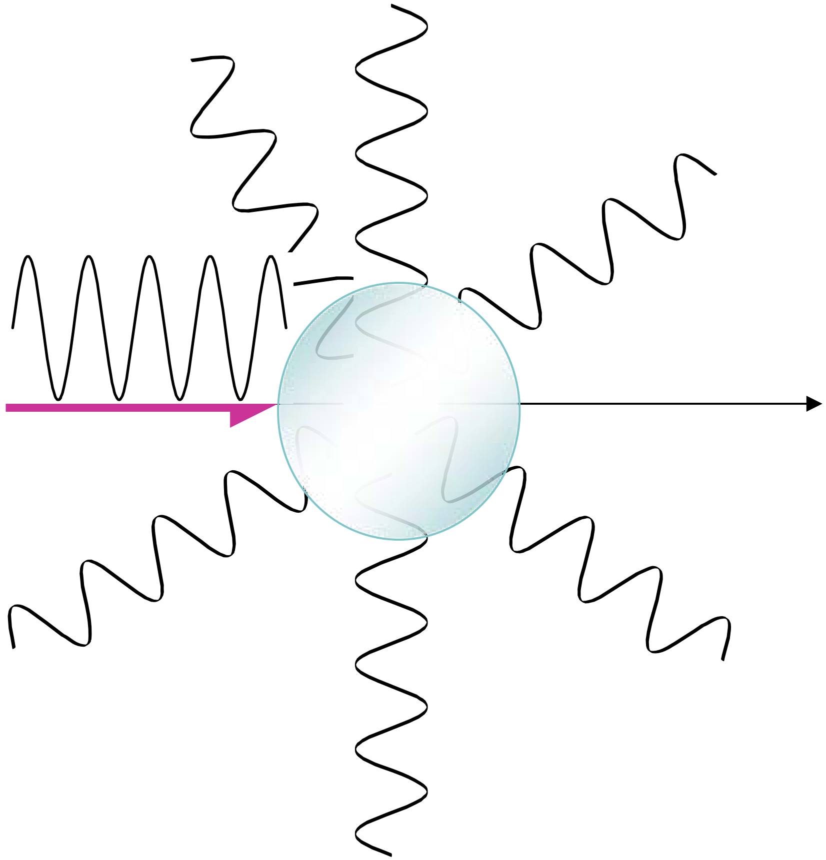
Теория рассеяния

Понятие амплитуды рассеяния



Падающая волна - плоская, отраженные - сферические

Асимптотический вид:

$$\sim e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Плотность потока в расходящейся волне

$$j' = v\frac{1}{r^2}|f|^2 dS \to k|f|^2 d\Omega$$

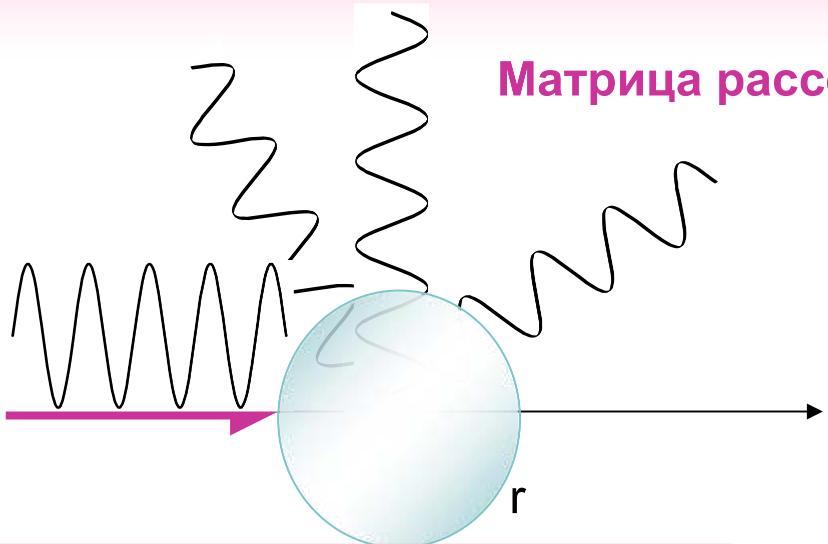
Плотность потока в падающей волне

$$j = v \to k$$

Сечение

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega$$

Теория рассеяния



Матрица рассеяния

Ищем решение, удовлетворяющее

$$\psi(\vec{r}) \to e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr},$$

$$\psi(\vec{r}) = \sum_l A_l P_l(\cos\theta) R_{kl}(r)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 R_{kl}(r)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{kl}(r) + U(r) R_{kl}(r) = E R_{kl}(r)$$

$$R_{kl}(r) \to \frac{2}{r}\sin(kr+\varphi_l) = \frac{2}{r}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) =$$
$$\frac{1}{ir}\left((-i)^l e^{i(kr+\delta_l)} - (i)^l e^{-(kr+\delta_l)}\right)$$

