ВОЛНЫ СВЕТА И ВЕЩЕСТВА

Е.В. Грызлова

НИИЯФ МГУ

Осенний семестр 2013 г.

1. **«Разминка».**

2. **Плоская волна и понятие волнового пакета – волны вещества.**

3. **Системы со сферической симметрией.**

4. **Начала теории рассеяния:**

а) сферические волны, падающие и расходящиеся.
б) разложение сферической волны по плоским волнам.
в) Борновское приближение.
г) рассеяние тождественных частиц.
д) формулы Брейта, Вигнера, Резерфорда.

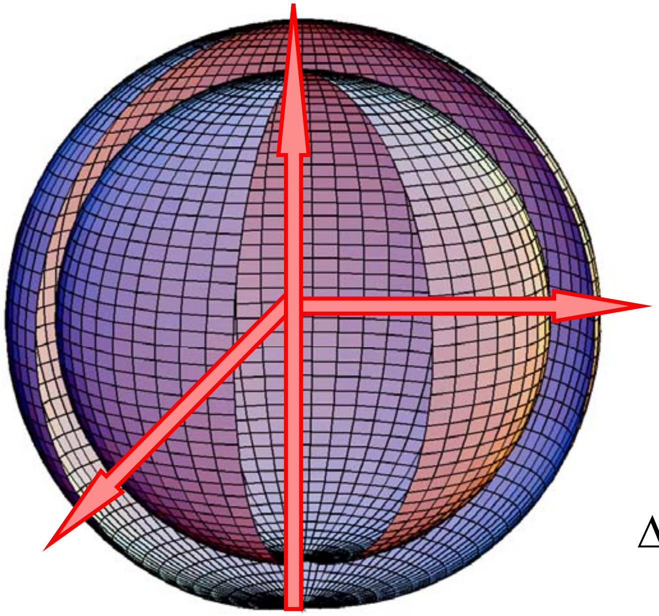
5. **Резонансной рассеяния и вопрос о двойных полюсах матрицы рассеяния.**

6. **Двухуровневая система, связь лазерным полем.**

7. **Изучение антипротония.**

8. **Нобелевская премия по физике 2012 года. Изучение одиночной квантовой системы.**

Сферически симметричная система



Разделение переменных в системах со сферической симметрией

$$-\frac{1}{2}\Delta\varphi(\vec{r})+V(r)\varphi(\vec{r})=E\cdot\varphi(\vec{r})$$

Исключаем угловые переменные

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$V(r)=\begin{cases}U, & R_1<x<R_2\\ 0\end{cases}$$

$$\varphi(\vec{r})=\tilde{\varphi}(r)Y_{lm}(\vec{r}/r)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\cdot\partial}{r\cdot\partial r}\right)\tilde{\varphi}(r)+V(r)\tilde{\varphi}(r)+\frac{l(l+1)}{2\cdot r^2}\tilde{\varphi}(r)=E\cdot\tilde{\varphi}(r)$$

$$\psi(r)=r\cdot\tilde{\varphi}(r)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi(r)+V(\vec{r})\cdot\psi(r)+\frac{l(l+1)}{2\cdot r^2}\psi(r)=E\cdot\psi(r)$$

Сферически симметричная система

Сферические гармоники

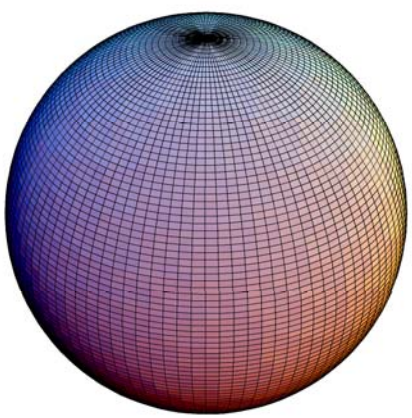
$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \tilde{\varphi}(r)Y_{lm}(\vec{r}/r)$$

