ВОЛНЫ СВЕТА И ВЕЩЕСТВА

Е.В. Грызлова

НИИЯФ МГУ

Осенний семестр 2013 г.

1. «Разминка».

2. Плоская волна и понятие волнового пакета – волны вещества:

а) Туннелирование волны через барьер сложной формы: интерференция волн.
б) ослабление поглощения, резонансы.
в) понятие волнового пакет и его эволюция в простых потенциалах.
г) расплывание волнового пакета.
д) Гауссовский пакет, свободный и в потенциале.

3. Системы со сферической симметрией.

4. Начала теории рассеяния.

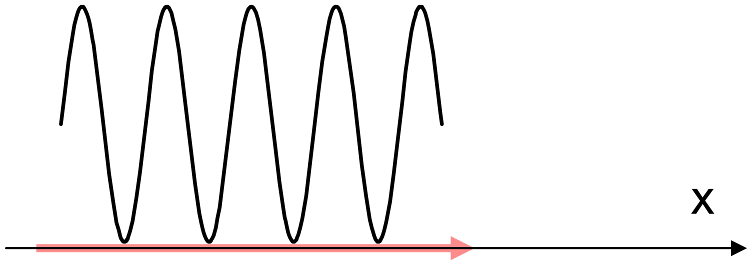
5. Резонансной рассеяния и вопрос о двойных полюсах матрицы рассеяния.

6. Двухуровневая система, связь лазерным полем.

7. Изучение антипротония.

8. Нобелевская премия по физике 2012 года. Изучение одиночной квантовой системы.

Плоская волна



Волновая функция свободной частицы

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(r) = E\cdot\varphi(r) \qquad k_1 = \sqrt{2\cdot E}$$

Волновая функция континуума $\varphi(r) = A_1 e^{ik_1 r} + B_1 e^{-ik_1 r}$

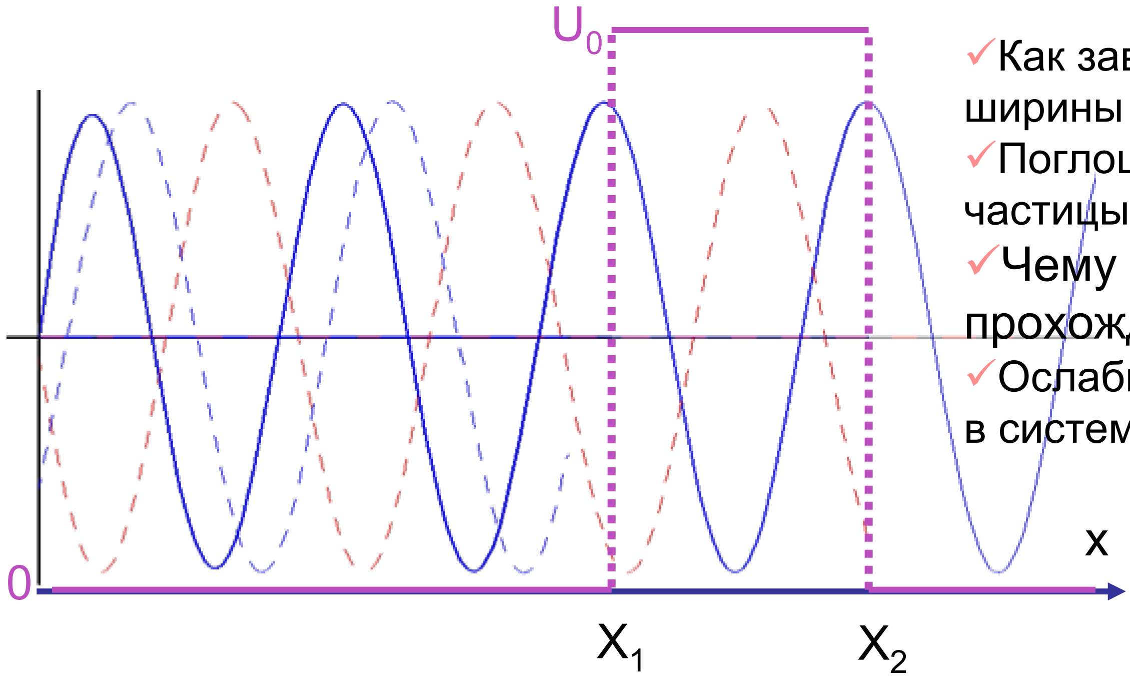
$$\frac{d}{dt}\int|\varphi|^2 dv = \int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\varphi^* + \frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\varphi\right)dv = i\int(\varphi\hat{H}^*\varphi^* - \varphi^*\hat{H}\varphi)dv$$

$$\frac{d}{dt}\int|\varphi|^2 dv = -\frac{i}{2}\int(\varphi\cdot\Delta\varphi^* - \varphi^*\cdot\Delta\varphi)dv = -\int div\ j dv, \quad j = \frac{i}{2}(\varphi\cdot grad\ \varphi^* - \varphi^*\cdot grad\ \varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\int|\varphi|^2 dv + \int div\ j dv = 0$$

$$j = k_1$$

Плоская волна



✓Как зависит поглощение от высоты и ширины барьера?
✓Поглощается ли волна, если энергия частицы выше энергии барьера?
✓Чему равен коэффициент прохождения при E=U0?
✓Ослабится или усилится поглощение в системе из двух барьеров?

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)+V(x)\varphi(x)=E\cdot\varphi(x)$$

$$V(x)=\begin{cases}U_0, & X_1<x<X_2\\ 0\end{cases}$$

Уравнения непрерывности

$$k_1=\sqrt{2\cdot E},\ k_2=\sqrt{2\cdot(U_0-E)}$$

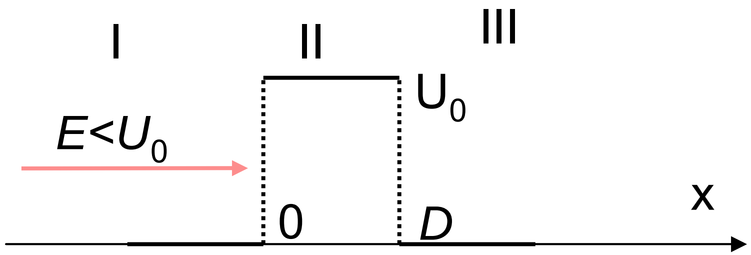
$$A_1e^{ik_1X_1}+B_1e^{-ik_1X_1}=A_2e^{k_2X_1}+B_2e^{-k_2X_1}$$

$$A_1ik_1e^{ik_1X_1}-ik_1B_1e^{-ik_1X_1}=A_2k_2e^{k_2X_1}-k_2B_2e^{-k_2X_1}$$

$$A_2e^{k_2X_2}+B_2e^{-k_2X_2}=A_3e^{ik_1X_2}$$

$$A_2k_2e^{k_2X_2}-k_2B_2e^{-k_2X_2}=A_3ik_1e^{ik_1X_2}$$

Плоская волна



Коэффициент поглощения при прохождении прямоугольного потенциального барьера

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)+V(x)\varphi(x)=E\cdot\varphi(x)$$

$$k_1=\sqrt{2\cdot E},\, k_2=\sqrt{2\cdot(U_0-E)}$$

$$A_2=A_3e^{ik_1D}\frac{k_2+ik_1}{2k_2}e^{-k_2D}$$

$$B_2=A_3e^{ik_1D}\frac{k_2-ik_1}{2k_2}e^{k_2D}$$

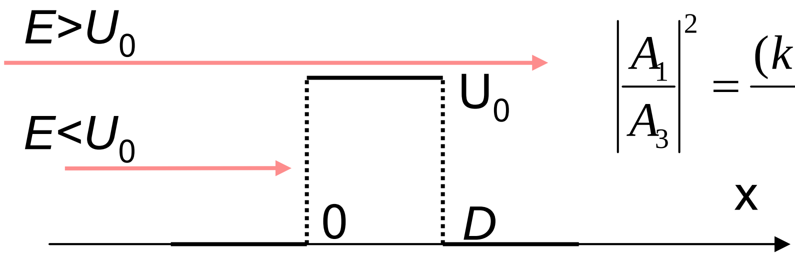
$$A_1=\frac{ik_1+k_2}{2ik_1}A_2+\frac{ik_1-k_2}{2ik_1}B_2=\frac{ik_1+k_2}{2ik_1}\frac{ik_1+k_2}{2k_2}e^{-k_2D}+\frac{ik_1-k_2}{2ik_1}\frac{-ik_1+k_2}{2k_2}e^{-k_2D}=\frac{(ik_1+k_2)^2e^{-k_2D}-(k_2-ik_1)^2e^{k_2D}}{2ik_1 2k_2}$$

$$B_1=\frac{ik_1-k_2}{2ik_1}A_2+\frac{ik_1+k_2}{2ik_1}B_2=\frac{ik_1-k_2}{2ik_1}\frac{ik_1+k_2}{2k_2}e^{-k_2D}+\frac{ik_1+k_2}{2ik_1}\frac{-ik_1+k_2}{2k_2}e^{-k_2D}=(k_1^2+k_2^2)\frac{e^{k_2D}-e^{-k_2D}}{2ik_1 2k_2}$$

$$\left|\frac{A_1}{A_3}\right|^2=\frac{(k_2^2+k_1^2)^2e^{-2k_2D}+(k_2^2+k_1^2)^2e^{2k_2D}-(ik_1+k_2)^4-(k_2-ik_1)^4}{(2k_1 2k_2)^2}=$$

$$\frac{(k_2^2+k_1^2)^2\left(e^{-2k_2D}+e^{2k_2D}\right)-2(k_2^2-k_1^2)^2+4k_1^2k_2^2}{(2k_1 2k_2)^2}=\frac{(k_2^2+k_1^2)^2\left(e^{-2k_2D}+e^{2k_2D}\right)-2(k_2^2+k_1^2)^2+16k_1^2k_2^2}{(2k_1 2k_2)^2}=\frac{(k_2^2+k_1^2)^2Sh^2k_2D+4k_1^2k_2^2}{(2k_1k_2)^2}$$

