

# Теоретическая субмолекулярная физика

## II.2 Суммирование по ненаблюдаемым

- Угловое распределение частиц без спина в дипольном приближении неполяризованное  $p$ -состояние
- Угловое распределение частицы со спином в дипольном приближении неполяризованное  $p$ -состояние
  
- Интерференция  $E1$  и  $E2$  амплитуд

# Общий принцип

Чистое начальное состояние  $|jm\rangle\langle jm|$

Взаимодействие  $\hat{O}|jm\rangle\langle jm|\hat{O}^+$


Суммирование по  
интересующим  
конечным состояниям

$$\sum_{\gamma} \langle \gamma | \hat{O} | jm \rangle \langle jm | \hat{O}^+ | \gamma \rangle$$


## примеры

Частица без спина в  
направлении  $k=\{\theta\varphi\}$


$$\langle \vec{k} | \hat{O} | jm \rangle \langle jm | \hat{O}^+ | \vec{k} \rangle$$


$$\sum_{lml'm'} \langle Y_{lm}(\theta\varphi) | \hat{O} | jm \rangle^* \langle jm | \hat{O}^+ | Y_{l'm'}(\theta\varphi) \rangle$$

Частица с  $s$  и  $m_s$  в  
направлении  $k=\{\theta\varphi\}$


$$\sum_{lml'm'} \langle Y_{lm}(\theta\varphi) sm_s | \hat{O} | jm \rangle^* \langle jm | \hat{O}^+ | Y_{l'm'}(\theta\varphi) sm_s \rangle$$

Частица с  $s$  в  
направлении  $k=\{\theta\varphi\}$


$$\sum_{lml'm'm_s} \langle Y_{lm}(\theta\varphi) sm_s | \hat{O} | jm \rangle \langle jm | \hat{O}^+ | Y_{l'm'}(\theta\varphi) sm_s \rangle$$

# Общий принцип

Чистое начальное состояние  $|jm\rangle\langle jm|$

Взаимодействие  $\hat{O}|jm\rangle\langle jm|\hat{O}^+$

Суммирование по  
интересующим  
конечным состояниям

$$\sum_{\gamma} \langle \gamma | \hat{O} | jm \rangle \langle jm | \hat{O}^+ | \gamma \rangle$$

Какие частицы наблюдаются?

У каких частиц есть спин?

Есть ли совпадения?

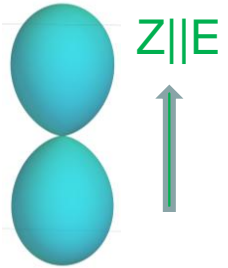
# Дипольное приближение

Фотоиспускание частицы без спина **из s состояния**

$$\sum_{k\lambda\lambda'} \frac{3}{4\pi} (-1)^{\lambda'} (1010 | k0)(1\lambda 1 - \lambda' | k\lambda - \lambda') \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2k+1}} Y_{k\lambda-\lambda'}(\vartheta, \varphi) \frac{1}{3} \left| \langle \varepsilon p \| D \| 1s \rangle \right|^2$$

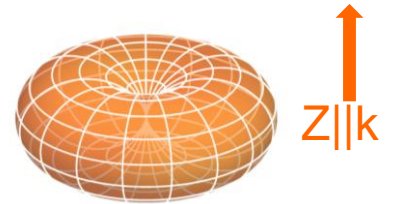
**Линейная поляризация (z||E)  $\lambda=0$**

$$\frac{1}{4\pi} \left| \langle \varepsilon p \| D \| 1s \rangle \right|^2 \frac{1}{3} (1 + 2P_2(\cos \vartheta)) = \frac{1}{4\pi} \left| \langle \varepsilon p \| D \| 1s \rangle \right|^2 \cos^2 \vartheta$$



**Правая поляризация (z||k)  $\lambda=1$**

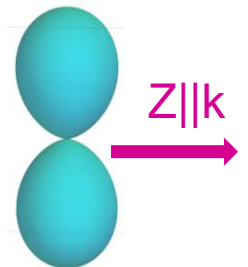
$$\frac{1}{4\pi} \left| \langle \varepsilon p \| D \| 1s \rangle \right|^2 \frac{1}{3} (1 - P_2(\cos \vartheta)) = \frac{1}{4\pi} \left| \langle \varepsilon p \| D \| 1s \rangle \right|^2 \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta$$