Сферические функции $Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$

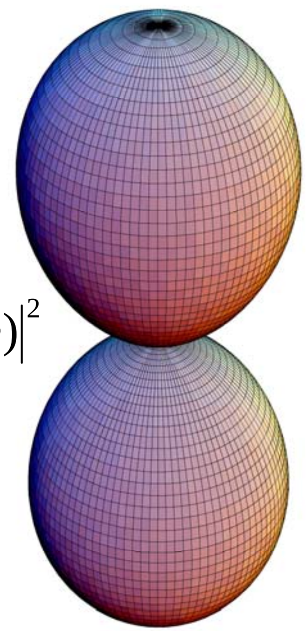
Полином Лежандра

$|Y_{00}(\vartheta,\varphi)|^2$



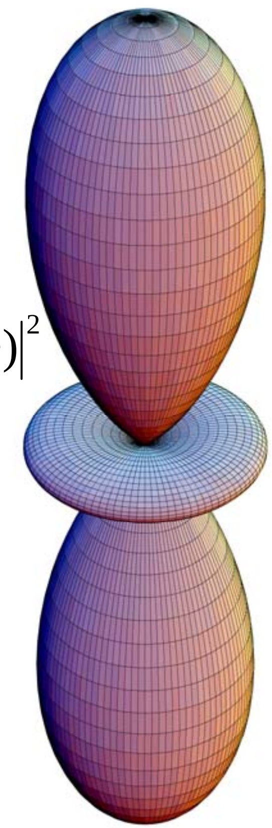
$$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$|Y_{10}(\vartheta,\varphi)|^2$



$$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$|Y_{20}(\vartheta,\varphi)|^2$



$$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$$

$|Y_{10\,0}(\vartheta,\varphi)|^2$

Сферически симметричная система

Сферические гармоники

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \tilde{\varphi}(r)Y_{lm}(\vec{r}/r)$$

Сферические функции $\quad Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$

Оператор пространственной инверсии $\theta \to \pi - \theta$, $\varphi \to \phi + \pi$

$$\hat{P}Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

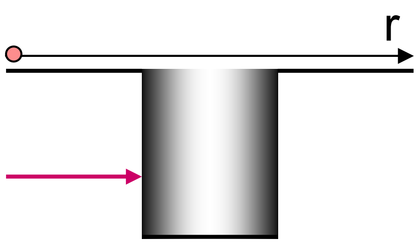
Сферические функции ортогональны и образуют полный набор

$$\int Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi)^* d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

$$\sum_m Y_{lm}(\vartheta_1,\varphi_1)^* Y_{lm}(\vartheta_2,\varphi_2) = \frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\theta)$$

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi) = \sum_{LM} C_{lml'm'}^{LM} Y_{LM}(\vartheta,\varphi)$$

Сферически симметричная система



$$V(r)=\begin{cases}U, & R_1<x<R_2\\ 0\end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi(r)+V(\vec{r})\cdot\psi(r)+\frac{l(l+1)}{2\cdot r^2}\psi(r)=E\cdot\psi(r)$$