Плоская волна



$$\left|\frac{A_1}{A_3}\right|^2 = \frac{(k_2^2+k_1^2)^2 e^{-2k_2D} + (k_2^2+k_1^2)^2 e^{2k_2D} - (ik_1+k_2)^4 - (k_2-ik_1)^4}{(2k_1 2k_2)^2}$$

$$A_2 = A_3 e^{ik_1D}\frac{k_2+ik_1}{2k_2}e^{-k_2D}$$

$$B_2 = A_3 e^{ik_1D}\frac{k_2-ik_1}{2k_2}e^{k_2D}$$

$$A_1 = A_3\frac{(ik_1+k_2)^2 e^{-k_2D} - (k_2-ik_1)^2 e^{k_2D}}{2ik_1 2k_2}$$

$$B_1 = A_3(k_1^2+k_2^2)\frac{e^{k_2D}-e^{-k_2D}}{2ik_1 2k_2}$$

Коэффициент поглощения при прохождении прямоугольного потенциального барьера

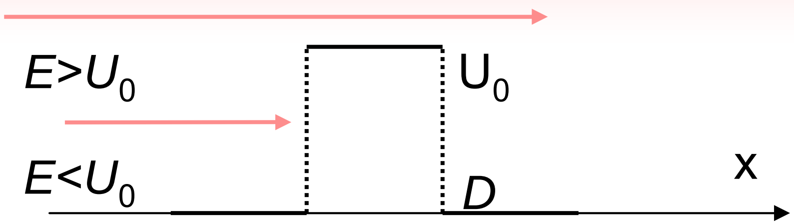
$E<U_0$ $\quad k_1 = \sqrt{2\cdot E},\ k_2 = \sqrt{2\cdot(U_0-E)}$

$$\boxed{\mathrm{D} = \frac{(2k_1k_2)^2}{(k_2^2+k_1^2)^2 Sh^2 k_2D + 4k_1^2k_2^2}}$$

$E>U_0$ $\quad k_1 = \sqrt{2\cdot E},\ k_2 = \sqrt{2\cdot(E-U_0)}$

$$\boxed{\mathrm{D} = \frac{(2k_1k_2)^2}{(k_2^2-k_1^2)^2 Sin^2 k_2D + 4k_1^2k_2^2}}$$

Плоская волна



$$k_1 = \sqrt{2 \cdot E},\ k_2 = \sqrt{2 \cdot (U_0 - E)}$$

Коэффициент поглощения при прохождении прямоугольного потенциального барьера

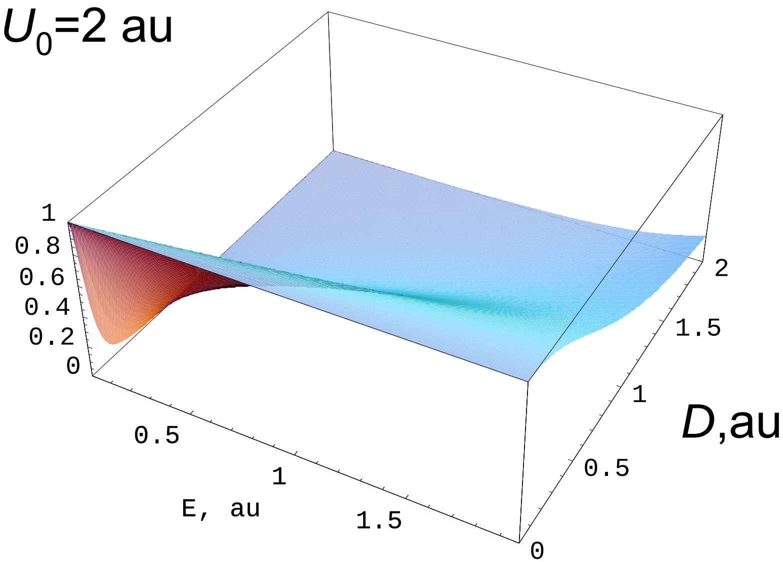
$E<U_0$

$$\boxed{D = \frac{(2k_1k_2)^2}{(k_2^2 + k_1^2)^2 Sh^2 k_2 D + 4k_1^2 k_2^2}}$$

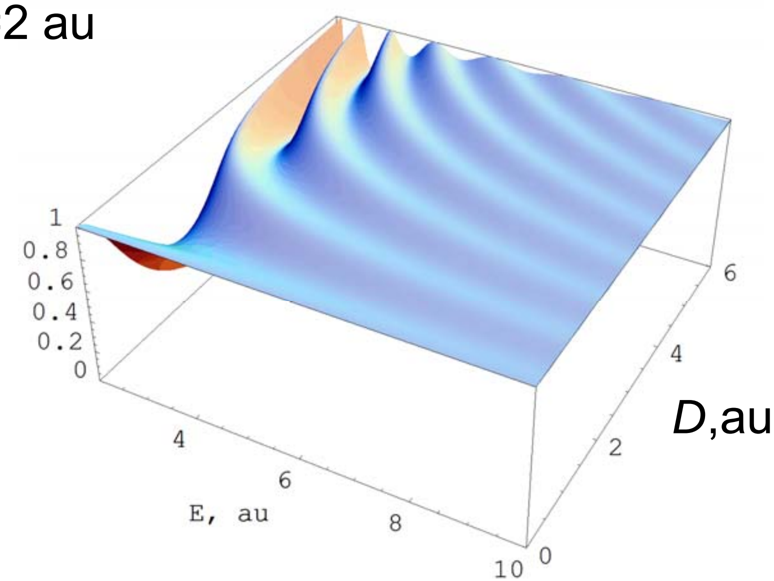
$E>U_0$

$$\boxed{D = \frac{(2k_1k_2)^2}{(k_2^2 - k_1^2)^2 Sin^2 k_2 D + 4k_1^2 k_2^2}}$$

U_0=2 au



U_0=2 au



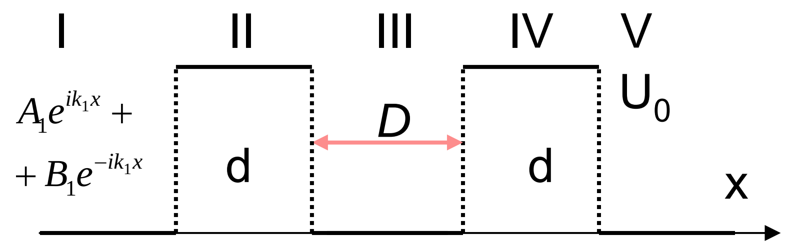
Исследовать поведение коэффициента прохождения при $E=U_0$

Плоская волна

Коэффициент поглощения при прохождении двойного прямоугольного потенциального барьера

$$k_1 = \sqrt{2 \cdot E},\ k_2 = \sqrt{2 \cdot (U_0 - E)}$$

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2};\ \cos\phi_\kappa = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}};\ \sin\phi_\kappa = \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}};$$



$$k_1 = \sqrt{2 \cdot E},\ k_2 = \sqrt{2 \cdot (U_0 - E)}$$

$$A_4 e^{k_2(2d+D)} + B_4 e^{-k_2(2d+D)} = e^{ik_1(2d+D)};$$

$$A_4 k_2 e^{k_2(2d+D)} - B_4 k_2 e^{-k_2(2d+D)} = ik_1 e^{ik_1(2d+D)};$$

$$A_4 = e^{(ik_1-k_2)(2d+D)}(1+i\kappa)/2 = \sqrt{1+\kappa^2}\, e^{(ik_1-k_2)(2d+D)+i\phi_k}/2;$$

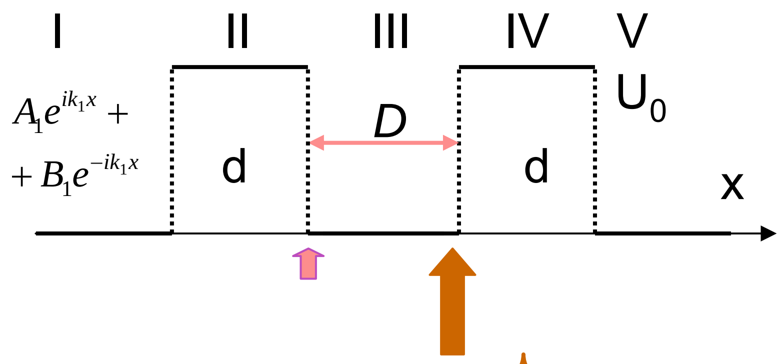
$$B_4 = e^{(ik_1+k_2)(2d+D)}(1-i\kappa)/2 = \sqrt{1+\kappa^2}\, e^{(ik_1+k_2)(2d+D)-i\phi_k}/2;$$

