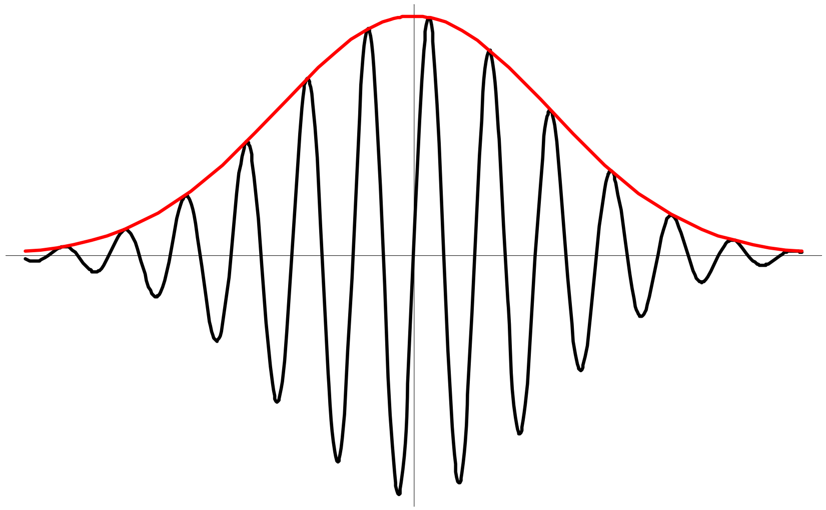
Волновой пакет

Свойства волнового пакета



- ✓С какой скоростью движется частица, описываемая волновым пакетом?
- ✓Расплывается ли волновой пакет свободной частицы?
- ✓Какая функция минимизирует соотношение неопределенности?
- ✓Что такое когерентное состояние системы?

$$E = \frac{E_0}{\delta k}\int_{k-\delta k/2}^{k+\delta k/2} \exp(-i(\omega t - kx))dk = \frac{E_0}{\delta k}\int_{k-\delta k/2}^{k+\delta k/2} \exp(-i(\omega_0 t + \frac{\partial\omega}{\partial k}(k-k_0)t - kx))dk =$$

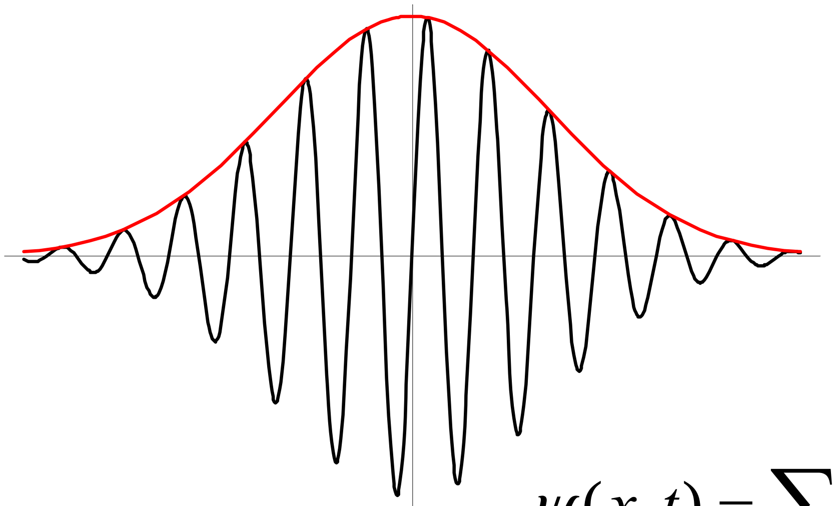
$$E_0 \frac{\sin(\frac{\partial\omega}{\partial k}t - x)\delta k/2}{\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}t - x\right)\delta k/2}\exp(-i(\omega_0 t - k_0 x))$$

Движение пакета как целого, групповая скорость

Движение волны, фазовая скорость

Волновой пакет

Свойства волнового пакета



- ✓С какой скоростью движется частица, описываемая волновым пакетом?
- ✓Расплывается ли волновой пакет свободной частицы?
- ✓Какая функция минимизирует соотношение неопределенности?
- ✓Что такое когерентное состояние системы?

