

МГУ

им. М.В. Ломоносова

В.В.Балашов, Г.Я.Коренман, Ю.Ф.Смирнов, Н.П.Юдин

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЯДЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Под общей редакцией В.В.Балашова

ТЕМА 3

СПИНОВАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ.

КОРРЕЛЯЦИИ ПРОДУКТОВ РАСПАДА.

Редактор Г.Я.Коренман

МОСКВА 1972

ТЕМА 3. СПИНОВАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ. КОРРЕЛЯЦИИ ПРОДУКТОВ

РАСПАДА

ЗАНЯТИЕ 9

СПИНОВАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ

Перед изучением этой задачи читателю рекомендуется освежить в памяти теорию представлений и обозначения Дирака для функций преобразования и векторов состояния (см., например, /1/, § 14, 16, 17, 20 или /2/, § 27-30).

§ 1. Описание квантовой системы матрицей плотности

Обычный способ описания квантовой системы состоит в задании ее волновой функции. Однако, как известно /1-4/, такое описание не всегда возможно. Рассмотрим, например, такую ситуацию, когда интересующая нас физическая система I содержится в более общей системе, состоящей из частей I и 2. Полная волновая функция всей системы $\Psi(x_1, x_2; t)$ позволяет вычислить любую физическую характеристику подсистемы I во все моменты времени по известной формуле:

$$\langle \hat{L}_1 \rangle = \int \Psi^*(x_1, x_2; t) \hat{L}_1(x) \Psi(x_1, x_2; t) dx_1 dx_2 \quad (I)$$

Но волновая функция $\Psi(x_1, x_2; t)$ содержит "лишнюю" в данном случае информацию о подсистеме 2, поэтому использовать ее для описания подсистемы I не очень экономно. В то же время не существует, вообще говоря, волновой функции подсистемы I, за исключением специальных случаев, когда $\Psi(x_1, x_2; t) = \psi_1(x_1; t) \psi_2(x_2; t)$.

Можно ли ввести какую-либо другую величину, полностью описывающую подсистему I и не содержащую "лишней" информации?

Ответ на этот вопрос подсказывает формула (I), из которой ясно, что если ввести матрицу

$$\rho_1(x_1, x_1'; t) = \int \Psi(x_1, x_2; t) \Psi^*(x_1', x_2; t) dx_2, \quad (2)$$

то среднее значение физической величины L_1 можно представить в виде

$$\langle L_1 \rangle = \int \hat{L}_1(x_1', x_1) \rho_1(x_1, x_1'; t) dx_1 dx_1', \quad (3)$$

где

$$\hat{L}_1(x_1', x_1) = \delta(x_1' - x_1) \hat{L}_1(x_1). \quad (4)$$

Величина $\rho_1(x_1, x_1'; t)$ полностью описывает подсистему I и не зависит от переменных второй подсистемы. Ее называют матрицей плотности системы I.

Для дальнейшего удобнее перейти к произвольному представлению. Запишем для этого разложение

$$\Psi(x_1, x_2; t) = \sum_{n_1, n_2} \varphi_{n_1}(x_1) \chi_{n_2}(x_2) \Psi(n_1, n_2; t), \quad (5)$$

или, в обозначениях Дирака,

$$\langle x_1, x_2 | \Psi(t) \rangle = \sum_{n_1, n_2} \langle x_1 | n_1 \rangle \langle x_2 | n_2 \rangle \langle n_1, n_2 | \Psi(t) \rangle. \quad (5')$$

Тогда, подставив это выражение в формулу (I), получим

$$\langle \hat{L}_1 \rangle = \sum_{n_1, n_1'} \langle n_1' | \hat{L}_1 | n_1 \rangle \langle n_1 | \hat{\rho}_1 | n_1' \rangle = \text{Sp}_{n_1}(\hat{L}_1 \hat{\rho}_1). \quad (6)$$

Здесь уже введена матрица плотности системы I:

$$\langle n_1 | \hat{\rho}_1 | n_1' \rangle = \sum_{n_2} \langle n_1, n_2 | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | n_1', n_2 \rangle \quad (7)$$

Матричные элементы оператора \hat{L}_1 определены обычным образом:

$$\langle n_1' | \hat{L}_1 | n_1 \rangle = \int \varphi_{n_1'}^*(x) \hat{L}_1(x) \varphi_{n_1}(x) dx. \quad (8)$$

Очевидно, для всей системы (I+2) также можно ввести матрицу плотности

$$\langle n_1, n_2 | \rho | n'_1, n'_2 \rangle = \langle n_1, n_2 | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | n'_1, n'_2 \rangle, \quad (9)$$

или, символически,

$$\hat{\rho}(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|. \quad (9)$$

Если данное состояние системы можно описать волновой функцией, то состояние называют чистым, если же для некоторого состояния не существует волновой функции, то такое состояние называют смешанным. Таким образом, в нашем примере полная система (I+2) находится в чистом состоянии, а система I - в смешанном.

Может показаться, что смешанные состояния (и вместе с ними необходимость введения матрицы плотности) возникают лишь в том случае, когда рассматриваемая система незамкнута (как это было в нашем примере с системой I). Но в действительности часто приходится иметь дело с системами, которые можно в данный момент считать изолированными, но образовавшимися после взаимодействия с другой системой. В этом случае состояние, вообще говоря, не является чистым и приходится вводить матрицу плотности. Другими словами, вопрос о том, является ли данное состояние чистым или смешанным, для изолированной системы определяется способом приготовления системы.

Если физической системе можно противопоставить оператор Гамильтона \hat{H} , то ее матрица плотности удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}] = 0. \quad (10)$$

Это уравнение эквивалентно уравнению Шредингера для волновой функции и является аналогом уравнения Лиувилля для функции распределения в классической механике.

Рассмотрим временную зависимость матрицы плотности. Пусть известны собственные функции и собственные значения гамильтониана:

$$\hat{H}\psi_n = E_n \psi_n$$

Тогда в энергетическом представлении уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle m | \hat{\rho}(t) | n \rangle = -i \omega_{mn} \langle m | \hat{\rho}(t) | n \rangle,$$

где $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$.

Отсюда получаем $\langle m | \hat{\rho}(t) | n \rangle = \langle m | \hat{\rho}(0) | n \rangle e^{-i\omega_{mn}t}$.

§ 2. Основные свойства матрицы плотности

Для матрицы плотности, введенной соотношением (7) или (9), легко получить ряд полезных свойств, доказательство которых предоставляется читателю.

I). Диагональные элементы матрицы плотности дают вероятности нахождения системы в соответствующих состояниях, $W_n = \langle n | \rho | n \rangle$. (Если квантовые числа пробегает непрерывный набор значений, то соответствующий матричный элемент $\langle x | \rho | x \rangle = W(x)$ можно интерпретировать как плотность вероятности).

Следствия * : а) $0 \leq \langle n | \rho | n \rangle \leq 1$.

*) Если среди чистых состояний, смесь которых описывает матрица плотности (см. пункт 5), имеются состояния непрерывного спектра, то эти утверждения требуют некоторого уточнения.

Формально они останутся справедливыми, если вводить большой, но конечный нормировочный объем, в котором находится система. По существу же, как и для чистых состояний непрерывного спектра, проблема решается при рассмотрении нормированных волновых пакетов.

б) Матрица плотности нормирована на единицу:

$$\text{Sp} \hat{\rho} \equiv \sum_n \langle n | \hat{\rho} | n \rangle = \int \langle x | \hat{\rho} | x \rangle dx = 1.$$

2). Матрица плотности эрмитова: $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$, или $\langle m | \hat{\rho} | n \rangle = \langle n | \hat{\rho} | m \rangle^*$.

3). Если определить стационарное состояние условием $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = 0$, то для него $\langle E_m, \alpha | \hat{\rho} | E_n, \epsilon \rangle = \delta(E_m, E_n) \langle \alpha | \hat{\rho}_{E_n} | \epsilon \rangle$.

4). Если \hat{U} - некоторое унитарное преобразование векторов состояния $\Psi' = \hat{U} \Psi$, то $\hat{\rho}' = \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger$.

Следствие: закон преобразования матрицы плотности к новому представлению имеет следующий вид:

$$\langle \alpha | \hat{\rho} | \epsilon \rangle = \sum_{m, n} \langle \alpha | m \rangle \langle m | \hat{\rho} | n \rangle \langle n | \epsilon \rangle.$$

5). Для любой матрицы плотности существует такое унитарное преобразование \hat{U} , которое приводит ее к диагональному виду,

$\langle \alpha | \hat{\rho} | \epsilon \rangle = \sum_m \langle \alpha | \hat{U} | m \rangle \rho_m \langle m | \hat{U}^\dagger | \epsilon \rangle$. Величины ρ_m в сущности представляют собой вероятности нахождения системы в чистых состояниях $|m\rangle$, $\rho_m = W_m$, а элементы матрицы U - функции преобразования:

$$\langle \epsilon | \hat{\rho} | \alpha \rangle = \sum_m \langle \epsilon | m \rangle W_m \langle m | \alpha \rangle \equiv \sum_m \Psi_m^-(\epsilon) \Psi_m^*(\alpha) W_m, \quad (\text{II})$$

$$\hat{\rho} = \sum_m |m\rangle W_m \langle m|. \quad (\text{II}')$$

Это означает, что смешанное состояние можно рассматривать как статистическую (некогерентную) смесь чистых состояний типа Ψ_m , представленных с весом W_m , (но никак не суперпозицию этих состояний в обычном квантово-механическом смысле!). Формулу (II) можно рассматривать как альтернативное определение матрицы плотности или как ее наиболее общий вид.

б). Условия факторизации матрицы плотности.