Сферическая потенциальная яма конечной глубины

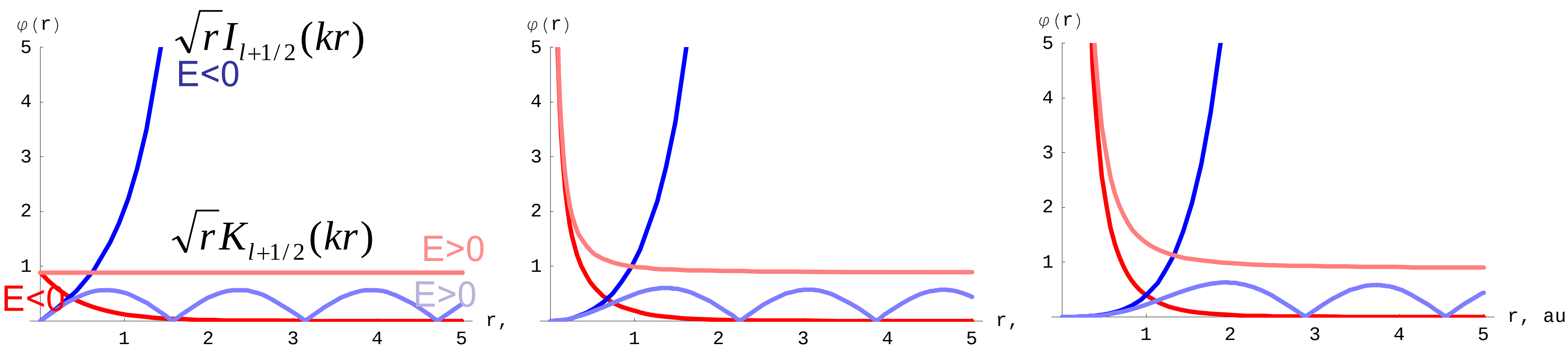
Два линейно независимых решения

$$\sqrt{r}I_{l+1/2}(kr) \qquad \sqrt{r}K_{l+1/2}(kr)$$

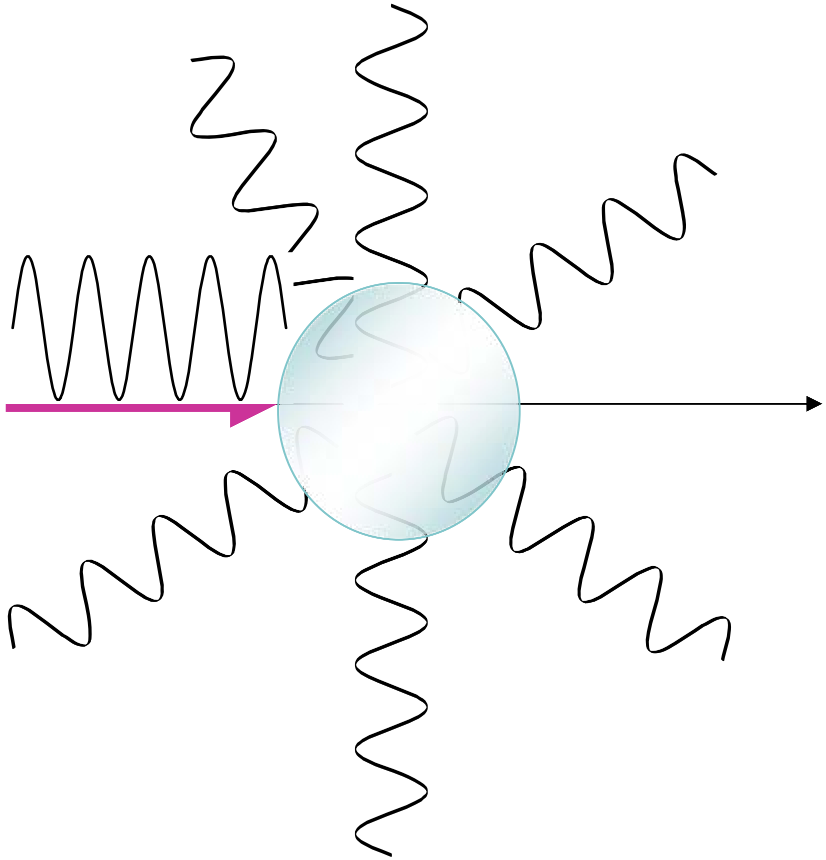
модифицированная функция Бесселя первого и второго рода (Инфельда и МакДональда)

Модуль волновой функции вероятности.

l=0 l=1 l=2



Начала теории рассеяния



Амплитуда рассеяния

Падающая волна - плоская,
отраженные - сферические

Асимптотический вид:

$$\sim e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Плотность потока в расходящейся волне

$$j' = v\frac{1}{r^2}|f|^2 dS \to k|f|^2 d\Omega$$

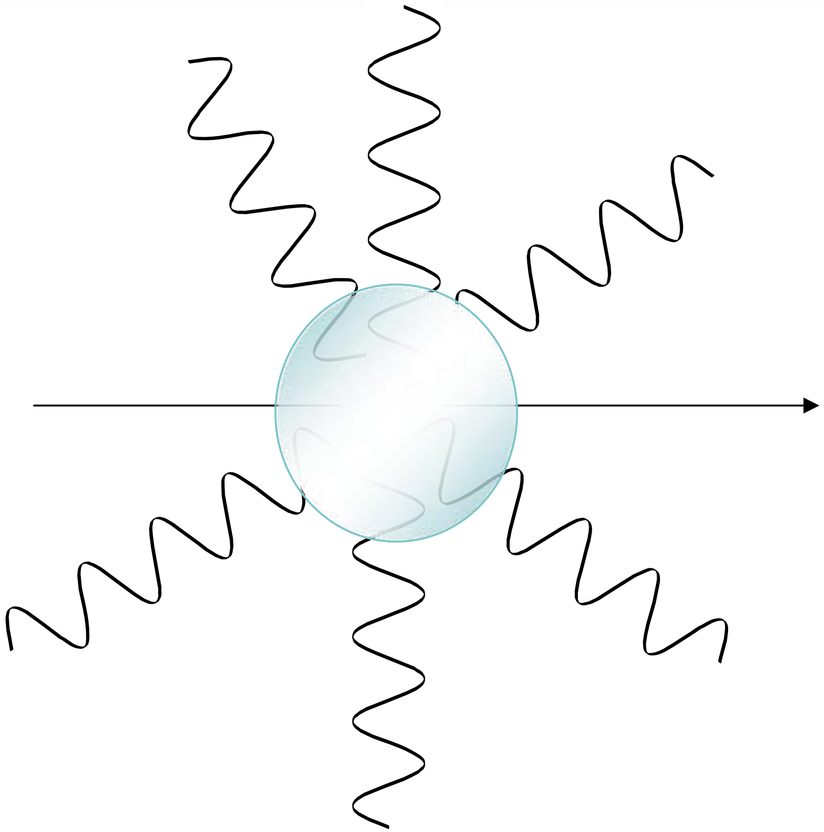
Плотность потока в падающей волне

$$j = v \to k$$

Сечение

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega$$

Начала теории рассеяния



Радиальная функция свободной частицы в сферически симметричном потенциале

$$\psi_{kl}(r)=\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}J_{l+1/2}(kr)=2(-1)^l\frac{r^l}{k^l}\left(\frac{d}{rdr}\right)^l\frac{\sin kr}{kr}$$