$$\psi(x,t) = \sum a_n \psi_n(x) e^{-iE_n t}$$

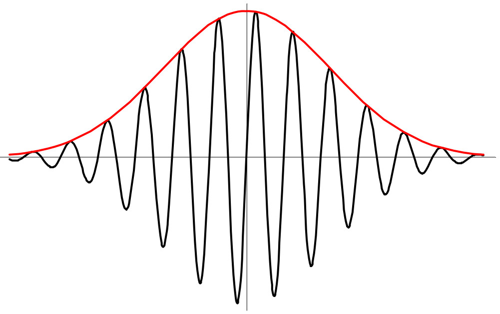
Волновой пакет свободной частицы

$$\psi(x,t) = \sum a(k) e^{i(kx - \frac{k^2}{2}t)} \qquad \omega(k) = \frac{k^2}{2}.$$

Фазовая и групповая скорости

$$v = \frac{\omega}{k}; \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Волновой пакет



Свободная частица: движение как целого

$$\psi(x,t)=\int a_0(k)e^{i(kx-\frac{k^2}{2}t)}dk, \qquad \omega(k)=\frac{k^2}{2}.$$

$$a_0(k)=\frac{1}{2\pi}\int\psi(x,0)e^{-ikx}dx$$

нормировка $\displaystyle\int a(k,t)^*a(k,t)dk=\frac{1}{2\pi}$

$$\psi(x,t)=\int a(k,t)e^{ikx}dk, \quad a(k,t)=a_0(k)e^{-i\frac{k^2}{2}t}$$

Изменение среднего положения частицы

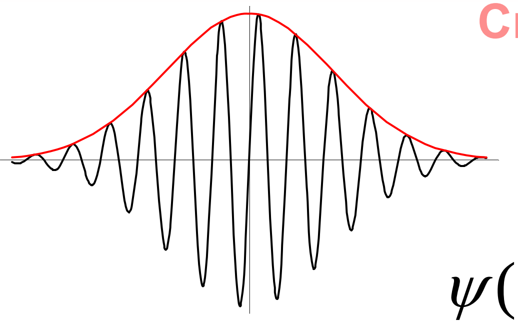
$$\langle x\rangle_t=\int\psi^*(x,t)x\psi(x,t)dx=2\pi i\int a_0(k)e^{i\frac{k^2}{2}t}\frac{\partial}{\partial k}\left(a_0(k)e^{-i\frac{k^2}{2}t}\right)=$$

$$2\pi i\int a_0(k)\left(-ikta_0(k)+\frac{\partial a_0(k)}{\partial k}\right)dx=\langle k\rangle t+\langle x\rangle_0$$

Оператор координаты в импульсном представлении

$$\hat{x}=i\frac{\partial}{\partial k}$$

Волновой пакет



Свободная частица: расплывание пакета

$$\psi(x,t)=\int a_0(k)e^{i(kx-\frac{k^2}{2}t)}dk$$

$$\psi(x,t)=\int a(k,t)e^{ikx}dk,\quad a(k,t)=a_0(k)e^{-i\frac{k^2}{2}t}$$

Дисперсия $\Delta x=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2},\qquad \to\dfrac{\sqrt{\Delta x_t^2-\Delta_{x_0}^2}}{t}$

$$\langle x^2\rangle_t=2\pi\int a_0(k)e^{i\frac{k^2}{2}t}-\frac{\partial^2}{\partial k^2}\left(a_0(k)e^{-i\frac{k^2}{2}t}\right)=2\pi\int a_0(k)\left(-\frac{\partial^2 a_0(k)}{\partial k^2}+k^2t^2a_0(k)\right)dk=$$

$$\langle k^2\rangle t^2+\langle x^2\rangle_0$$

$$\Delta x_t^2-\Delta_{x_0}^2=\langle x^2\rangle_t-\langle x^2\rangle_0-(\langle x\rangle_t^2-\langle x\rangle_0^2)=\langle k^2\rangle t^2-\langle k\rangle^2t^2=\Delta k^2t^2,$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{\Delta x_t^2-\Delta_{x_0}^2}}{t}=\Delta k}$$

Дисперсия координаты растет о временем

Волновой пакет

Принцип неопределенности

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x\psi(x) + \lambda\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right|^2 dx =$$ величина, положительно определенная при любом λ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x\psi(x)|^2 dx + \lambda\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi^*(x)}{\partial x} x\psi(x) + x\psi^*(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right) dx + (\lambda\hbar)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right|^2 dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)|x|^2 \psi(x) dx - \lambda\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x) dx - (\lambda\hbar)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} dx =$$

