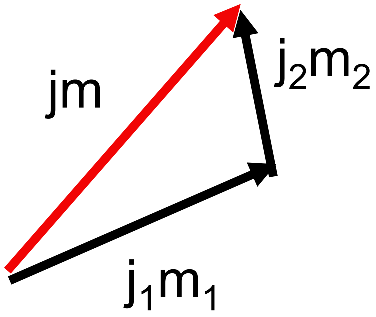
Теоретическая субмолекулярная физика

2. Коэффициенты Клебша-Гордона

- Определение коэффициентов Клебша-Гордона
- Пример расчетов
- Некоторые свойства

Грызлова Е.В.
2018 г.

Коэффициенты Клебша-Гордона



$$\left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle;$$

$$\left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{jm} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{jm} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle$$

Правило треугольника $\left| j_1 - j_2 \right| \le j \le j_1 + j_2;$ итд

$$m = m_1 + m_2$$

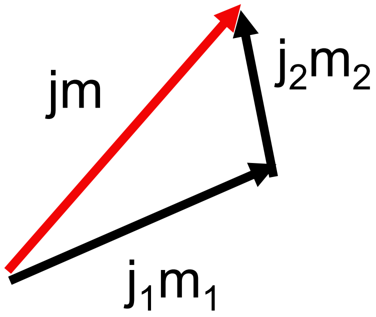
Свойство ортонормированности

2.1 $$\boxed{\sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm)(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid j'm') = \delta_{jj'} \delta_{mm'};}$$

2.2 $$\boxed{\sum_{jm} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm)(j_1 m_1' j_2 m_2' \mid jm) = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}}$$

Очевидно $(j_1 m_1 00 \mid jm) = \delta_{j_1 j} \delta_{m_1 m}$

Расчет коэффициентов Клебша-Гордона



$$\left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle;$$

$$\left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{jm} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{jm} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle$$

$$\hat{J}_{\pm} \left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \left| j_1 j_2 jm \pm 1 \right\rangle =$$

$$= \sum_{m'_1 m'_2} (j_1 m'_1 \; j_2 m'_2 \mid jm)(\hat{J}^{(1)}_{+} + \hat{J}^{(2)}_{+}) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle$$

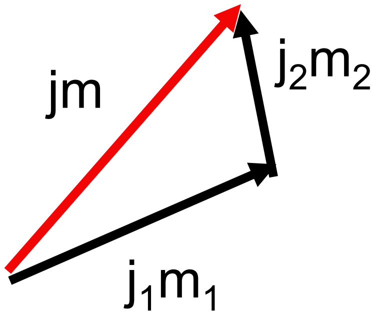
1.7

$$\boxed{\begin{aligned} &\left\langle JM \left| \hat{J}_{+} \right| J'M' \right\rangle = \left\langle J'M' \left| \hat{J}_{-} \right| JM \right\rangle = \\ &= \delta_{JJ'} \delta_{M'M-1} \sqrt{(J+M)(J-M+1)/2} \\ &= \delta_{JJ'} \delta_{M'M-1} \sqrt{(J-M')(J+M'+1)/2} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sqrt{(j+m+1)(j-m)}(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm+1) = \\ &= \sqrt{(j_1+m_1)(j_1-m_1+1)}(j_1 m_1 - 1 j_2 m_2 \mid jm) \\ &+ \sqrt{(j_2+m_2)(j_2-m_2+1)}(j_1 m_1 j_2 m_2 - 1 \mid jm) \end{aligned}}$$