Пусть представление, в котором рассматривается матрица плотности, характеризуется двумя квантовыми числами. При каких условиях

ее можно представить в виде прямого произведения

$$\langle a' e' | \rho | a e \rangle = \langle a' | \rho_1 | a \rangle \langle e' | \rho_2 | e \rangle ?$$

Для чистых состояний ответ очевиден - если волновая функция этого состояния представляет собой произведение функций, зависящих от соответствующих переменных (а условия этой факторизации хорошо известны из квантовой механики). Так, например, для состояния с волновой функцией $\Psi_{(\alpha, \beta)} = \psi^{(\alpha)} \chi^{(\beta)}$ матрица плотности примет вид $\langle \alpha' \beta' | \rho | \alpha \beta \rangle = \langle \alpha' | \rho_1 | \alpha \rangle \langle \beta' | \rho_2 | \beta \rangle$, где

$$\langle \alpha' | \rho_1 | \alpha \rangle = \psi^{(\alpha)} \psi^{*(\alpha')} \quad \text{и т.д.}$$

Несколько сложнее обстоит дело со смешанными состояниями. Запишем в общем виде (см. п. 5) матрицу плотности двух переменных:

$$\langle a e | \rho | a' e' \rangle = \sum_{m, n} \Psi_{mn} (a e) \Psi_{mn}^* (a' e') W_{mn}. \quad (\text{II}''')$$

Пусть в волновых функциях чистых состояний из которых образовано смешанное, в данном представлении переменные разделяются

$$\Psi_{mn} (a e) = \psi_m (a) \chi_n (e). \quad (\text{I2})$$

В случае чистого состояния, $W_{mn} = \delta_{mm_0} \delta_{nn_0}$, этого уже было бы достаточно для факторизации матрицы плотности. В общем случае смешанного состояния, очевидно, нужно условие

$$W_{mn} = W_m^{(1)} W_n^{(2)}. \quad (\text{I3})$$

Это означает статистическую независимость вероятностей обнаружения у системы тех или иных значений m и n (о такой ситуации говорят также, что между переменными m и n нет корреляции). При выполнении условий (I2) и (I3), очевидно, справедливо соотношение

$$\langle a e | \rho | a' e' \rangle = \langle a | \rho_1 | a' \rangle \langle e | \rho_2 | e' \rangle. \quad (\text{I4})$$

7). Матрицу плотности подсистемы можно получить из матрицы плотности всей системы, если вычислить шнур по всем переменным, кроме относящихся к интересующей нас подсистеме.

$$\langle n_1 | \rho_1 | n_1' \rangle = \sum_{n_2} \langle n_1, n_2 | \rho | n_1', n_2 \rangle. \quad (15)$$

Это соотношение не зависит от наличия корреляций между подсистемами.

8). Если матрица плотности имеет размерность N , то она определяется $N^2 - 1$ вещественными параметрами. Для доказательства этого утверждения используйте эрмитовость матрицы плотности.

9). В чистых состояниях $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$. В смешанных состояниях $\langle a | \hat{\rho}^2 | a \rangle \leq \langle a | \hat{\rho} | a \rangle$; $\text{Spur } \hat{\rho}^2 \leq \text{Spur } \rho$.

Эти соотношения можно использовать для проверки чистоты состояния.

Доказав эти утверждения, решите упражнения I-6.

§ 3. Спиновая матрица плотности

В задачах ядерной физики наиболее часто используется матрица плотности по спиновым переменным или, в более общем случае, по переменным всех моментов количества движения системы. Очевидно, ее можно получить из полной волновой функции системы, (или полной матрицы плотности) с помощью соотношений типа (2) или (15)).

Пусть, например, частица со спином s находится в состоянии $\Psi(\vec{r}, m_s) \equiv \langle \vec{r}, m_s | \Psi \rangle$. Тогда ее спиновая матрица

плотности определяется соотношением

$$\begin{aligned} \langle m_s | \rho | m_s' \rangle &= \int d^3r \langle \vec{r}, m_s | \Psi \rangle \langle \Psi | m_s', \vec{r} \rangle \\ &\equiv \int d^3r \Psi(\vec{r}, m_s) \Psi^*(\vec{r}, m_s'). \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим простейший случай $s = 1/2$. Тогда проекции спина m_s, m_s' пробегает значения $\pm 1/2$, так что спиновая матрица плотности будет матрицей второго порядка:

$$\hat{\rho} = \left\| \langle m_s | \rho | m_s' \rangle \right\| = \begin{pmatrix} \langle -1/2 | \rho | -1/2 \rangle & \langle -1/2 | \rho | 1/2 \rangle \\ \langle 1/2 | \rho | -1/2 \rangle & \langle 1/2 | \rho | 1/2 \rangle \end{pmatrix}$$

Любую матрицу второго порядка можно разложить по четырем линейно-независимым матрицам: \hat{I} (единичная матрица), $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$, $\hat{\sigma}_3$ (матрицы Паули). Тогда

$$\hat{\rho} = a \left(\hat{I} + \sum_{i=1}^3 P_i \hat{\sigma}_i \right). \quad (17)$$

Из условия нормировки $\text{Sp} \rho = 1$ получим $a = 1/2$. Коэффициенты P_i , очевидно, характеризуют степень поляризации частицы. Вычисляя среднее значение оператора $\hat{\sigma}_j = 2\hat{S}_j$, найдем $\langle \hat{\sigma}_j \rangle = P_j$. Таким образом, для частицы со спином $1/2$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}). \quad (18)$$

Скалярное произведение здесь пока записано формально, однако нетрудно проверить, что такая форма матрицы плотности сохраняется при поворотах системы координат (см. упражнение № 10).

Если спин частицы j больше $1/2$, то параметризация (18) для матрицы плотности неприменима. Полное число вещественных параметров в этом случае равно $4j(j+1)$. (Докажите, используя эрмитовость матрицы плотности *).

* В реальных ситуациях число фактических свободных параметров матрицы плотности можно уменьшить, рассматривая способ "приготовления системы." В частности, если изучается частица, образовавшаяся в результате реакции, можно уменьшить число параметров ее матрицы плотности, используя T -инвариантность амплитуды реакции.

Чтобы выбрать удобную параметризацию, нужно отыскать подходящие тензорные операторы, по которым можно разложить спиновую матрицу плотности. Этот вопрос рассматривается в следующей задаче.

Все свойства матрицы плотности, перечисленные в предыдущем параграфе, автоматически переносятся на спиновую матрицу плотности.

Рассмотрим преобразование элементов матрицы плотности при поворотах системы координат.

Спиновая волновая функция данного состояния $|\Psi\rangle$ ("вектор состояния") не должна меняться при поворотах системы координат, а ее компоненты в новой системе координат, $\langle j\mu'|\Psi\rangle$, выражаются через компоненты $\langle jm|\Psi\rangle$ в старой системе координат с помощью \mathcal{D} -функций:

$$\langle j\mu'|\Psi\rangle = \sum_m \langle \mu' | \mathcal{D}^j(R) | m \rangle^* \langle jm|\Psi\rangle. \quad (19)$$

Здесь $R = (\alpha, \beta, \gamma)$ - совокупность углов Эйлера, задающих поворот исходной системы координат, m и μ' - переменные (аргументы функций), имеющие смысл проекций момента на оси z и z' (в старой и новой системах координат).

Тогда, используя соотношение (II), находим:

$$\begin{aligned} \langle j\mu'|\rho|j\mu'\rangle &= \sum_n \langle j\mu'|\Psi_n\rangle W_n \langle \Psi_n|j\mu'\rangle \\ &= \sum_n \sum_{m,m'} (\mathcal{D}_{\mu'm}^j(R))^* \langle jm|\Psi_n\rangle W_n \langle \Psi_n|jm\rangle \mathcal{D}_{\mu'm'}^j(R). \end{aligned}$$

Таким образом, элементы спиновой матрицы плотности в повернутой системе координат выражаются через элементы той же матрицы плотности в исходной системе:

$$\langle j\mu'|\rho|j\mu'\rangle = \sum_{m,m'} (\mathcal{D}_{\mu'm}^j(R))^* \langle jm|\rho|jm\rangle \mathcal{D}_{\mu'm'}^j(R), \quad (20)$$

откуда видно, что они преобразуются по прямому произведению двух неприводимых представлений группы вращений (точнее, $D \times D^*$)

Обратимся теперь к случаю, когда в системе имеется два момента количества движения, j_1 и j_2 . Тогда нетрудно записать связь элементов матрицы плотности в представлении проекций двух моментов и в представлении полного момента:

$$\begin{aligned} & \langle j_1 j_2 JM | \rho | j_1 j_2 J'M' \rangle = \\ & = \sum_{m_1, m_1', m_2, m_2'} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | J'M' \rangle \times \\ & \quad \times \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \rho | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Обратное соотношение:

$$\begin{aligned} & \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \rho | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle = \\ & = \sum_{JM, J'M'} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | J'M' \rangle \langle j_1 j_2 JM | \rho | j_1 j_2 J'M' \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Тем же способом, что и для матрицы плотности одного момента, можно получить закон преобразования

$$\begin{aligned} & \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \rho | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle = \\ & = \sum_{m_1, m_2, m_1', m_2'} \left(\mathcal{D}_{m_1 m_1'}^{j_1}(R) \mathcal{D}_{m_2 m_2'}^{j_2}(R) \right)^* \mathcal{D}_{m_1' m_1}^{j_1}(R) \mathcal{D}_{m_2' m_2}^{j_2}(R) \times \\ & \quad \times \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \rho | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Если работать в представлении полного момента, то остается справедливой формула (20) (с точностью до очевидной замены обозначений). Проверьте это утверждение, подставив (23) в (21).

У П Р А Ж Н Е Н И Я

I. В момент времени $t = 0$ волновая функция одномерного гармонического осциллятора имеет вид $\Psi(x; t=0) = \left(\frac{2}{3a\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \left(1 + i\frac{x}{a}\right) e^{-x^2/2a^2}$, где $a = (\hbar/m\omega)^{1/2}$.

Найдите матрицу плотности в энергетическом представлении в про-

извольный момент времени.

2. Трехмерный гармонический осциллятор находится в состоянии

$$\Psi(\vec{r}; t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{2,5}(\vec{r}) + \psi_{1,0}(\vec{r}) \right] e^{-i\omega t/2}$$

Найдите матрицу плотности в координатном представлении и в представлении квантовых чисел nlm .

Чем физически вы объясните ее независимость от времени?

Почему она недиагональна?

Найдите унитарное преобразование, диагонализующее полученную матрицу плотности.

3. Две частицы в сферически симметричном осцилляторном потенциале находятся в состоянии $|n_1 l_1, n_2 l_2; LM\rangle$.

Найдите матрицу плотности первой частицы в координатном и импульсном представлениях.

