $x_1 = x_2$. Действие оператора поворота $R(\alpha\beta\gamma)$ на функцию (36) сводится к замене каждого из аргументов x_i на $g^{-1}x_i$, т.е. независимо от того, одинаковы x_1 и x_2 или нет, мы получим

$$\begin{aligned} \Psi_{j_1 m_1}(x_1) \Psi_{j_2 m_2}(x_2) &= R(\alpha \beta \gamma) \{ \Psi_{j_1 m_1}(x_1) \Psi_{j_2 m_2}(x_2) \} = \\ &= [R(\alpha \beta \gamma) \Psi_{j_1 m_1}(x_1)] [R(\alpha \beta \gamma) \Psi_{j_2 m_2}(x_2)] = \quad (37) \\ &= \sum_{m_1' m_2'} D_{m_1' m_1}^{j_1}(\alpha \beta \gamma) D_{m_2' m_2}^{j_2}(\alpha \beta \gamma) \Psi_{j_1 m_1'}(x_1) \Psi_{j_2 m_2'}(x_2) \end{aligned}$$

Теперь подействуем оператором поворота на линейную комбинацию функций (36), полученную путем векторного сложения j_1 и j_2 моментов

$$\Phi_{j_1 j_2 j M}(x_1, x_2) = \sum_{m_1, m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j M) \Psi_{j_1 m_1}(x_1) \Psi_{j_2 m_2}(x_2) \quad (38)$$

Левая часть равенства (38) преобразуется при повороте в соответствии с формулой (13)

$$R(\alpha \beta \gamma) \Phi_{j_1 j_2 j M}(x_1, x_2) = \sum_{m'} D_{m' M}^j(\alpha \beta \gamma) \Phi_{j_1 j_2 j M}(x_1, x_2) \quad (39)$$

Для правой части, согласно (37) имеем

$$\sum_{m_1' m_2'} (j_1 m_1' j_2 m_2' | j M) (j_1 m_1 j_2 m_2 | j M) D_{m_1' m_1}^{j_1}(\alpha \beta \gamma) D_{m_2' m_2}^{j_2}(\alpha \beta \gamma) \Phi_{j_1 j_2 j M}(x_1, x_2) \quad (40)$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых функциях $\Phi_{j_1 j_2 j M}$ в (39) и (40) убеждает нас в справедливости соотношений (22) и (21).

ЛИТЕРАТУРА

1. "Фейнмановские лекции по физике", т.8,9 МИР (1967).
2. Н.Д.Виленькин. Специальные функции и теория представлений групп. (1965).
3. Е.Вигнер "Теория групп" ИЛ (1961).
4. Б.Ф.Бейман "Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии" (1961).
- А.Эдмондс "Угловые моменты в квантовой механике" в сборнике "Деформация атомных ядер" ИЛ (1958).
5. А.С.Давыдов "Квантовая механика" (1963).

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Исходя из соотношения (16) и используя явный вид матриц Паули, получить формулу (17) для $d_{m'm}^{1/2}(\beta)$.

2. В лабораторной системе частица с орбитальным моментом $\ell = 2$ имеет проекцию момента на ось z $m = 1$. Рассчитать вероятность $W(m')$ того, что проекция этого момента на прямую, направленную под углом $\theta = 60^\circ$ к оси z , равна m' ($m' = -2, -1, 0, 1, 2$). Нарисовать график зависимости $W(m')$. Прodelать то же самое для случая $m = 2$ и $\theta = 90^\circ$. Обсудить соответствие полученных результатов с классической механикой.

3. Рассмотреть результаты мысленного эксперимента с двумя "усовершенствованными приборами Штерна-Герлаха", направленными под углом 90° друг к другу, для частиц со спином $I = 3/2$, причем каждый из приборов свободно пропускает частицы с проекцией $M > 0$ спина I на ось прибора и задерживает частицы с $M < 0$. В первый прибор попадает неполяризованный пучок частиц (см. "Фейнмановские лекции по физике т.8 гл.4).

4. Протон находится в состоянии с $\ell = 2, j = 3/2$ и проекцией $m_j = 3/2$ относительно некоторого выделенного направления. Получить функцию углового распределения плотности заряда. Показать, что сумма таких распределений, отвечающих всем возможным значениям m_j , является изотропным распределением.

5. Ядро в возбужденном состоянии с моментом J и его проекцией M на некоторое выделенное направление распадается, испуская α -частицу. Орбитальный момент α -части-

цы ℓ , полный момент остаточного ядра J' . Найти угловые распределения испущенных α -частиц, просуммированные по всем возможным ориентациям момента остаточного ядра, в следующих случаях: а) $J = 2, M = 0, \ell = 2, J' = 0$;
б) $J = 2, M = 0, \ell = 2, J' = 2$.

6. Ядро со спином $I_1 = 0$ испускает α -частицу, переходя в промежуточное ядро со спином $I_2 = J$, которое, в свою очередь, испускает вторую α -частицу и переходит в конечное ядро со спином $I_3 = 0$. Рассчитать функцию угловой $\alpha\alpha$ -корреляции при $J = 3$. Нарисовать ее график. Указание: выбрать ось квантования по направлению вылета первой α -частицы; эффектами отдачи пренебречь.

7. Свести к радиальному интегралу матричный элемент $(\Psi_1 | V | \Psi_2)$ от δ -образного взаимодействия двух частиц $V = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ по волновым функциям

$$\Psi_1 = R_1(r_1)R_2(r_2)Y_{\ell_1 m_1}(\theta_1, \varphi_1)Y_{\ell_2 m_2}(\theta_2, \varphi_2),$$

$$\Psi_2 = R_3(r_1)R_4(r_2)Y_{\ell_3 m_3}(\theta_1, \varphi_1)Y_{\ell_4 m_4}(\theta_2, \varphi_2).$$

8. Вычислить интеграл $\int [Y_{2m}(\theta, \varphi)]^2 d\Omega$.

9. Рассмотреть, как преобразуется комбинация $Y_{32}(\theta, \varphi) - Y_{3-2}(\theta, \varphi)$ при поворотах на 120° вокруг осей, проходящих через начало координат и точки $[\pm 1 \pm 1 \pm 1]$ (допускаются все комбинации знаков, т.е. эти точки расположены в вершинах куба и речь идет о поворотах вокруг диагоналей куба, совмещающих куб сам с собой). Как запишется эта комбинация в системе координат, где ось Z проходит через центр и вершину куба $[111]$, а ось X через точки $[000]$ и $[1\bar{1}\bar{2}]$?

10. Пусть электрон находится в атоме на орбите с моментом ℓ . На него действует некоторый возмущающий потенциал $V(\vec{r})$ удовлетворяющий условию $\int V(\vec{r}) d\Omega = 0$. Показать, что "центр тяжести" расщепленного термина с произвольным моментом (т.е. средняя энергия расщепленных уровней) совпадает с невозмущенной энергией этого термина. (Указание: разложить $V(\vec{r})$ по сферическим гармоникам),

11. Не решая секулярного уравнения, определить, на сколько компонент расщепится терм атома водорода с $n = 3$ в однородном электрическом поле (линейный эффект Штарка). (Указание: составить матрицу секулярного уравнения в базисе Ψ_{nlm} , разбить ее на несколько матриц, которые можно диагонализировать отдельно; далее, используя свойства симметрии полученных матричных элементов, определить число различных корней секулярного уравнения и их кратность. Обобщить результаты на случай произвольного ℓ).

12. Пусть волновая функция Ψ частицы со спином $1/2$ задана в виде произвольной линейной комбинации двух компонент $\chi_{1/2, 1/2}$ и $\chi_{1/2, -1/2}$, отвечающих проекциям спина на ось Z , равным $1/2$ и $-1/2$ соответственно: $\Psi = \alpha \chi_{1/2, 1/2} + \beta \chi_{1/2, -1/2}$. Показать, что существует такая система координат L' , в которой данная частица имеет определенную проекцию спина (скажем, $+1/2$) на ось Z' . Рассмотреть возможность решения аналогичной задачи для частицы с более высоким спином.

ЗАНЯТИЕ 6.

Алгебра тензорных операторов.

§ I. Неприводимые тензорные операторы.