Асимптотическое поведение на больших расстояниях

$$\psi_{kl}(r)\to\frac{2}{r}\sin(kr-\frac{l\pi}{2})$$

Решения, обладающие определенным направлением движения, падающая и расходящаяся волны

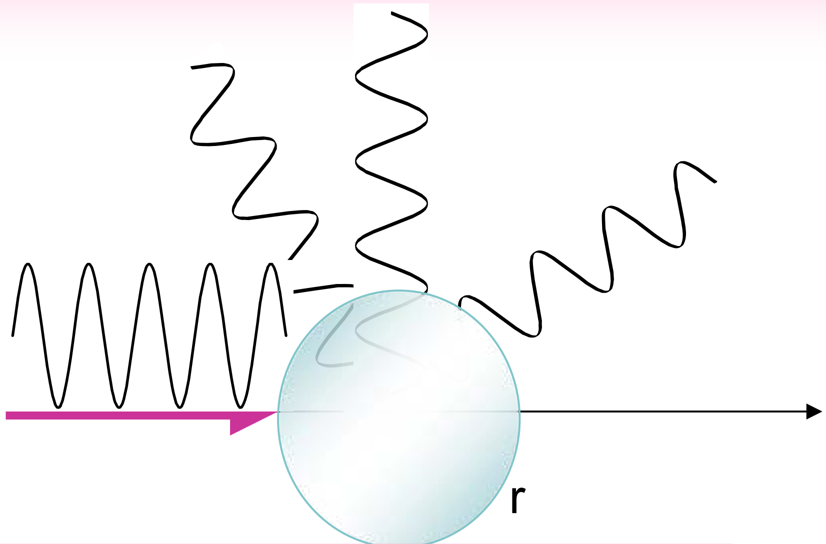
$$\psi^{\pm}_{kl}(r)=\frac{1}{\sqrt{kr}}(-1)^l\frac{r^l}{k^l}\left(\frac{d}{rdr}\right)^l\frac{e^{\pm ikr}}{kr}$$

$$\psi_{kl}(r)\to\frac{2}{r}\exp(\pm i(kr-\frac{l\pi}{2}))$$

Разложение плоской волны по сферическим

$$e^{ikz}=e^{ikr\cos\theta}=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\sum_{l=0}(2l+1)i^l J_{l+1/2}(kr)P_l(\cos\theta)\;=\sum_{l=0}(-i)^l(2l+1)P_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{k}\right)^l\left(\frac{d}{rdr}\right)^l\frac{\sin kr}{kr}$$

Начала теории рассеяния



Матрица рассеяния

Ищем решение, удовлетворяющее

$$\psi(\vec{r}) \to e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr},$$

$$\psi(\vec{r}) = \sum_l A_l P_l(\cos\theta) R_{kl}(r)$$

С другой стороны

$$e^{ikz} = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sum_{l=0} (2l+1) i^l J_{l+1/2}(kr) P_l(\cos\theta)$$

$$\to \frac{1}{2ikr} \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta)(e^{ikr} + (-1)^{l+1} e^{-ikr})$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 R_{kl}(r)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{kl}(r) + U(r) R_{kl}(r) = E R_{kl}(r)$$

$$R_{kl}(r) \to \frac{2}{r}\sin(kr + \varphi_l) = \frac{2}{r}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) =$$

$$\frac{1}{ir}((-i)^l e^{i(kr+\delta_l)} - (i)^l e^{-(kr+\delta_l)})$$

Что бы сократились члены, соответствующие падающей сферической волне

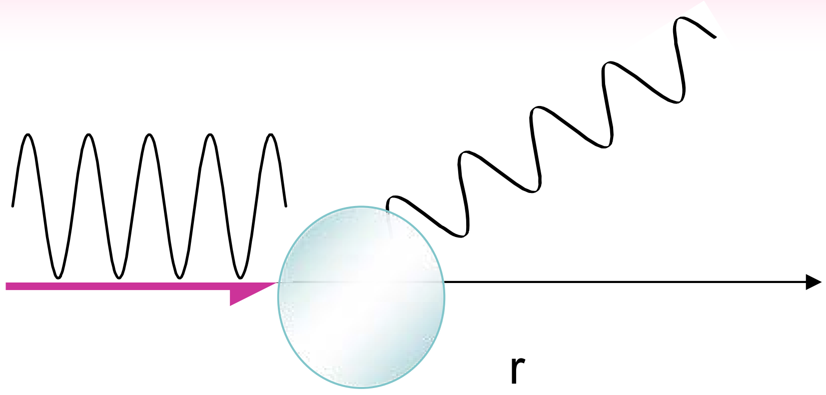
$$A_l = \frac{(2l+1) i^l}{2k} e^{i\delta_l}$$