4. Можно ли утверждать, что матрица плотности всегда диагональна по сохраняющимся квантовым числам?

5. Покажите, что элементы матрицы плотности второго порядка удовлетворяют условию

$$|\langle 2|p|1\rangle|^2 \leq \langle 1|p|1\rangle \langle 2|p|2\rangle.$$

Какой физической ситуации отвечает равенство?

6. Для приведенных ниже матриц плотности второго порядка укажите, описывают ли они чистые состояния, смешанные, или не могут быть реализованы:

a) $\begin{pmatrix} 1/4 & i/2 \\ -i/2 & 3/4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 7/8 & i/5 \\ -i/5 & 1/8 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

7. Частица находится в состоянии

$$\Psi_{n\ell s j m_j}(\vec{r}, \mu) = R_{n\ell}(r) \sum_{m, m_s} \langle \ell m s m_s | j m_j \rangle Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \chi_{s m_s}(\mu).$$

Запишите ее волновую функцию и матрицу плотности в представлении $|nlm, S m_s\rangle$. Найдите спиновую матрицу плотности для следующих

случаев:

$$а) |\Psi\rangle = |\rho_{3/2} m_j\rangle, \delta) |\rho_{1/2} m_j\rangle, \epsilon) |d_{3/2} m_j\rangle, \text{з) } |d_{5/2} m_j\rangle.$$

8. Напишите общий вид спиновой матрицы плотности двух частиц со спином $I/2$; а) в случае статистической независимости их поляризации; б) при наличии корреляции поляризаций; в) тоже для тождественных частиц.

9. Частица со спином $I/2$ находится в спиновом состоянии

$$\chi = \sum_{m=\pm 1/2} a_m \chi_m.$$

Найдите вектор поляризации $\vec{P} = \langle \vec{\sigma} \rangle$, выразив его через коэффициенты a_m .

10. Докажите, что матрица плотности спина $S = I$ однозначно определяется компонентами вектора поляризации $\vec{P} = \langle \vec{S} \rangle$ и тензора выстроенности

$$Q_{ij} = \left\langle \frac{1}{2} (\hat{S}_i \hat{S}_j + \hat{S}_j \hat{S}_i) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right\rangle$$

11. Найдите \vec{P} и Q_{ij} для спина I , находящегося в состоянии

$$\chi = \sum_{m=-1, 0, +1} a_m \chi_m.$$

Каким условиям будут удовлетворять параметры P_i и Q_{ij} в произвольном чистом состоянии?

12. При каких условиях на параметры в приведенных ниже матрицах плотности двух различных частиц со спином $I/2$ спины в системе не коррелированы?

$$а) \hat{\rho} = \frac{1}{4} (\hat{I} + \vec{P}_1 \cdot \vec{\sigma}^{(1)} + \vec{P}_2 \cdot \vec{\sigma}^{(2)}),$$

$$б) \hat{\rho} = \frac{1}{4} (\hat{I} + \vec{P}_1 \cdot \vec{\sigma}^{(1)} + \vec{P}_2 \cdot \vec{\sigma}^{(2)} + \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(2)}).$$

13. Покажите что выражение (18) для матрицы плотности спина $I/2$ сохраняет вид при поворотах системы координат.

14. Найдите унитарное преобразование, диагонализующее матрицу плотности спина $I/2$.

15. Можно ли во всех случаях поворотами системы координат диагонализировать матрицу плотности спина S ?

- ✓ 16. Известна матрица плотности спина $1/2$. По отношению к каким чистым состояниям данное состояние является статистической смесью? С каким весом представлены эти чистые состояния?

$$a) \rho = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \delta) \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \epsilon) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$2) \begin{pmatrix} 3/4 & -i \frac{\sqrt{3}}{4} \\ i \frac{\sqrt{3}}{4} & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \theta) \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1+i}{2\sqrt{2}} & 1/2 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 2/3 & \frac{\sqrt{3}-i}{4\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{3}} & 1/3 \end{pmatrix}.$$

- ✓ 17. Атом водорода находится в $1S$ - состоянии. Протон неполяризован, а спин электрона направлен вдоль оси Z . Найдите матрицу плотности системы в представлении полного спина.

18. Матрица плотности спина j в некотором состоянии имеет вид:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2j+1} \left(\hat{I} + \frac{3}{j(j+1)} \langle \vec{j} \rangle \vec{j} \right).$$

Найдите максимальное допустимое значение модуля вектора $\langle \vec{j} \rangle$.

19. Выразить спиновую матрицу плотности трех моментов в представлении их проекций, $\langle j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3 | \rho | j_1 m'_1, j_2 m'_2, j_3 m'_3 \rangle$, через матрицу плотности в представлении $|j_1 j_2 (J_{12}) j_3 : JM\rangle$ или $|j_1 j_2 j_3 (J_{23}) : JM\rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П.А.М.Дирак. Принципы квантовой механики. Физматгиз, М.1960.
2. А.С.Давыдов. Квантовая механика. Физматгиз, М.1963.
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. Физматгиз,
М.1963.
4. Д.И.Блохинцев. Основы квантовой механики. "Высшая школа",
М.1961.
5. А.М.Балдин, В.И.Гольданский, В.М.Максименко, И.Л.Розенталь.
Кинематика ядерных реакций, Атомиздат, М.1968.
6. Л.Гольдфарб. Угловые корреляции и поляризация. В книге
"Ядерные реакции", т.1, под ред.П.М.Энлта и М.Демера
Атомиздат, М.1962.
7. А.Г.Ситенко. Лекции по теории рассеяния. "Вища школа",
Киев, 1971.

ЗАНЯТИЕ 10.

ТЕНЗОРЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ

В этой задаче мы рассмотрим разложение спиновой матрицы плотности на неприводимые тензоры, обсудим их свойства и проведем обобщение результатов на случай нескольких моментов количества движения системы.

§ I. Тензоры поляризации

В предыдущей задаче был найден закон преобразования элементов матрицы плотности момента количества движения при поворотах системы координат:

$$\langle jm | \rho | j'm' \rangle = \sum_{m, m'} \mathcal{D}_{jm}^{j*}(R) \mathcal{D}_{j'm'}^{j'}(R) \langle jm | \rho | j'm' \rangle \quad (I)$$

(здесь значение момента j не фиксировано, а рассматривается как динамическая переменная - это может быть, например, орбитальный момент). Воспользовавшись свойствами \mathcal{D} -функций, соотношение

(I) можно преобразовать к следующему виду:

$$\langle jm | \rho | j'm' \rangle = \sum_{k, \lambda} (-1)^{j'-m'} \langle jm j'-m' | k \lambda \rangle \times \sum_{q} \mathcal{D}_{\lambda q}^{k*}(R) \sum_{m, m'} (-1)^{j'-m'} \langle jm j'-m' | k q \rangle \langle jm | \rho | j'm' \rangle. \quad (2)$$

Из этого соотношения ясно, что величины

$$\rho_{kq}(j, j') = \sum_{m, m'} (-1)^{j'-m'} \langle jm j'-m' | k q \rangle \langle jm | \rho | j'm' \rangle \quad (3)$$

преобразуются при поворотах системы координат по неприводимому представлению \mathcal{D}^{k*} :

$$\rho_{k\lambda}(j, j') = \sum_{q} \mathcal{D}_{\lambda q}^{k*}(R) \rho_{kq}(j, j') \quad (4)$$

и являются, следовательно, неприводимыми тензорами ранга k .

Определенные соотношением (3) величины назовем тензорами

поляризации^{*}). Полное число компонент всех тензоров поляризации для фиксированного j , очевидно, равно $\sum_{k=0}^{2j} (2k+1) = (2j+1)^2$ и совпадает с числом элементов спиновой матрицы плотности. В силу определения (3) совокупность элементов спиновой матрицы плотности однозначно определяет тензоры поляризации. Обратное соотношение

$$\langle j^m | \rho | j'^{m'} \rangle = \sum_{k,q} (-1)^{j'-m'} \langle j^m j'^{-m'} | kq \rangle \rho_{kq}(j, j') \quad (5)$$

позволяет по тензорам поляризации определить спиновую матрицу плотности. Отметим, что из эрмитовости матрицы плотности следует полезное соотношение для тензоров поляризации:

$$\rho_{kq}^*(j, j') = (-1)^{j'-j+q} \rho_{k, -q}(j', j). \quad (6)$$

Разложение (5) означает, что матрицу плотности в операторном виде можно разложить по некоторым неприводимым операторам, действующим в пространстве спиновых переменных,

$$\hat{\rho} = \sum_{k,q} \hat{g}_{kq} \rho_{kq}. \quad (7)$$

Назовем их спин-тензорными операторами, или просто спин-тензорами. Сравнение формул (7) и (5) приводит к соотношению

$$\langle j^m | g_{kq} | j'^{m'} \rangle = (-1)^{j'-m'} \langle j^m j'^{-m'} | kq \rangle, \quad (8)$$

которое мы примем за определение операторов \hat{g}_{kq} . Из него, в частности, следует выражение для приведенного матричного элемента

^{*}) В литературе встречаются и другие названия этих величин: поляризационные моменты, статистические тензоры и др. Следует помнить, что в разных источниках они могут отличаться не только названиями, но также нормировкой и фазовыми множителями. Для вектора поляризации общепринятым является определение $\vec{P} = \langle \vec{J} \rangle / J$. Циклические компоненты этого вектора отличаются от ρ_{1q} постоянным множителем и комплексным сопряжением (см. упражнение 2). В случае спина $1/2$ величину $|\vec{P}|$ часто называют степенью поляризации.

$$(j \| g_k \| j) = \sqrt{2k+1} \quad , \quad (9)$$

а также закон преобразования операторов \hat{g}_{kq} при поворотах системы координат:

$$\hat{g}'_{kq} = \sum_q D_{kq}^k(R) \hat{g}_{kq} \quad . \quad (10)$$

Используя (4) и (10), легко убедиться, что вид матрицы плотности (7) сохраняется при поворотах. Для системы с фиксированным спином (моментом) спин-тензорные операторы уже обсуждались при изучении темы 2 (занятие 6), где, в частности, был найден их явный вид.

