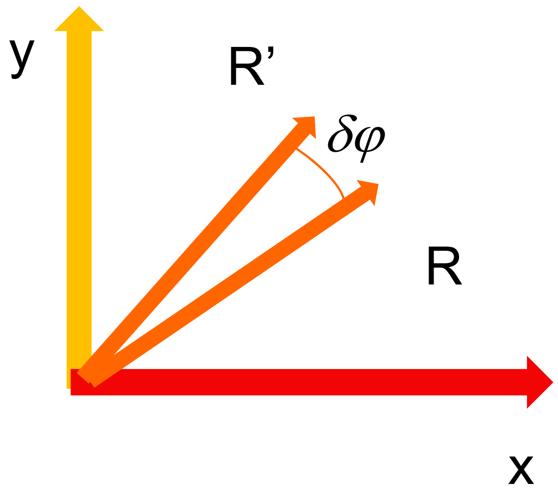
Теоретическая субмолекулярная физика

5. D-функции и сферические гармоники

- Определение поворота
- Определение D-функции и некоторые свойства
- Связь D-функций и сферических гармоник

Грызлова Е.В.
2018 г.

Оператор поворота



$$\delta y = r\cos\varphi\,\delta\varphi = x\,\delta\varphi;$$

$$\delta x = -r\sin\varphi\,\delta\varphi = -y\,\delta\varphi;$$

Оператор бесконечно малого поворота вокруг оси z

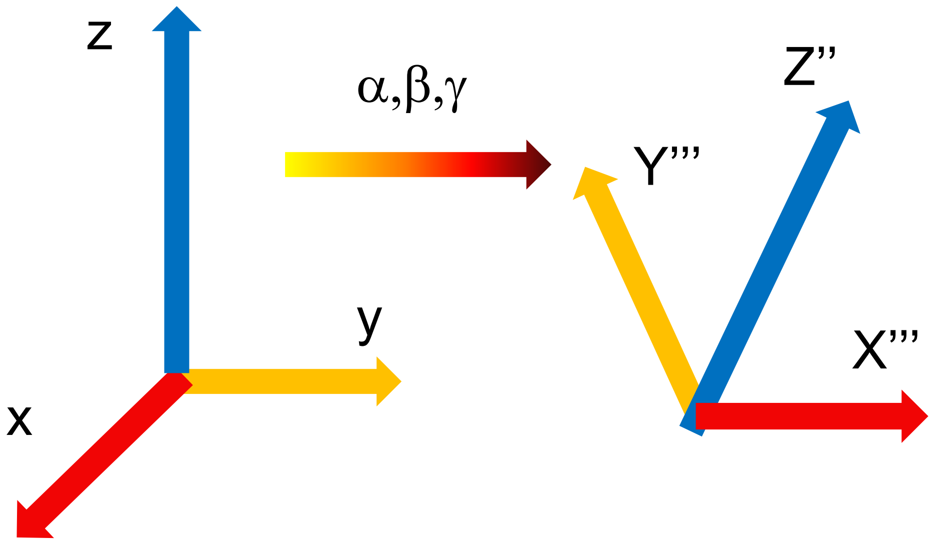
$$\hat{R} = 1 + \delta x\frac{\partial}{x} + \delta y\frac{\partial}{y} = 1 + \delta\phi\frac{\partial}{\phi} = 1 + i\hat{J}_z\delta\phi;$$

$$\hat{D} = \lim\left(1 + i\hat{J}_z\frac{\Delta\phi}{n}\right)^n = \exp(i\hat{J}_z\Delta\phi).$$

Если поворачивается не вектор, а система координат

$$\hat{D} = \exp(-i\hat{J}_z\Delta\varphi).$$

D-функции



$$|j\tilde{m}\rangle = \exp\left(-i\alpha\hat{J}_z\right)\exp\left(-i\beta\hat{J}_y\right)\exp\left(-i\gamma\hat{J}_z\right)|jm\rangle;$$

$$|j\tilde{m}\rangle = \sum_{m'}|jm'\rangle\langle jm'|\exp\left(-i\alpha\hat{J}_z\right)\exp\left(-i\beta\hat{J}_y\right)\exp\left(-i\gamma\hat{J}_z\right)|jm\rangle$$

$$\equiv \sum_{m'} D^j_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)|jm'\rangle$$

Матрица конечных поворотов

$$D^j_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) \equiv \langle jm'|\hat{R}|jm\rangle$$

свойства D-функции

$$|j\tilde{m}\rangle = \sum_{m'} D^j_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)|jm'\rangle \qquad D^j_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \exp(-i\alpha m')d^j_{m'm}(\beta)\exp(-i\gamma m)$$

Ортогональности $\sum_m D^{j*}_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)D^j_{mm''}(\alpha,\beta,\gamma) = \delta_{m'm''}$ 5.1

Ортонормированности

$$\int d\alpha \int \sin\beta\, d\beta \int d\gamma D^{j*}_{\mu m}(\alpha,\beta,\gamma)D^{j'}_{\mu' m'}(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{8\pi^2}{2j+1}\delta_{jj'''}\delta_{\mu\mu'}\delta_{mm'} \qquad 5.2$$

Теорема сложения

$$D^{j'}_{m'\mu'}(\alpha,\beta,\gamma)D^j_{m\mu}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{JMM}(jm\ j'm'|JM)(j\mu\ j'\mu'|JM)D^J_{MM}(\alpha,\beta,\gamma) \qquad 5.3$$