Плоская волна

Коэффициент поглощения при прохождении двойного прямоугольного потенциального барьера

$$k_1 = \sqrt{2\cdot E},\; k_2 = \sqrt{2\cdot(U_0 - E)}$$

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2};\; \cos\phi_\kappa = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}};\; \sin\phi_\kappa = \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}};$$



$$A_3 = \sqrt{1+\kappa^2}^{\,2} e^{ik_1 d}\left[e^{-k_2 d + 2i\phi_k} - e^{k_2 d - 2i\phi_k}\right]/\,4i\kappa$$

$$B_3 = \sqrt{1+\kappa^2}^{\,2} e^{ik_1(3d+2D)}\left[-e^{-k_2 d} + e^{k_2 d}\right]/\,4i\kappa;$$

$$A_2 e^{k_2 d} + B_2 e^{-k_2 d} = A_3 e^{ik_1 d} + B_3 e^{-ik_1 d};$$

$$A_2 k_2 e^{k_2} - B_2 k_2 e^{-k_2 d} = ik_1 A_3 e^{ik_1 d} - iB_3 k_1 e^{-ik_1 d};$$

$$A_2 = \sqrt{1+\kappa^2}\, e^{-k_2 d}\left[A_3 e^{ik_1 d + i\phi_k} + B_3 e^{-ik_1 d - i\phi_k}\right]/\,2 =$$

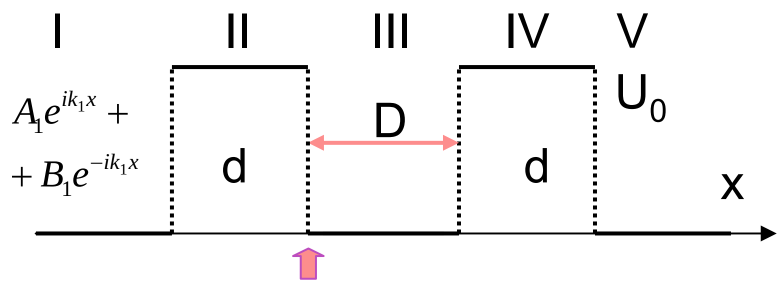
$$\sqrt{1+\kappa^2}^{\,3} e^{ik_1 2d - k_2 d}\left[e^{-k_2 d + i3\phi_k} - e^{-i\phi_k + k_2 d} - e^{ik_1 2D - i\phi_k - k_2 d} + e^{ik_1 2D - i\phi_k + k_2 d}\right]/\,8i\kappa$$

$$B_2 = \sqrt{1+\kappa^2}\, e^{k_2 d}\left[A_3 e^{ik_1 d - i\phi_k} + B_3 e^{-ik_1 d + i\phi_k}\right]/\,2 =$$

$$\sqrt{1+\kappa^2}^{\,3} e^{ik_1 2d + k_2 d}\left[e^{i\phi_k - k_2 d} - e^{k_2 d - 3i\phi_\kappa} - e^{ik_1 2D + i\phi_k - k_2 d} + e^{ik_1 2D + i\phi_k + k_2 d}\right]/\,8i\kappa;$$

Плоская волна

Коэффициент поглощения при прохождении двойного прямоугольного потенциального барьера



$$k_1 = \sqrt{2 \cdot E},\ k_2 = \sqrt{2 \cdot (U_0 - E)}$$

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2};\ \cos\phi_\kappa = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}};\ \sin\phi_\kappa = \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}};$$

$$A_2 = \sqrt{1+\kappa^2}^{\,3} e^{ik_1 2d - k_2 d}\left[e^{-k_2 d + i3\phi_k} - e^{-i\phi_k + k_2 d} - e^{ik_1 2D - i\phi_k - k_2 d} + e^{ik_1 2D - i\phi_k + k_2 d}\right]/8i\kappa$$

$$B_2 = \sqrt{1+\kappa^2}^{\,3} e^{ik_1 2d + k_2 d}\left[e^{i\phi_k - k_2 d} - e^{k_2 d - 3i\phi_\kappa} - e^{ik_1 2D + i\phi_k - k_2 d} + e^{ik_1 2D + i\phi_k + k_2 d}\right]/8i\kappa;$$

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2;$$

$$ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = A_2 k_2 - B_2 k_2;$$

$$A_1 = \sqrt{1+\kappa^2}\left[A_2 e^{i\phi_\kappa} - B_2 e^{-i\phi_\kappa}\right]/2i\kappa$$

$$-\sqrt{1+\kappa^2}^{\,4} e^{ik_1 2d}\left[e^{-2k_2 d + i4\phi_k} - 1 - e^{ik_1 2D - 2k_2 d} + e^{ik_1 2D} - 1 + e^{2k_2 d - 4i\phi_\kappa} + e^{ik_1 2D} - e^{ik_1 2D + 2k_2 d}\right]/16\kappa^2;$$

$$\sqrt{1+\kappa^2}^{\,4} e^{ik_1 2d}\left[2 - e^{-2k_2 d + i4\phi_k} + e^{ik_1 2D - 2k_2 d} - 2e^{ik_1 2D} - e^{2k_2 d - 4i\phi_\kappa} + e^{ik_1 2D + 2k_2 d}\right]/16\kappa^2$$

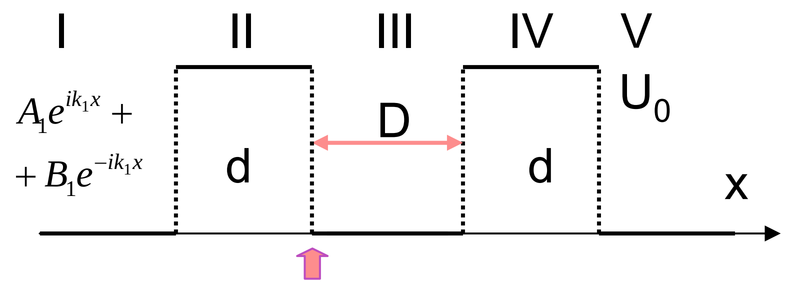
$$\sqrt{1+\kappa^2}^{\,4} e^{ik_1 2d}\left[e^{ik_1 2D}(e^{-k_2 d} - e^{k_2 d})^2 - \left(e^{-k_2 d + i2\phi_k} - e^{k_2 d - 2i\phi_\kappa}\right)^2\right]/16\kappa^2$$

$$\sqrt{1+\kappa^2}^{\,4} e^{ik_1 2d}\left[e^{ik_1 D}(e^{k_2 d} - e^{-k_2 d}) - \left(e^{-k_2 d + i2\phi_k} - e^{k_2 d - 2i\phi_\kappa}\right)\right]\left[e^{ik_1 D}(e^{k_2 d} - e^{-k_2 d}) + \left(e^{-k_2 d + i2\phi_k} - e^{k_2 d - 2i\phi_\kappa}\right)\right]/16\kappa^2$$

Коэффициент прохождения определяется как $\dfrac{1}{|A_5|^2}$ но для анализа удобнее коэффициент отражения

Плоская волна

Коэффициент поглощения при прохождении двойного прямоугольного потенциального барьера



$$k_1 = \sqrt{2\cdot E},\ k_2 = \sqrt{2\cdot(U_0 - E)}$$

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2};\ \cos\phi_\kappa = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}};\ \sin\phi_\kappa = \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}};$$

$$A_2 = \sqrt{1+\kappa^2}^3 e^{ik_1 2d - k_2 d}\left[e^{-k_2 d + i3\phi_k} - e^{-i\phi_k + k_2 d} - e^{ik_1 2D - i\phi_k - k_2 d} + e^{ik_1 2D - i\phi_k + k_2 d}\right]/8i\kappa$$

$$B_2 = \sqrt{1+\kappa^2}^3 e^{ik_1 2d + k_2 d}\left[e^{i\phi_k - k_2 d} - e^{k_2 d - 3i\phi_\kappa} - e^{ik_1 2D + i\phi_k - k_2 d} + e^{ik_1 2D + i\phi_k + k_2 d}\right]/8i\kappa;$$

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2;$$

$$ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = A_2 k_2 - B_2 k_2;$$

$$B_1 = \sqrt{1+\kappa^2}\left[-A_2 e^{-i\phi_\kappa} + B_2 e^{i\phi_\kappa}\right]/2i\kappa =$$

$$-\sqrt{1+\kappa^2}^4 e^{ik_1 2d}\sinh k_2 d\left[e^{2i\phi_k} e^{ik_1 D}\left(e^{-k_2 d - ik_1 D} + e^{ik_1 D + k_2 d}\right) - e^{-2i\phi_k} e^{ik_1 D}\left(e^{-k_2 d + ik_1 D} + e^{-ik_1 D + k_2 d}\right)\right]/16\kappa^2 =$$

$$-\sqrt{1+\kappa^2}^4 e^{ik_1 2d}\sinh k_2 d e^{ik_1 D}\left[\left(e^{2i\phi_k} - e^{-2i\phi_k}\right)\cos k_1 D\cosh k_2 d + i\sin k_1 D\sinh k_2 d\left(e^{2i\phi_k} + e^{-2i\phi_k}\right)\right]/16\kappa^2 =$$

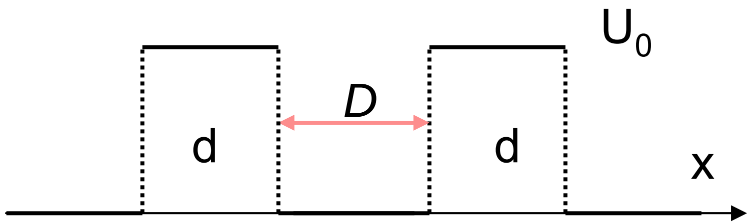
$$-\sqrt{1+\kappa^2}^4 e^{ik_1 2d}\sinh k_2 d e^{ik_1 D} 2i\left[\sin 2\phi_k \cos k_1 D\cosh k_2 d + \sin k_1 D\sinh k_2 d\cos 2\phi_k\right]/16\kappa^2$$