Используя разложение (5) и определение (8), нетрудно убедиться, что

$$\langle \hat{g}_{kq} \rangle \equiv \text{Sp} \text{tr} (\hat{g}_{kq} \hat{\rho}) = \rho_{kq}^* \quad , \quad (11)$$

так что матрицу плотности можно представить в виде

$$\hat{\rho} = \sum_{k,q} \langle \hat{g}_{kq} \rangle^* \hat{g}_{kq} \quad . \quad (12)$$

Формулы (7) и (12) дают удобную параметризацию матрицы плотности через тензоры поляризации ρ_{kq} или средние значения спин-тензоров $\langle \hat{g}_{kq} \rangle$.

Как мы видели на предыдущем занятии, число независимых вещественных параметров матрицы плотности спина j должно быть равно $4j(j+1)$. Проверим это, используя представление (7). Из соотношения (6) следует, что нулевые компоненты тензоров поляризации вещественны, $\rho_{k0}^*(j,j) = \rho_{k0}(j,j)$, а компоненты с положительными и отрицательными проекциями взаимосвязаны, $\rho_{kq}^*(j,j) = (-1)^q \rho_{k,-q}(j,j)$. Таким образом, число вещественных параметров всех тензоров поляризации равно числу их компонент. Учитывая, что нулевой тензор поляризации определен условием нормировки, $\rho_{00} = 1/\sqrt{2j+1}$, получим полное число всех независимых вещественных параметров

матрицы плотности в общем случае:

$$(2j+1)^2 - 1 = 4j(j+1).$$

Представление (7) удобно и при определении фактического числа независимых параметров матрицы плотности, если известно, как образовалась частица. Рассмотрим, например, матрицу плотности частицы со спином j , образовавшейся при распаде неполяризованного ядра. Единственной заданной "извне" величиной векторного или тензорного характера является вектор \vec{n} - направление вылета частицы. С помощью этого вектора можно построить функции $Y_{kq}(\vec{n})$, обладающие теми же трансформационными свойствами, что и тензоры поляризации R_{kq} . Поэтому можно записать в этом случае

$$R_{kq}(j,j) = Y_{kq}^*(\vec{n}) c_k. \quad (13)$$

Вещественные коэффициенты c_k зависят как от спинов всех частиц, участвующих в процессе, так и от матричных элементов перехода (см. след. занятие). Считая, что коэффициент c_0 определяется нормировкой, получим, что число независимых параметров матрицы плотности в этом случае равно $2j$ (вместо $4j(j+1)$ в общем случае). Отметим, что учет свойств амплитуды распада может дать дополнительное уменьшение числа независимых параметров. (Так, если при распаде неполяризованной системы сохраняется четность, все тензоры поляризации нечетного ранга обращаются в нуль - см. след. занятие).

§ 2. Двойные тензоры поляризации

Обратимся теперь к случаю, когда в системе имеются два момента количества движения, j_1 и j_2 . Тогда, как мы уже видели в задаче 9, связь элементов матрицы плотности в разных представлениях записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \langle j_1 j_2 JM | \rho | j'_1 j'_2 J' M' \rangle = \\ & = \sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m'_1 m'_2}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle \langle j'_1 m'_1 j'_2 m'_2 | J' M' \rangle \times \\ & \quad \times \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \rho | j'_1 m'_1 j'_2 m'_2 \rangle. \end{aligned} \quad (I4)$$

В представлении полного момента, как и раньше, можно ввести тензоры поляризации:

$$\rho_{kq}(j_1 j_2 J; j'_1 j'_2 J') = \sum_{M, M'} (-1)^{J-M'} \langle JM J'-M' | kq \rangle \langle j_1 j_2 JM | \rho | j'_1 j'_2 J' M' \rangle. \quad (I5)$$

Но в представлении проекций спинов приходится в общем случае вводить "двойные" тензоры поляризации:

$$\begin{aligned} & \rho_{k_1 q_1, k_2 q_2}(j_1 j_2; j'_1 j'_2) = \\ & = \sum_{\substack{m_1 m'_1 \\ m_2 m'_2}} (-1)^{j'_1 - m'_1} \langle j_1 m_1 j'_1 - m'_1 | k_1 q_1 \rangle (-1)^{j'_2 - m'_2} \langle j_2 m_2 j'_2 - m'_2 | k_2 q_2 \rangle \times \\ & \quad \times \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \rho | j'_1 m'_1 j'_2 m'_2 \rangle. \end{aligned} \quad (I6)$$

Соотношение между этими двумя видами тензоров оказывается весьма простым — оно соответствует переходу от схемы связи моментов:

$$\vec{k} = \vec{J} + \vec{J}', \quad \vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2, \quad \vec{J}' = \vec{j}'_1 + \vec{j}'_2 \quad \text{к схеме } \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \quad \vec{k}_1 = \vec{j}_1 + \vec{j}'_1, \quad \vec{k}_2 = \vec{j}_2 + \vec{j}'_2$$

и имеет вид:

$$\begin{aligned} & \rho_{kq}(j_1 j_2 J; j'_1 j'_2 J') = \\ & = \sum_{k_1 k_2} \langle j_1 j'_1(k_1) j_2 j'_2(k_2): k | j_1 j_2(J) j'_1 j'_2(J'): k \rangle \times \\ & \quad \times \sum_{q_1 q_2} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | kq \rangle \rho_{k_1 q_1, k_2 q_2}(j_1 j_2; j'_1 j'_2), \end{aligned} \quad (I7)$$

$$\begin{aligned} & \text{и} \quad \rho_{k_1 q_1, k_2 q_2}(j_1 j_2; j'_1 j'_2) = \sum_{kq} \langle k_1 q_1, k_2 q_2 | kq \rangle \times \\ & \quad \times \sum_{J, J'} \langle j_1 j_2(J) j'_1 j'_2(J'): k | j_1 j'_1(k_1) j_2 j'_2(k_2): k \rangle \rho_{kq}(j_1 j_2 J; j'_1 j'_2 J'). \end{aligned}$$

Если корреляция между проекциями моментов j_1 и j_2 отсутствует, то матрица плотности факторизуется

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \rho | j_1' m_1' j_2' m_2' \rangle = \langle j_1 m_1 | \rho^{(1)} | j_1' m_1' \rangle \langle j_2 m_2 | \rho^{(2)} | j_2' m_2' \rangle,$$

так что

$$\rho_{k_1 q_1 k_2 q_2}^{(j_1 j_2; j_1' j_2')} = \rho_{k_1 q_1}^{(1)}(j_1; j_1') \rho_{k_2 q_2}^{(2)}(j_2; j_2') \quad (18)$$

и

$$\begin{aligned} & \rho_{k_i q_i}^{(i)}(j_i; j_i') = \\ & = \sum_{m_i, m_i'} (-1)^{j_i' - m_i'} \langle j_i m_i j_i' - m_i' | k_i q_i \rangle \langle j_i m_i | \rho^{(i)} | j_i' m_i' \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

($i = 1, 2$)

У п р а ж н е н и я

1. Для спина $1/2$ а) найдите ρ_{00} ; б) выразите ρ_{12} через вектор поляризации; в) найдите явный вид спин-тензоров \hat{g}_{00} и \hat{g}_{12} выразив их через матрицы Паули и единичную матрицу. Почему здесь не существует спин-тензоров более высокого ранга?

2. Для произвольного спина j а) найдите ρ_{00} ; б) выразите ρ_{12} через вектор поляризации; в) выразите спин-тензоры \hat{g}_{00} , \hat{g}_{12} и \hat{g}_{22} через компоненты оператора спина.

3. Каков максимальный ранг тензоров поляризации для спина j ?

4. Найдите связь между средними значениями спин-тензоров $\langle g_{kq} \rangle$ и тензорами поляризации ρ_{kq} .

5. Найдите тензоры поляризации спина j в состоянии

$$\chi = \sum_{m=-j}^{+j} a_m \chi_m.$$

6. Определите число вещественных независимых параметров матрицы плотности частицы со спином j , образовавшейся в результате бинарной реакции между двумя неполяризованными частицами.

7. Получите выражение для статистических тензоров поляризации системы двух моментов $\rho_{k_2}(j_1 j_2 J j_1 j_2 J')$, если известны тензоры поляризации I-й подсистемы $\rho_{k_1, 2_1}(j_1 j_2)$, а во второй подсистеме какая-либо поляризация отсутствует.

8. Выразите тензоры поляризации системы трех моментов через тензоры поляризации каждого индивидуального момента в отсутствие между ними корреляции поляризаций.

Л и т е р а т у р а.

1. А.М.Балдин, В.И.Гольданский, В.М.Максименко, И.Л.Розенталь
Кинематика ядерных реакций, Атомиздат, М., 1968.
2. Л.Гольдфарб. Угловые корреляции и поляризация.
В книге "Ядерные реакции" т. I, под. ред. П.М.Эндта и М.Демера.
Атомиздат, М., 1962.
3. А.С.Давидов. Теория атомного ядра. Физматгиз, М., 1958.

ЗАНЯТИЕ II

РАСПАД ПОЛЯРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотренный на предыдущих занятиях аппарат спиновой матрицы плотности находит широкое применение в разнообразных задачах, связанных с угловыми распределениями, поляризациями, угловыми корреляциями продуктов ядерных реакций и радиоактивного распада. Настоящее занятие посвящено рассмотрению одной из наиболее простых задач такого рода.

Пусть некоторая система с известным полным моментом количества движения и заданной матрицей плотности распадается на две подсистемы. Задача состоит в вычислении углового распределения продуктов распада. Рассмотрению этого вопроса и посвящено настоящее занятие.

I. Развитие матрицы плотности во времени

Как известно из квантовой механики, изменение волновой функции системы со временем можно описать унитарным оператором $\hat{U}(t, t_0)$, таким, что

$$\Psi(t) = \hat{U}(t, t_0) \Psi(t_0). \quad (1)$$

Оператор унитарного преобразования во времени $\hat{U}(t, t_0)$ определяется гамильтонианом системы и удовлетворяет операторному уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H} \hat{U}(t, t_0) \quad (2)$$

(см. например, книгу /1/).

Для наших целей требуется лишь одно достаточно очевидное свойство этого оператора:

матричные элементы оператора $\hat{U}(t, t_0)$ диагональны по сохраняющимся квантовым числам (энергия, полный момент системы и т.п.) и не зависят от тех из них, которые изменяются при преобразованиях, оставляющих неизменным гамильтониан системы (проекции полного момента и полного изоспина и т.п.).