**Линейная поляризация (z||k)  $(-\lambda=-1\rangle + |\lambda=1\rangle) / \text{sqrt}[2]$**

$$\frac{1}{4\pi} \left| \langle \varepsilon p \| D \| 1s \rangle \right|^2 \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta + \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{4\pi}{5}} (Y_{22}(\vartheta, \varphi) + Y_{2-2}(\vartheta, \varphi)) \right] =$$

$$\frac{1}{4\pi} \left| \langle \varepsilon p \| D \| 1s \rangle \right|^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi$$








# Дипольное приближение

Фотоиспускание частицы без спина из чистого  $m$  состояния

$$\sum_{l'mm'} Y_{lm}(\vartheta\varphi) Y_{l'm'}^*(\vartheta\varphi) \frac{(1m_0 1\lambda | lm)(1m_0 1\lambda' | l'm)}{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}} \langle \varepsilon l \| D \| 1p \rangle \langle \varepsilon l' \| D \| 1p \rangle^*$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl} (-1)^l (l 0 l' 0 | k 0) (1m 1-m | k 0) (1m_0 1\lambda | lm) (1m_0 1\lambda' | l'm) \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2k+1}} Y_{k0}(\vartheta\varphi) \langle \varepsilon l \| D \| 1p \rangle \langle \varepsilon l' \| D \| 1p \rangle^*$$

**Линейная поляризация ( $\mathbf{z} \parallel \mathbf{E}$ )  $\lambda=0$ , состояние неполяризовано ( $m_0=0,1,-1$ )**

	K=0	K=2	K=4
s+s	$\frac{1}{3}$ 	--- 	 ---
d+d	$\frac{2}{15} + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$	$\frac{4}{21} + \sqrt{\frac{2}{7}} \frac{1}{\sqrt{14}} 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$	$\frac{12}{35} - 3 \sqrt{\frac{2}{35}} 2 \sqrt{\frac{2}{35}} 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$
s+d	--- 	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$ 	---

$$W = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{3} d_s^2 + \frac{2}{15} d_d^2 + \left( \frac{4}{21} d_d^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{Re}[d_d d_s^+] \right) P_2(\cos \vartheta) + \frac{12}{35} d_d^2 P_4(\cos \vartheta) \right)$$

$$W = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{3} d_s^2 + \frac{1}{3} d_d^2 + \left( \frac{1}{3} d_d^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{Re}[d_d d_s^+] \right) P_2(\cos \vartheta) \right)$$

# Аналитическое суммирование по ненаблюдаемым

## Фотоиспускание частицы без спина из чистого $p$ состояния ( $m_0=0,1,-1$ )

$$\sum_{ll'mm'} Y_{1m}(\vartheta\varphi) Y_{1m'}^*(\vartheta\varphi) \frac{(1m_0 1\lambda | lm)(1m_0 1\lambda' | l'm)}{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}} \langle \varepsilon l \| D \| 1p \rangle \langle \varepsilon l' \| D \| 1p \rangle^*$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kll'} (-1)^m (l 0 l' 0 | k 0) (1m 1-m | k 0) (1m_0 1\lambda | lm) (1m_0 1\lambda' | l'm) \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2k+1}} Y_{k0}(\vartheta\varphi) \langle \varepsilon l \| D \| 1p \rangle \langle \varepsilon l' \| D \| 1p \rangle^*$$

## Аналитические суммирования

$$\sum_x (-1)^{q-x} \begin{pmatrix} a & b & q \\ a & \beta & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & d & c \\ x & \delta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{2a} \sum_x^{\pm} (-1)^{x-i} \Pi_x^{\pm} \begin{pmatrix} a & c & x \\ a & \gamma & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & d & b \\ \xi & \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & d & x \\ c & a & q \end{pmatrix}, \quad (5)$$

- 216 Appendix
- $m_1, m_2, m$  are integer or half-integer positive or negative numbers
  - $|m_1| \leq j_1, |m_2| \leq j_2, |m| \leq j$
  - $j_1 + m_1, j_2 + m_2, j + m, j_1 + j_2 + j$  are integer nonnegative numbers
  - The triangle inequality:  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$
  - $m_1 + m_2 = m$