Выполнение конкретных расчетов в теории ядра и атома существенно облегчается использованием алгебры тензорных операторов, разработанной Рака и др. /I/. Основные элементы этой теории излагаются ниже.

Пусть некоторый оператор $G(\vec{z})$, зависящий от координат \vec{z} , действует на функцию $\Psi(\vec{z})$. Комбинация $G(\vec{z})\Psi(\vec{z})$ преобразуется при повороте $g(\alpha\beta\gamma)$ следующим образом

$$\begin{aligned} R(\alpha\beta\gamma)G(\vec{z})\Psi(\vec{z}) &= G'(\vec{z}')\Psi'(\vec{z}') = \\ &= R(\alpha\beta\gamma)G(\vec{z})R^{-1}(\alpha\beta\gamma)\Psi(\vec{z}) \end{aligned} \quad (I)$$

т.е.

$$G'(\vec{z}') = G(g^{-1}\vec{z}) = R(\alpha\beta\gamma)G(\vec{z})R^{-1}(\alpha\beta\gamma) \quad (2)$$

Опираясь на этот общий закон преобразования операторов при поворотах, можно дать определение неприводимого тензорного оператора.

Неприводимым тензорным оператором ранга k называется совокупность $2k+1$ операторов $T_q^k (q = k, k-1, \dots, -k)$, которые преобразуются при повороте $g(\alpha\beta\gamma)$ системы координат по закону

$$\begin{aligned} T_q^k(g^{-1}\vec{z}) &= R(\alpha\beta\gamma)T_q^k(\vec{z})R^{-1}(\alpha\beta\gamma) = \\ &= \sum_{q'} D_{q'q}^k(\alpha\beta\gamma) T_{q'}^k(\vec{z}) \end{aligned} \quad (3)$$

т.е. так же, как собственные функции оператора момента количества движения с моментом k .

Если записать эту формулу для случая бесконечно малых поворотов, то можно получить эквивалентное определение неприводимого тензорного оператора с помощью правил коммутации операторов T_q^k с компонентами оператора момента количества движения J :

$$\begin{aligned} [J_z, T_q^k] &= q T_q^k, \\ [J_x \pm J_y, T_q^k] &= [(k \pm q)(k \mp q + 1)]^{1/2} T_{q \pm 1}^k \end{aligned} \quad (4)$$

Квантово-механические операторы физических величин или сами по себе являются компонентами неприводимых тензорных операторов или же могут быть разложены на неприводимые тензоры. В частности, любые векторные операторы можно рассматривать как тензоры первого ранга. Например, операторы координат \vec{z} являются неприводимым тензорным оператором первого ранга. Однако для того, чтобы при вычислении матричных элементов этого оператора можно было применять обычные формулы алгебры тензорных операторов, следует использовать не три его декартовы компоненты x, y, z , а три сферические компоненты $z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)$, $z_0 = z$, $z_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy)$, которые преобразуются при поворотах системы координат так же, как сферические гармоники $Y_{11}(\theta, \varphi)$, $Y_{10}(\theta, \varphi)$, $Y_{1-1}(\theta, \varphi)$. Справедливость последнего утверждения следует из того, что $z_{1m} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} z Y_{1m}$. Точно так же три компоненты оператора импульса

$$p_1 = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), p_0 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, p_{-1} = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (5)$$

и оператора углового момента

$$j_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(j_x + ij_y), j_0 = j_z, j_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(j_x - ij_y) \quad (6)$$

в частности, спинового момента

$$S_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(S_x + iS_y), S_0 = S_z, S_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_x - iS_y)$$

представляют собой компоненты тензорных операторов первого ранга.

Примером тензорных операторов более высокого ранга могут служить операторы мультипольных моментов. Оператор электрического мультипольного момента частицы имеет вид:

$$Q^\lambda = 2\sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}} e z^\lambda Y_{\lambda 0}(\theta, \varphi) \quad (7)$$

Здесь λ - порядок мультипольности; $\lambda = 1$ соответствует дипольному электрическому моменту, $\lambda = 2$ - квадрупольному, $\lambda = 3$ - октупольному и т.д. Матричные элементы от этих операторов входят в выражение для вероятности электромагнитных переходов электрического типа в ядрах или атомах (переходы E1, E2, E3 и т.д.; см. занятия темы 4).

Из выражения для оператора Q^λ непосредственно видно, что он представляет собою одну из компонент неприводимого тензорного оператора ранга λ . Поэтому при расчете матричных элементов, например, оператора квадрупольного момента частицы

$$Q^2 = e(3z^2 - r^2) = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} e z^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \quad (8)$$

можно, рассматривая Q^2 как тензор второго ранга, использовать общие формулы алгебры тензорных операторов, которые

будут приведены ниже. Операторы для электромагнитных переходов магнитного типа ($M1$, $M2$ и т.д.) мультипольности λ тоже представляют собой компоненты тензора ранга λ , т.е. преобразуются при поворотах системы координат так же, как сферические функции $Y_{\lambda m}(\theta, \varphi)$. Явный вид операторов магнитных мультипольных моментов и более полное описание их свойств можно найти в занятиях темы 4. Здесь мы приведем только явный вид оператора магнитного дипольного момента нуклона. Магнитный момент нуклона $\vec{\mu}$ состоит из двух частей. Одна из них обусловлена вращением нуклона по орбите и пропорциональна орбитальному моменту $g_l \vec{l}$ (g_l - гиромагнитное отношение: $g_l = 1$ для протона, $g_l = 0$ для нейтрона), вторая - связана с наличием у нуклона внутреннего момента количества движения - спина и пропорциональна оператору спинового момента $g_s \vec{s}$ ($g_s = 5,58$ для протона, $g_s = -3,82$ для нейтрона). Итак, $\vec{\mu} = g_s \vec{s} + g_l \vec{l}$. Из этой записи видно, что $\vec{\mu}$ представляет собой тензорный оператор первого ранга.

Из приведенных выше примеров ясно, что использование методов алгебры тензорных операторов необходимо для рассмотрения таких конкретных свойств ядер или атомов, как статические магнитные и электрические моменты, вероятности электромагнитных переходов, вероятности β - переходов и т.д. Перейдем теперь к изложению основных положений алгебры тензорных операторов.

Из двух тензорных операторов U^{k_1} и V^{k_2} ранга k_1 и k_2 можно построить так называемое тензорное произведение. В результате получится новый неприводимый тензор T^k ранга k .

$$|k_1 - k_2| \leq k \leq k_1 + k_2$$

Тензорное произведение определяется следующим образом:

$$T_q^k = [U^{k_1} \times V^{k_2}]_q^k = \sum_{q_1, q_2} (k_1 q_1 k_2 q_2 | k q) U_{q_1}^{k_1} V_{q_2}^{k_2} \quad (9)$$

При $k_1 = k_2$ и $k = 0$ получается скалярное произведение

$$[U^{k_1} \times V^{k_1}]_0^0 = \frac{(-1)^{k_1}}{\sqrt{2k_1+1}} \sum_{q_1} (-1)^{q_1} U_{q_1}^{k_1} V_{-q_1}^{k_1} \quad (10)$$

Но чаще употребляется другое определение скалярного произведения

$$(U^k \cdot V^k) = \sum_q (-1)^q U_q^k V_{-q}^k \quad (11)$$

Для $k = 1$ это соответствует обычному определению скалярного произведения векторов. Отметим, что векторное произведение двух векторов \vec{U} , \vec{V} можно также представить как тензорное произведение. Например

$$[U \times V]_z = -i\sqrt{2} [U^1 \times V^1]_0^1 = U_x V_y - U_y V_x \quad (12)$$

§ 2. Теорема Вигнера-Экарта.

Теперь рассмотрим матричный элемент тензорного оператора по волновым функциям Ψ_{jm} , $\Psi_{j'm'}$.

$$(j'm' | T_q^k | jm) = \int \Psi_{j'm'}^* T_q^k \Psi_{jm} d\tau \quad (13)$$

Согласно теореме Вигнера-Эккарта, этот матричный элемент можно разделить на две части, из которых одна не зависит от проекции m, m', q :

$$(j'm' | T_q^k | jm) = (jm k q | j'm') \frac{1}{\sqrt{2j'+1}} (j' || T^k || j) \quad (I4)$$

Последний множитель в этой формуле не зависит от проекций m, m', q и называется приведенным матричным элементом. (Для того, чтобы отличать его от обычных матричных элементов, оператор выделяется в нем двумя черточками). Таким образом, это равенство одновременно является и формулировкой теоремы и определением приведенного матричного элемента.