Когда B_1=0, коэффициент прохождения будет единица.

$$\boxed{\begin{gathered}\left[\sin 2\phi_k \cos k_1 D\cosh k_2 d + \cos 2\phi_k \sin k_1 D\sinh k_2 d\right] = 0\\ \sin 2\phi_k \cos k_1 D + \cos 2\phi_k \sin k_1 D\tanh k_2 d \xrightarrow[d\to\infty]{} \sin\left(2\phi_k + k_1 D\right)\end{gathered}}$$

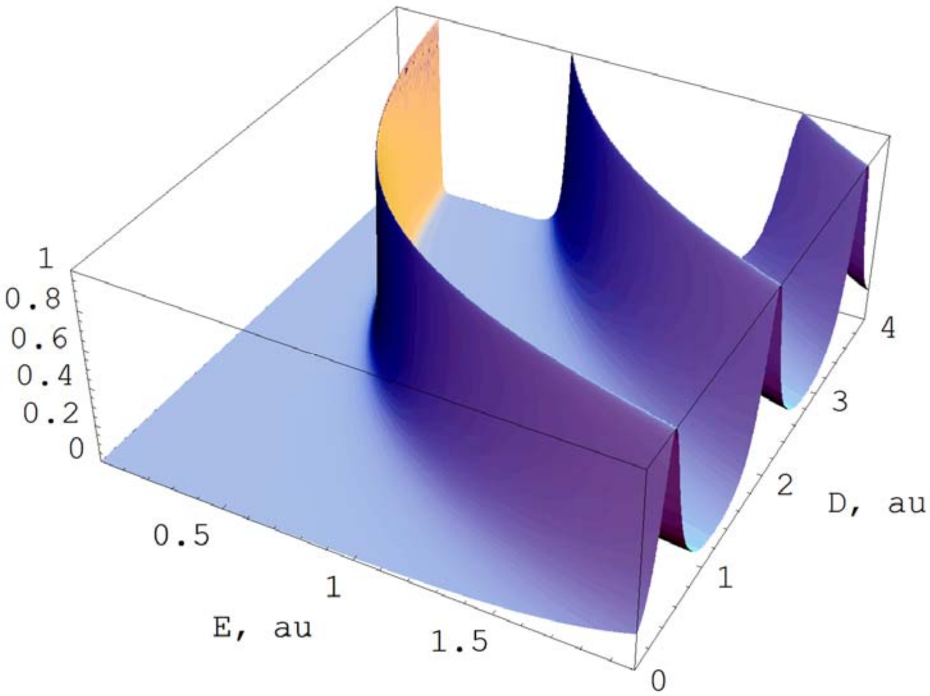
Соответствует собственным значениям ямы ширины *D* и глубины U_0

Плоская волна

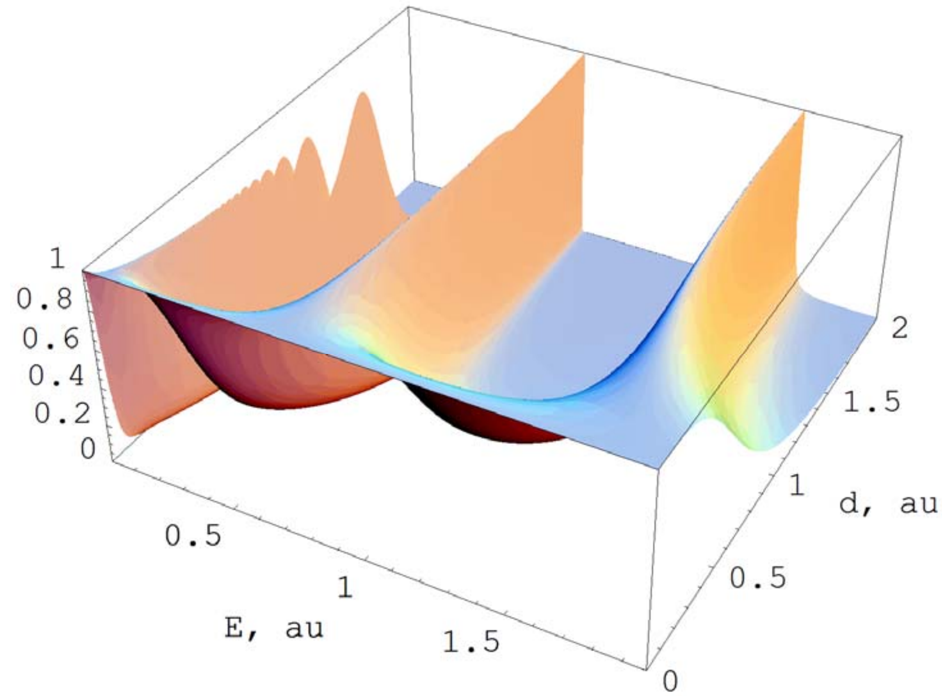


Коэффициент поглощения при прохождении двойного прямоугольного потенциального барьера

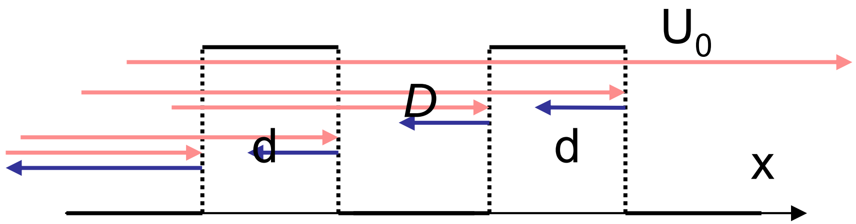
U_0=2 au, d=1 au



U_0=2 au, D=4 au

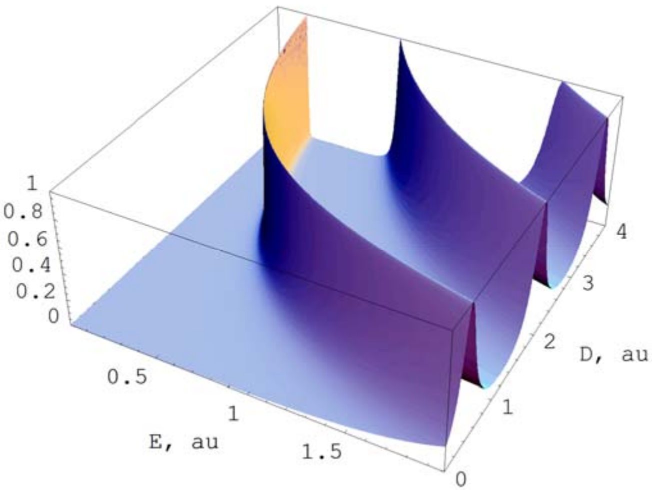


Плоская волна

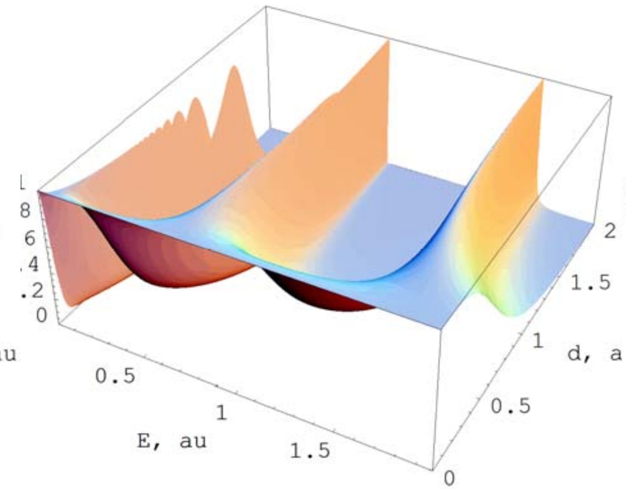


Коэффициент поглощения при прохождении двойного прямоугольного потенциального барьера