### A.8.2. Relation to 3jm-Symbol

$$(a\alpha, b\beta | c\gamma) = (-1)^{a-b+\gamma} \xi \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix} \quad (A.83)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{c+\gamma+2a} \xi^{-1} (a-\alpha, b-\beta | c\gamma) \quad (A.84)$$

### A.8.3. Main Symmetry Relations

$$(a\alpha, b\beta | c\gamma) = (-1)^{a+b-c} (a-\alpha, b-\beta | c-\gamma) = (-1)^{a+b-c} (b\beta, a\alpha | c\gamma)$$

$$= (-1)^{a-\alpha} \frac{c}{b} (a, \alpha, c-\gamma | b-\beta) = (-1)^{a+\beta} \frac{c}{a} (c-\gamma, b\beta | a-\alpha) \quad (A.85)$$

### A.8.4. Formulas of Summation

We present only the relations most often used. If some practical expression shows another order of the angular momenta, one should use the symmetry relations (A.85) to rearrange the coupling.

$$\sum_{\alpha} (a\alpha, b0 | a\alpha) = a^2 \delta_{b0} \quad (A.86)$$

$$\sum_{\alpha\beta} (a\alpha, b\beta | c\gamma) (a\alpha, b\beta | c'\gamma') = \delta_{c,c'} \delta_{\gamma,\gamma'} \quad (A.87)$$

$$\sum_{\gamma} (a\alpha, b\beta | c\gamma) (a\alpha', b\beta' | c\gamma) = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} \quad (A.88)$$

217 Appendix

$$\sum_{\alpha\beta\delta} (a\alpha, b\beta | c\gamma) (d\delta, b\beta | e\epsilon) (a\alpha, f\varphi | d\delta)$$

$$= (-1)^{b+c+d+f} \xi d \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{pmatrix} \quad (A.89)$$

$$\sum_{\alpha\beta\delta} (-1)^{a-\alpha} (a\alpha, b\beta | c\gamma) (d\delta, b\beta | e\epsilon) (d\delta, a-\alpha | f\varphi)$$

$$= (-1)^{b+c+d+f} \xi f \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{pmatrix} \quad (A.90)$$

$$\sum_{\beta\gamma\varphi} (b\beta, c\gamma | a\alpha) (e\epsilon, f\varphi | d\delta) (e\epsilon, b\beta | g\eta) (f\varphi, c\gamma | j\mu)$$

$$= (-1)^{a-b+c+d+e-f} \xi \sum_{\alpha\sigma} \xi^2 (a\alpha, s\sigma | j\mu) (g\eta, s\sigma | d\delta) \begin{pmatrix} b & c & a \\ j & s & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & e & g \\ d & s & f \end{pmatrix}$$

$$= \xi d \xi j \sum_{\tau} (g\eta, j\mu | \tau) (d\delta, a\alpha | \tau) \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ j & g & \tau \end{pmatrix} \quad (A.91)$$

### A.8.5. Zero Values of Arguments

$$(a\alpha, 00 | c\gamma) = \delta_{ac} \delta_{a\gamma} \quad (A.92)$$

$$(a\alpha, b\beta | 00) = (-1)^{a-b} a^{-1} \delta_{ab} \delta_{a-\beta} \quad (A.93)$$

$$(a0, b0 | c0) = 0 \quad (a+b+c=2n+1) \quad (A.94)$$

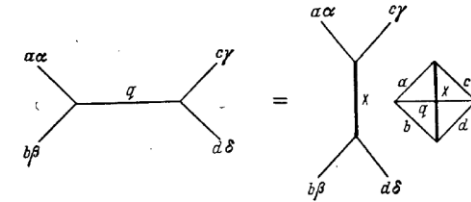
$$(a0, b0 | c0) = \frac{(-1)^{a-c} \xi n!}{(n-a)!(n-b)!(n-c)!}$$

$$\times \left[ \frac{(2n-2a)!(2n-2b)!(2n-2c)!}{(2n+1)!} \right]^{1/2}$$

$$(a+b+c=2n) \quad (A.95)$$

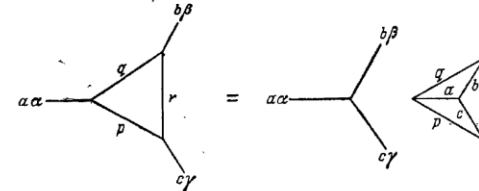
### A.8.6. Tables

We give Clebsch-Gordan coefficients  $(a\alpha, b\beta | c\gamma)$  for  $c=1/2, 1, 2, 3$  and  $a, b \leq 3$  in terms of simple fractions in Table A.7 on pp. 218-220.