С другой стороны

$$e^{ikz} = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sum_{l=0} (2l+1) i^l J_{l+1/2}(kr) P_l(\cos\theta)$$
$$\to \frac{1}{2ikr} \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta)\left(e^{ikr} + (-1)^{l+1} e^{-ikr}\right)$$

Что бы сократились члены, соответствующие падающей сферической волне

$$A_l = \frac{(2l+1)i^l}{2k} e^{i\delta_l}$$

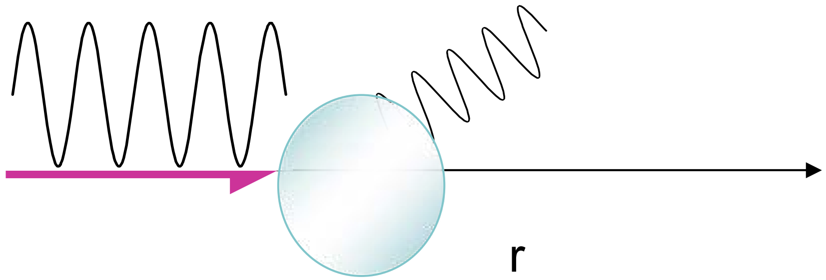
тогда

$$\boxed{f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1)(S_l - 1) P_l(\cos\theta)}$$

где $S_l = e^{2i\delta_l}$ **- матрица рассеяния**

Теория рассеяния

Некоторые свойства амплитуды рассеяния



$$\boxed{f(\theta)=\frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(S_l-1)P_l(\cos\theta)}$$

$S_l=e^{2i\delta_l}$ **- матрица рассеяния**

$$\psi(\vec{r})\to e^{ikz}+\frac{f(n,n')}{r}e^{ikr},$$

Сечение рассеяния

$$\sigma=\int|f(\theta)|^2 d\Omega=\frac{4\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l$$

Оптическая теорема для рассеяния

$$\sigma=\int|f(\theta)|^2 d\Omega=\frac{4\pi}{k}\operatorname{Im}(f(n,n))$$

Теорема взаимности

$$f(n,n')=f(-n',-n)$$

Парциальные характеристики рассеяния

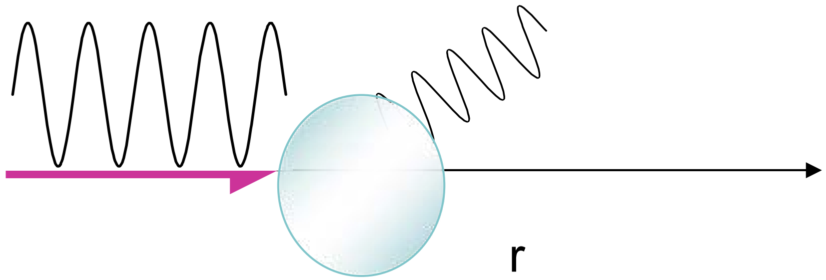
$$f(\theta)=\sum_l (2l+1)f_l P_l(\cos\theta)$$

$$f_l=\frac{1}{2ik}(S_l-1)=\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik}=\frac{1}{k(ctg\delta_l-i)}$$

$$\sigma_l=4\pi(2l+1)|f_l|^2$$

Теория рассеяния

Оптическая теорема для рассеяния



$$\boxed{f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta)}$$

$$\psi(\vec{r}) \to e^{ikr\vec{n}\vec{n}'} + \frac{f(\vec{n},\vec{n}')}{r}e^{ikr},$$