2.3

Расчет коэффициентов Клебша-Гордона



$$\left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle;$$

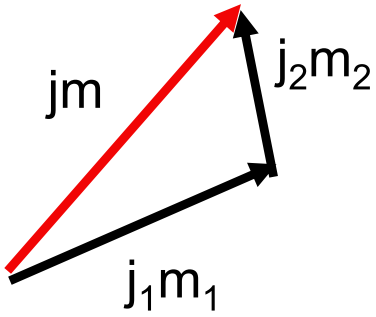
$$\left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{jm} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{jm} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sqrt{(j+m+1)(j-m)}(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm+1) = \\ &= \sqrt{(j_1+m_1)(j_1-m_1+1)}(j_1 m_1 - 1 j_2 m_2 \mid jm) \\ &+ \sqrt{(j_2+m_2)(j_2-m_2+1)}(j_1 m_1 j_2 m_2 - 1 \mid jm) \end{aligned}} \quad 2.3$$

рассчитать $(1/2 m_1\ 1/2 m_2 \mid 0\ 0)$, $(1 m_1\ 1/2 m_2 \mid 1/2\ m_1 + m_2)$

$$2.4 \quad \boxed{\begin{aligned} &\sqrt{(j+m)(j-m+1)}(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm-1) = \\ &= \sqrt{(j_1-m_1)(j_1+m_1+1)}(j_1 m_1 + 1 j_2 m_2 \mid jm) \\ &+ \sqrt{(j_2-m_2)(j_2+m_2+1)}(j_1 m_1 j_2 m_2 + 1 \mid jm) \end{aligned}}$$

Расчет коэффициентов Клебша-Гордона



$$\left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle;$$

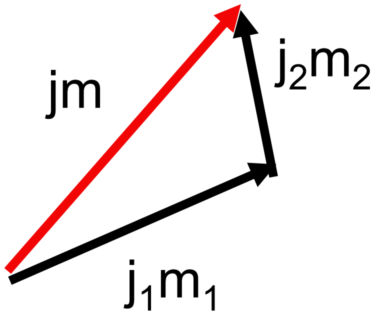
$$\left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{jm} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{jm} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle$$

$$\begin{aligned}\langle ab\alpha\beta|c\gamma\rangle = \delta(\alpha+\beta,\gamma)\Delta(a\,b\,c)\times \\ \times[(2c+1)(a+\alpha)!\,(a-\alpha)!\,(b+\beta)!\,(b-\beta)!\,(c+\gamma)!\,(c-\gamma)!]^{\frac{1}{2}}\times \\ \times\sum_{\nu}(-1)^{\nu}[(a-\alpha-\nu)!\,(c-b+\alpha+\nu)!\,(b+\beta-\nu)!\times \\ \times(c-a-\beta+\nu)!\,\nu!\,(a+b-c-\nu)!]^{-1},\end{aligned}$$