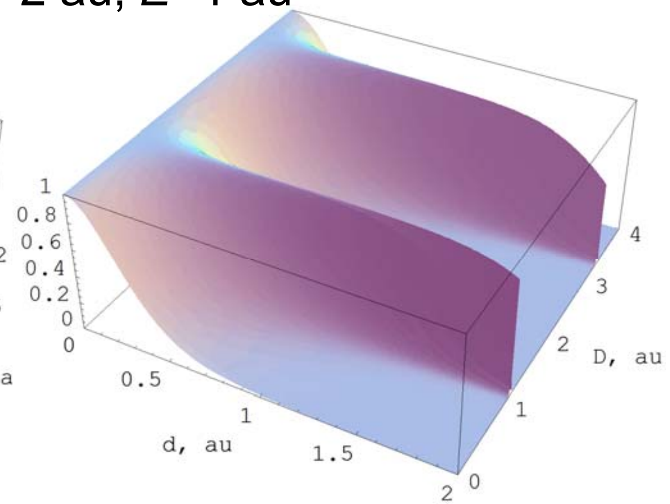
U_0=2 au, d=1 au



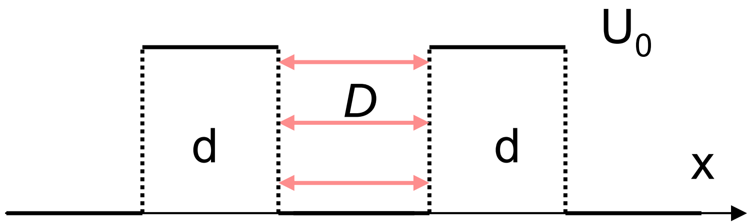
U_0=2 au, D=4 au



U_0=2 au, E=1 au

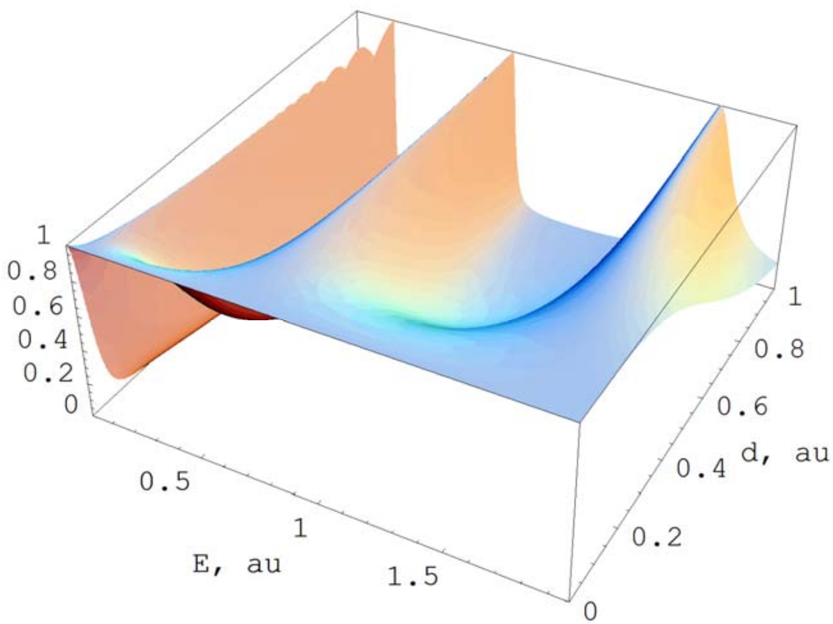


Плоская волна



Автоионизационное (квазидискретное) состояние - резонанс

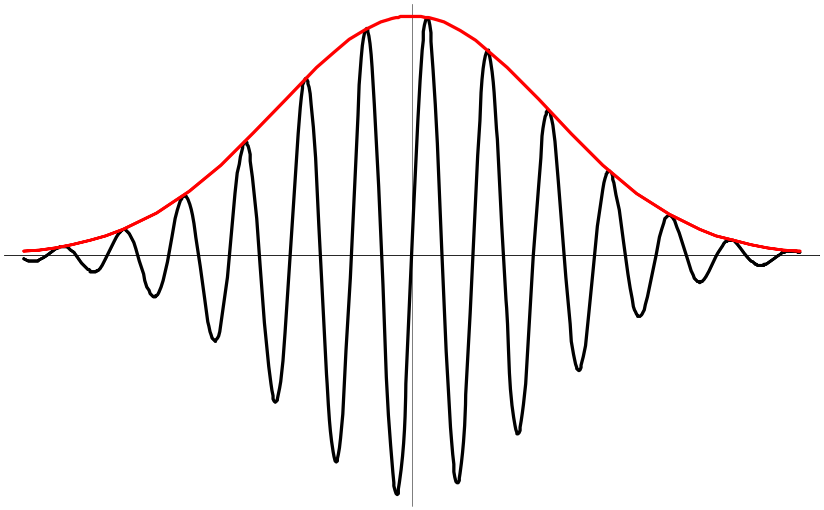
U_0=2 au, D=4 au



E_1=0.20
E_2=0.77
E_3=1.62

Определить ширину автоионизационного состояния

Волновой пакет



Свойства волнового пакета

- ✓Фазовая и групповая скорости.
- ✓Принцип неопределенности.
- ✓Движение свободной частицы.
- ✓Гауссовский волновой пакет.
- ✓Функция минимизирующая неопределенность.
- ✓Волновой пакет в осцилляторе.
- ✓Волновой пакет в прямоугольной яме.

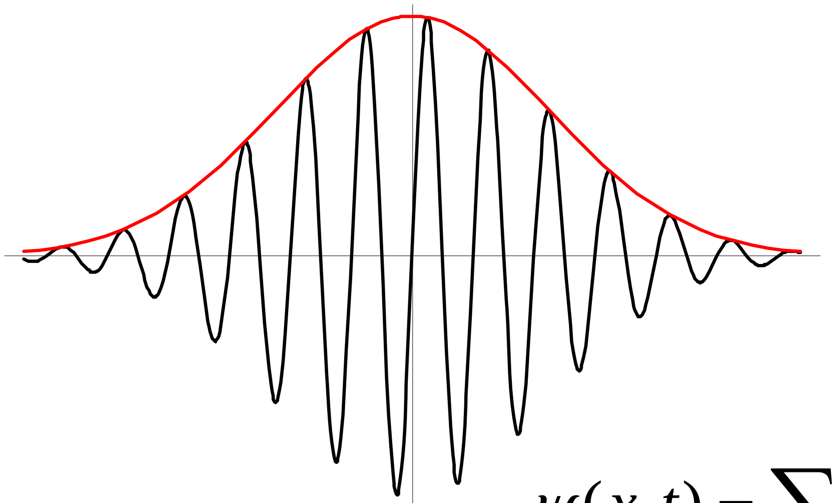
$$E = \frac{E_0}{\delta k}\int_{k-\delta k/2}^{k+\delta k/2} \exp(-i(\omega t - kx))dk = \frac{E_0}{\delta k}\int_{k-\delta k/2}^{k+\delta k/2} \exp\left(-i\left(\omega_0 t + \frac{\partial \omega}{\partial k}(k-k_0)t - kx\right)\right)dk =$$

$$E_0 \frac{\sin\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}t - x\right)\delta k/2}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}t - x\right)\delta k/2}\exp(-i(\omega_0 t - k_0 x))$$

Движение пакета как целого,
групповая скорость

Движение волны,
фазовая скорость

Волновой пакет



Свойства волнового пакета

- ✓Фазовая и групповая скорости.
- ✓Принцип неопределенности.
- ✓Движение свободной частицы.
- ✓Гауссовский волновой пакет.
- ✓Функция минимизирующая неопределенность.
- ✓Волновой пакет в осцилляторе.

$$\psi(x,t) = \sum a_n \psi_n(x) e^{-iE_n t}$$

Волновой пакет свободной частицы

$$\psi(x,t) = \sum a(k) e^{i(kx - \frac{k^2}{2}t)} \qquad \omega(k) = \frac{k^2}{2}.$$

Фазовая и групповая скорости

$$v = \frac{\omega}{k}; \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Волновой пакет

Принцип неопределенности

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\left|x\psi(x)+\lambda\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right|^2dx=$$ величина, положительно определенная при любом λ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x\psi(x)|^2dx+\lambda\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\psi^*(x)}{\partial x}x\psi(x)+x\psi^*(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right)dx+(\lambda\hbar)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right|^2dx=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)|x|^2\psi(x)dx-\lambda\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx-(\lambda\hbar)^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}dx=$$

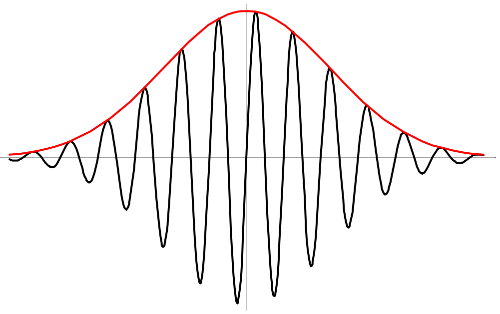
$$\langle x^2\rangle-\lambda\hbar+\lambda^2\langle p^2\rangle$$

$$\boxed{\langle x^2\rangle-\lambda\hbar+\lambda^2\langle p^2\rangle\geq 0}$$

$$\hbar^2-4\langle x^2\rangle\langle p^2\rangle\leq 0$$

$$\boxed{\sqrt{\langle x^2\rangle\langle p^2\rangle}\geq\frac{\hbar}{2}}$$

Волновой пакет



Свободная частица: движение как целого

$$\psi(x,t) = \int a_0(k) e^{i(kx - \frac{k^2}{2}t)} dk, \qquad \omega(k) = \frac{k^2}{2}.$$

$$a_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(x,0) e^{-ikx} dx$$

нормировка $\int a(k,t)^* a(k,t) dk = 1/2\pi$

$$\psi(x,t) = \int a(k,t) e^{ikx} dk, \quad a(k,t) = a_0(k) e^{-i\frac{k^2}{2}t}$$

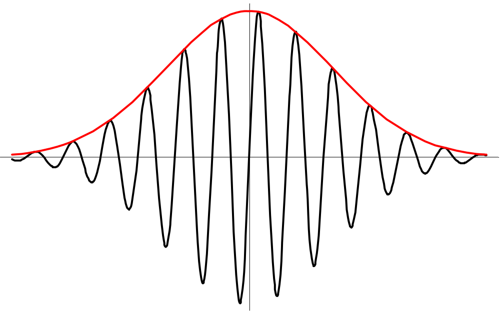
Изменение среднего положения частицы

$$\langle x \rangle_t = \int \psi^*(x,t) x \psi(x,t) dx = 2\pi i \int a_0(k) e^{i\frac{k^2}{2}t} \frac{\partial}{\partial k}\left(a_0(k) e^{-i\frac{k^2}{2}t} \right) =$$

$$2\pi i \int a_0(k) \left(-ikt a_0(k) + \frac{\partial a_0(k)}{\partial k} \right) dx = \langle k \rangle t + \langle x \rangle_0$$