Теорема Вигнера-Эккарта может быть доказана следующим образом. Произведем поворот $g(\alpha\beta\gamma)$. При этом произойдет замена переменных $\vec{z} \rightarrow \vec{z}' = g^{-1}\vec{z}$ в подынтегральном выражении (I3). Поскольку элемент объема $d\tau$ не меняется при повороте, то матричный элемент (I3) не изменит своей величины при этом преобразовании. В связи с этим, если воспользоваться соотношениями (I), (3), можно записать:

$$(j'm' | T_q^k | jm) = \sum_{m_1, q_1, m'_1} D_{m'_1 m'}^{j' *}(\alpha\beta\gamma) D_{m_1 m}^j(\alpha\beta\gamma) \times \\ \times D_{q_1 q}^k(\alpha\beta\gamma) (j'm'_1 | T_{q_1}^k | j'm_1) \quad (I5)$$

Интегрируя обе части последнего равенства по углам Эйлера и учитывая свойства D - функции, получаем

$$(j'm' | T_q^k | jm) = \frac{1}{2j'+1} (jm k q | j'm') \times \\ \times \sum_{m_1, q_1, m'_1} (jm_1 k q_1 | j'm'_1) \times (j'm'_1 | T_{q_1}^k | j'm_1) \quad (I6)$$

Очевидно, что выражение

$$(j' \| T^k \| j) = \frac{1}{\sqrt{2j'+1}} \sum_{m_1, q_1, m'_1} (j m_1 k q_1 | j' m'_1) (j' m'_1 | T_{q_1}^k | j m_1) \quad (I7)$$

действительно не зависит от проекций m , m' , q , что и доказывает теорему Вигнера-Экарта.

Следует заметить, что в правой части (I7) все члены суммы по индексу m'_1 одинаковы. Поэтому можно взять только один из них с каким-то фиксированным значением m' и записать:

$$(j' \| T \| j) = \sqrt{2j'+1} \sum_{m, q} (j m k q | j' m') (j' m' | T_q^k | j m) \quad (I8)$$

Теорема Вигнера-Экарта исключительно важна для квантово-механических приложений. Дело в том, что в (I4) вся зависимость от проекций моментов сосредоточена в одном и очень простом множителе - коэффициенте Клебша-Гордана. Поэтому теорема Вигнера-Экарта позволяет чисто алгебраическим путем с помощью соотношений ортонормированности для коэффициентов векторного сложения проводить суммирование различных квантово-механических выражений (сечений реакций, вероятностей переходов и т.п.) по проекциям входящих в них моментов. Такого рода суммирование очень часто приходится выполнять на практике, например, при рассмотрении атомных или ядерных столкновений, когда падающие частицы, а также мишень не поляризованы и детектор нечувствителен к поляризации вылетающих частиц. Как известно, в таких случаях необходимо усреднять сечение процесса по проекциям моментов сталкивающихся частиц и суммировать по про-

екциям моментов разлетающихся частиц.

Теорема Вигнера-Эккарта является основой для получения всевозможных правил отбора в квантовой механике.

Поясним это утверждение на примерах электрических квадрупольных γ - переходов в ядрах (E2 - переходы). Вероятность их пропорциональна квадрату матричного элемента квадрупольного оператора $(J'M' | Q_q^2 | JM)$. Здесь J, M - момент начального состояния ядра и его проекция, J', M' - момент и его проекция для конечного состояния ядра. Согласно теореме Вигнера-Эккарта, матричные элементы Q_q^2 пропорциональны коэффициенту векторного сложения $(JM 2 q | J'M')$. А эти коэффициенты, как известно, отличны от нуля только при выполнении правила треугольника $|J-2| \leq J' \leq J+2$. Отсюда получаем известное правило отбора по моменту при E2 - переходе: в общем случае $\Delta J = J' - J = 0, \pm 1, \pm 2$, в частном случае при $J = 0$ $\Delta J = 2$, для $J = 1/2$ $\Delta J = 1, 2$. Поскольку оператор Q^2 - четный, т.е. не меняется при инверсии, то правило отбора по моментам следует еще дополнить правилом отбора по четности: четность состояния при E2-переходе не меняется, т.е. отлична от нуля вероятность E2-переходов только между состояниями с одинаковой четностью. Аналогичным путем получают правила отбора для β -распада, правила отбора в ядерных распадах и реакциях и т.п.

Кроме того, на теореме Вигнера-Эккарта основан метод эквивалентных операторов. Он заключается в следующем. Пусть нам необходимо вычислить матричные элементы некоторого неприводимого тензорного оператора $(J'M' | T_q^k | JM)$, причем или сам оператор T^k сложного вида или сложна структура

волновых функций, по которым он вычисляется. Тогда можно взять более простой оператор такого же ранга L^k , матричные элементы которого нам известны, и по теореме Вигнера-Экарта записать

$$(J'M' | T_q^k | JM) = a (J'M' | L_q^k | JM) \quad (18)$$

Иногда нас интересует только отношение матричных элементов (18) с разными M, M', q ; тогда переходом к эквивалентному оператору с помощью формулы (18) этот вопрос решается полностью. Если же нужна абсолютная величина матричного элемента (18), то нужно каким-то способом найти переводной коэффициент

$$a = \frac{(J' || T^k || J)}{(J' || L^k || J)} \quad (19)$$

Нужно заметить, что замена оператора T^k другим оператором L^k с такими же трансформационными свойствами эффективна только в том случае, если оператор L^k имеет ненулевой матричный элемент между теми состояниями с моментами J' и J , которые входят в интересующий нас матричный элемент. В этом заключается ограниченность метода эквивалентных операторов. В силу отмеченного обстоятельства обычно он позволяет только частично решить вопрос о вычислении матричных элементов оператора T^k . Например, во многих задачах удобно имитировать оператор T_q^k тензором соответствующего ранга L_q^k , составленным из компонент оператора углового момента J *). Одна-

*) Заметим, кстати, что для построения неприводимого тензорного оператора L_q^k из компонент углового момента J можно взять явное выражение для пространственной гармоники Y_{kq} (см. занятие I) и каждую комбинацию $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ в ней заменить на $\frac{1}{k!} \sum_{\rho} P\{J_x^\alpha J_y^\beta J_z^\gamma\}$, где P - это всевозможные перестановки отдельных сомножителей J_x, J_y, J_z , поскольку эти сомножители в отличие от чисел x, y, z , вообще говоря, не коммутируют друг с другом ($\alpha + \beta + \gamma = k$)

ко в виду того, что матричные элементы оператора \vec{J} и, следовательно, L_q^k диагональны по моменту \vec{J} , такой прием позволяет рассмотреть только диагональные по \vec{J} матричные элементы оператора T^k . Недиagonальные элементы приходится вычислять непосредственно, используя тот арсенал алгебры тензорных операторов, который описан ниже. Это обстоятельство делает целесообразным использование алгебры тензорных операторов даже в относительно простых случаях в виду ее универсальности и высокой эффективности.

С помощью теоремы Вигнера-Экарта и техники $6j$ и $9j$ символов можно получить следующую сводку формул матричных элементов тензорных операторов /1,2/.

§ 3. Алгебра тензорных операторов.