$$\int F(\vec{n})\left(e^{ikr\vec{n}\vec{n}'} + \frac{f(\vec{n},\vec{n}')}{r}e^{ikr}\right)d\Omega = F(-\vec{n}')2\pi i\frac{e^{-ikr}}{kr} - F(\vec{n}')2\pi i\frac{e^{ikr}}{kr} + \frac{e^{ikr}}{r}\int f(\vec{n},\vec{n}')F(\vec{n})d\Omega$$

$$F(-\vec{n}')\frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\left(1 + 2ik\frac{1}{4\pi}\int f(\vec{n},\vec{n}')F(\vec{n})d\Omega\right)$$ Сохранение потока требует унитарности

$$\left(1 + 2ik\frac{1}{4\pi}\int f(\vec{n},\vec{n}')F(\vec{n})d\Omega\right)\left(1 + 2ik\frac{1}{4\pi}\int f(\vec{n},\vec{n}')F(\vec{n})d\Omega\right)^+ = 1$$

$$f(\vec{n},\vec{n}') - f^*(\vec{n}',\vec{n}) = \frac{ik}{2\pi}\int f(\vec{n},\vec{n}'')f^*(\vec{n}',\vec{n}'')d\Omega''$$

Оптическая теорема для рассеяния

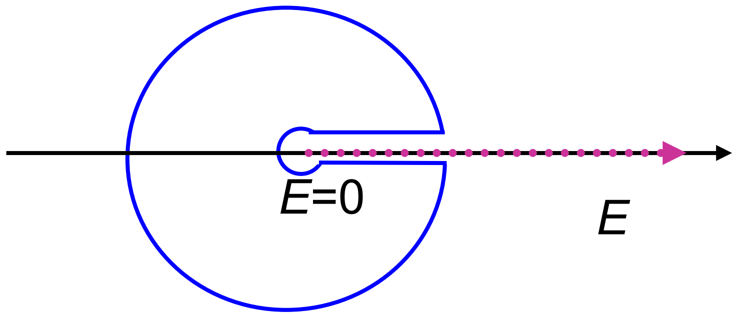
$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}(f(n,n))$$

Теория рассеяния

Дисперсионное соотношение для амплитуды рассеяния

$$\Delta\psi(r)+k^2\psi(r)=2\cdot U(r)\psi(r)$$

Физический лист



Решение в виде запаздывающего потенциала

$$\psi(r)=-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int 2U(r')\psi(r')e^{i(k-k')r'}dv'$$

$$f(0,E)=-\frac{1}{2\pi}\int U(r')\psi(r')e^{-ikz}dv'$$

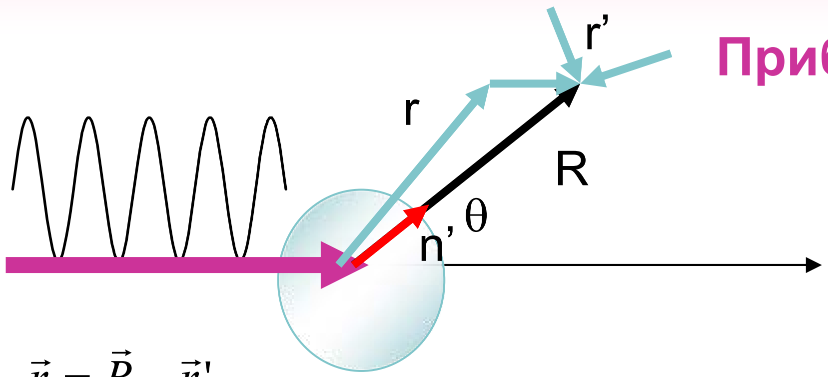
Амплитуда рассеяния регулярна на всем физическом листе, за исключением дискретных состояний спектра

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(0,E')-f_b}{E'-E}dE'$$

$$\boxed{f(0,E)=f_b(0)+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mathrm{Im}(f(0,E'))}{E'-E}dE'+\sum_n\frac{d_n}{E-E_n}}$$

$$d_n=(-1)^{l_n+1}(2l_n+1)\frac{A_{0(n)}^2}{2}$$

Теория рассеяния



Приближение Борна

$$\boxed{f(\theta)=\frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(S_l-1)P_l(\cos\theta)}$$

$$\vec r=\vec R-\vec r\,'$$

$$r=\left|\vec R-\vec r\,'\right|\approx R-\vec n r', \quad R>>r'$$

$$\vec k\,'=\vec n\,'k$$

$$U<<\frac{\hbar^2}{ma^2} \quad \text{или} \quad U<<\frac{\hbar v}{a}=\frac{\hbar^2}{ma^2}ka$$