Для описания распада квазистационарных состояний системы обычно вводят оператор $\hat{\Theta}$, который можно получить из $\hat{U}(t, t_0)$ предельным переходом:

$$\hat{\Theta} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{U}(t, t_0 = 0). \quad (3)$$

Оператор распада также обладает отмеченным выше свойством по отношению к сохраняющимся квантовым числам.

Чтобы получить закон преобразования матрицы плотности во времени, воспользуемся для нее общим правилом унитарного преобразования (см. п.4 предыдущего занятия). Тогда, если система находилась в начальный момент времени t_0 в состоянии с матрицей плотности $\hat{\rho}(t_0)$, ее матрица плотности в произвольный момент времени будет определяться соотношением

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^+(t, t_0). \quad (4)$$

Соответственно, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ система находилась в квазистационарном состоянии $\hat{\rho}_i$, то после распада ее матрица плотности

$$\hat{\rho}_f = \hat{\Theta} \hat{\rho}_i \hat{\Theta}^+. \quad (5)$$

2. Спиновая матрица плотности при распаде

Пусть начальная система A со спином a при распаде испускает частицу со спином j , которую мы будем называть радиацией, и остается система B со спином b . (При рассмотрении в системе центра инерции безразлично, какой из двух продуктов распада считать радиацией, а какой - остаточной системой. Здесь эта терминология используется лишь для определенности). Конечную матрицу плотности можно рассматривать в разных представлениях. При обсуждении эксперимента, разумеется, нужно использовать представление $|\vec{k}, j^m, v^{\beta}\rangle$, где \vec{k} - импульс относительного движения продуктов распада, m и β - проекции спинов j и b . Удобнее, однако, сначала записать конечную матрицу плотности в представлении полного момента системы J и орбитального момента относительного движения l . При этом в качестве дополнительного квантового числа можно выбрать либо спин канала S , $\vec{S} = \vec{j} + \vec{v}$ (представление спина канала), либо полный момент радиации L , $\vec{L} = \vec{l} + \vec{j}$ (L - представление). Рассмотрим сначала первый случай.

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \quad & \langle l, j^v(S): JM | \hat{\rho}_f | l', j^{v'}(S'): J'M' \rangle = \\ & = N(E) \sum_{\alpha, \alpha'} \langle l, j^v(S): JM | \theta | \alpha \alpha \rangle \times \\ & \quad \times \langle \alpha \alpha | \rho_f | \alpha \alpha' \rangle \langle l', j^{v'}(S'): J'M' | \theta | \alpha \alpha' \rangle^* \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь α и α' - проекции спина a . Множитель $N(E)$ - плотность конечных состояний на единичный интервал энергии, так что шпур $\hat{\rho}_f$ по l, S, J, M дает вероятность распада в единицу времени. В записи матричных элементов оператора $\hat{\theta}$ в формуле (6) опущены индексы модуля импульса $|\vec{k}|$ (или энергии), а

также квантовых чисел, связанных с внутренними состояниями частиц.

В силу отмеченного выше свойства матричных элементов оператора распада можно записать

$$\langle l, j\beta(S): JM | \theta | a \rangle = \delta_{Ja} \delta_{M\alpha} \langle l, j\beta(S): a | \theta | a \rangle, \quad (7)$$

так что в представлении полного момента конечная матрица плотности записывается очень просто:

$$\begin{aligned} & \langle l, j\beta(S): JM | \rho_J | l', j\beta(S'): J'M' \rangle = \\ & = \delta_{Ja} \delta_{J'a} \langle aM | \rho_i | aM' \rangle N(E) \times \\ & \times \langle l, j\beta(S): a | \theta | a \rangle \langle l', j\beta(S'): a | \theta | a \rangle^*. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда тензоры поляризации всей системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \rho_{K\lambda} (l, j\beta(S): a; l', j\beta(S'): a) = \\ & = \rho_{K\lambda}^{(i)}(a, a) N(E) \langle l, j\beta(S): a | \theta | a \rangle \langle l', j\beta(S'): a | \theta | a \rangle^*. \end{aligned} \quad (9)$$

Чтобы получить теперь матрицу плотности в представлении с заданным направлением \vec{n} импульса относительного движения и проекциями M и β спинов продуктов распада, достаточно воспользоваться функциями преобразования

$$\begin{aligned} & \langle \vec{n}, jM, \beta | l, j\beta(S): JM \rangle = \\ & = \sum_{m, M_s} Y_{lm}(\vec{n}) \langle em SM_s | JM \rangle \langle jM \beta | SM_s \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \langle \vec{n}, j_M, \epsilon_\beta | \rho_f | \vec{n}, j_{M'}, \epsilon_{\beta'} \rangle = \\
 & = N(\epsilon) \sum_{e, e', s, s'} \langle e, j_e(s): a | 0 | a \rangle \langle e', j_{e'}(s'): a | 0 | a \rangle^* \\
 & \times \sum_{d, d'} \langle \vec{n}, j_M, \epsilon_\beta | e, j_e(s): a_d \rangle \langle \vec{n}, j_{M'}, \epsilon_{\beta'} | e', j_{e'}(s'): a_{d'} \rangle^* \\
 & \times \langle a_d | \rho^{(f)} | a_{d'} \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{II}$$

Выражение (II) дает матрицу плотности системы после распада и поэтому позволяет вычислить угловое распределение и поляризационные характеристики (тензоры поляризации) продуктов распада. Однако, для вычисления этих характеристик часто бывает удобнее использовать не саму матрицу плотности, а тензоры поляризации по всем трем моментам конечного состояния e, j, ϵ .

Такие тройные тензоры поляризации можно получить из тензоров поляризации в представлении полного момента (формула 9). Применяя дважды соотношение типа (10.16), найдем

$$\begin{aligned}
 & \rho_{\kappa_e \chi_e, \kappa_j \chi_j, \kappa_e \chi_e} (e j \epsilon; e' j \epsilon) = \\
 & = \sum_{\kappa_s \chi_s, s, s'} \langle \kappa_j \chi_j, \kappa_e \chi_e | \kappa_s \chi_s \rangle \langle j_e(s) j_{e'}(s'): \kappa_s | j j(\kappa_j) e e(\kappa_e) | \kappa_s \rangle \\
 & \times \sum_{\kappa_a \chi_a} \langle \kappa_e \chi_e \kappa_s \chi_s | \kappa_a \chi_a \rangle \langle e s(a) e' s'(a): \kappa_a | e e'(\kappa_e) s s'(\kappa_s): \kappa_a \rangle \\
 & \times \rho_{\kappa_a \chi_a} (e, j_e(s): a; e', j_{e'}(s'): a).
 \end{aligned}
 \tag{I2}$$

Введенное здесь суммирование по s и s' учитывает все возможные спины канала.

3. Угловое распределение продуктов распада

Рассмотрим угловое распределение продуктов распада

$$W(\vec{n}) = \sum_{M, M', \beta, \beta'} \langle \vec{n}, jM, \beta | \rho_{\beta} | \vec{n}, jM', \beta' \rangle \delta_{MM'} \delta_{\beta\beta'} \quad (I3)$$

Используя разложение

$$|\vec{n}\rangle = \sum_{e, m} |em\rangle \langle em | \vec{n} \rangle = \sum_{e, m} |em\rangle Y_{em}^*(\vec{n}) \quad (I4)$$

и соотношение

$$\begin{aligned} &\langle em, jM, \beta | \rho_{\beta} | e'm', jM', \beta' \rangle = \\ &= \sum_{\kappa_e \lambda_e} (-1)^{e'-m'} \langle em e'-m' | \kappa_e \lambda_e \rangle \sum_{\kappa_j \lambda_j} (-1)^{j-M'} \langle jM j-M' | \kappa_j \lambda_j \rangle \quad (I5) \\ &\times \sum_{\kappa_e \lambda_e} (-1)^{e-\beta'} \langle \beta \beta - \beta' | \kappa_e \lambda_e \rangle \rho_{\kappa_e \lambda_e, \kappa_j \lambda_j, \kappa_e \lambda_e} (e, j, \beta, e', j, \beta'), \end{aligned}$$

получим

$$W(\vec{n}) = \sum_{e, e'} \frac{j \beta \hat{e} \hat{e}'}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\kappa \lambda} (-1)^{e'} \langle e \beta e' 0 | \kappa 0 \rangle \frac{1}{\hat{\kappa}} Y_{\kappa \lambda}(\vec{n}) \rho_{\kappa \lambda, 00, 00} (e, j, \beta; e', j, \beta) \quad (I6)$$

Упрощая формулу (I2) при $\kappa_j = \lambda_j = \kappa_e = \lambda_e = 0$, получим

$$\rho_{\kappa \lambda, 00, 00} (e, j, \beta; e', j, \beta) = \sum_S \frac{\hat{a}^2}{j \hat{\beta}} (-1)^{a+S+e+\kappa} \begin{Bmatrix} a & a & \kappa \\ e & e' & S \end{Bmatrix} \rho_{\kappa \lambda} (e(S); e'(S)) \quad (I7)$$

Используя теперь в качестве $\rho_{\kappa \lambda} (e, j, \beta(S)a; e', j, \beta(S)a)$ выражение (9), найдем

$$W(\vec{n}) = N(\epsilon) \sum_{\kappa=0}^{\kappa_{\max}} a_{\kappa} \sum_{\lambda} Y_{\kappa \lambda}(\vec{n}) \rho_{\kappa \lambda}^{(i)}(a, a), \quad (I8)$$

где

$$a_k = \sum_{e e' S} \langle e j v(S): a | 0 | a \rangle \langle e' j v(S): a | 0 | a \rangle^* \times$$

$$\times (-1)^{S+a} \frac{\hat{a}^2 \hat{e} \hat{e}'}{\hat{k} \sqrt{4\pi}} \langle e 0 e' 0 | k 0 \rangle \left\{ \begin{matrix} e & e' & k \\ a & a & S \end{matrix} \right\}. \quad (19)$$

Аналогично, в L - представлении можно получить формулу (18) с коэффициентами

$$a_k = \sum_{e e' L L'} \langle e j(L) v: a | 0 | a \rangle \langle e' j(L') v: a | 0 | a \rangle^* \times$$

$$(-1)^{a+v+j+L+L'+k} \langle e 0 e' 0 | k 0 \rangle \frac{\hat{a}^2 \hat{e} \hat{e}' \hat{L} \hat{L}'}{\hat{k} \sqrt{4\pi}} \left\{ \begin{matrix} a & a & k \\ L & L' & v \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L & L' & k \\ e & e' & j \end{matrix} \right\}. \quad (20)$$

Полученные формулы определяют в виде разложения по $Y_{k\lambda}(\vec{n})$ угловое распределение продуктов распада $a \rightarrow v + j$ в той же системе координат, в которой задана начальная матрица плотности или ее тензоры поляризации. Рассмотрим основные свойства угловых распределений, следующие из формул (18 - 20).