Сначала приведем формулу матричного элемента тензорного произведения операторов T^{k_1} и U^{k_2} , действующих на одни и те же координаты.

$$\begin{aligned}
 (\alpha_j \| [T^{k_1} \times U^{k_2}]^k \| \alpha' j') &= \sqrt{2k+1} (-1)^{j+j'+k} \\
 \times \sum_{\alpha'' j''} (\alpha_j \| T^{k_1} \| \alpha'' j'') (\alpha'' j'' \| U^{k_2} \| \alpha' j') &\left\{ \begin{matrix} k_1 & k_2 & k \\ j & j & j'' \end{matrix} \right\} \quad (20)
 \end{aligned}$$

Для скалярного произведения имеем

$$\begin{aligned}
 (\alpha_j \| (T^k \cdot U^k) \| \alpha' j') &= \\
 = \delta_{jj'} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{\alpha'' j''} (-1)^{j-j'} (\alpha_j \| T^k \| \alpha'' j'') (\alpha'' j'' \| U^k \| \alpha' j') &\quad (21)
 \end{aligned}$$

Теперь перейдем к матричным элементам произведений операторов U^{k_1} и V^{k_2} , из которых U действует только на координаты функций, связанных с моментом j_1 , а V - функций, связанных с моментом j_2 ,

$$\begin{aligned} & (\gamma j_1 j_2; j \| [U^{k_1} \times V^{k_2}]^k \| \gamma' j'_1 j'_2; j') = \\ & = \sqrt{(2j+1)(2j'+1)(2k+1)} \sum_{\gamma''} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ j'_1 & j'_2 & j \\ k_1 & k_2 & k \end{matrix} \right\} \times \\ & \times (\gamma j_1 \| U^{k_1} \| \gamma'' j'_1) (\gamma'' j_2 \| V^{k_2} \| \gamma' j'_2) \end{aligned} \quad (22)$$

Сумма по γ'' включена для того, чтобы учесть случай, когда операторы U и V оба действуют на квантовое число γ .

$$\begin{aligned} & (\gamma j_1 j_2; j m \| (U^k V^k) \| \gamma' j'_1 j'_2; j' m') = \delta_{j j'} \delta_{m m'} \times \\ & \times (-1)^{j_2 + j'_1 + 2k + j} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ j'_2 & j'_1 & k \end{matrix} \right\} \sum_{\gamma''} (\gamma j_1 \| U^{k_1} \| \gamma'' j'_1) \end{aligned} \quad (23)$$

$$(\gamma'' j_2 \| V^{k_2} \| \gamma' j'_2)$$

Заменяя оператор V на единицу, получаем из (22):

$$\begin{aligned} & (\gamma j_1 j_2; j \| U^k \| \gamma' j'_1 j'_2; j') = \delta_{j_2 j'_2} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)} \times \\ & \times (-1)^{j_1 + j_2 + j'_1 + k} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & j \\ k & j'_1 & j_1 \end{matrix} \right\} (\gamma j_1 \| U^k \| \gamma' j'_1) \end{aligned} \quad (24)$$

При замене U на единицу, находим

$$\begin{aligned} & (\gamma j_1 j_2; j \| V^k \| \gamma' j'_1 j'_2; j') = \delta_{j_1 j'_1} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)} \times \\ & \times (-1)^{j'_2 + j + k + j_2} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j & j_2 \\ k & j'_2 & j'_1 \end{matrix} \right\} (\gamma j_2 \| V^k \| \gamma' j'_2) \end{aligned} \quad (25)$$

Выведем, например, формулу (22). Из соотношения (18) и определения (9) следует

$$\begin{aligned}
 & (\gamma_{j_1 j_2}; j \| [U^{k_1} \times V^{k_2}]^k \| \gamma'_{j_1 j_2}; j') = \\
 & = \sqrt{2j+1} \sum_{m'q} (j'm'kq | jm) (\gamma_{j_1 j_2}; jm \| [U^{k_1} \times V^{k_2}]^k_q \| \gamma'_{j_1 j_2}; j'm') = \\
 & = \sqrt{\frac{2j+1}{(2j_1+1)(2j_2+1)}} \sum_{\substack{j_1' m_1' j_2' m_2' | j' m' \\ m_1' m_2' q_1 q_2}} (j_1' m_1' j_2' m_2' | j' m') (k_1 q_1 k_2 q_2 | k q) \times \\
 & \times (j'm'kq | jm) (j_1' m_1' k_1 q_1 | j_1 m_1) (j_2' m_2' k_2 q_2 | j_2 m_2) (j_1 m_1, j_2 m_2 | jm) \\
 & (\gamma_{j_1} \| U^{k_1} \| \gamma''_{j_1}) (\gamma''_{j_2} \| V^{k_2} \| \gamma'_{j_2})
 \end{aligned} \tag{26}$$

Формулы (23-25) непосредственно следуют из этой, если подставить соответствующие значения g_j - символа.

§ 4. Примеры применения алгебры тензорных операторов.

Общий рецепт получения приведенного матричного элемента типа $(j \| T^k \| j')$ заключается в следующем. Выбираются функции Ψ_{jm} и $\Psi_{j'm'}$ с некоторыми произвольными значениями проекций m, m' и для определенной компоненты оператора T^k_q с $q = m - m'$ непосредственным вычислением находится матричный элемент $(jm | T^k_q | j'm')$. Далее из таблиц находится коэффициент векторного сложения $(j'm'kq | jm)$ и найденный матричный элемент делится на величину $\frac{(j'm'kq | jm)}{\sqrt{2j+1}}$. При этом, согласно формуле (14), получается значение приведенного матричного элемента $(j \| T^k \| j')$, которое не будет зависеть от выбранных значений чисел m и m' . Очевидно, что для конкретных вычислений следует использовать такие значения проекций m, m' и q , чтобы матричный элемент $(jm | T^k_q | j'm')$ вычислялся простейшим образом (и в то же время был отличен от нуля). Удобство и ценность теоремы Вигнера-Экарта состоит в

том, что, найдя непосредственным вычислением одного из матричных элементов $(jm | T_q^k | j'm')$ приведенный матричный элемент, мы можем получить остальные $(2j+1)(2j'+1)(2k+1)$ элементов такого типа с помощью таблиц коэффициентов векторного сложения.

Пример I: вычисление приведенного матричного элемента оператора момента количества движения.

Наиболее просто рассчитать матричный элемент оператора

$$J_z = J_0:$$

$$(jm | J_0 | j'm') = \delta_{jj'} \delta_{mm'} m$$

Коэффициент векторного сложения

$$(jm | 10 | jm) = \frac{m}{\sqrt{j(j+1)}}$$

Отсюда

$$(j || \vec{J} || j') = \delta_{jj'} \sqrt{j(j+1)(2j+1)} \quad (27)$$

В частном случае спинового момента имеем

$$(s = \frac{1}{2} || \vec{S} || s = \frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

или для матриц Паули

$$(\frac{1}{2} || \vec{\sigma} || \frac{1}{2}) = \sqrt{6}$$

Пример 2: приведенный матричный элемент от сферической функции.

С помощью формулы (3I) занятия 5, используя ортонорми-

раванность сферических функций, получаем

$$\begin{aligned} (l m | Y_{kq} | l' m') &= \\ &= \frac{\sqrt{(2l'+1)(2k+1)}}{4\pi(2l+1)} (l' m' k q | l m) (l' 0 k 0 | l 0) \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда находим

$$(l || Y_k || l') = \frac{\sqrt{(2l'+1)(2k+1)}}{4\pi} (l' 0 k 0 | l 0) \quad (29)$$

Коэффициент $(l' 0 k 0 | l 0)$ отличен от нуля, если $l'+l+k$ четно и l, l', k удовлетворяют условию треугольника. Формулы (28) и (29) используются для вычисления матричных элементов квадрупольного момента и т.п.

Пример 3: спин-тензоры.

В теории поляризации частиц со спином важную роль играют так называемые спин-тензорные операторы или просто спин-тензоры. Спин-тензором g_k называется неприводимый тензорный оператор ранга k , построенный из оператора спина частицы \vec{j} , т.е. по существу, это описанный выше оператор L^k , однако он должен быть определенным образом нормирован:

$$(j || g_k || j) = \sqrt{2k+1} \quad (30)$$

Таким образом, можно записать, что

$$g_{kq} = N_k(j) [[\dots [j^1 \times j^1]^2 j^1]^3 \dots j^1]^{k-1} j^1]^k \quad (31)$$

где нормировочный множитель $N_k(j)$, который нетрудно вычислить с помощью формулы (20), выбирается в соответствии с (31).

Если учесть примечание, сделанное на стр. 10, то приходим к равенству, которое задает явную конструкцию спинтензора,

$$g_{kq} = N_k(j) \sqrt{\frac{4\pi k!}{(2k+1)!}} y_{kq}(\vec{j}), \quad (32)$$

где $y_{kq}(j)$ определяется формулой (44) занятия I с соответствующей заменой x, y, z на j_x, j_y, j_z .