Оператор координаты в импульсном представлении $\hat{x} = i\frac{\partial}{\partial k}$

Волновой пакет



Свободная частица: расплывание пакета

$$\psi(x,t)=\int a_0(k)e^{i(kx-\frac{k^2}{2}t)}dk$$

$$\psi(x,t)=\int a(k,t)e^{ikx}dk,\quad a(k,t)=a_0(k)e^{-i\frac{k^2}{2}t}$$

Дисперсия $\Delta x=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2},\quad \to\sqrt{\Delta x_t^2-\Delta x_0^2}\,/\,t$

Изменение дисперсии со временем характеризует «расплывание» волнового пакета

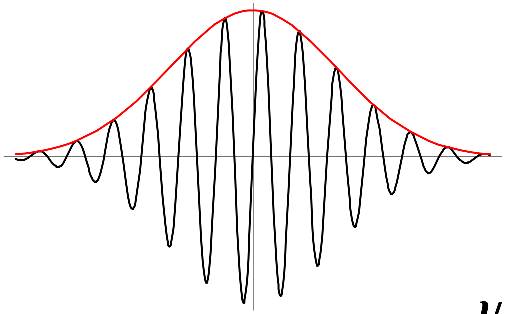
$$\langle x^2\rangle_t=2\pi\int a_0(k)e^{i\frac{k^2}{2}t}\left[-\frac{\partial^2}{\partial k^2}\left(a_0(k)e^{-i\frac{k^2}{2}t}\right)\right]=$$

$$2\pi\int a_0(k)\left(-\frac{\partial^2 a_0(k)}{\partial k^2}+k^2t^2a_0(k)-2ikta_0(k)-it\frac{\partial a_0(k)}{\partial k}\right)dk=\langle k^2\rangle t^2+\langle x^2\rangle_0$$

$$\Delta x_t^2-\Delta x_0^2=\langle x^2\rangle_t-\langle x^2\rangle_0-(\langle x\rangle_t^2-\langle x\rangle_0^2)=\langle k^2\rangle t^2-\langle k\rangle^2t^2=\Delta k^2t^2,$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{\Delta x_t^2-\Delta x_0^2}}{t}=\Delta k}$$

Волновой пакет



Гауссовский волновой пакет

Начальный момент времени

$$\psi(x,0)=\int a_0(k)e^{ikx}dk = Ne^{-\Gamma_0 x^2} \qquad a_0(k)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\Gamma_0}}Ne^{-\frac{k^2}{4\Gamma_0}}$$

Эволюция

$$\psi(x,t)=\int a_0(k)e^{i(kx-\frac{k^2}{2}t)}dk,$$

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\Gamma_0}}N\int e^{-\frac{k^2}{4\Gamma_0}+i(kx-\frac{k^2}{2}t)}dk=\frac{N}{2\sqrt{\pi\Gamma_0}}\int e^{-k^2\left(\frac{1}{4\Gamma_0}-i\frac{t}{2}\right)+ikx}dk=$$

$$\frac{N}{\sqrt{1+2i\Gamma_0 t}}e^{-\frac{x^2}{(1/\Gamma_0+2it)}}=Ne^{-\Gamma(t)x^2+i\gamma}$$

Пакет остается Гауссовским

$$\Gamma(t)=\frac{\Gamma_0}{(1+2i\Gamma_0 t)}, \qquad \gamma=\frac{i}{2}\ln\left(1+2i\Gamma_0 t\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ax^2+ibx}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет – минимальная неопределенность

$$a(k) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\Gamma_0}}Ne^{-\frac{k^2}{4\Gamma_0}}, \quad \psi(x) = Ne^{-\Gamma_0 x^2}$$

Дисперсия координаты и импульса

$$\langle x^2 \rangle = N^2 \int x^2 e^{-2\,\mathrm{Re}(\Gamma_0)x^2} dx = \frac{1}{4\,\mathrm{Re}(\Gamma_0)},$$

$$\langle p^2 \rangle = 2\pi N^2 \left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\Gamma_0}}\right)^2 \int e^{-\frac{k^2\,\mathrm{Re}(\Gamma_0)}{4|\Gamma_0|^2}} k^2 dk = \frac{|\Gamma_0|^2}{\mathrm{Re}(\Gamma_0)}$$

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma_0}{(1+2i\Gamma_0 t)}$$

$$\boxed{\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\Gamma_0^2 t^2}}$$

Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе

$$\varphi(x,t) = Ne^{-\Gamma(x-x_0)^2+ik(x-x_0)+i\gamma}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t) + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = i\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$$

Система уравнений для параметров Гауссова импульса

$$\dot{\Gamma} = -2i\Gamma^2 + \frac{i}{2}\omega^2;$$

$$\dot{x}_0 = k;$$

$$\dot{k} = -\omega^2 x_0;$$

$$\dot{\gamma} = \frac{k^2}{2} - \Gamma - \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2$$

Решение

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= x_0^{(t=0)}\cos\omega t + \frac{k^{(t=0)}}{\omega}\sin\omega t; \\ k &= k^{(t=0)}\cos\omega t - \omega x_0^{(t=0)}\sin\omega t; \end{aligned}}$$

Среднее положение и импульс изменяются по гармоническому закону

Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: когерентное и сжатое состояние

$$\psi(x) = Ne^{-\Gamma(x-x_0)^2+ik(x-x_0)+i\gamma}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)+\frac{1}{2}\omega^2x^2 = i\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$$

$$x_0 = x_0^{(t=0)}\cos\omega t + \frac{k^{(t=0)}}{\omega}\sin\omega t;$$

$$k = k^{(t=0)}\cos\omega t - \omega x_0^{(t=0)}\sin\omega t;$$

$$\Gamma = a\frac{\Gamma_0\cos\omega t + ia\sin\omega t}{a\cos\omega t + i\Gamma_0\sin\omega t} =$$

$$a\frac{2\Gamma_0 a + i(a^2-\Gamma_0^2)\sin 2\omega t}{(a^2+\Gamma_0^2)+\cos 2\omega t(a^2-\Gamma_0^2)}$$

$$a = \frac{\omega}{2}$$

$$a = \Gamma_0, \rightarrow \Gamma = \Gamma_0 = \frac{\omega}{2}$$

Когерентное состояние

$$a \neq \Gamma_0$$

Сжатое состояние

Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: когерентное и сжатое состояние

$$\psi(x) = Ne^{-\Gamma(x-x_0)^2 + ik(x-x_0) + i\gamma}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t) + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = i\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}$$

$$x_0 = x_0^{(t=0)}\cos\omega t + \frac{k^{(t=0)}}{\omega}\sin\omega t;$$

$$k = k^{(t=0)}\cos\omega t - \omega x_0^{(t=0)}\sin\omega t;$$

$$\Gamma = a\frac{2\Gamma_0 a + i(a^2 - \Gamma_0^2)\sin 2\omega t}{(a^2 + \Gamma_0^2) + \cos 2\omega t(a^2 - \Gamma_0^2)}$$

$$\gamma = \frac{x_0 k - x_0^{(t=0)} k^{(t=0)}}{2} + \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i\Gamma_0\sin\omega t + a\cos\omega t}{a}\right)$$

$$\gamma = \frac{x_0 k - x_0^{(t=0)} k^{(t=0)}}{2} - \frac{\omega t}{2}$$

$$a \neq \Gamma_0$$

Сжатое состояние

$$a = \Gamma_0, \rightarrow \Gamma = \Gamma_0 = \frac{\omega}{2}$$

Когерентное состояние

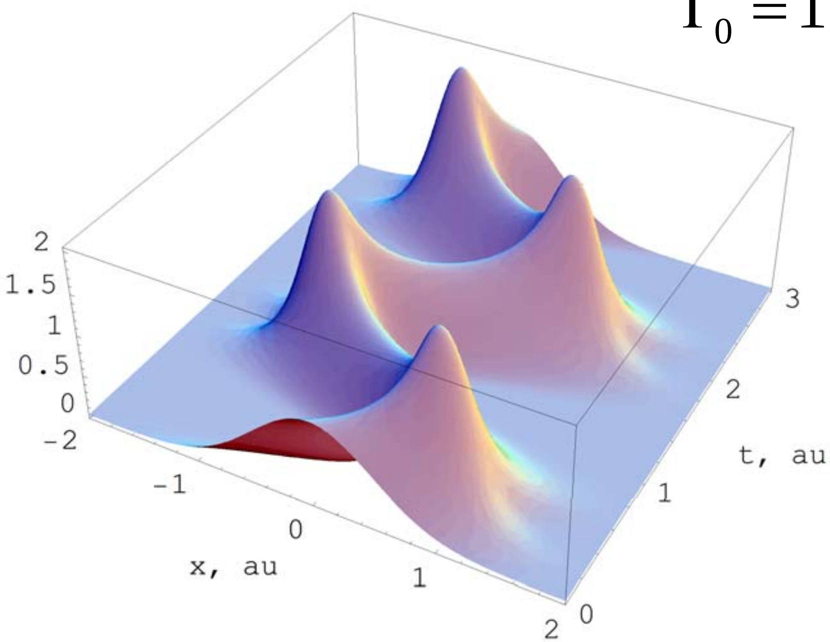
Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: сжатое состояние