тогда

$$\boxed{f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1)(S_l - 1) P_l(\cos\theta)}$$

где $S_l = e^{2i\delta_l}$ **- матрица рассеяния**

Начала теории рассеяния



Некоторые свойства амплитуды рассеяния

$$\boxed{f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta)}$$

$S_l = e^{2i\delta_l}$ **- матрица рассеяния**

$$\psi(\vec{r}) \to e^{ikz} + \frac{f(n,n')}{r}e^{ikr},$$

Сечение рассеяния

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l$$

Оптическая теорема для рассеяния

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}(f(n,n))$$

Теорема взаимности

$$f(n,n') = f(-n',-n)$$

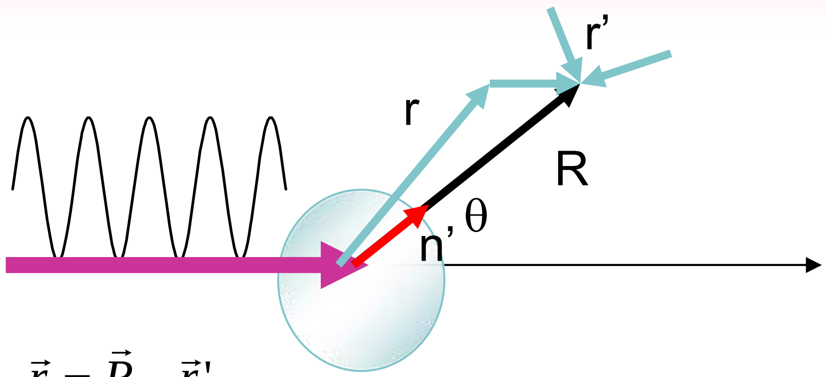
Парциальные характеристики рассеяния

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\theta)$$

$$f_l = \frac{1}{2ik}(S_l - 1) = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} = \frac{1}{k(ctg\delta_l - i)}$$

$$\sigma_l = 4\pi(2l+1)|f_l|^2$$

Начала теории рассеяния



$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}\,'$$

Приближение Борна

$$\boxed{f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta)}$$

$$U \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$$ или $$U \ll \frac{\hbar v}{a} = \frac{\hbar^2}{ma^2}ka$$

$$r = \left|\vec{R} - \vec{r}\,'\right| \approx R - \vec{n}r', \quad R >> r'$$

$$\vec{k}' = \vec{n}'k$$

Ищем решение по теории возмущений

$$\psi(r) = \psi^{(0)}(r) + \psi^{(1)}(r), \quad \psi^{(0)}(r) = e^{ikr}$$

$$\Delta\psi^{(1)}(r) + k^2\psi^{(1)}(r) = 2U(r)\psi^{(0)}(r),$$

$$\psi^{(1)}(\vec{R}) = -\frac{1}{2\pi}\int \psi^{(0)}(\vec{r}\,')U(\vec{r}\,')e^{i\vec{k}\vec{r}}\frac{d\vec{r}\,'}{r},$$

«Запаздывающий потенциал»