### 3. Суммы, содержащие три 3jm-символа

$$\sum_{\chi\varphi} (-1)^{p-\chi+q-x+r-p} \begin{pmatrix} p & a & q \\ \psi & \alpha & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & b & r \\ x & \beta & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & c & p \\ \rho & \gamma & -\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ r & p & q \end{pmatrix}, \quad (6)$$



$$\sum_{\psi} \begin{pmatrix} a & b & p \\ \alpha & \beta & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & c & q \\ -\psi & -\gamma & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & d & e \\ x & \delta & \epsilon \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\xi\eta} \Pi_{\xi\eta}^{\pm} \begin{pmatrix} a & d & x \\ \alpha & \delta & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & c & y \\ -\xi & -\gamma & -\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & b & e \\ \eta & \beta & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ x & y & c \end{pmatrix}, \quad (7)$$

# Аналитическое суммирование по ненаблюдаемым

Фотоиспускание частицы без спина из чистого  $p$  состояния ( $m_0=0,1,-1$ )

$$\sum_{l'l'mm'} Y_{1m}(\vartheta\varphi) Y_{1m'}^*(\vartheta\varphi) \frac{(1m_0 1\lambda | lm)(1m_0 1\lambda' | l'm)}{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}} \langle \varepsilon l \| D \| 1p \rangle \langle \varepsilon l' \| D \| 1p \rangle^*$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl'l'} (-1)^m (l0l'0 | k0)(1m1-m | k0)(1m_0 1\lambda | lm)(1m_0 1\lambda' | l'm) \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2k+1}} Y_{k0}(\vartheta\varphi)^* \langle \varepsilon l \| D \| 1p \rangle \langle \varepsilon l' \| D \| 1p \rangle$$

Аналитические суммирования

Д. А. Варшалович 386 стр

$$\sum_x (-1)^{q-x} \begin{pmatrix} a & b & q \\ \alpha & \beta & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & d & c \\ x & \delta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{2a} \sum_{x\xi} (-1)^{x-\xi} \Pi_x^2 \begin{pmatrix} a & c & x \\ \alpha & \gamma & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & d & b \\ \xi & \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} b & d & x \\ c & a & q \end{Bmatrix},$$

$$\hat{c} = \sqrt{2c+1}$$

$$\sum_{\alpha} (a\alpha b\beta | c\gamma)(a\alpha d\delta | f\varphi) = \sum_{\alpha} \hat{c}\hat{f} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & f \\ \alpha & \delta & -\varphi \end{pmatrix} (-1)^{a-b+\gamma+a-d+\varphi} =$$

$$\sum_{\alpha} \hat{c}\hat{f} \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & b & a \\ \gamma & -\beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & d & b \\ a & d & f \\ \alpha & \delta & -\varphi \end{pmatrix} (-1)^{a-b+(\alpha+\beta)-(a-d+\varphi)}$$

$$= \hat{c}\hat{f} \sum_{\zeta} (-1)^{x-\zeta} \zeta^2 \begin{pmatrix} c & f & x \\ \gamma & -\varphi & -\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & d & b \\ \zeta & \delta & -\beta \end{pmatrix} (-1)^{a-b+\beta-(-d+\varphi)} \begin{Bmatrix} b & d & x \\ f & c & a \end{Bmatrix} =$$

$$= \hat{c}\hat{f} \sum_{\zeta} (-1)^{x-\zeta+c-f+\zeta+b-d+\zeta} (c\gamma f - \varphi | x\zeta)(b\beta d - \delta | x\zeta) (-1)^{a-b+\beta-(-d+\varphi)} \begin{Bmatrix} b & d & x \\ f & c & a \end{Bmatrix}$$