Важно отметить, что любой другой оператор ранга k , построенный из операторов момента, можно свести к (31), (32), используя коммутационные соотношения между компонентами момента (см. упр. II).

Для $k = 0$ g_{kq} сводится к единичному оператору

$$g_{00} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \quad (33)$$

Для $k = 1$

$$g_{1q} = \sqrt{\frac{3}{j(j+1)(2j+1)}} j_q^1 \quad (34)$$

Для $k = 2$

$$g_{2q} = \left[\frac{30}{j(j+1)(2j-1)(2j+1)(2j+3)} \right]^{1/2} [j^2 \times j^1]_q^2 \quad (35)$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

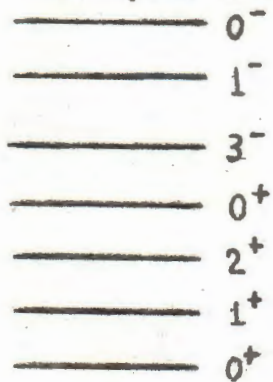
1. А.Эдмондс в сбор. "Деформация атомных ядер". ИЛ 1958, стр.305.
2. А.П.Юцис, И.В.Левинсон, В.В.Ванагас. "Математический аппарат теории момента количества движения" Вильнюс 1960.
А.П.Юцис, А.А.Бандзайтис "Теория момента количества движения в квантовой механике" Вильнюс.
3. И.М.Гельфанд, Р.А.Минлос, Э.Я.Шапиро "Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения". Физматгиз. 1958.
4. Е.Вигнер "Теория групп и ее приложения в квантово-механической теории атомных спектров" ИЛ, 1961.
5. Л.Д.Ландау, Е.М.Лившиц "Квантовая механика".
6. Дж.Эллиотт, А.М.Лейн в сб. "Строение атомного ядра".

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. В квантово-механических расчетах могут встретиться и неприводимые тензоры полуцелых рангов. Рассмотрим следующие комбинации операторов рождения и уничтожения частиц a_i^\dagger и a_i ($i = 1, 2$) в некотором состоянии i : $Q_+ = a_1^\dagger a_2$, $Q_- = a_2^\dagger a_1$, $Q_0 = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)$. Если операторы a_i^\dagger, a_i удовлетворяют фермионным коммутационным соотношениям $[a_i, a_k^\dagger]_+ = \delta_{ik}$, то для Q_+, Q_-, Q_0 имеют место те же правила коммутации, что и для операторов углового момента. Поэтому такие операторы называются операторами квазиспина. Показать, что операторы a_1^\dagger, a_2^\dagger (и соответственно a_2, a_1) составляют неприводимый тензор ранга 1/2 по отношению к поворотам в пространстве квазиспина.

1) $[a_i, a_j] = 0$
 $[a_i, a_j^\dagger] = 0$
2) $[a_i, a_i^\dagger] = 1$
 $[a_i, a_j^\dagger] = 0$

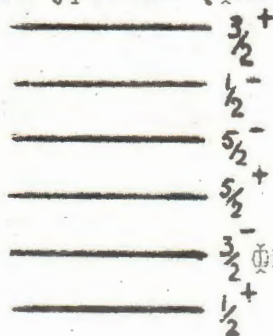
2. Пусть четное ядро имеет схему уровней (Фиг. 1).



Фиг. 1

Указать, между какими состояниями возможны переходы E1 (оператором перехода является оператор электрического дипольного момента $\vec{d} = e\vec{z}$), переходы M1 (оператор перехода - оператор $\vec{\mu}$), переходы E2 (оператор перехода - квадрупольный момент Q).

Проанализировать те же переходы в нечетном ядре со схемой уровней (Фиг. 2).



Фиг. 2

3. Построить из операторов спинового момента \vec{S} все пять компонент неприводимого тензора 2 ранга L_q^2 .

4. Для частицы со спином S , вектор $\vec{P} = \frac{1}{S}\vec{S}$ называется вектором поляризации. Среднее от этого вектора по заданному состоянию называется степенью поляризации. Определить степень поляризации частицы со спином $1/2$ и орбитальным моментом l в состояниях $|lSjm=j\rangle$ с $j=l+\frac{1}{2}$ и $l-\frac{1}{2}$. То же для $j=l+\frac{1}{2}$, $m=l-\frac{1}{2}$.

5. Состояние $|lSjm\rangle$ распадается с испусканием частицы со спином $S=\frac{1}{2}$; определить степень поляризации частицы, вылетающей в направлении θ, φ при $l=2$, $j=3/2$, $m=1/2$.

6. Характер поляризации частицы со спином $S=1$ задается не только вектором поляризации \vec{P} , но и средними зна-

чениями операторов L_q^2 (см. упр.3), которые показывают тензорную поляризацию частицы или ее "выстроенность". Найти среднее значение оператора L_0^2 в состояниях $|\ell s j m\rangle$ с $\ell = 1, 2$, $S = 1$, $j = 0, 1, 2$, $m = 0, j$.

7. Вычислить следующие матричные элементы

$$\langle j_1 j_2 ; j | (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2) | j_1' j_2' ; j' \rangle, \langle \ell_1 s_1 ; j_1 | (\vec{L} \cdot \vec{S}) | \ell_2 s_2 ; j_2 \rangle$$

где $\vec{j}_i = \vec{\ell}_i + \vec{s}_i$.

8. Вычислить спиновую часть матричного элемента тензорных сил

$$\langle \ell_1 \ell_2 L S ; j | \frac{(\vec{c}_1 \cdot \vec{\tau}_{12})(\vec{c}_2 \cdot \vec{\tau}_{12})}{r_{12}^2} - \frac{1}{3} (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2) | \ell_1' \ell_2' L' S' ; j' \rangle$$

Сформулировать правила отбора.

Указание: выразить оператор тензорных сил в виде скалярного произведения двух тензоров второго ранга L^2 и Σ^2

$$L_0^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} [\tau_{12}^2 - 3z_{12}^2], \quad \Sigma_0^2 = -\frac{1}{\sqrt{6}} [(\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2) - 3c_{1z} c_{2z}]$$

$$\vec{\tau}_{12} = \vec{\tau}_1 - \vec{\tau}_2$$

9. Свести к радиальным интегралам матричный элемент кулоновского взаимодействия двух электронов $\langle \ell_1 \ell_2 : L || V(r_{12}) || \ell_1' \ell_2' : L' \rangle$.

где $V(r_{12}) = \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$

Указание: разложить V по полиномам Лежандра, воспользоваться теоремой сложения для сферических функций и формулами алгебры тензорных операторов.

10. Получить выражение для нормировки $N_k(j)$ спин-тензора произвольного ранга

II. Покажите, что следующие пары операторов эквивалентны друг другу:

$$\begin{aligned} \text{а) } g_{1q} &= N_1(j) j_q^1, & f_{1q} &= M_1(j) [j^1 \times j^1]_q^1 \\ \text{б) } g_{2q} &= N_2(j) [j^1 \times j^1]_q^2, & f_{2q} &= M_2(j) [[j^1 \times j^1] \times j^1]_q^2 \\ \text{в) } g_{4q} &= N_4(j) [[[j^1 \times j^1] \times j^1] \times j^1]_q^4 \\ & & f_{4q} &= M_4(j) [[[j^1 \times j^1]^2 \times [j^1 \times j^1]^2]_q^4 \end{aligned}$$

Найдите N и M согласно условию (30).

ЗАНЯТИЕ 7.

ВЕКТОРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ.

В данном занятии будут рассмотрены свойства векторных сферических функций, которые потребуются нам в дальнейшем при изложении теории электромагнитных переходов в квантово-механических системах и, в частности, в ядрах.

§ I. Преобразование волновых функций частицы со спином при поворотах. Векторные сферические гармоники.

Пусть имеется волновая функция частицы со спином S и орбитальным моментом ℓ

$$Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi) \chi_{s\sigma} \quad (I)$$

где m_ℓ и σ - проекции моментов ℓ и s соответственно. Радиальная часть волновой функции для нас сейчас не существенна, и мы ее опустим.