и обратное ей свойство:

$$D^J_{MM}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{m\mu m'\mu'}(jm\ j'm'|JM)(j\mu\ j'\mu'|JM)D^{j'}_{m'\mu'}(\alpha,\beta,\gamma)D^j_{m\mu}(\alpha,\beta,\gamma) \qquad 5.4$$

Свойства перестановки

$$D^j_{m\mu}(\alpha,\beta,\gamma) =$$

$$(-1)^{m-\mu}D^j_{-m-\mu}{}^*(\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^{m-\mu}D^j_{\mu m}(\gamma,\beta,\alpha) = \boxed{(-1)^j D^j_{m-\mu}(\alpha-\pi,\pi-\beta,\gamma)}$$

свойства D-функции с нулевой проекцией

$$|\, j\tilde{m}\rangle = \sum_{m'} D^{j}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)\,|\, jm'\rangle$$

$$D^{j}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \exp(-i\alpha m')\, d^{j}_{m'm}(\beta)\exp(-i\gamma m)$$

$$D^{l}_{m0}(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2l+1}} Y^{*}_{lm}(\beta,\alpha);$$

$$D^{l}_{0\mu}(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2l+1}} Y_{l-\mu}(\beta,\gamma)$$

$$D^{l}_{00}(\alpha,\beta,\gamma) = P_l(\cos\beta);$$

Рассмотреть прохождение пучка частиц со спином ½ и 1 через систему из двух приборов Штерна-Герлаха, ориентированных перпендикулярно

Сферические гармоники

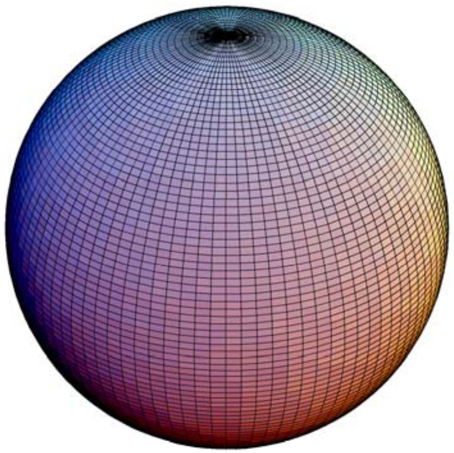
$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \tilde{\varphi}(r)Y_{lm}(\vec{r}/r)$$

Сферические функции $Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$

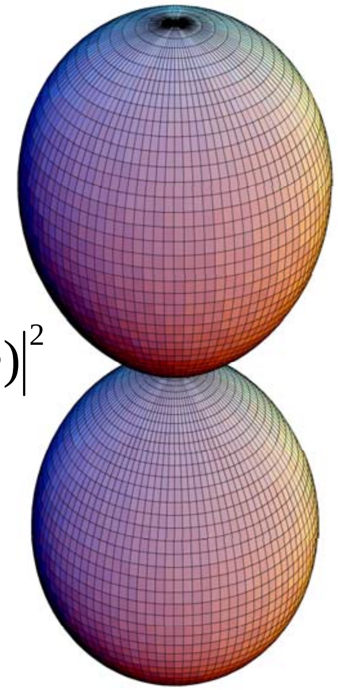
Полином Лежандра

$|Y_{00}(\vartheta,\varphi)|^2$



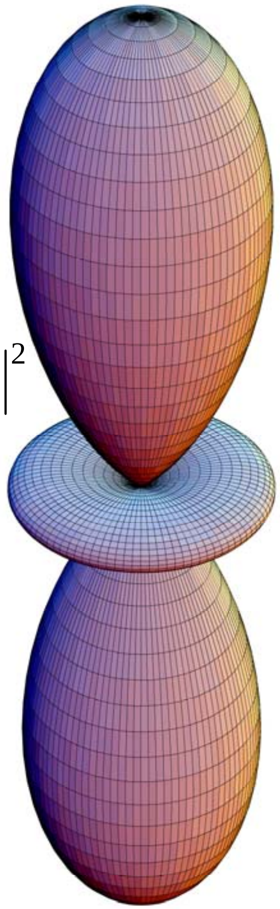
$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$

$|Y_{10}(\vartheta,\varphi)|^2$



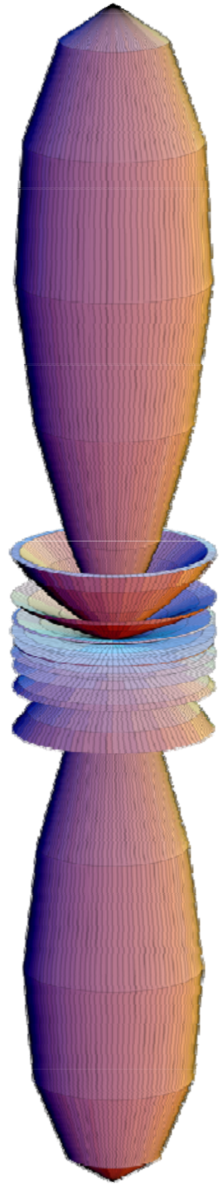
$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$

$|Y_{20}(\vartheta,\varphi)|^2$



$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$

$|Y_{10\,0}(\vartheta,\varphi)|^2$



Задачи

p. 5.1 Доказать соотношение 5.4

p. 5.2 Рассмотреть прохождение пучка частиц со спином 3/2 через систему из двух приборов Штерна-Герлаха, ориентированных перпендикулярно

p. 5.3 Для задачки 4.2 определить вид момента l=1,m=1 и l=1,m=0 в новой системе координат

Сдать до 16 октября включительно