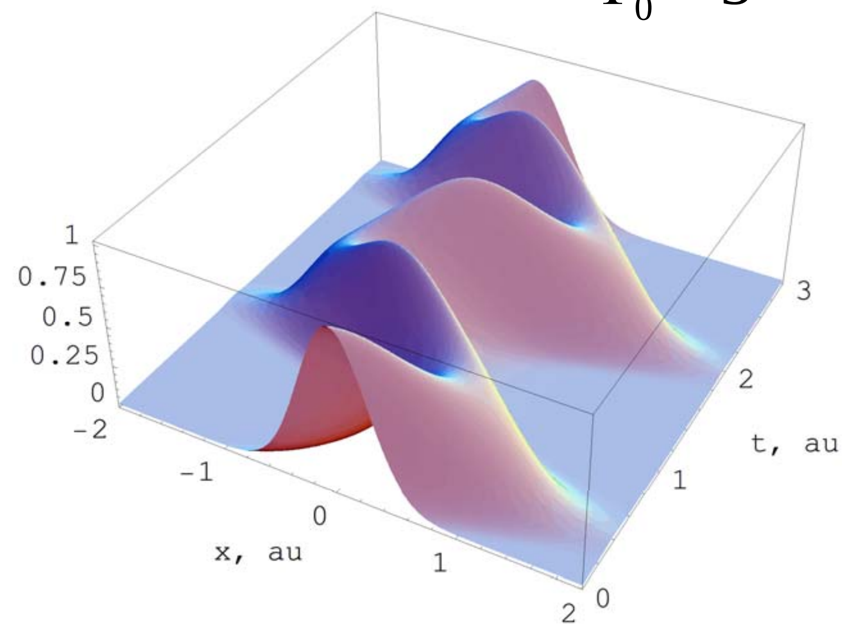
$$x_0^{(t=0)} = 0, k^{(t=0)} = 3, \ \omega = 4$$

$$|\psi(x,t)|^2$$

$$\Gamma_0 = 1$$



$$\Gamma_0 = 3$$



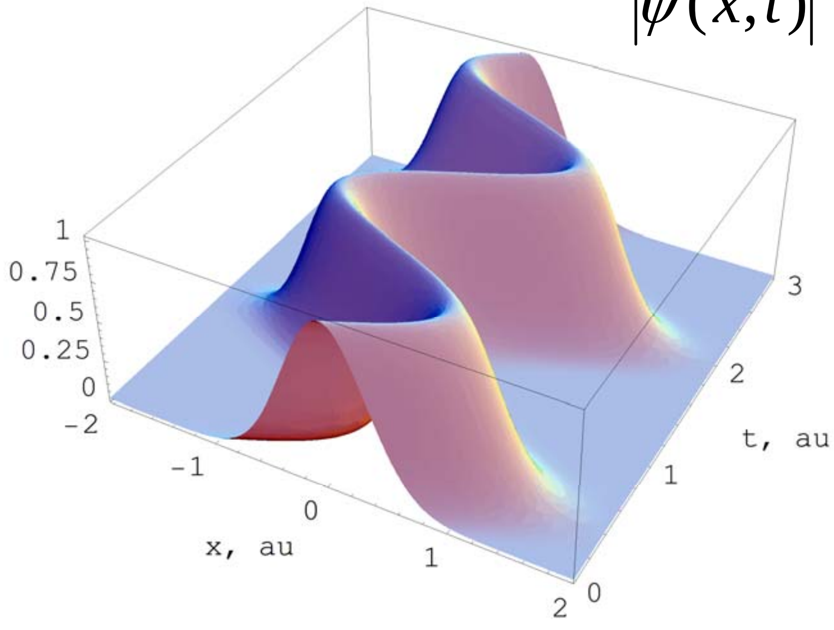
Волновой пакет

Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: когерентное состояние

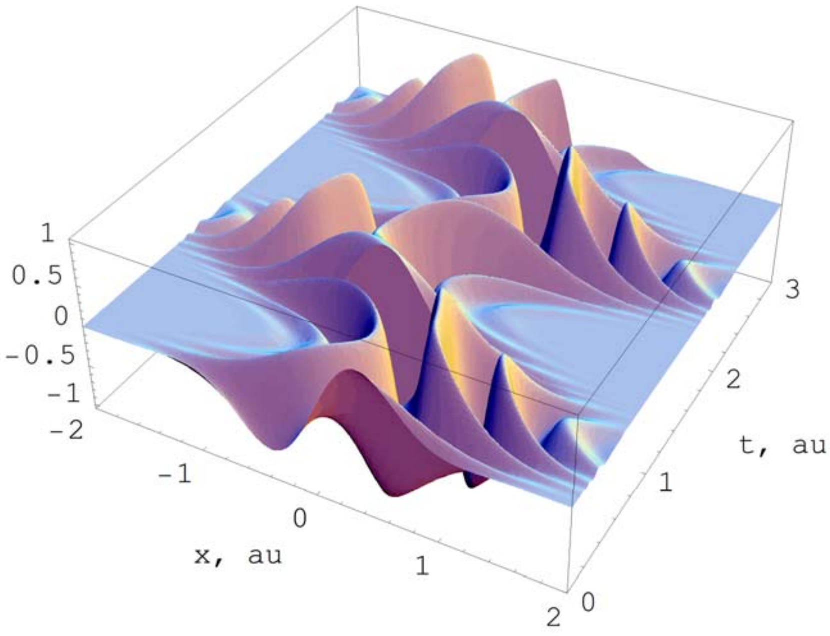
$$x_0^{(t=0)} = 0,\, k^{(t=0)} = 3,\;\; \omega = 4$$

$$\Gamma_0 = 2$$

$$|\psi(x,t)|^2$$



$$\mathrm{Im}(\psi(x,t))$$

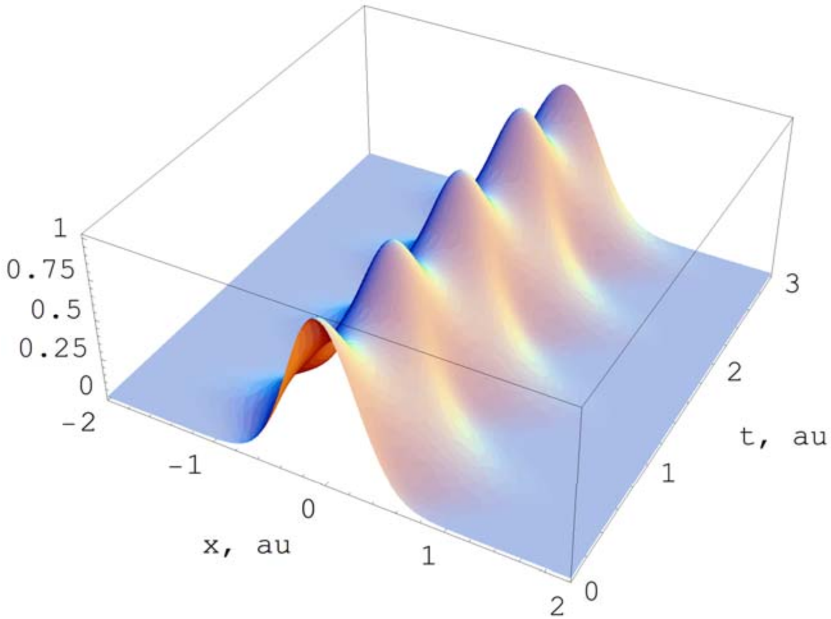


Волновой пакет

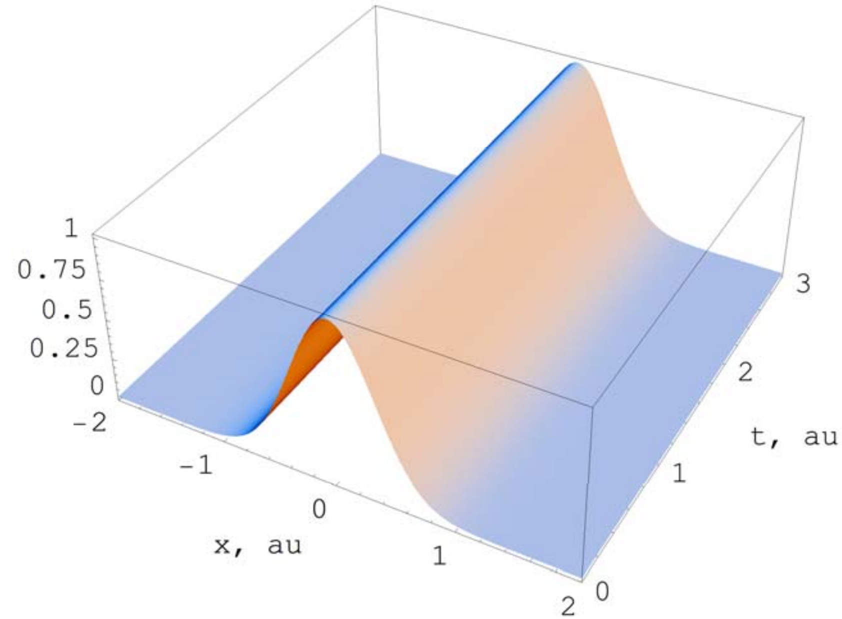
«Покоящийся» Гауссовский волновой пакет в гармоническом осцилляторе: когерентное состояние-стационарное состояние