$$\psi^{(1)}(\vec{R}) = -\frac{1}{2\pi}\int U(r')e^{i(kr'+kr)}\frac{dv'}{r} =$$

$$-\frac{e^{i\vec{k}\vec{R}}}{2\pi R}\int U(r')e^{i(k-k')r'}dv'$$

сопоставив с $\psi(\vec{r}) \to e^{ikz} + \dfrac{f(\theta)}{r}e^{ikr}$

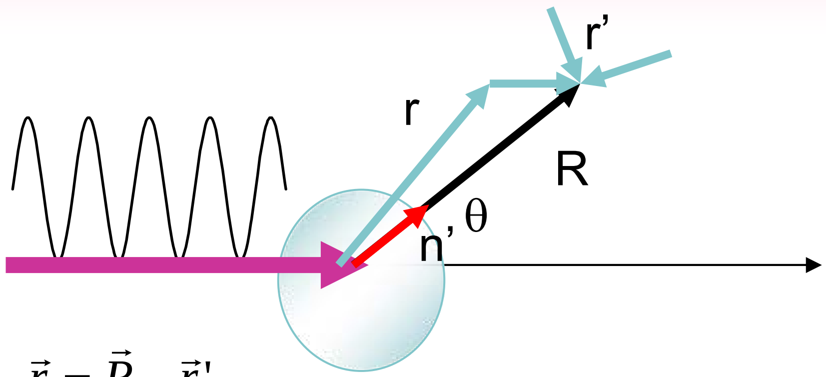
$$\boxed{f = -\frac{1}{2\pi}\int U(r')e^{-i\vec{q}r'}dv', \quad |\vec{q}| = |k - k'| = 2k\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$f(k,k') = f^{+}(k',k)$$

Для сферически-симметричной системы

$$\boxed{f = -2\int U(r')\frac{\sin\vec{q}\vec{r}\,'}{q}r'dr'}$$

Начала теории рассеяния



Приближение Борна

$$\boxed{f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta)}$$

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}\,'$$

$$r = \left|\vec{R} - \vec{r}\,'\right| = R - \vec{n}r', \quad R >> r'$$

$$\vec{k}\,' = \vec{n}\,'k$$

$$U << \frac{\hbar^2}{ma^2}$$ или $$U << \frac{\hbar v}{a} = \frac{\hbar^2}{ma^2}ka$$

$$\boxed{f = -\frac{1}{2\pi}\int U(r')e^{-i\vec{q}r'}dv', \quad |\vec{q}| = |k - k'| = 2k\sin\frac{\theta}{2}}$$

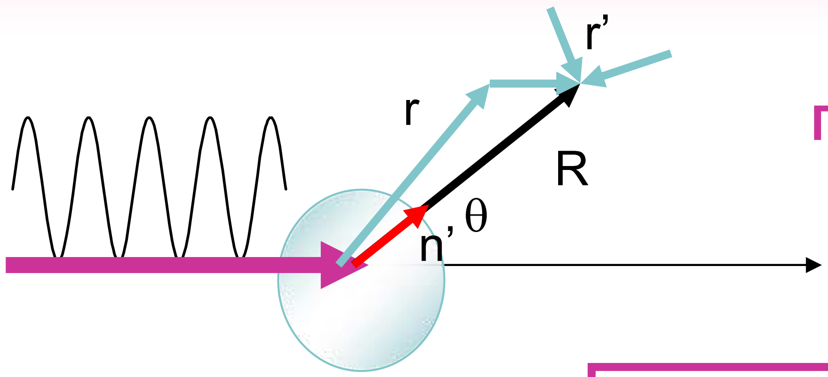
Малые скорости, рассеяние изотропно

$$f = -\frac{1}{2\pi}\int U(r')dv'$$

Большие скорости, рассеяние в угол

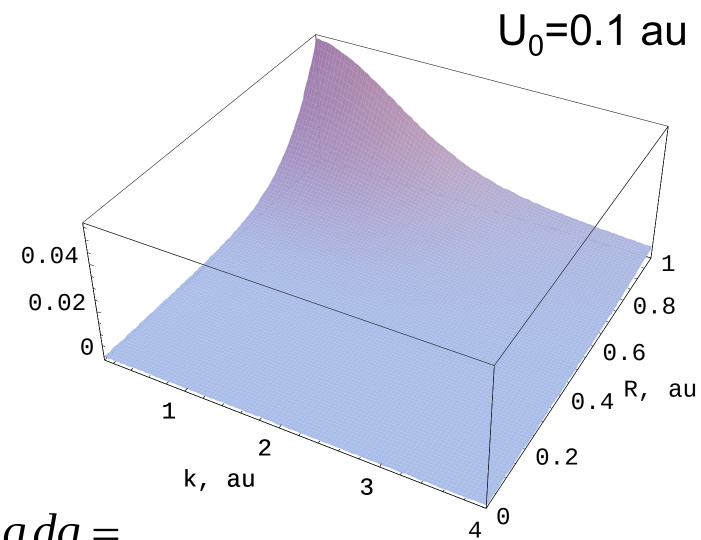
$$\delta\theta \sim \frac{1}{ka}$$

Начала теории рассеяния



Приближение Борна. Рассеяние на сферическом потенциале

$$\boxed{f = -2\int U(r')\frac{\sin \vec{q}\vec{r}'}{q} r' dr'}$$



$$f(q(\theta)) = -2\int U(r)\frac{\sin qr}{q} r dr = -2U\frac{\sin qR_0 - qR_0\cos qR_0}{q^3}$$