Прежде всего, из правил сложения моментов, содержащихся в $6j$ - символах, следует, что максимальное значение k , представленное в разложении (18), есть

$$k_{\max} = \min \{ k_{\max}^i, 2l_{\max}, 2L_{\max} \}.$$

Здесь k_{\max}^i - максимальный ранг отличного от нуля тензора поляризации начального ядра ($k_{\max}^i \leq 2a$), l_{\max} - максимальный орбитальный момент испущенной частицы, L_{\max} - ее максимальный полный момент, причем $l_{\max} \leq a + j + v$, $L_{\max} \leq a + v$.

Правые части этих неравенств отвечают допустимым правилами сложения моментов значениям l_{max} и L_{max} . Неравенства могут реализоваться при обращении в нуль каких-либо матричных элементов оператора из-за специфических свойств взаимодействия, т.е. из-за динамики процесса.

Если начальное ядро a и продукты распада b и j обладают определенными внутренними четностями π_a , π_b и π_j , а полная четность системы при распаде сохраняется (что справедливо, если в процессе не участвует слабое взаимодействие), то $\pi_a = \pi_b \pi_j (-1)^l$, так что все l либо четные (0, 2, 4, ...), либо нечетные (1, 3, 5, ...). Поскольку коэффициент Клебша-Гордана $\langle l_0 l_0' 0 | k_0 \rangle$ в a_k отличен от нуля лишь при условии $l + l' + k = \text{четное}$, сумма (18) содержит лишь слагаемые с четными k . Это означает, что при сохранении четности нечетные тензоры поляризации начального ядра не влияют на угловое распределение продуктов распада. Отсюда также следует, что угловое распределение симметрично относительно замены $\vec{n} \rightarrow -\vec{n}$ (или $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$), так что

$$W(-\vec{n}) = W(\vec{n}). \quad (21)$$

Если в конечном состоянии орбитальный момент l и спин канала S имеют фиксированные значения, то угловое распределение не зависит от матричного элемента перехода, так что нормированная функция углового распределения имеет вид

$$W(\vec{n}) = \frac{(-1)^{a+S}}{\sqrt{4\pi}} (\hat{a} \hat{e})^2 \sum_{k=0}^{k_{max}} \frac{1}{k} \langle l_0 l_0' 0 | k_0 \rangle \begin{Bmatrix} l & l & k \\ a & a & S \end{Bmatrix} \times \sum_{\mathcal{L}} Y_{k\mathcal{L}}(\vec{n}) \rho_{k\mathcal{L}}^{(i)}(a, a). \quad (22)$$

Заметим, что угловое распределение при этом не зависит от спина конечного ядра ν .

В случае фиксированных ℓ и L имеем

$$W(\vec{n}) = (4\pi)^{-1/2} (-1)^{\ell + \ell - j} (\hat{a} \hat{e} \hat{L})^2 \sum_k \hat{k}^{-1} \langle \ell \ell \ell \ell | k \rangle$$

$$\times \begin{Bmatrix} \ell & \ell & k \\ L & L & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & L & k \\ a & a & \nu \end{Bmatrix} \sum_{\mathcal{K}} Y_{\mathcal{K}\mathcal{K}}(\vec{n}) \rho_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(i)}(a, a). \quad (23)$$

Во многих реальных задачах начальная матрица плотности при надлежащем выборе оси Z оказывается диагональной по проекциям спинов:

$$\langle a \alpha | \rho^{(i)} | a \alpha' \rangle = \delta_{\alpha \alpha'} P(\alpha), \quad (24)$$

так что

$$\rho_{\mathcal{K}\mathcal{K}}^{(i)}(a, a) = \delta_{\mathcal{K}0} \rho_{\mathcal{K}0}^{(i)}. \quad (25)$$

В таких случаях угловое распределение не зависит от азимутального угла φ :

$$W(\theta) = N(E) \sum_k a_k \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} P_k(\cos \theta) \rho_{\mathcal{K}0}^{(i)}. \quad (26)$$

Здесь $P_k(\cos \theta)$ - полиномы Лежандра. При этом вместо (21) получаем

$$W(\pi - \theta) = W(\theta). \quad (27)$$

4. Поляризация продуктов распада

Рассмотрим тензоры поляризации частицы j , движущейся в направлении \vec{n} после распада $a \rightarrow \nu + j$:

$$\rho_{kq}(j, j; \vec{n}) = \sum_{\mu \mu'} (-1)^{j-\mu'} \langle j \mu j - \mu' | k q \rangle \times$$

$$\times \sum_{\beta \beta'} \delta_{\beta \beta'} \langle \vec{n} j \mu \beta | \rho^{(j)} | \vec{n} j \mu' \beta' \rangle. \quad (28)$$

Используя соотношения (I4) и (I5), получим:

$$\rho_{kq}(j, j; \vec{n}) = \sum_{L, e, e'} \hat{e} \hat{e}' \hat{e} \hat{L}^{-1} (4\pi)^{-1/2} (-1)^{e'} \times$$

$$\times \langle e 0 e' 0 | L 0 \rangle \times \sum_M Y_{LM}(\vec{n}) \rho_{LM, kq, 00}(e j \beta, e' j \beta). \quad (29)$$

Входящие сюда тройные тензоры поляризации при $k_z = q_e = 0$ получим из выражения (I2):

$$\rho_{LM, kq, 00}(e j \beta; e' j \beta) = \sum_{S S' k_a q_a} (-1)^{j+\beta+S'-k} \langle LM k q | k_a q_a \rangle \hat{e}^{-1} \hat{a}^2 \hat{S} \hat{S}' \hat{L} \hat{k}$$

$$\times \begin{Bmatrix} e & S & a \\ e' & S' & a \\ L & k & k_a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j & S & \beta \\ S' & j & k \end{Bmatrix} \langle LM k q | k_a q_a \rangle \times$$

$$\times \rho_{k_a q_a}(e j \beta(S): a; e' j \beta(S'): a). \quad (30)$$

Таким образом, используя (29), (30) и (9), можно записать тензоры поляризации частицы j , движущейся в направлении \vec{n} :

$$\rho_{k\mathcal{X}}(j, j; \vec{n}) = \mathcal{N}(\mathcal{E}) \sum_{e, e', L, k_a, S, S'} \hat{a}^2 \hat{e} \hat{e}' \hat{S} \hat{S}' \hat{k}_a (4\pi)^{-1/2} \times$$

$$\times (-1)^{\beta+j+S'+e'-k_a} \langle e 0 e' 0 | L 0 \rangle \langle e j \beta(S): a | 0 | a \rangle \times$$

$$\times \langle e' j \beta(S'): a | 0 | a \rangle^* \begin{Bmatrix} j & j & k \\ S & S' & \beta \end{Bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} e & S & a \\ e' & S' & a \\ L & k & k_a \end{Bmatrix} \sum_{M \mathcal{X}_a} Y_{LM}^*(\vec{n}) \rho_{k_a \mathcal{X}_a}(a, a) \langle LM k_a \mathcal{X}_a | k \mathcal{X} \rangle.$$

Аналогичным образом можно получить формулу для тензоров поляризации частицы в L -представлении:

$$\rho_{kq}(j, j; \vec{n}) = N(E) \sum \langle e' j(L') v: a | \theta | a \rangle \langle e j(L) v: a | \theta | a \rangle^* (4\pi)^{-1/2} \times \\ \times \hat{e} \hat{e}' \hat{L} \hat{L}' \hat{k}_a \hat{a}^2 (-1)^{a+v+L+k_a+v} \langle e' 0 e' 0 | k_e 0 \rangle \left\{ \begin{matrix} a & a & k_a \\ L & L' & v \end{matrix} \right\} \times \\ \times \left\{ \begin{matrix} e & e' & k_e \\ j & j & k \\ L & L' & k_a \end{matrix} \right\} \sum_{q_e q_a} \langle k_a q_a k_e q_e | k q \rangle Y_{k_e q_e}^*(\vec{n}) \rho_{k_a q_a}^{(i)}(a, a). \quad (32)$$

Вывод этой формулы предоставляется читателю.

Любая из формул (31) и (32) дает общее описание всех поляризационных свойств продуктов распада.

Рассмотрим более специальные случаи. Прежде всего отметим, что из выражений для $\rho_{kq}(j, j; \vec{n})$ можно получить угловое распределение частиц j , используя соотношение

$$W(\theta) = \text{Sp } \hat{\rho} = \sqrt{2j+1} \rho_{00}(j, j; \vec{n}). \quad (33)$$

Предоставляем читателю возможность убедиться, что таким способом можно получить формулы углового распределения (18)-(20).