# Аналитическое суммирование по ненаблюдаемым

## Аналитические суммирования

Д.А. Варшалович 386 стр

$$\sum_x (-1)^{q-x} \begin{pmatrix} a & b & q \\ \alpha & \beta & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & d & c \\ x & \delta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{2a} \sum_{x\xi} (-1)^{x-\xi} \Pi_x^2 \begin{pmatrix} a & c & x \\ \alpha & \gamma & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & d & b \\ \xi & \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} b & d & x \\ c & a & q \end{Bmatrix},$$

$$\hat{c} = \sqrt{2c+1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} (a\alpha b\beta | c\gamma)(a\alpha d\delta | f\varphi) &= \sum_{\alpha} \hat{c}\hat{f} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & f \\ \alpha & \delta & -\varphi \end{pmatrix} (-1)^{a-b+\gamma+a-d+\varphi} = \\ &= \hat{c}\hat{f} \sum_{\zeta} (-1)^{x-\zeta} \hat{\zeta}^2 \begin{pmatrix} c & f & x \\ \gamma & -\varphi & -\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & d & b \\ \zeta & \delta & -\beta \end{pmatrix} (-1)^{a-b+\beta-(-d+\varphi)} \begin{Bmatrix} b & d & x \\ f & c & a \end{Bmatrix} = \\ &= \hat{c}\hat{f} \sum_{\zeta} (-1)^{x-\zeta+c-f+\zeta+b-d+\zeta} (c\gamma f - \varphi | x\zeta)(b\beta d - \delta | x\zeta) (-1)^{a-b+\beta-(-d+\varphi)} \begin{Bmatrix} b & d & x \\ f & c & a \end{Bmatrix} \\ &= \hat{c}\hat{f} \sum_{\zeta} (-1)^{\cancel{x-\zeta}+c-\cancel{f+\zeta}+b-\cancel{d+\zeta}} (c\gamma f - \varphi | x\zeta)(b\beta d - \delta | x\zeta) (-1)^{a-\cancel{b}+\cancel{\beta}+(-d+\varphi)} \begin{Bmatrix} b & d & x \\ f & c & a \end{Bmatrix} \\ &\quad \beta+\zeta = \beta-\delta+\delta+\zeta = 2\zeta+\delta = 2x+\delta \\ &= \hat{c}\hat{f} \sum_{\zeta} (-1)^{a+d+c+x} (-1)^{\cancel{f-\varphi}} (c\gamma f - \varphi |) (-1)^{\cancel{l-\delta}} (b\beta d - \delta | x\zeta) \begin{Bmatrix} b & d & x \\ f & c & a \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



# Аналитическое суммирование по ненаблюдаемым

Фотоиспускание частицы без спина из чистого  $p$  состояния ( $m_0=0, 1, -1$ )

$$\sum_{ll'mm'} Y_{1m}(\vartheta\varphi) Y_{1m'}^*(\vartheta\varphi) \frac{(1m_0 1\lambda | lm)(1m_0 1\lambda' | l'm)}{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}} \langle \varepsilon l \| D \| 1p \rangle \langle \varepsilon l' \| D \| 1p \rangle^*$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl'} (-1)^m (l 0 l' 0 | k 0) (l m l - m | k 0) (1m_0 1\lambda | lm)(1m_0 1\lambda' | l'm') \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2k+1}} Y_{k0}(\vartheta\varphi)^* \langle \varepsilon l \| D \| 1p \rangle \langle \varepsilon l' \| D \| 1p \rangle$$

**Аналитические суммирования**

$$\sum_{\alpha} (a\alpha b\beta | c\gamma)(a\alpha d\delta | f\varphi) =$$

$$= \hat{c}\hat{f} \sum_{\zeta} (-1)^{a+d+c+x} (-1)^{f-\varphi} (c\gamma f - \varphi |) (-1)^{d-\delta} (b\beta d - \delta | x\zeta) \begin{Bmatrix} b & d & x \\ f & c & a \end{Bmatrix}$$

$$(1m_0 1\lambda | lm)(1m_0 1\lambda' | l'm') = \hat{l}\hat{l}' \sum_{x\zeta} (-1)^{1+x+1+l+1-\lambda+l'-m'} (1\lambda 1 - \lambda | x\zeta)(l m l' - m' | x\zeta) \begin{Bmatrix} 1 & 1 & x \\ l' & l & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl'} \hat{l}\hat{l}' (-1)^{l+l'+k+1-\lambda} (l 0 l' 0 | k 0) (1\lambda 1 - \lambda | k 0) \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ l' & l & 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2k+1}} Y_{k0}(\vartheta\varphi)^* \langle \varepsilon l \| D \| 1p \rangle \langle \varepsilon l' \| D \| 1p \rangle$$