Очевидно, что при повороте $R(\alpha\beta\gamma)$ функция (I) преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} R(\alpha\beta\gamma) [Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi) \chi_{s\sigma}] &= \\ &= \sum_{m'_\ell \sigma'} D_{m'_\ell m_\ell}^\ell(\alpha\beta\gamma) D_{\sigma' \sigma}^s(\alpha\beta\gamma) Y_{\ell m'_\ell}(\theta, \varphi) \chi_{s\sigma'} \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, в общем случае при повороте каждая из функций (I) выражается через весь набор $(2\ell+1)(2s+1)$ таких функций. Поэтому удобно ввести вместо функций (I) их линейные

комбинации - векторные суммы

$$\Phi_{lsjm} = \sum_{m, \sigma} (l m_1 s \sigma | jm) Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{s\sigma} \quad (3)$$

Последние преобразуются при поворотах по закону

$$R(\alpha\beta\gamma) \Phi_{lsjm} = \sum_{m'} D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) \Phi_{lsjm'} \quad (4)$$

Теперь выясним, как ведут себя при поворотах векторные величины $Y_{lm}(\theta, \varphi) \vec{e}_x$, $Y_{lm}(\theta, \varphi) \vec{e}_y$, $Y_{lm}(\theta, \varphi) \vec{e}_z$, где \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z - единичные векторы, направленные по осям x , y , z соответственно, $m = -l, -l+1, \dots, l$. Рассмотрение этих величин представляет интерес в связи с тем, что любое векторное поле

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = A_x(r, \theta, \varphi) \vec{e}_x + A_y(r, \theta, \varphi) \vec{e}_y + A_z(r, \theta, \varphi) \vec{e}_z$$

можно разложить по базису, составленному из таких функций.

Введем вместо декартовых единичных векторов \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z сферические единичные векторы

$$\vec{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y), \vec{e}_0 = \vec{e}_z, \vec{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y), \quad (5)$$

обладающие следующими свойствами

$$(\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_{\mu'}) = \delta_{\mu-\mu'} (-1)^\mu = -\sqrt{3} (1_\mu 1_{\mu'} | 0_0) \quad (6)$$

$$\vec{e}_\mu^* = (-1)^\mu \vec{e}_{-\mu} \quad (7)$$

Теперь произвольный вектор \vec{A} записывается в виде

$$\vec{A} = \sum_{\mu} (-1)^\mu A_{-\mu} \vec{e}_\mu \quad (8)$$

где $A_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y)$, $A_0 = A_z$, $A_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y)$

Скалярное произведение двух векторов в таких обозначениях принимает следующую форму

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \sum_{\mu} A_{\mu}^* B_{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A_{\mu} B_{\mu} \quad (9)$$

Если теперь произвести поворот $g(\alpha\beta\gamma)$, то в комбинации $Y_{lm}(\theta, \varphi) \vec{e}_{\mu}$ сферическая функция $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ преобразуется обычным порядком, но одновременно меняется направление вектора \vec{e}_{μ} , и он превращается в линейную комбинацию векторов $\vec{e}_{\mu'}$ в неподвижной системе координат.

Нетрудно убедиться, что

$$R(\alpha\beta\gamma) \vec{e}_{\mu} = \sum_{\mu'} D_{\mu'\mu}^1(\alpha\beta\gamma) \vec{e}_{\mu'} \quad (10)$$

Поэтому в целом получаем

$$\begin{aligned} R(\alpha\beta\gamma) [Y_{lm}(\theta, \varphi) \vec{e}_{\mu}] &= \\ &= \sum_{m'\mu'} D_{m'\mu}^l(\alpha\beta\gamma) D_{\mu'\mu}^1(\alpha\beta\gamma) Y_{lm'}(\theta, \varphi) \vec{e}_{\mu'} \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда видно, что векторные величины $Y_{lm}(\theta, \varphi) \vec{e}_{\mu}$ при повороте преобразуются точно так же, как волновые функции

$Y_{lm}(\theta, \varphi) \chi_{1\mu}$ частицы со спином $S = 1$. В связи с этим частицу со спином 1 называют векторной частицей. С другой стороны, тот факт, что какая-то частица описывается трехкомпонентной векторной волновой функцией, означает, что ее спин равен 1. В частности, свободное электромагнитное поле описывается векторным потенциалом; следовательно, квант этого поля - фотон - обладает спином, равным единице. Впрочем, фотон - это не обычная векторная частица, она дополнительно подчиняется условию

поперечности, и поэтому случай электромагнитного поля требует специального рассмотрения (см. занятие 8).

В виду (II) для векторной частицы можно ввести комбинации, преобразующиеся при поворотах с помощью матрицы D^J , т.е. характеризующиеся определенным полным моментом $J = S + L$

$$\vec{Y}_{J\ell M} = \sum_{\mu m} (1 \mu \ell m | J M) \vec{e}_\mu Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (I2)$$

Величины $\vec{Y}_{J\ell M} = (J = \ell \pm 0, 1)$ называются векторными сферическими функциями. Преобразование, обратное по отношению к (I2), имеет вид

$$\vec{e}_\mu Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sum_J (1 \mu \ell m | J M) \vec{Y}_{J\ell M} \quad (I3)$$

Векторные сферические функции являются собственными функциями операторов J^2 и J_z .

$$J^2 \vec{Y}_{J\ell M} = J(J+1) \vec{Y}_{J\ell M} \quad (I4)$$

$$J_z \vec{Y}_{J\ell M} = M \vec{Y}_{J\ell M} \quad (I5)$$

С помощью (6) для них можно получить следующее соотношение ортонормированности

$$\int (\vec{Y}_{J\ell M}^* Y_{J'\ell'M'}) d\Omega = \delta_{JJ'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{MM'} \quad (I6)$$

Векторные сферические функции образуют полную ортонормирован-

ную систему функций, поэтому любое векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$ может быть разложено в ряд по векторным сферическим функциям

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{j\ell m} f_{j\ell m}(z) \vec{Y}_{j\ell m}(\theta, \varphi) \quad (I7)$$

$$f_{j\ell m}(z) = \int (\vec{Y}_{j\ell m}(\theta, \varphi) \vec{A}(\vec{r})) d\Omega \quad (I8)$$

В (I6), (I8) круглые скобки означают скалярное произведение двух векторов в смысле (9). Согласно (I2), компонента векторной сферической гармоник с индексом $-\mu$ равна

$$(\vec{Y}_{j\ell m})_{-\mu} = (-1)^\mu Y_{\ell m}(\theta, \varphi) (1 \mu \ell m | j M)$$

и далее

$$(\vec{Y}_{j\ell m}^*)_{-\mu} = (1 \mu \ell m | j M) Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi)$$

Поэтому имеем

$$f_{j\ell m}(z) = \sum_{\mu} (-1)^\mu (1 -\mu \ell m | j M) \int Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) A_{\mu}(\vec{r}) d\Omega \quad (I9)$$

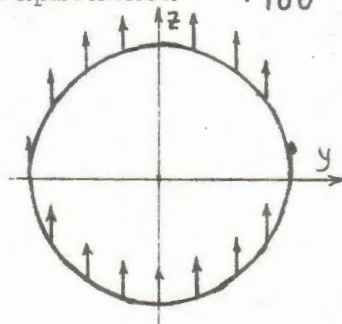
Очевидно, что векторная сферическая функция $\vec{Y}_{j\ell m}$ имеет четность $(-1)^{\ell+1}$ поскольку при инверсии сферическая гармоника $Y_{\ell m}$ преобразуется обычным образом, приобретая фазу $(-1)^\ell$, и, кроме того, меняется направление векторов \vec{e}_μ . Наконец, заметим, что $Y_{j\ell m}^* = (-1)^{j+\ell+m+1} Y_{j\ell-m}$.

Рассмотрим некоторые простейшие векторные сферические функции.

1) $l = 0$. При этом $J = 1$

$$\vec{Y}_{100} = \vec{e}_m \quad (20)$$

Вид векторного поля, которое описывается векторной сферической гармоникой \vec{Y}_{100} в плоскости Ozy , изображен на фиг.1.