where

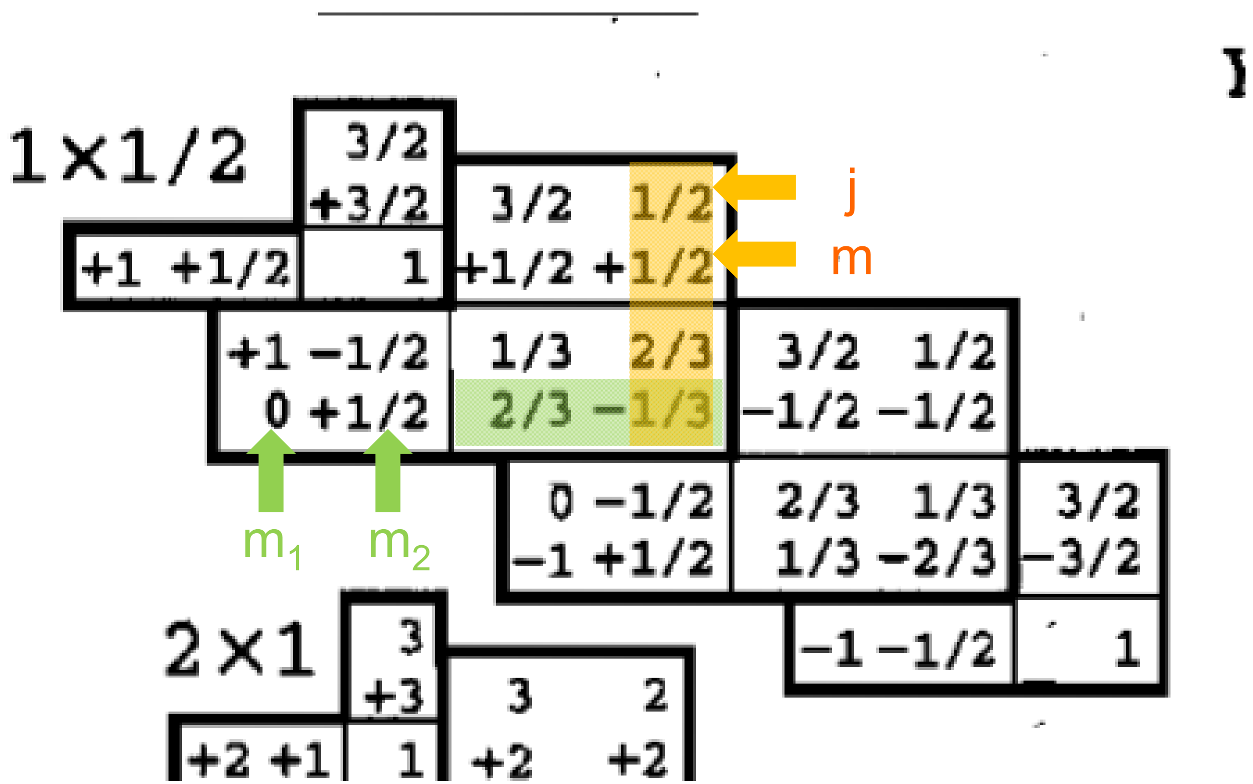
$$\Delta(abc) = \left[\frac{(a+b-c)!\,(a+c-b)!\,(b+c-a)!}{(a+b+c+1)!}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.34)$$

Расчет коэффициентов Клебша-Гордона



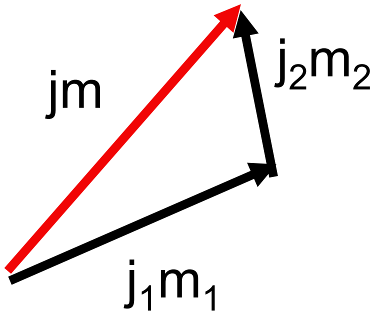
$$|j_1 j_2 jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle;$$

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \sum_{jm} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} |j_1 j_2 jm\rangle = \sum_{jm} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$



$$-1/\sqrt{3}$$

Расчет коэффициентов Клебша-Гордона



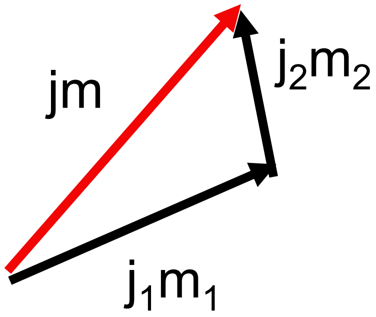
$$\left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle;$$

$$\left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{jm} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{jm} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle$$

Две частицы имеют равный момент и противоположные проекции. Каким моментом может обладать полная система (j=1/2,j=1,j=2)

Разложить волновую функцию протона $1p_{1/2}$ (m=1/2) по состояниям с определенной проекцией спина и орбитального момента.