Ищем решение по теории возмущений

$$\psi(r)=\psi^{(0)}(r)+\psi^{(1)}(r), \quad \psi^{(0)}(r)=e^{ikr}$$

$$\Delta\psi^{(0)}(r)+k^2\psi^{(0)}(r)=2U(r)\psi^{(1)}(r),$$

$$\psi^{(1)}(\vec R)=-\frac{1}{2\pi}\int\psi^{(0)}(\vec r\,')U(\vec r\,')e^{i\vec k\vec r}\frac{d\vec r\,'}{r},$$

$$\psi^{(1)}(\vec R)=-\frac{1}{2\pi}\int U(r')e^{i(kr'+kr)}\frac{dv'}{r}=$$

$$-\frac{e^{i\vec k\vec R}}{2\pi R}\int U(r')e^{i(k-k')r'}dv'$$

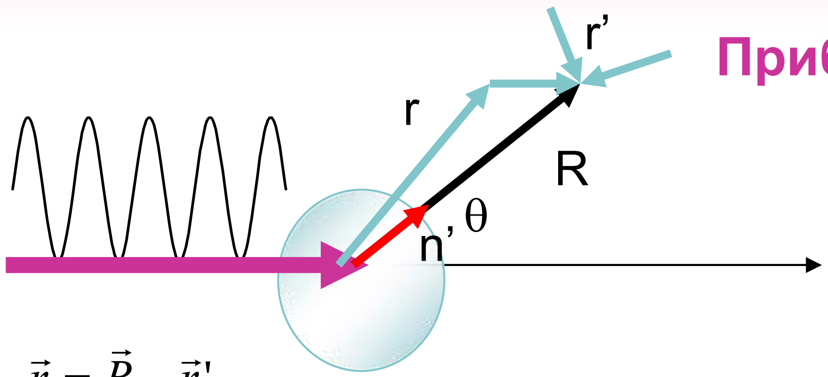
сопоставив с $\psi(\vec r)\to e^{ikz}+\dfrac{f(\theta)}{r}e^{ikr}$

$$\boxed{f=-\frac{1}{2\pi}\int U(r')e^{-i\vec q r'}dv', \quad |\vec q|=|k-k'|=2k\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$f(k,k')=f^{+}(k',k)$$

Для сферически-симметричной системы $\boxed{f=-2\int U(r')\dfrac{\sin\vec q\vec r\,'}{q}r'dr'}$

Теория рассеяния



Приближение Борна

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta)$$

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}\,'$$

$$r = \left|\vec{R} - \vec{r}\,'\right| = R - \vec{n}r', \quad R >> r'$$

$$\vec{k}\,' = \vec{n}\,'k$$

$$U << \frac{\hbar^2}{ma^2}$$ или $$U << \frac{\hbar v}{a} = \frac{\hbar^2}{ma^2}ka$$

$$f = -\frac{1}{2\pi}\int U(r')e^{-i\vec{q}r'}dv', \quad \left|\vec{q}\right| = \left|k - k'\right| = 2k\sin\frac{\theta}{2}$$