$$x_0^{(t=0)} = 0, k^{(t=0)} = 0, \ \omega = 4$$

$\Gamma_0 = 3$ $\qquad |\psi(x,t)|^2$

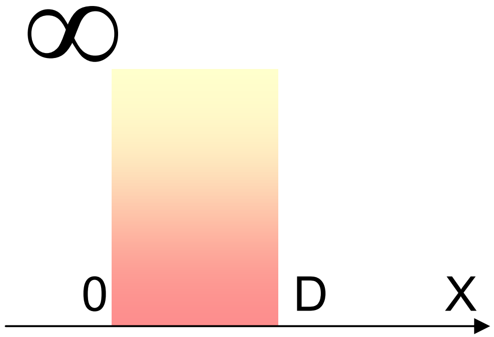


$|\psi(x,t)|^2$ $\qquad \Gamma_0 = 2$



Волновой пакет

Эволюция пакета в прямоугольном потенциале



$$E_n = \frac{\pi^2 n^2}{2D^2}, \psi_n(x) = \sin\sqrt{2E_n}\,x$$

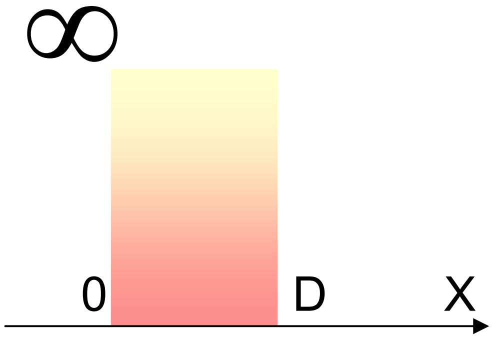
$$\Psi(x,t) = \sum_n a_n \exp(-iE_n t)\psi_n(x);$$

$$a_n = \int \Psi(x,0)\psi_n(x)dx$$

$$\Psi(x,0) = \psi_1(x) \qquad \Psi(x,0) = \frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)}{\sqrt{2}} \qquad \Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{D}}$$

Волновой пакет

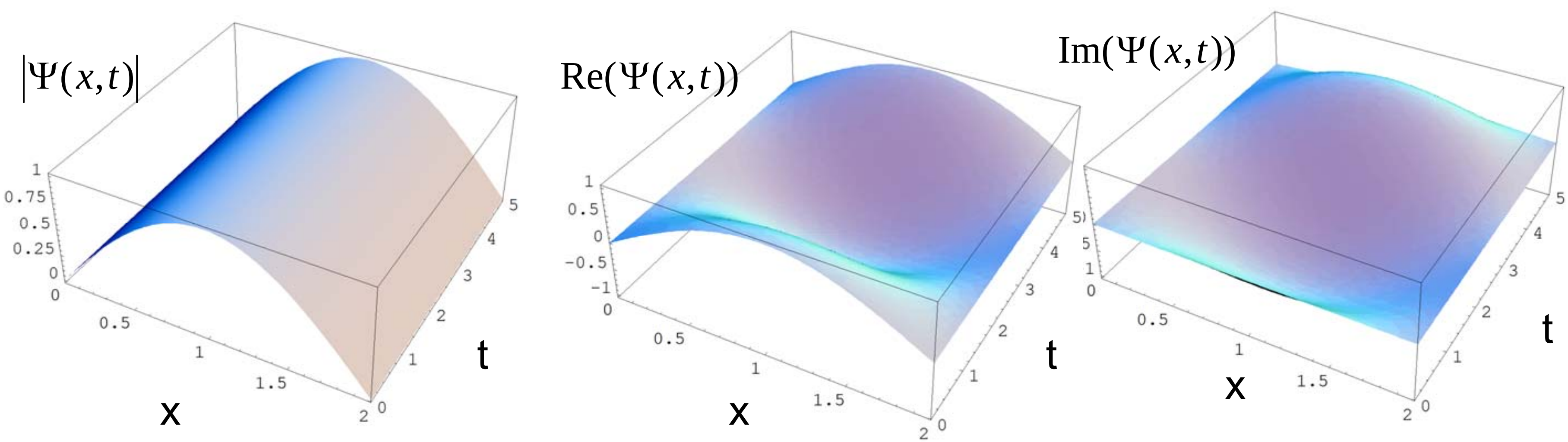
Эволюция пакета в прямоугольном потенциале



$$E_n = \frac{\pi^2 n^2}{2D^2}, \psi_n(x) = \sin\sqrt{2E_n}\,x$$

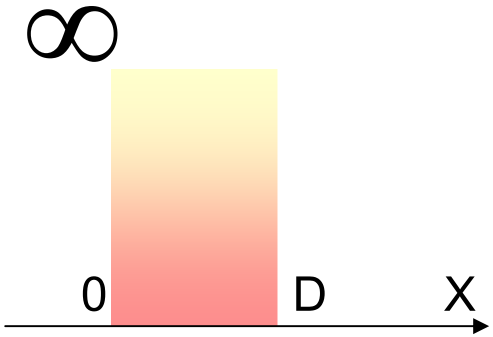
$$\Psi(x,t) = \sum_n a_n \exp(-iE_n t)\psi_n(x); \quad a_n = \int \Psi(x,0)\psi_n(x)dx$$

$$\Psi(x,0) = \psi_1(x)$$



Волновой пакет

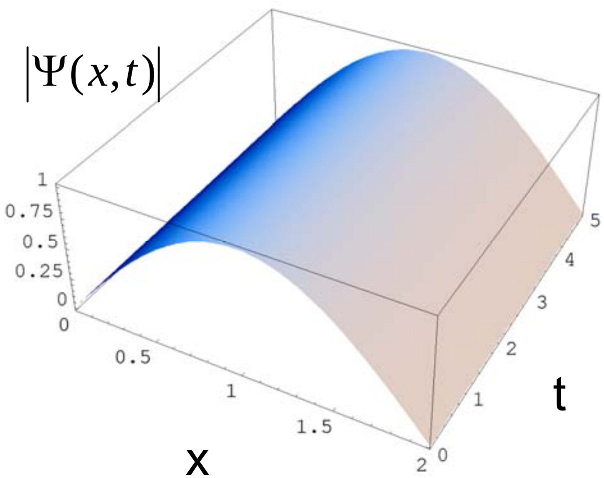
Эволюция пакета в прямоугольном потенциале

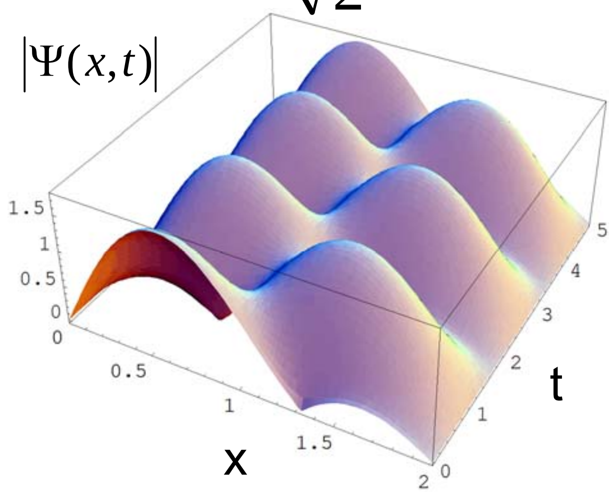


$$E_n = \frac{\pi^2 n^2}{2D^2}, \psi_n(x) = \sin\sqrt{2E_n}\,x$$

$$\Psi(x,t) = \sum_n a_n \exp(-iE_n t)\psi_n(x); \quad a_n = \int \Psi(x,0)\psi_n(x)dx$$

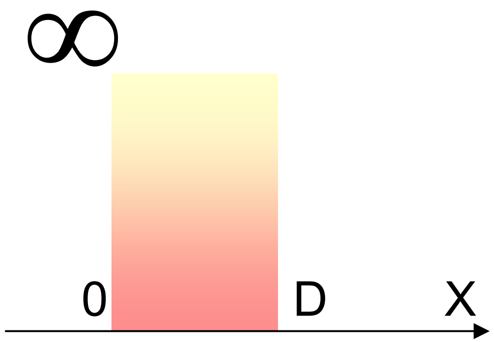
$$\Psi(x,0) = \psi_1(x) \qquad \Psi(x,0) = \frac{\psi_1(x) + \psi_2(x)}{\sqrt{2}}$$





Волновой пакет

Эволюция пакета в прямоугольном потенциале

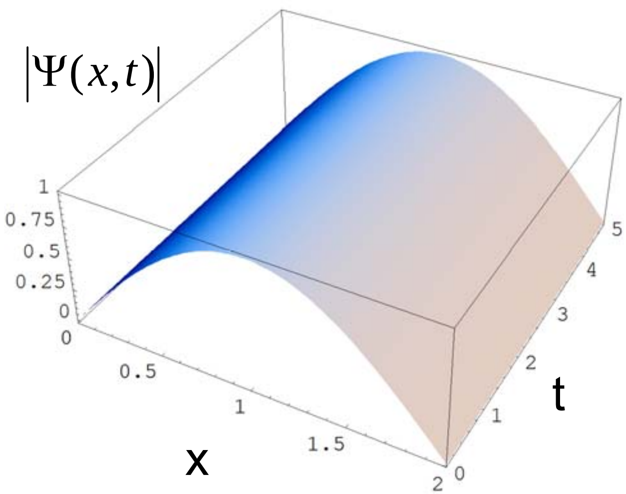


$$E_n = \frac{\pi^2 n^2}{2D^2}, \psi_n(x) = \sin\sqrt{2E_n}x$$

$$\Psi(x,t) = \sum_n a_n \exp(-iE_n t)\psi_n(x); \quad a_n = \int \Psi(x,0)\psi_n(x)dx$$

$$\Psi(x,0) = \psi_1(x)$$

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{D}}$$



a_1=0.900316
a_3=0.300105
a_5=0.180063
a_7=0.128617
a_9=0.100035