# Дипольное приближение

Линейная поляризация ( $\mathbf{z} \parallel \mathbf{E}$ )  $\lambda=0$ , состояние неполяризовано ( $m_0=0,1,-1$ )

$$W = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{3} d_s^2 + \frac{1}{3} d_d^2 + \left( \frac{1}{3} d_d^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \operatorname{Re}[d_d d_s^+] \right) P_2(\cos \vartheta) \right)$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl'} \tilde{U}^{kl'} (-1)^{l+l'+k+1-\lambda} (l0l'0 | k0) (1\lambda 1-\lambda | k0) \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ l' & l & 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2k+1}} Y_{k0}(\vartheta, \varphi) * \langle \varepsilon l \| D \| 1p \rangle \langle \varepsilon l' \| D \| 1p \rangle$$

s+s	$1 \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}$	---	---
d+d	$5 \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{15}}$	$5 \sqrt{\frac{2}{7}} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{7}}{10\sqrt{3}}$	$5 \cdot 3 \sqrt{\frac{2}{35}} 0 \cdot 0$
s+d	---	$-\sqrt{5} \cdot 1 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{15}}$	---

# Дипольное приближение

Линейная поляризация ( $z \parallel E$ )  $\lambda=0$ , состояние неполяризовано ( $m_0=0,1,-1$ )

$$W = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{3} d_s^2 + \frac{1}{3} d_d^2 + \left( \frac{1}{3} d_d^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \operatorname{Re}[d_d d_s^+] \right) P_2(\cos \vartheta) \right)$$

$$\beta^{\text{lin}} = -2\beta^{\text{circ}}$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl'} \tilde{u}^{ll'} (-1)^{l+l'+k+1-\lambda} (l0l'0 | k0) (1\lambda 1-\lambda | k0) \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ l' & l & 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2k+1}} Y_{k0}(\vartheta, \varphi) * \langle \varepsilon l \| D \| 1p \rangle \langle \varepsilon l' \| D \| 1p \rangle$$

s+s	$1 \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}$	---	---
d+d	$5 \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{15}}$	$5 \sqrt{\frac{2}{7}} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{7}}{10\sqrt{3}}$	$5 \cdot 3 \sqrt{\frac{2}{35}} 0 \cdot 0$
s+d	---	$\sqrt{5} \cdot 1 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{15}}$	---

# Дипольное приближение

## Фотоиспускание частицы со спином

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{kl'l'mm' \\ jj'm_jm'_j}} (j_0 m_0 1 \lambda | j m_j) (j_0 m_0 1 \lambda | j' m'_j) (l m s m_s | j m_j) (l' m' s m_s | j' m'_j)^* \\ (-1)^{m'} \hat{l} \hat{l}' (l 0 l' 0 | k 0) (l m l - m' | k 0) \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2k+1}} Y_{k0}(\vartheta, \varphi)^* \langle \varepsilon l \| D \| 1 p \rangle \langle \varepsilon l' \| D \| 1 p \rangle$$

Если детектор ловит определенные спиновые состояния, то подставляем эти определенные значения  $m_s$

Если интересует степень спиновой поляризации, то, например для  $s=1/2$

$$\frac{W[s=1/2, m_s = m'_s = 1/2] - W[s=1/2, m_s = m'_s = -1/2]}{W[s=1/2, m_s = m'_s = 1/2] + W[s=1/2, m_s = m'_s = -1/2]}$$

Если спин не детектируется  $\sum_{m_s}$

# Дипольное приближение

## Фотоиспускание частицы со спином

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{kl'l'mm' \\ jj'm_jm'_jm_s}} (j_0 m_0 1 \lambda | j m_j) (j_0 m_0 1 \lambda | j' m'_j) (l m s m_s | j m_j) (l' m' s m_s | j' m'_j)^*$$

$$(-1)^{m'} \hat{l}' (l 0 l' 0 | k 0) (l m l - m' | k 0) \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2k+1}} Y_{k0}(\vartheta, \varphi)^* \langle \varepsilon l j \| D \| j_0 \rangle \langle \varepsilon l' j' \| D \| j_0 \rangle$$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\hat{j}\hat{j}'}{\hat{l}'^3} \sum_{m_0 m_j m'_j m_s} \begin{matrix} b & c & a & f & c & j & e & b & g & e & f & d \end{matrix} (j - m_j s m_s | l - m) (j' - m'_j s m_s | l' - m') (j_0 m_0 j - m_j | 1 - \lambda) (j_0 m_0 j' - m'_j | 1 - \lambda)$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl'jj'} (-1)^{1-\lambda} (1 \lambda 1 - \lambda | k 0) \hat{l}' (-1)^{l'} (l 0 l' 0 | k 0) \hat{j}\hat{j}' (-1)^{j_0+1+s+j+j'+l} \begin{Bmatrix} l & l' & k \\ j' & j & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ j' & j & j_0 \end{Bmatrix} P_k(\cos \vartheta)$$