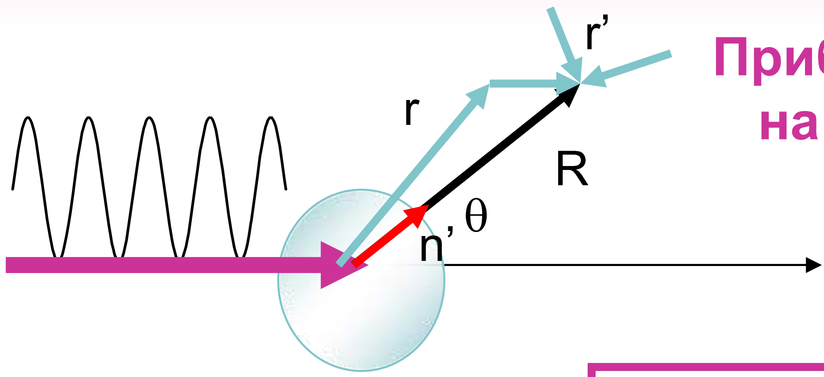
Малые скорости, рассеяние изотропно

$$f = -\frac{1}{2\pi}\int U(r')dv'$$

Большие скорости, рассеяние в угол

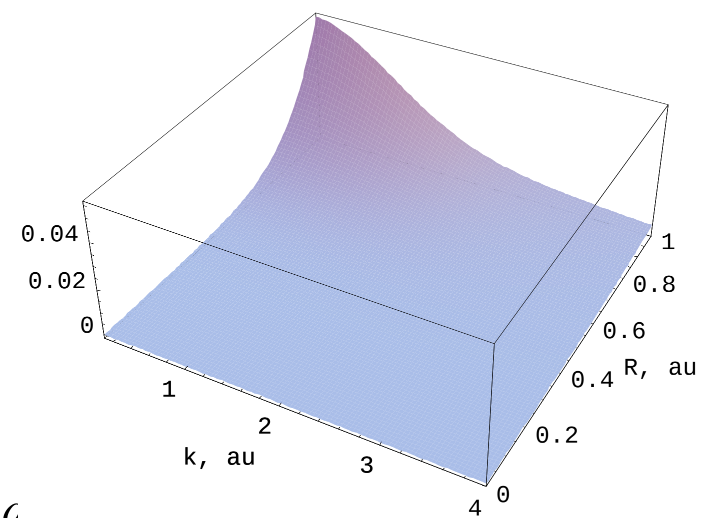
$$\delta\theta \sim \frac{1}{ka}$$

Теория рассеяния



Приближение Борна. Рассеяние на сферическом потенциале

$$\boxed{f=-2\int U(r')\frac{\sin\vec{q}\vec{r}\,'}{q}r'dr'}$$



$$f(q(\theta))=-2\int U(r)\frac{\sin qr}{q}rdr=-2U\frac{\sin qR_0-qR_0\cos qR_0}{q^3}$$

Сечение рассеяния

$$\sigma=\int\left|f(q(\theta))\right|^2d\Omega=\int\left(\frac{\sin(qR_0)-qR_0\cos(qR_0)}{q^3}\right)^2 q$$

$$2\pi(2U)^2\int\left(\frac{\sin(2kR_0\sin\theta/2)-(2kR_0\sin\theta/2)\cos(2kR_0\sin\theta/2)}{(2k\sin\theta/2)^3}\right)^2\sin\theta\,d\theta$$

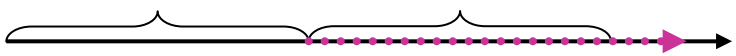
$$=2\pi\frac{U^2R_0^4}{k^2}\left(1-\frac{1}{(2kR_0)^2}+\frac{\sin 4kR_0}{(2kR_0)^3}-\frac{\sin^2 2kR_0}{(2kR_0)^4}\right)$$

Теория рассеяния

Рассеяние при наличии резонанса ***l*=0**

$$\chi = r \cdot \psi(r) = A(E)e^{-\sqrt{2E}r} + B(E)e^{\sqrt{2E}r}$$

Будем рассматривать *E* как комплексную переменную



$$\sqrt{-E} > 0 \qquad \text{E=0} \qquad A(E) = B^*(E)$$

$$A, B \subset \Re$$

$$\chi \approx C\left(e^{i(kr+\delta_0)} - e^{-i(kr+\delta_0)}\right) \qquad\qquad e^{2i\delta_0} = -\frac{A(E)}{B(E)}$$

$$f_0 = \frac{1}{2ik}(e^{2i\delta_0} - 1) = \frac{1}{2\sqrt{-2E}}\left(\frac{A(E)}{B(E)} + 1\right)$$