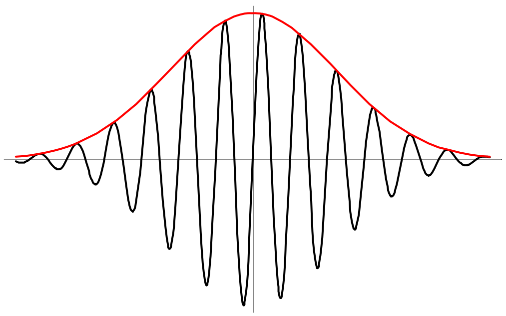
$$\langle x^2 \rangle - \lambda\hbar + \lambda^2 \langle p^2 \rangle$$

$$\boxed{\langle x^2 \rangle - \lambda\hbar + \lambda^2 \langle p^2 \rangle \geq 0}$$

$$\hbar^2 - 4\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \leq 0$$

$$\boxed{\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Волновой пакет



Гауссовский волновой пакет

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2+ibx}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

$$\psi(x,t)=\int a_0(k)\,e^{i\left(kx-\frac{k^2}{2}t\right)}dk,\quad \psi(x,0)=\int a_0(k)\,e^{ikx}dk = Ne^{-\Gamma_0 x^2}$$

$$a_0(k)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,Ne^{-\frac{k^2}{4\Gamma_0}}$$

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\Gamma_0}}\,N\int e^{-\frac{k^2}{4\Gamma_0}+i\left(kx-\frac{k^2}{2}t\right)}dk = \frac{N}{2\sqrt{\pi\Gamma_0}}\int e^{-k^2\left(\frac{1}{4\Gamma_0}-i\frac{t}{2}\right)+ikx}dk =$$

$$\frac{N}{\sqrt{1+2i\Gamma_0 t}}\,e^{-\frac{x^2}{(1/\Gamma_0+2it)}} = Ne^{-\Gamma(t)x^2+i\gamma}$$

Пакет остается Гауссовским

$$\Gamma(t)=\frac{\Gamma_0}{(1+2i\Gamma_0 t)},\quad \gamma=\frac{i}{2}\ln\left(1+2i\Gamma_0 t\right)$$

Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет – минимальная неопределенность

$$a(k)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a}}Ne^{-\frac{k^2}{4\Gamma_0}},\quad \psi(x)=Ne^{-\Gamma_0 x^2}$$

Дисперсия координаты и импульса

$$\left\langle x^2\right\rangle=N^2\int x^2 e^{-2\,\mathrm{Re}(\Gamma_0)x^2}dx=\frac{1}{4\,\mathrm{Re}(\Gamma_0)},$$

$$\left\langle p^2\right\rangle=2\pi N^2\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^2\int e^{-\frac{k^2\,\mathrm{Re}(\Gamma_0)}{4\left|\Gamma_0\right|^2}}k^2dk=\frac{\left|\Gamma_0\right|^2}{\mathrm{Re}(\Gamma_0)}$$

$$\Gamma(t)=\frac{\Gamma_0}{(1+2i\Gamma_0 t)}$$

$$\boxed{\Delta x\Delta p=\frac{1}{2}\sqrt{1+4\Gamma_0^2t^2}}$$

Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе

$$\varphi(x,t) = Ne^{-\Gamma(x-x_0)^2 + ik(x-x_0) + i\gamma}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t) + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = i\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$$

Система уравнений для параметров Гауссова импульса

$$\dot{\Gamma} = -2i\Gamma^2 + \frac{i}{2}\omega^2;$$

$$\dot{x}_0 = k;$$

$$\dot{k} = -\omega^2 x_0;$$

$$\dot{\gamma} = \frac{k^2}{2} - \Gamma - \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2$$

Решение

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= x_0^{(t=0)}\cos\omega t + \frac{k^{(t=0)}}{\omega}\sin\omega t; \\ k &= k^{(t=0)}\cos\omega t - \omega x_0^{(t=0)}\sin\omega t; \end{aligned}}$$

Среднее положение и импульс изменяются по гармоническому закону→колебания классической частицы

Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: когерентное и сжатое состояние

$$\psi(x) = Ne^{-\Gamma(x-x_0)^2+ik(x-x_0)+i\gamma}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)+\frac{1}{2}\omega^2 x^2 = i\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&x_0 = x_0^{(t=0)}\cos\omega t + \frac{k^{(t=0)}}{\omega}\sin\omega t;\\
&k = k^{(t=0)}\cos\omega t - \omega x_0^{(t=0)}\sin\omega t;\\
&\Gamma = a\frac{\Gamma_0\cos\omega t + ia\sin\omega t}{a\cos\omega t + i\Gamma_0\sin\omega t} =\\
&a\frac{2\Gamma_0 a + i(a^2-\Gamma_0^2)\sin 2\omega t}{(a^2+\Gamma_0^2)+\cos 2\omega t(a^2-\Gamma_0^2)}
\end{aligned}}$$

$$a = \frac{\omega}{2}$$

$$a = \Gamma_0, \rightarrow \Gamma = \Gamma_0 = \frac{\omega}{2}$$

Когерентное состояние

$$a \neq \Gamma_0$$

Сжатое состояние

Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: когерентное и сжатое состояние

$$\psi(x) = Ne^{-\Gamma(x-x_0)^2 + ik(x-x_0) + i\gamma}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t) + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = i\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$$

$$x_0 = x_0^{(t=0)}\cos\omega t + \frac{k^{(t=0)}}{\omega}\sin\omega t;$$

$$k = k^{(t=0)}\cos\omega t - \omega x_0^{(t=0)}\sin\omega t;$$

$$\Gamma = a\frac{2\Gamma_0 a + i(a^2 - \Gamma_0^2)\sin 2\omega t}{(a^2 + \Gamma_0^2) + \cos 2\omega t(a^2 - \Gamma_0^2)}$$

$$\gamma = \frac{x_0 k - x_0^{(t=0)}k^{(t=0)}}{2} + \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i\Gamma_0\sin\omega t + a\cos\omega t}{a}\right)$$

$$\gamma = \frac{x_0 k - x_0^{(t=0)}k^{(t=0)}}{2} - \frac{\omega t}{2}$$

$$a \neq \Gamma_0$$

Сжатое состояние

$$a = \Gamma_0, \rightarrow \Gamma = \Gamma_0 = \frac{\omega}{2}$$

Когерентное состояние

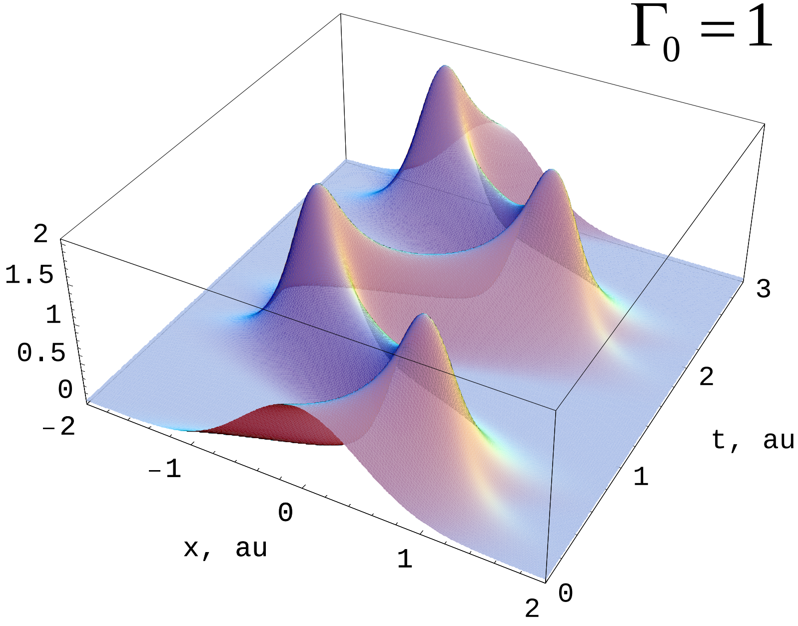
Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: сжатое состояние