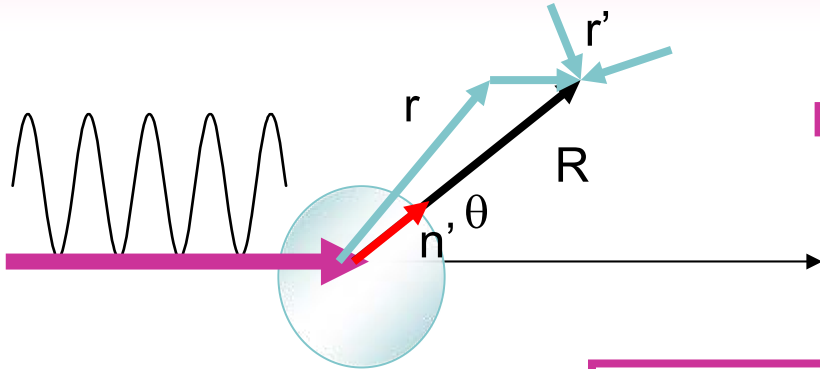
Сечение рассеяния

$$\sigma = \int |f(q(\theta))|^2 d\Omega = \int \left(\frac{\sin(qR_0) - qR_0\cos(qR_0)}{q^3}\right)^2 q\,dq =$$

$$2\pi(2U)^2\int\left(\frac{\sin(2kR_0\sin\theta/2) - (2kR_0\sin\theta/2)\cos(2kR_0\sin\theta/2)}{(2k\sin\theta/2)^3}\right)^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi\frac{U^2R_0^4}{k^2}\left(1 - \frac{1}{(2kR_0)^2} + \frac{\sin 4kR_0}{(2kR_0)^3} - \frac{\sin^2 2kR_0}{(2kR_0)^4}\right)$$

Начала теории рассеяния



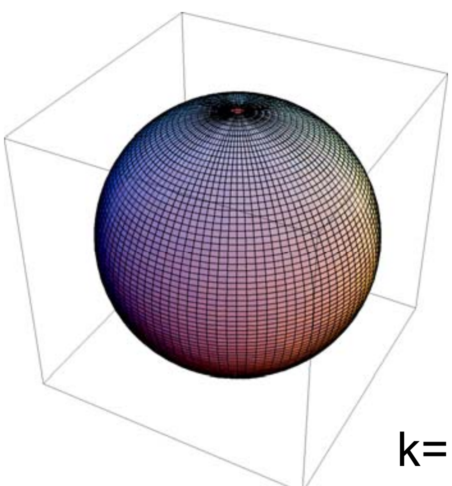
Приближение Борна. Рассеяние на сферическом потенциале

$$\boxed{f=-2\int U(r')\frac{\sin \vec{q}\vec{r}\,'}{q}\,r'\,dr'}$$

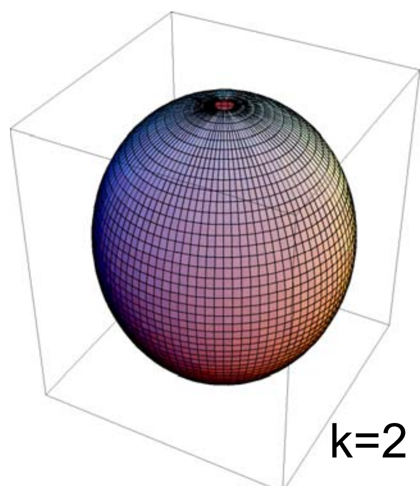
$$f(q(\theta))=-2\int U(r)\frac{\sin qr}{q}\,r\,dr=-2U\,\frac{\sin qR_0-qR_0\cos qR_0}{q^3}$$

U_0=0.1 au
R_0=1 au

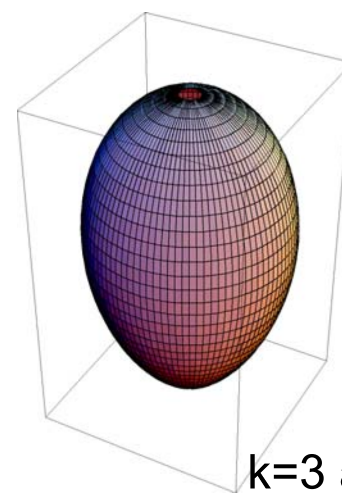
Дифференциальное сечение $\left|f(q(\theta))\right|^2$