Выражение для тензора поляризации существенно упрощается, если начальное (распадающееся) ядро неполяризовано,

$$\rho_{k_a q_a}^{(i)}(a, a) = \frac{1}{\sqrt{2a+1}} \delta_{k_a 0} \delta_{q_a 0}. \quad (34)$$

Тогда в представлении спина канала получим

$$\rho_{kq}(j, j; \vec{n}) = Y_{kq}^*(\vec{n}) N(E) \sum \langle e' j v(S') : a | \theta | a \rangle \langle e j v(S) : a | \theta | a \rangle^* \times \\ \times (-1)^{a+j+v+S+S'+k} \langle e' 0 e' 0 | k 0 \rangle \hat{e} \hat{e}' \hat{S} \hat{S}' \hat{k}^{-1} (4\pi)^{-1/2} \times \quad (35)$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} j & j & k \\ S & S' & v \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & e' & k \\ S' & S & a \end{matrix} \right\}.$$

Соответственно, в L -представлении

$$\rho_{kq}(j, j; \vec{n}) = Y_{kq}(\vec{n}) N(E) \sum \langle e_j(L) v: a | 0 | a \rangle \langle e'_j(L') v: a | 0 | a \rangle^* \\ \times \hat{e} \hat{e}' \hat{k}^{-1} (4\pi)^{-1/2} (-1)^{L+j+e} \langle e 0 e' 0 | k 0 \rangle \left\{ \begin{matrix} e & e' & k \\ j & j & L \end{matrix} \right\}. \quad (36)$$

Отметим основные поляризационные свойства частицы, вылетающей при распаде неполяризованного ядра:

1). Максимальный ранг тензора поляризации частицы со спином j

$$K_{\max} = \min \{ 2j, 2S_{\max}, 2\ell_{\max} \}.$$

Следствие: Если S_{\max} или $\ell_{\max} = 0$, то $\rho_{kq} \sim \delta_{k0} \delta_{q0}$, т.е. поляризация при распаде не возникает.

2). Зависимость тензора поляризации (в фиксированной системе координат) от направления вылета частицы определяется функцией

$$Y_{kq}^*(\vec{n}) : \quad \rho_{kq}(j, j; \vec{n}) \sim Y_{kq}^*(\vec{n}).$$

Следствие: Если ось квантования направить вдоль импульса частицы ($Oz \parallel \vec{n}$), то $\rho_{kq} \sim \delta_{q0}$, так что матрица плотности в такой системе координат диагональна.

3). Если четность при распаде сохраняется и все начальные и конечные частицы (ядра) имеют определенную внутреннюю четность, то $\pi_a = \pi_b \pi_j (-1)^e$, так что $e + e' = \text{четно}$. Тогда отличны от нуля лишь четные тензоры поляризации,

$$K = 2n \quad (n - \text{целое число}).$$

Следствие: Если четность сохраняется и $j \leq 1/2$ или $S \leq 1/2$, то $P_{kq} \sim \delta_{k,0}$ (поляризация при распаде не возникает).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Получите формулу углового распределения (18) в представлении: а) спина канала S ; б) полного момента радиации L .

2. Докажите эквивалентность формул (19) и (20) непосредственным преобразованием матричных элементов оператора \hat{O} от представления $|l, j \in (S) : a\rangle$ к представлению $|l j (L) \in : a\rangle$ (или наоборот).

3. Ядро распадается на две бесспиновые частицы. Считая, что тензоры поляризации начального ядра заданы, найдите формулу углового распределения продуктов распада. Покажите, что общие формулы в представлениях как спина канала, так и полного момента радиации дадут одинаковый результат.

4. Ядро Be^8 в состоянии 2^+ распадается на две α -частицы. Найдите угловое распределение α -частиц относительно оси квантования Oz , если известны величины $P(m_a)$ - вероятности различных значений спина начального ядра:

а) $P(m_a) = 1/5$ $m_a = -2, -1, 0, 1, 2$

б) $P(m_a) = \delta_{m_a, 2}$

в) $P(m_a) = \delta_{m_a, -1}$

г) $P(+2) = P(-2) = P(0) = 1/3$; $P(\pm 1) = 0$

д) $P(+2) = P(+1) = 2/5$; $P(0) = 1/5$; $P(-2) = P(-1) = 0$.

5. Составное ядро $O^{I7ж}$ образовалось в состоянии $3^+/2$, причем его спиновое состояние характеризуется матрицей плотности

$$а) \langle \frac{3}{2} \alpha | \rho | \frac{3}{2} \alpha' \rangle = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\alpha'} (\delta_{\alpha, 1/2} + \delta_{\alpha, -1/2})$$

Рассчитайте угловое распределение нейтронов при распаде составного ядра $O^{I7ж} \rightarrow O^{I6} + n$, если остаточное ядро O^{I6} образуется в состоянии 0^+ , а четность при распаде сохраняется. Проведите аналогичные расчеты также для следующих случаев:

$$б) \langle \frac{3}{2} \alpha | \rho | \frac{3}{2} \alpha' \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\alpha, 1/2};$$

$$в) \langle \frac{3}{2} \alpha | \rho | \frac{3}{2} \alpha' \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\alpha, 3/2}.$$

Сравните и обсудите результаты для этих трех случаев.

6. Получите выражение (30) для тензоров поляризации частицы в представлении полного момента радиации L .

7. Получите выражение для тензоров поляризации ядра отдачи в представлениях спина канала S и полного момента радиации L .

8. Первое возбужденное состояние ядра ${}^6\text{He}(2^+)$ испускает нейтрон и образуется квазистационарное состояние $3/2^-$ ядра ${}^5\text{He}$. Вычислите тензоры поляризации ядра отдачи ${}^5\text{He}$, отнормировав матрицу плотности на единицу. Рассмотрите случаи, когда:

а) нейтрон испускается в состоянии $P\ 3/2$;

б) " " " в состоянии $P\ 1/2$;

в) " " " в P -состоянии, а спин канала равен

нулю;

г) $\ell = 1, S = 1$;

д) происходит смешанный переход, так что в формулу войдет параметр смешивания

$$\delta = \frac{\langle P_{1/2}, \frac{3}{2}^- | 0 | 2^+ \rangle^*}{\langle P_{3/2}, \frac{3}{2}^- | 0 | 2^+ \rangle}$$

или

$$\tilde{\delta} = \frac{\langle \ell=1, S=1 | 0 | 2^+ \rangle^*}{\langle \ell=1, S=0 | 0 | 2^+ \rangle}$$

Начальное ядро неполяризовано.

9. В условиях предыдущей задачи вычислите поляризацию нейтронов, считая, что заданы тензоры поляризации начального ядра:

$$P_{00} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad P_{20} = \frac{1}{5} \delta_{20}, \quad P_{12} = P_{32} = P_{42} = 0.$$

10. Изобара $N^*(1238)$ с квантовыми числами $3^+/2$ распадается на протон и π -мезон. Вычислите угловое распределение и поляризацию ядер отдачи, если матрица плотности изобары задана:

$$а) \langle M | \rho | M' \rangle = \frac{\delta_{MM'}}{2} (\delta_{M, 3/2} + \delta_{M, -3/2})$$

$$б) \langle M | \rho | M' \rangle = \frac{1}{2} \delta_{MM'} (\delta_{M, 1/2} + \delta_{M, -1/2})$$

$$в) \langle M | \rho | M' \rangle = \frac{1}{2} \delta_{MM'} (\delta_{M, 3/2} + \delta_{M, -1/2})$$

Внутренняя четность π -мезона отрицательна.

11. Мезон $A_1 (1^+)$ распадается на ρ -мезон (1^-) и π -мезон (0^-). Вычислите угловое распределение π -мезонов, если матрица плотности A_1 -мезона

$$а) \langle M' | \rho | M \rangle = \frac{1}{2} \delta_{MM'} (\delta_{M, +1} + \delta_{M, -1})$$

$$б) \langle M' | \rho | M \rangle = \delta_{MM'} \left(\frac{1}{6} \delta_{M, +1} + \frac{1}{6} \delta_{M, -1} + \frac{2}{3} \delta_{M, 0} \right)$$

Рассмотрите случаи вылета π -мезона в s - и d -состояниях и общий случай.

12. В условиях предыдущей задачи вычислите поляризацию ρ -мезонов, считая, что A_1 -мезон неполяризован.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С.Давыдов. Квантовая механика.
2. Л.Гольдфарб. Угловые корреляции и поляризация.
В книге "Ядерные реакции", т. I, под ред. П.Эндта и М.Демера.
Атомиздат, М., 1962.

ЗАНЯТИЕ 12

УГЛОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ В КАСКАДНЫХ ПЕРЕХОДАХ

На предыдущем занятии мы видели, что продукты распада оказываются поляризованными. (Заметим, что слова "частица поляризована" здесь означают, что имеются какие-либо отличные от нуля тензоры поляризации. При этом вектор поляризации может быть равен нулю). Поэтому ясно, что при каскадном распаде

$$\begin{aligned} a &\rightarrow v + j_1 \\ &\quad \searrow \\ &\quad c + j_2 \end{aligned} \quad (I)$$

между двумя вылетающими частицами j_1 и j_2 будет существовать угловая корреляция. Действительно, ядро v может оказаться поляризованным (в широком смысле) относительно оси \vec{n} , характеризующей направление вылета первой частицы, так что угловое распределение частиц j_2 уже не будет изотропно относительно этого направления.

Изучению таких корреляций и посвящено настоящее занятие *).

I. Угловые корреляции двух последовательных излучений при распаде неполяризованного ядра

Рассмотрим сначала сравнительно простой случай процесса (I), когда начальное ядро a неполяризовано. Запишем тензоры поляризации ядра v . Очевидно, их можно получить из формулы (II.35) заменой $j \rightarrow v$, $v \rightarrow j_2$, $l \rightarrow l_1$, $s \rightarrow s_1$, $\vec{n} \rightarrow -\vec{n}_1$. В результате получаем

$$\rho_{kq}(v, v) = Y_{kq}^*(\vec{n}_1) N_1(\epsilon) \sum_{e_1, e_1', s_1, s_1'} \hat{e}_1 \hat{e}_1' \hat{s}_1 \hat{s}_1' \hat{k}^{-1} (4\pi)^{-1/2} \langle e_1 0 e_1' 0 | k 0 \rangle \quad (2)$$

$$\times \begin{Bmatrix} v & v & k \\ s_1 & s_1' & j_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 & e_1' & k \\ s_1' & s_1 & a \end{Bmatrix} (-1)^{a+e_1+j_1+s_1+s_1'} \langle e_1' v j_1(s_1) : a | \varphi_1 | a \rangle \langle e_1 v j_1(s_1') : a | \varphi_1 | a \rangle^*$$

*) Важный для практики случай корреляций с участием γ -квантов разбирается в следующей теме, специально посвященной γ -переходам.

Будем считать, что ядро ν достаточно тяжелое, так что его отдачей можно пренебречь и не переходить в движущуюся систему координат.