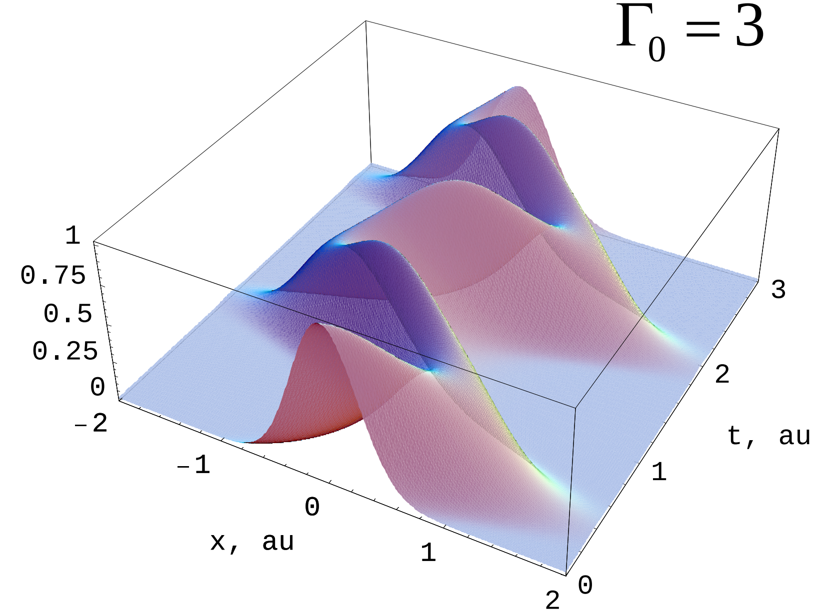
$$x_0^{(t=0)} = 0, k^{(t=0)} = 3, \ \omega = 4$$

$$\left|\psi(x,t)\right|^2$$

$$\Gamma_0 = 1$$



$$\Gamma_0 = 3$$



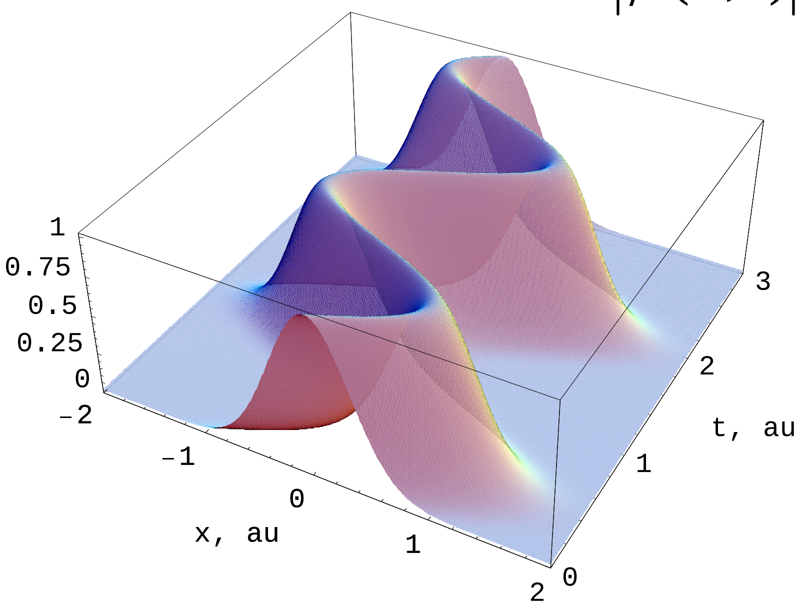
У сжатого состояния ширина меняется со временем

Волновой пакет

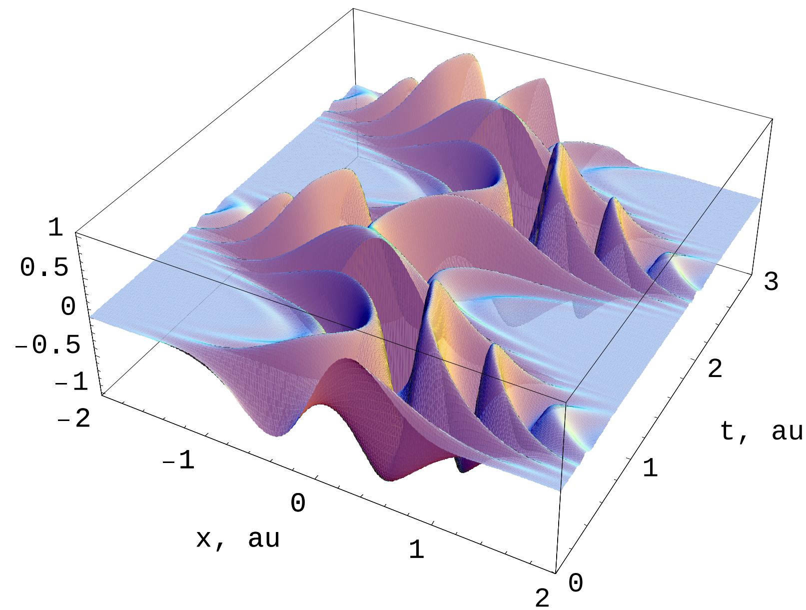
Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: когерентное состояние