фиг.1

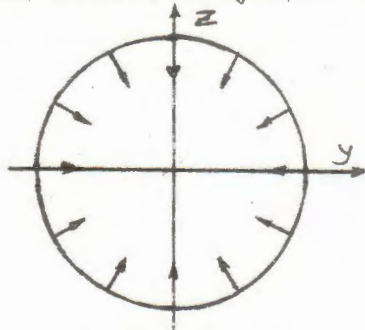
В каждой точке на поверхности сферы поле представляет собою единичный вектор, направленный по оси z . Видно, что в точках, симметричных относительно начала координат, поля одинаковы, и поле в целом нечетно по отношению к инверсии.

2) $l = 1$. Здесь возможны три случая $J = 0, 1, 2$.

Если $J = 0$, то

$$\begin{aligned} \vec{Y}_{010} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[e_1 \frac{\sin \theta e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}, -e_0 \cos \theta, e_{-1} \frac{\sin \theta e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \right] = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} [x \vec{e}_x, y \vec{e}_y, z \vec{e}_z] = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \vec{z} \end{aligned} \quad (21)$$

Вид соответствующего векторного поля, изображен на фиг.2.



фиг.2

Ясно, что такое продольное поле обладает сферической симметрией, поэтому векторная сферическая функция \vec{Y}_{010} преобразуется при повороте с помощью функции \mathcal{D}^0 .

Отсюда также следует, что любое векторное поле вида $\vec{B} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} B_{-\mu} e_{\mu}$, у которого компоненты B_{μ} преобразуются при повороте с помощью функции Вигнера \mathcal{D}^1 , обладает сферической симметрией $R\vec{B} = \vec{B}$

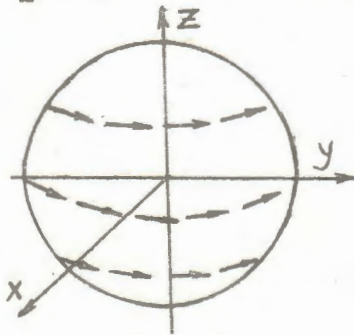
Аналогичным свойством обладают также операторные выражения $\vec{G}_{010} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \hat{G}_{-\mu}^1 \vec{e}_{\mu}$, у которых операторы \hat{G}_{μ}^1 являются тензорами первого ранга. К ним принадлежат, в частности, операторы \vec{L} , \vec{p} , $\vec{\nabla} = \text{grad}$. Ясно, что, если эти операторы действуют на сферическую функцию Y_{LM} , то их следует рассматривать как скалярные операторы, т.е. результатом их действия будет комбинация векторных гармоник с $J = L$. Итак, должно быть

$$\vec{G}_{010} Y_{LM} = \sum_{L'=L\pm 0,1} c_{L'} Y_{JL'M} \quad (22)$$

Теперь возьмем случай $J = 1$:

$$Y_{110} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} [e_1 \sin\theta + e_{-1} \sin\theta] = -i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \times \sin\theta (-\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi) \quad (23)$$

Векторное поле, описываемое этой функцией, изображено на фиг.3, оно подобно полю скоростей точек сферы, вращающейся вокруг оси Z . Аналогичным образом можно построить векторные сферические функции с другими значениями M , а также с $J = 2$. Мы этого делать не будем, отметим только, что из фиг.2 и 3 видно, что поля Y_{JLM} обладают центральной симметрией, т.е. четность таких гармоник положительна.



фиг.3

§ 2. Векторный анализ для векторных сферических гармоник.

При изучении электромагнитного поля нам придется вычислять дивергенции и роторы от векторных сферических функций. Поэтому в данном разделе мы разработаем общий аппарат для такого рода вычислений, т.е. аппарат векторного анализа.

I. Сначала рассмотрим вопрос о превращении обычных сферических гармоник в векторные сферические функции, т.е. вернемся к соотношению (22). Для того, чтобы можно было использовать формулы алгебры тензорных операторов, представим скалярный оператор \vec{G}_{010} в виде тензорного произведения нулевого ранга

$$\vec{G}_{010} = -\sqrt{3} [\vec{e} \times G^1]_0^0 \quad (24)$$

Тогда можно записать, что

$$\begin{aligned} \vec{G}_{010} Y_{LM} &= -\sqrt{3} [\vec{e} \times G^1]_0^0 Y_{LM} = \\ &= -\sqrt{3} [([\vec{e} \times G^1]_0 \times Y_L)]_{LM} = \\ &= -\sqrt{3} \sum_{L'} U(11LL; 0L') [\vec{e} \times [G^1 Y_L]_{L'}]_{LM} = \\ &= -\sqrt{3} \sum_{L'} U(11LL; 0L') \frac{\langle L' \| G^1 \| L \rangle}{\sqrt{2L'+1}} [\vec{e} \times Y_{L'}]_{LM} \cdot (-1)^{L'-L-1} = \\ &= - \sum_{L'} \frac{1}{\sqrt{2L'+1}} \langle L' \| G^1 \| L \rangle \vec{Y}_{LL'M} \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь мы использовали теорему Вигнера-Экарта, следующие сокращенные обозначения для векторной суммы моментов J_1 и J_2

$$[\Psi_{J_1} \times \Psi_{J_2}]_{JM} = \sum_{M_1 M_2} (J_1 M_1 J_2 M_2 | JM) \Psi_{J_1 M_1} \Psi_{J_2 M_2} \quad (26)$$

При этом формулу (12) можно переписать в виде

$$[\vec{e} \times Y_L]_{JM} = \vec{Y}_{JLM} \quad (27)$$

В качестве примера рассмотрим выражение $\vec{L} Y_{LM}$. Поскольку $\langle L' \parallel L \parallel L \rangle = \delta_{LL'} \sqrt{L(L+1)(2L+1)}$, то из (25) имеем

$$\vec{L} Y_{LM} = -\sqrt{L(L+1)} \vec{Y}_{LLM} \quad (27)$$

2. Перевод векторных сферических функций в обычные сферические гармоники. Такой переход имеет место, например, в следующем выражении

$$(\vec{G}_{010} \cdot \vec{Y}_{JLM}) = [G^1 \times Y_L]_{JM} = \frac{\langle J \parallel G^1 \parallel L \rangle}{\sqrt{2L+1}} (-1)^{J-L-1} \quad (28)$$

Здесь мы воспользовались соотношением ортогональности (6) и теоремой Вигнера-Эккарта. Отсюда, например, легко получим равенство

$$\operatorname{div} \vec{Y}_{JLM} = 0 \quad (29)$$

ибо из правил отбора по четности следует, что

$$\langle L \parallel \nabla \parallel L \rangle = 0 \quad (30)$$

Впрочем, последнее равенство следует также из правил отбора по четности. Векторное поле \vec{A} , удовлетворяющее условию

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (31)$$

называется поперечным. Поэтому гармоники $\vec{Y}_{\mu_2 \mu_3 m}$ - поперечны.

3. Преобразование векторных сферических функций в векторные гармоники. Такая ситуация возникает при рассмотрении векторных произведений

$$\begin{aligned} [\vec{G}_{010} \times \vec{Y}_{LLM}] &= \sum_{\mu_2 \mu_3 m} (-1)^{\mu_2} [e_{\mu_2} \times e_{\mu_3}] G_{-\mu_2}^1 Y_{\ell m} \\ &\times (1 \mu_3 L m | \mu M) = \sum_{\substack{\mu_2 \mu_3 m \\ L' m' \mu' \mu''}} (-1)^{\mu_2} (1 \mu_3 L m | \mu M) (1 \mu_2 1 L m | L' m') \times \\ &\times (1 \mu_2 1 \mu_3 | 1 \mu) (1 \mu L' m' | \mu' M') i\sqrt{2} [\vec{e} \times [G^1 \times Y_L]_{L'}]_{\mu' M'} = \\ &= -i\sqrt{2} \sum_{L'} U(11 \mu L; 1 L') \frac{\langle L' || G^1 || L \rangle}{\sqrt{2L'+1}} \vec{Y}_{\mu' L' M'} (-1)^{L'-L-1} \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь мы использовали соотношение

$$[\vec{e}_\mu \times \vec{e}_\nu] = i\sqrt{2} (1 \mu 1 \nu | 1 \mu + \nu) \vec{e}_{\mu + \nu} \quad (33)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

В качестве примера возьмем выражение

$$\begin{aligned} [\vec{z} \times \vec{Y}_{LLM}] &= (-1)^{L-L} i\sqrt{2} z \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{L'} U(11 LL; 1 L') \times \\ &\times \frac{\langle L' || Y^1 || L \rangle}{\sqrt{2L'+1}} \vec{Y}_{LL'M} = -i\sqrt{2} z [U(11 LL; 1 L+1) \times \\ &\times \sqrt{\frac{2L+1}{2L+3}} (L 0 1 0 | L+1 0) \vec{Y}_{LL+1M} + U(11 LL; L L-1) \times \\ &\times \sqrt{\frac{2L+1}{2L-1}} (L 0 1 0 | L-1 0) \vec{Y}_{LL-1M}] = \\ &= -iz \left[\sqrt{\frac{L}{2L+1}} \vec{Y}_{LL+1M} + \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \vec{Y}_{LL-1M} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Очевидно, что эта формула задает поперечную гармонику с моментом L и четностью $(-1)^L$.