Дискретные уровни являются простыми полюсами для амплитуды рассеяния

Теория рассеяния

Рассеяние при наличии дискретного состояния в точке E=E$_0$ **l=0**

$$\chi = r\cdot\psi(r) = A(E)e^{-\sqrt{2E}r} + B(E)e^{\sqrt{2E}r}$$

$$\chi''(r) + 2(E - U(r))\chi(r) = 0; \quad \frac{\partial\chi''(r)}{\partial E} + 2(E - U(r))\frac{\partial\chi(r)}{\partial E} = -2\chi(r)$$

$$\chi'(r)\frac{\partial\chi(r)}{\partial E} - \chi(r)\frac{\partial\chi'(r)}{\partial E} = 2\int\chi(r)^2 dr$$

$$A(E) \approx A(E_0) = A_0; \quad B(E) = (E + |E_0|)\frac{\partial B}{\partial E} = (E + |E_0|)\beta$$

$$\beta = -\frac{1}{A_0\sqrt{2|E|}}$$

Вычет

$$f_0 = \frac{1}{2\sqrt{-2E}}\left(\frac{A(E)}{B(E)} + 1\right) \qquad \Rightarrow -\frac{A_0^2}{2}\frac{1}{E + |E_0|}$$

Теория рассеяния

Рассеяние при наличии дискретного состояния в точке $E=E_0$;
Произвольное значение орбитального момента *l*

$$\chi = r \cdot \psi(r) \sim \exp\left(-i \cdot (kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) \right) - \exp\left(i \cdot (kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) \right)$$

$$f_l = \frac{1}{2\sqrt{-2E}} \left((-1)^l \frac{A(E)}{B(E)} + 1 \right)$$

Главный член амплитуды рассеяния

$$f \approx (2l+1) f_l P_l(\cos\theta) = (-1)^{l+1} \frac{A_0^2}{2} \frac{1}{E + |E_0|} (2l+1) P_l(\cos\theta)$$

Теория рассеяния

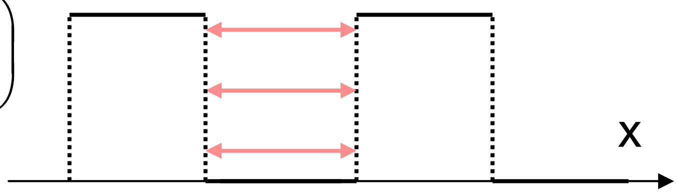
Рассеяние на квазидискретном уровне $E=E_0-i\cdot\Gamma/2$

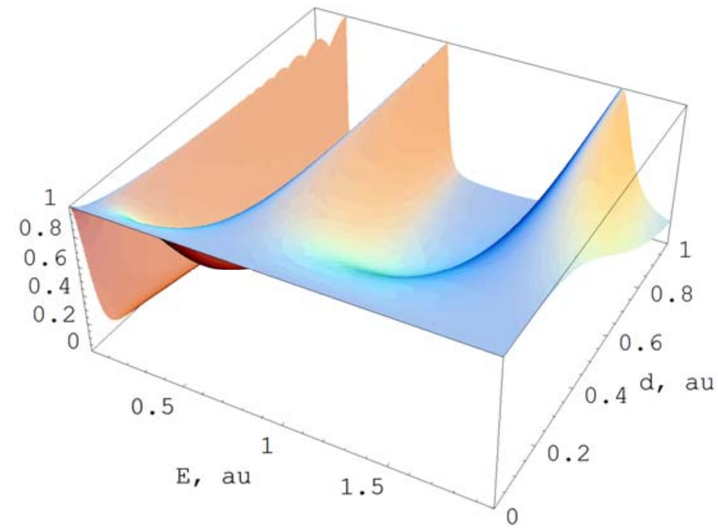
$$\chi \sim \exp(-i\cdot Et) = \exp\left(i\cdot E_0 t - \frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$R \sim \frac{1}{r}\left((E-E_0-\frac{i\Gamma}{2})b_l^+ \exp(i\cdot kr) + (E-E_0+\frac{i\Gamma}{2})b_l \exp(-i\cdot kr)\right)$$

$$e^{2i\delta_l} = \frac{E-E_0-i\cdot\Gamma/2}{E-E_0+i\cdot\Gamma/2}e^{2i\delta_l^{(0)}} = \left(1-\frac{i\cdot\Gamma}{E-E_0+i\cdot\Gamma/2}\right)e^{2i\delta_l^{(0)}}$$