Запишем теперь угловое распределение частиц j_2 . Для этого в формулах (II.18) - (II.19) предыдущего занятия произведем следующие замены: $N(E) \rightarrow N_2(E)$, $\vec{n} \rightarrow \vec{n}_2$, $\rho_{kq}^{(1)} \rightarrow \rho_{kq}(\nu, \nu)$, $e \rightarrow e_2$, $j \rightarrow j_2$, $\nu \rightarrow \nu$, $S \rightarrow S_2$, $a \rightarrow \nu$, так что

$$W(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \text{const} \sum \langle e_1 \nu_{j_1}(S_1): a | \psi_1 | a \rangle \langle e'_1 \nu_{j_1}(S'_1): a | \psi_1 | a \rangle^* \times \\ \times \langle e_2 j_2 \nu(S_2): \nu | \psi_2 | \nu \rangle \langle e'_2 j_2 \nu(S'_2): \nu | \psi_2 | \nu \rangle^* \hat{\nu}^2 \hat{e}_1 \hat{e}'_1 \hat{S}_1 \hat{S}'_1 \hat{e}_2 \hat{e}'_2 \times \\ \times (-1)^{\alpha + 2\nu + j_1 + S_1 + S'_1 + S_2} \langle e_1 0 e'_1 0 | k 0 \rangle \langle e_2 0 e'_2 0 | k 0 \rangle \quad (3)$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} \nu & \nu & k \\ S_1 & S'_1 & j_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} e_1 & e'_1 & k \\ S_1 & S'_1 & a \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} e_2 & e'_2 & k \\ \nu & \nu & S_2 \end{matrix} \right\} P_k(\cos \theta_{12}),$$

где $\cos \theta_{12} = (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)$.

Очевидно, можно вместо представления спина канала использовать L - представление или смешанное представление (одна стадия распада описывается в S , а другая - в L -представлении, или наоборот).

При выводе соответствующих формул используется выражение для тензоров поляризации ядра отдачи в L -представлении (см. упр. 7 предыдущего занятия):

$$\rho_{kq}(\nu, \nu) = \\ = Y_{kq}^*(\vec{n}) N(E) \sum \langle e_j(L) \nu: a | \psi | a \rangle \langle e'_j(L') \nu: a | \psi | a \rangle^* \\ \times (-1)^{\alpha + \nu - j} \hat{e} \hat{e}' \hat{L} \hat{L}' \hat{k}^{-1} \langle e 0 e' 0 | k 0 \rangle \left\{ \begin{matrix} L & L' & k \\ e' & e & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu & \nu & k \\ L & L' & a \end{matrix} \right\}. \quad (4)$$

Дальнейший вывод функции угловой корреляции очевиден. Приведем результаты:

В L -представлении

$$\begin{aligned}
 W(\vec{n}_1, \vec{n}_2) &= \text{const} \sum \langle l_1 j_1(L_1) v: a | \vartheta_1 | a \rangle \langle l'_1 j_1(L'_1) v: a | \vartheta_1 | a \rangle^* \\
 &\times (-1)^{a+2v-j_1+c+j_2+L_2+L'_2+k} \hat{v}^2 \hat{e}_1 \hat{e}'_1 \hat{L}_1 \hat{L}'_1 \hat{e}_2 \hat{e}'_2 \hat{L}_2 \hat{L}'_2 \times \\
 &\times \langle l_1 0 e'_1 | k_0 \rangle \langle l_2 0 e'_2 | k_0 \rangle \left\{ \begin{matrix} l_1 & e'_1 & k \\ L'_1 & L_1 & j_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} v & v & k \\ L_1 & L'_1 & a \end{matrix} \right\} \times \\
 &\times \left\{ \begin{matrix} e & v & k \\ L_2 & L'_2 & c \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} e_2 & e'_2 & k \\ L'_2 & L_2 & j_2 \end{matrix} \right\} P_k(\cos \theta_{12}) . \\
 &\times \langle l_2 j_2(L_2) c: v | \vartheta_2 | v \rangle \langle l'_2 j_2(L'_2) c: v | \vartheta_2 | v \rangle^* .
 \end{aligned} \tag{5}$$

В смешанном представлении

$$\begin{aligned}
 W(\vec{n}_1, \vec{n}_2) &= \text{const} \sum \langle l_1 j_1(L_1) v: a | \vartheta_1 | a \rangle \langle l'_1 j_1(L'_1) v: a | \vartheta_1 | a \rangle^* \\
 &\times \langle l_2 j_2 c(S_2): v | \vartheta_2 | v \rangle \langle l'_2 j_2 c(S_2): v | \vartheta_2 | v \rangle^* (-1)^{S_2+j_2-c} \\
 &\times \hat{v}^2 \hat{e}_1 \hat{e}'_1 \hat{L}_1 \hat{L}'_1 \hat{e}_2 \hat{e}'_2 \langle l_1 0 e'_1 | k_0 \rangle \langle l_2 0 e'_2 | k_0 \rangle \tag{6} \\
 &\times \left\{ \begin{matrix} L_1 & L'_1 & k \\ e'_1 & e_1 & j_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} v & v & k \\ L_1 & L'_1 & a \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} e_2 & e'_2 & k \\ v & v & S_2 \end{matrix} \right\} P_k(\cos \theta_{12}) .
 \end{aligned}$$

Отметим основные свойства функций угловой корреляции, следующие из формул (4) + (6). Максимальный индекс полиномов Лежандра

$$k_{\max} = \min \{ 2v, 2l_{1\max}, 2l_{2\max}, 2L_{1\max}, 2L_{2\max} \} .$$

Если хотя бы одна из величин в фигурных скобках равна нулю, то

$$W(\theta) = \text{const} .$$

Если четность в процессе испускания хотя бы одной из частиц сохраняется, то в сумме по k содержатся лишь четные k , так что в силу свойства полиномов Лежандра

$$P_k(\cos(\pi - \theta)) = (-1)^k P_k(\cos \theta)$$

функция угловой корреляции симметрична относительно $\pi/2$. Кроме того, если хотя бы одна из величин, определяющих k_{\max} (см. выше), не превышает $1/2$, то $W(\theta) = \text{const}$.

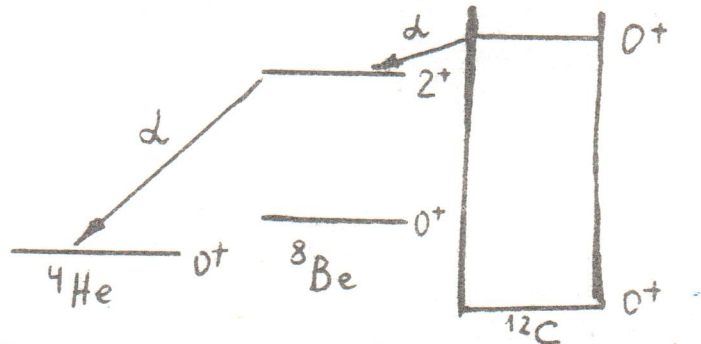
Отметим также, что если все величины ν, ν_1, ν_2 и S_1, S_2 (или L_1, L_2 , или L_1, S_2 , или S_1, L_2) фиксированы, то корреляционная функция не зависит от матричных элементов оператора \hat{O} , т.е. от динамики процесса.

Корреляционная функция обычно нормируется таким образом, чтобы множитель при $P_0(\cos\theta)$ был равен 1 (или $1/4\pi$).

У п р а ж н е н и я

1. Получите общий вид функций угловой корреляции в L -представлении и в смешанном представлении.

2. Возбужденное состояние от ядра ^{12}C распадается на 3 d -частицы по схеме:



Найдите функцию угловой корреляции первичной и вторичной d -частиц.

3. Первое возбужденное состояние ядра ^6He (2^+) распадается с испусканием двух нейтронов и d -частицы. Начальное ядро неполяризовано. Предполагая, что распад идет в две стадии, причем ^5He образуется в состоянии $3/2^-$, найдите функцию угловой корреляции между нейтронами. Рассмотрите случаи, когда а) первый нейтрон испускается в состоянии $P_{3/2}$, б) в состоянии $P_{1/2}$, в) происходит смешанный переход.

В последнем случае в конечный результат войдет параметр смешивания

$$\delta = \frac{\langle P_{1/2}, \frac{3}{2}^- | 10 | 2^+ \rangle}{\langle P_{3/2}, \frac{3}{2}^- | 10 | 2^+ \rangle}$$

4. Ядро ${}^7\text{Li}$ в возбужденном состоянии $5/2^-$ распадается на нейтрон и ${}^6\text{Li}$ в состоянии 3^+ , которое в свою очередь распадается на α -частицу и дейтрон в D -состоянии относительного движения. Считая, что нейтрон может вылетать в состояниях $P_{1/2}$ и $P_{3/2}$ и вводя параметр смешивания

$$\delta = \frac{\langle P_{1/2}, 3^+ | 0 | \frac{5}{2}^- \rangle^*}{\langle P_{3/2}, 3^+ | 0 | \frac{5}{2}^- \rangle}$$

найдите нормированную функцию угловой nd -корреляции.

Л и т е р а т у р а.

1. А. Гольдберг. Угловые корреляции и поляризация.
В книге "Ядерные реакции", т. I, под ред. П. М. Эндта и М. Демера.
Атомиздат, М., 1962.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЗАНЯТИЕ 9. СПИНОВАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ

§ 1. Описание квантовой системы матрицей плотности.	1
§ 2. Основные свойства матрицы плотности.	4
§ 3. Спиновая матрица плотности.	7
Упражнения.	10
Литература.	14

ЗАНЯТИЕ 10. ТЕНЗОРЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ

§ 1. Тензоры поляризации.	15
§ 2. Двойные тензоры поляризации.	18
Упражнения.	20
Литература.	21

ЗАНЯТИЕ 11. РАСПАД ПОЛЯРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ

§ 1. Развитие матрицы плотности во времени.	22
§ 2. Спиновая матрица плотности при распаде.	24
§ 3. Угловое распределение продуктов распада.	27
§ 4. Поляризация продуктов распада.	30
Упражнения.	34
Литература.	37

ЗАНЯТИЕ 12. УГЛОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ В КАСКАДНЫХ ПЕРЕХОДАХ

§ 1. Угловые корреляции двух последовательных излучений при распаде неполяризованного ядра	38
Упражнения.	41
Литература.	42