$$x_0^{(t=0)} = 0, k^{(t=0)} = 3, \ \omega = 4 \qquad \Gamma_0 = 2$$

$$|\psi(x,t)|^2$$



$$\mathrm{Im}(\psi(x,t))$$



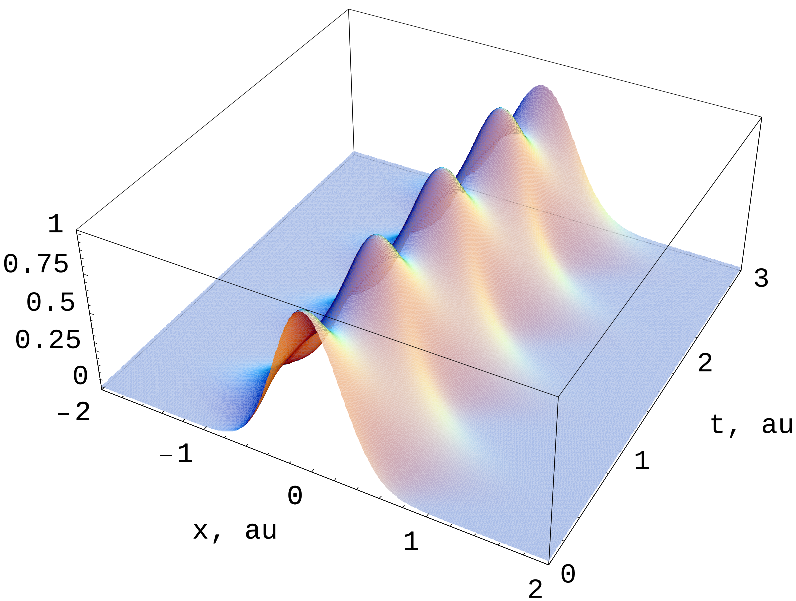
Когерентное состояние эволюционирует не меняя формы

Волновой пакет

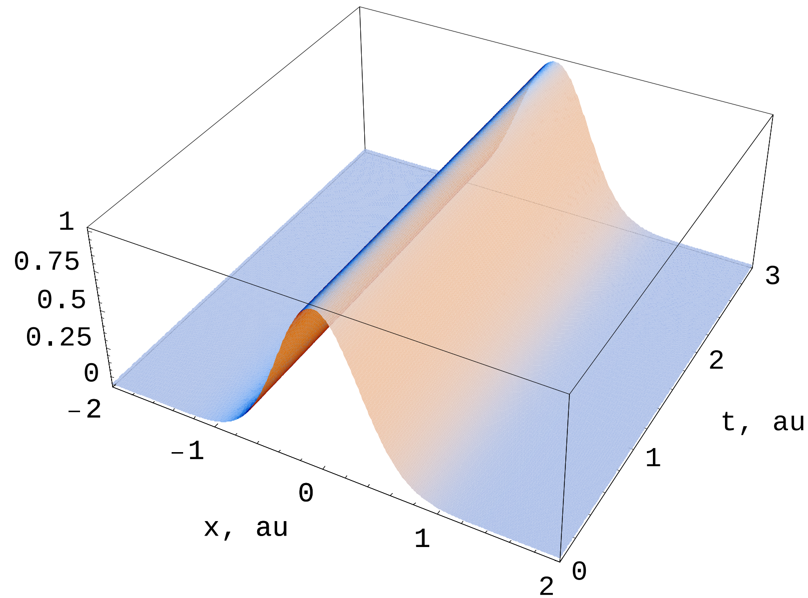
«Покоящийся» Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе

$$x_0^{(t=0)} = 0, k^{(t=0)} = 0, \ \omega = 4$$

$\Gamma_0 = 3$ $\quad |\psi(x,t)|^2$



$|\psi(x,t)|^2$ $\quad \Gamma_0 = 2$



Должно ли стационарное состояние быть когерентным?