$$\langle \varepsilon l j \| D \| j_0 \rangle \langle \varepsilon l' j' \| D \| j_0 \rangle$$

# Дипольное приближение

## Фотоиспускание частицы со спином

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl'jj'} (-1)^{l-\lambda} (1\lambda 1-\lambda | k0) \hat{l}l' (-1)^{l'} (l0 l'0 | k0) \hat{j}j' (-1)^{j_0+1+s+j+j'+l} \begin{Bmatrix} l & l' & k \\ j' & j & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ j' & j & j_0 \end{Bmatrix} P_k(\cos \vartheta)$$

$$\langle \varepsilon l j \| D \| j_0 \rangle \langle \varepsilon l' j' \| D \| j_0 \rangle$$

Линейная поляризация (z||E)  $\lambda=0$ , состояние  $|s1/2\rangle$ ,  $j_0=1/2$  неполяризовано ( $m_0=1/2, -1/2$ )

	K=0	K=2
s1/2+s1/2		
d3/+d3/2		
d5/2+d5/2		
s1/2+d3/2		
s1/2+d5/2		
d3/2+d/52		

# Дипольное приближение

## Фотоиспускание частицы со спином

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl'jj'} (-1)^{l-\lambda} (1\lambda 1-\lambda | k0) \hat{l}l' (-1)^{l'} (l0 l'0 | k0) \hat{j}j' (-1)^{j_0+1+s+j+j'+l} \begin{Bmatrix} l & l' & k \\ j' & j & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ j' & j & j_0 \end{Bmatrix} P_k(\cos \vartheta)$$

$$\langle \varepsilon l j \| D \| j_0 \rangle \langle \varepsilon l' j' \| D \| j_0 \rangle$$

Линейная поляризация (z||E)  $\lambda=0$ , состояние  $|s1/2\rangle$ ,  $j_0=1/2$  неполяризовано ( $m_0=1/2, -1/2$ )

	K=0	K=2
s1/2+s1/2		-----
d3/+d3/2		
d5/2+d5/2		
s1/2+d3/2	----	
s1/2+d5/2	----	
d3/2+d/52	-----	

# Дипольное приближение

## Фотоиспускание частицы со спином

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{kl'j'} (-1)^{l-\lambda} (1\lambda 1-\lambda | k0) \hat{l}l' (-1)^{l'} (l0 l'0 | k0) \hat{j}j' (-1)^{j_0+1+s+j+j'+l} \begin{Bmatrix} l & l' & k \\ j' & j & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & k \\ j' & j & j_0 \end{Bmatrix} P_k(\cos \vartheta)$$

$$\langle \varepsilon l j \| D \| j_0 \rangle \langle \varepsilon l' j' \| D \| j_0 \rangle$$

Линейная поляризация ( $\mathbf{z} \parallel \mathbf{E}$ )  $\lambda=0$ , состояние  $|s1/2\rangle$ ,  $j_0=1/2$  неполяризовано ( $m_0=1/2, -1/2$ )

	K=0	K=2
s1/2+s1/2	$\frac{1}{\sqrt{3}} 1 \cdot 1 \cdot 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{6}}$	---
d3/+d3/2	$\frac{1}{\sqrt{3}} 5 \frac{1}{\sqrt{5}} 4 \frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} 5 (-\sqrt{\frac{2}{7}}) 4 \frac{\sqrt{7}}{10\sqrt{2}} \frac{1}{2\sqrt{6}}$
s1/2+d3/2	---	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{5} \sqrt{2} 2 \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$$W = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{3} d_{s1/2}^2 + \frac{1}{3} d_{d3/2}^2 + \left( \frac{1}{3} d_{d3/2}^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \operatorname{Re}[d_{d3/2} d_{s1/2}^+] \right) P_2(\cos \vartheta) \right)$$