ЗАНЯТИЕ 8.

Разложение свободного электромагнитного поля по мультиполям

Как известно, свободное электромагнитное поле описывается векторным потенциалом

$$\vec{A}_p(\vec{z}) = \vec{u}_p e^{i\vec{k}\vec{z}} \quad (1)$$

где \vec{k} - направление импульса фотона, \vec{u}_p - вектор его поляризации, перпендикулярный \vec{k} . Этот потенциал удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0 \quad (2)$$

при дополнительном условии поперечности (условие Лоренца, соленоидальная калибровка)

$$\text{div} \vec{A} = 0 \quad (3)$$

Напомним связь этого векторного потенциала с напряженностями (\vec{E} , \vec{H}) электрического и магнитного полей

$$\begin{aligned} \vec{E} &= ik\vec{A} \\ \vec{H} &= \text{rot} \vec{A} \end{aligned} \quad (4)$$

Разложим векторное поле (1) по векторным сферическим гармоникам. Для этого сначала рассмотрим случай, когда импульс направлен по оси Z . Тогда

$$\begin{aligned}
 \vec{A}_p &= u_p e^{ikz} = -p e_p \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_{\ell}(kz) Y_{\ell 0} = \\
 &= -p \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_{\ell}(kz) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{Y}_{\ell e p} + \sqrt{\frac{\ell+2}{2(2\ell+1)}} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot Y_{\ell+1 \ell p} + \sqrt{\frac{\ell-1}{2(2\ell+1)}} Y_{\ell-1 \ell p} \right] = \\
 &= \pi \sum_{L=1}^{\infty} i^L \sqrt{2L+1} [A_{Lp}(m) + ip A_{Lp}(e)],
 \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$A_{LM}(m) = -j_{\ell}(kz) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \vec{Y}_{LLM} \tag{6}$$

$$A_{LM}(e) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} j_{L-1}(kz) Y_{LL-1M} - \sqrt{\frac{L}{2L+1}} j_{L+1}(kz) Y_{LL+1M} \right] \tag{7}$$

При выводе этого выражения мы использовали то обстоятельство, что для вектора поляризации справедливо

$$u_{\pm 1} = (u_x \pm i u_y) = \mp e_{\pm 1}$$

$$u_p = -p e_p$$

u_{+1} - означает левую циркулярную поляризацию излучения,

u_{-1} - правую. Кроме того, были подставлены явные выражения для коэффициентов Клебша-Гордана ($1 p \ell 0 | \ell' p$).

Величины $\vec{A}_{LM}(m)$ и $\vec{A}_{LM}(e)$ называются соответственно векторными потенциалами магнитного и электрического мультиполя порядка 2^L . Это решения уравнения Гельмгольца (12), удовлетворяющие условию (3) и характеризующиеся определенным полным моментом количества движения L . Из (7) видно, что в случае электрического мультиполя орбитальный момент

фотона не является хорошим квантовым числом. Поля электрического и магнитного мультиполей с одним и тем же моментом L отличаются друг от друга четностью.

Для того, чтобы получить разложение векторного потенциала для фотона с произвольно **направленным** импульсом, подействуем на обе части равенства (5) оператором поворота $R(\alpha\beta\gamma)$, который совмещает ось Z с направлением импульса фотона k , т.е. $\alpha = \varphi_k$, $\beta = \theta_k$, $\gamma = 0$. В итоге имеем

$$\vec{u}_p e^{ik\vec{z}} = \pi \sum_{L=1}^{\infty} \sum_M i^L \sqrt{2L+1} D_{MP}^L(\varphi_k \theta_k 0) \cdot \{A_{LM}(m) + ipA_{LM}(e)\} \quad (8)$$

Для более детального изучения свойств полей мультиполей рекомендуем читателю книгу Роуза ¹¹¹.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

(к занятию 7).

1. Найти в явном виде гармонику \vec{Y}_{210} . Изобразить на рисунке вид описываемого ею поля.

2. С помощью формулы (25) найти выражение продольной гармоники $\vec{r} Y_{LM}$ через векторные гармоники $\vec{Y}_{LL'M}$.

3. С помощью формулы (25) выразить величину $grad Y_{LM}$ через векторные сферические функции и операторы, зависящие от \vec{z} .

4. Найти линейную комбинацию гармоник $\vec{Y}_{J,J+1,M}$ и $\vec{Y}_{J,J-1,M}$, удовлетворяющую условию поперечности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

(к занятию 7)

1. Роуз М. "Поля мультиполей" ИЛ, 1957.
2. Давыдов А.С. "Теория атомного ядра", 1958.
3. Давыдов А.С. "Квантовая механика", 1963.
4. Блатт Дж., Вайскопф В. "Теоретическая ядерная физика".

У П Р А Ж Н Е Н И Я

(к занятию 8)

1. Используя свойства функций Бесселя, показать, что $A_{LM}(m)$ и $A_{LM}(e)$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца и условию поперечности.

2. Написать явное выражение типа (7) для потенциала продольного поля

$$A_{LM}(\rho) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \nabla j_\rho(kz) Y_{LM}$$

Показать, что $A_{LM}(\rho)$ ортогонально $A_{LM}(m)$, $A_{LM}(e)$.

3. Показать, что

$$A_{LM}(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_\rho(kz) \frac{\hat{L}}{\sqrt{L(L+1)}} Y_{LM}$$

$$A_{LM}(e) = \frac{1}{ik} \text{rot } A_{LM}(m)$$

4. Найти явное выражение через векторные сферические гармоники для напряженностей электрического и магнитного полей мультиполей $E_{LM}(m)$, $H_{LM}(m)$, $E_{LM}(e)$, $H_{LM}(e)$

Показать, что поля электрического и магнитного мультиполей

дуальны, т.е.

$$E_{LM}(e) = H_{LM}(m)$$

$$H_{LM}(e) = -E_{LM}(m)$$

5. Найти радиальные и тангенциальные составляющие векторов A_{LM} , H_{LM} , E_{LM} для электрического и магнитного мультиполей.

Указание: по определению для любого вектора $\vec{B} = \vec{B}_{||} + \vec{B}_{\perp}$ где радиальная составляющая $\vec{B}_{||} = \frac{\vec{r}(\vec{B} \cdot \vec{r})}{r^2}$.

6. Оценить радиальные и тангенциальные составляющие

$$E_{LM}(e), H_{LM}(e), E_{LM}(m), H_{LM}(m)$$

в статической зоне (т.е. при $kr \ll 1$).

7. Получить разложение векторного потенциала свободного электромагнитного поля по мультиполям в импульсном представлении.

Л И Т Е Р А Т У Р А

(к занятию 8).

1. Роуз М. "Поля мультиполей" ИЛ, 1957.
2. Давыдов А.С. "Теория атомного ядра", 1958.
3. Давыдов А.С. "Квантовая механика", 1963.
4. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. "Квантовая электродинамика".
5. Блатт Дж., Вайскопф В. "Теоретическая ядерная физика".
6. Ватсон "Теория бесселевых функций".

НИИЯФ МГУ 72-892-150