Расчет коэффициентов Клебша-Гордона



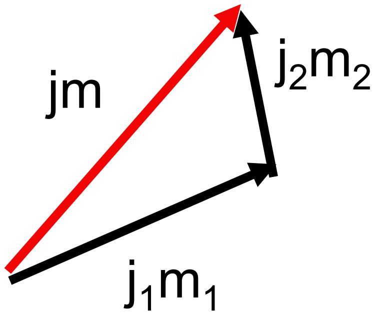
$$\left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle;$$

$$\left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{jm} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{jm} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sqrt{(j+m+1)(j-m)}(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm+1) = \\ &= \sqrt{(j_1+m_1)(j_1-m_1+1)}(j_1 m_1 - 1 j_2 m_2 \mid jm) \\ &+ \sqrt{(j_2+m_2)(j_2-m_2+1)}(j_1 m_1 j_2 m_2 - 1 \mid jm) \end{aligned}} \qquad 2.3$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sqrt{(j+m)(j-m+1)}(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm-1) = \\ &= \sqrt{(j_1-m_1)(j_1+m_1+1)}(j_1 m_1 + 1 j_2 m_2 \mid jm) \\ &+ \sqrt{(j_2-m_2)(j_2+m_2+1)}(j_1 m_1 j_2 m_2 + 1 \mid jm) \end{aligned}} \qquad 2.4$$

Коэффициенты Клебша-Гордона



$$\left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle;$$

$$\left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{jm} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{jm} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) \left| j_1 m_1 j_2 m_2 \right\rangle$$

Перестановочные соотношения

$$(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) = (-1)^{j_1 + j_2 - j} (j_2 m_2 j_1 m_1 \mid jm) =$$

$$(-1)^{j_2 + m_2} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}} (j - m, j_2 m_2 \mid j_1 - m_1) =$$

$$(-1)^{j_1 - m_1} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}} (j_1 m_1 j - m \mid j_2 - m_2)$$

При операции инверсии времени $\hat{T} \left| jm \right\rangle = \left| jm \right\rangle^* = (-1)^{j-m} \left| j - m \right\rangle$

$$(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm) = (-1)^{j_1 + j_2 - j} (j_1 - m_1 j_2 - m_2 \mid j - m)$$

Возможные обозначения

Эккарт [*E*. 30]:

$$= A^{j\ j_1\ j_2}_{m\ m_1\ m_2}; \qquad (11.28)$$

Вигнер [*W*. 31]:

$$= s^{j_1\ j_2}_{jm_1\ m_2}; \qquad (11.29)$$

Ван дер Верден [*W*. 32], Ландау и Лифшиц [Л. Л. 48, 63]:

$$= c^{j}_{m_1\ m_2}; \qquad (11.30)$$

Кондон и Шортли [*C*. *S*. 35]:

$$= (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m), \quad (m_1 m_2 | jm); \qquad (11.31)$$

Фок [Ф. 40]:

$$= c^{j_1 j_2}_{j\ m}(m_1,\ m_2); \qquad (11.32)$$

Бойс [*B*. 51]:

$$= X(j,\ m,\ j_1,\ j_2,\ m_1); \qquad (11.33)$$

Ян [*J*. 51], Альдер [*A*. 52]:

$$= c^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2}; \qquad (11.34)$$

Блатт и Вайскопф [*B*. *W*. 52]:

$$= C(jm;\ m_1 m_2); \qquad (11.35)$$

Джеффрейс [*J*. 52]:

$$= \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m_1 + m_2 \end{array} \right); \qquad (11.36)$$

Биденхарн [*B*. 52]:

$$= C^{j_1\ j_2\ j}_{m_1\ m_2\ m}; \qquad (11.37)$$

Роуз [*R*. 55]:

$$= C(j_1 j_2 j,\ m_1 m_2). \qquad (11.38)$$

Задачи

p. 2.1 Доказать соотношение 2.2

p. 2.2 Получить рекуррентное соотношение 2.4

p. 2.3 Две частицы со спинами 1 и 2 находятся каждая в состоянии с проекцией спина на ось z равными нулю. Найти распределение суммарного спина этих частиц.

p. 2.4 Разложить волновую функцию протона $1p_{3/2}$ (m=3/2,1/2) по состояниям с определенной проекцией спина и орбитального момента.

Сдать до 25 сентября включительно