Формирование автоионизационного состояния - резонанса





Где фаза вдали от резонанса

$$e^{2i\delta_l^{(0)}} = \frac{b_l^+}{b_l}$$

$$\delta_l = \delta_l^{(0)} - arctg\frac{\Gamma}{2(E-E_0)}$$

При прохождении вдоль резонанса фаза меняется на π

Полный поток в расходящейся волне должен совпадать с вероятностью распада

$$|b_l|^2 = \frac{1}{k\Gamma}$$

Теория рассеяния

Рассеяние на квазидискретном уровне E=E$_0$-i·Γ/2

$$\boxed{f(\theta) = f^{(0)}(\theta) - \frac{2l+1}{k}\frac{\Gamma/2}{E - E_0 + i\cdot\Gamma/2}e^{2i\delta_l^{(0)}}P_l(\cos\theta)}$$

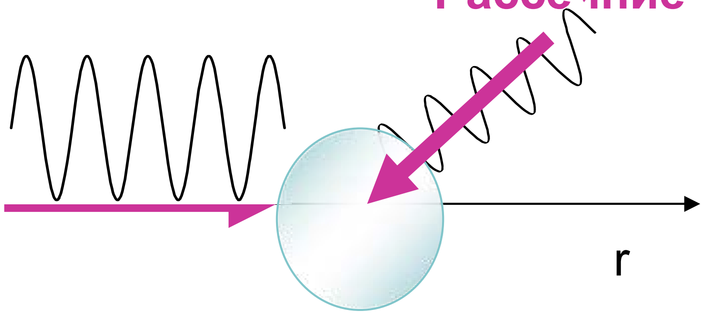
Резонансное рассеяние

Потенциальное рассеяние

$$\boxed{f^{(0)}(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta)}$$

Теория рассеяния

Рассеяние тождественных частиц



$$\psi(\vec{r}) \to e^{ikz} \pm e^{-ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \pm \frac{f(\pi-\theta)}{r} e^{ikr},$$

Волновая функция должна быть симметрична или антисимметрична

$$d\sigma_e = \left| f(\theta) + f(\pi-\theta) \right|^2 d\Omega;$$

$$d\sigma_o = \left| f(\theta) - f(\pi-\theta) \right|^2 d\Omega.$$

Если частицы медленные, то рассеиваются только с четным суммарным спином

Если бы частицы были различимы $d\sigma = \left| f(\theta) \right|^2 d\Omega + \left| f(\pi-\theta) \right|^2 d\Omega.$

Если спин частиц полуцелый

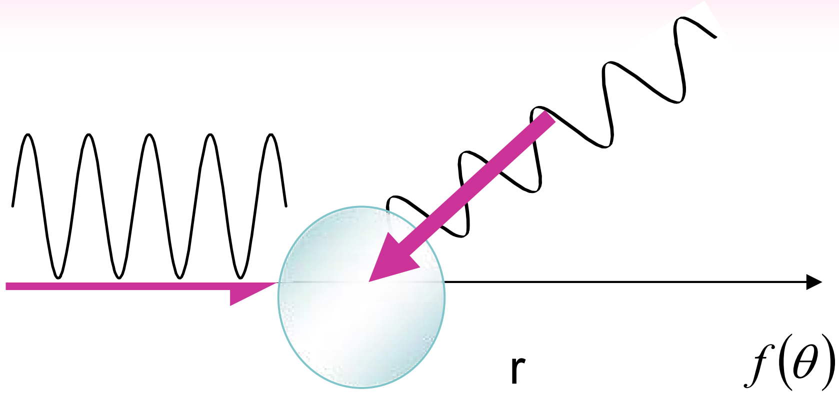
$$d\sigma = \frac{s}{2s+1} d\sigma_e + \frac{s+1}{2s+1} d\sigma_e$$

$$d\sigma = \left\{ \left| f(\theta) \right|^2 + \left| f(\pi-\theta) \right|^2 - \frac{1}{2s+1} \left(f(\theta) \right) f^*(\pi-\theta) + \left(f^*(\theta) \right) f(\pi-\theta) \right\} d\Omega$$

+

Если спин частиц целый

Теория рассеяния



Кулоновское рассеяние

Амплитуда Кулоновского рассеяния

$$f(\theta) = -\frac{1}{2k^2 \sin^2 \theta/2} \frac{\Gamma(1+i/k)}{\Gamma(1-i/k)} \exp\left(-\frac{2i}{k} \ln \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

Для рассеяния двух электронов

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} - \frac{1}{\sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2} \cos\left(\frac{e^2}{v} \ln tg^2 \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

При большой скорости электронов

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{4 - 3\sin^2 \theta}{\sin^4 \theta}$$