k=1 au

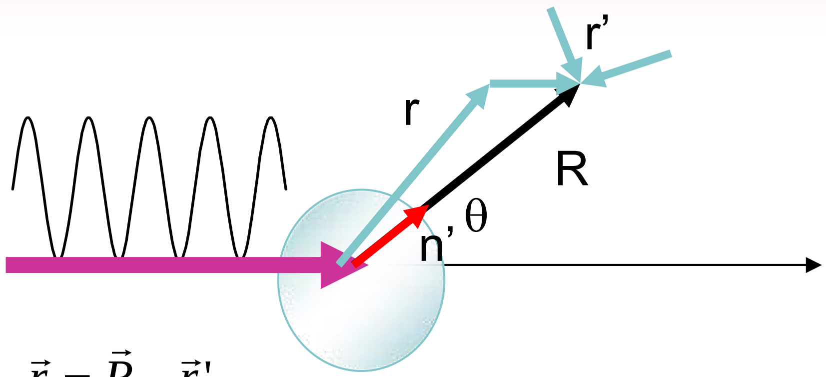


k=2 au



k=3 au

Начала теории рассеяния



Приближение Борна

$$\boxed{f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta)}$$

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}\,'$$

$$r = \left|\vec{R} - \vec{r}\,'\right| = R - \vec{n}r', \quad R >> r'$$

$$\vec{k}\,' = \vec{n}\,'k$$

$$U << \frac{\hbar^2}{ma^2}$$ или $$U << \frac{\hbar v}{a} = \frac{\hbar^2}{ma^2}ka$$

$$\boxed{f = -\frac{1}{2\pi}\int U(r')e^{-i\vec{q}r'}dv', \quad |\vec{q}| = |k - k'| = 2k\sin\frac{\theta}{2}}$$

Малые скорости, рассеяние изотропно

$$f = -\frac{1}{2\pi}\int U(r')dv'$$

Большие скорости, рассеяние в угол

$$\delta\theta \sim \frac{1}{ka}$$

Начала теории рассеяния

Рассеяние тождественных частиц

Волновая функция системы частиц должна быть антисимметрична (симметрична).

- Для систем, в которых спиновым взаимодействием можно пренебречь координатная и спиновая функции должны быть симметричны/антисимметричны по-отдельности.
- В системе центра инерции перестановка двух частиц соответствует инверсии пространства.

- Для системы двух частиц со спином 1/2: симметричный спинор второго ранга соответствует спину 1, а антисимметричный – скаляру, т.е. нулевому полному спину.
- Радиальная часть волновой функции антисимметрична, если спин системы нечетный и симметрична – если четный.
- При четном (нечетном) спине система может обладать только четным (нечетным) угловым моментом.

- Спин принимает значения от 0 до 2s.

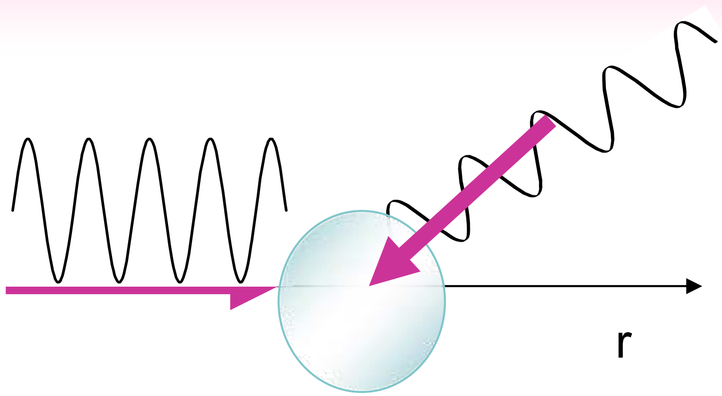
Пусть s целое, тогда число состояний с четным S, с нечетным

$$\sum_{0,2s}(2S+1)=(2s+1)(s+1) \qquad\qquad (2s+1)s$$

Пусть s полуцелое, тогда число состояний с четным S, с нечетным

$$s(2s+1) \qquad\qquad \sum_{1,2s}2S+1=(s+1)(2s+1)$$

Начала теории рассеяния



Рассеяние тождественных частиц

$$\psi(\vec{r}) \to e^{ikz} \pm e^{-ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \pm \frac{f(\pi-\theta)}{r} e^{ikr},$$

Волновая функция должна быть симметрична или антисимметрична

$$d\sigma_e = \left| f(\theta) + f(\pi-\theta) \right|^2 d\Omega;$$

$$d\sigma_o = \left| f(\theta) - f(\pi-\theta) \right|^2 d\Omega.$$

Если частицы медленные, то рассеиваются только с четным суммарным спином

Если бы частицы были различимы $d\sigma = \left| f(\theta) \right|^2 d\Omega + \left| f(\pi-\theta) \right|^2 d\Omega.$

Если спин частиц полуцелый

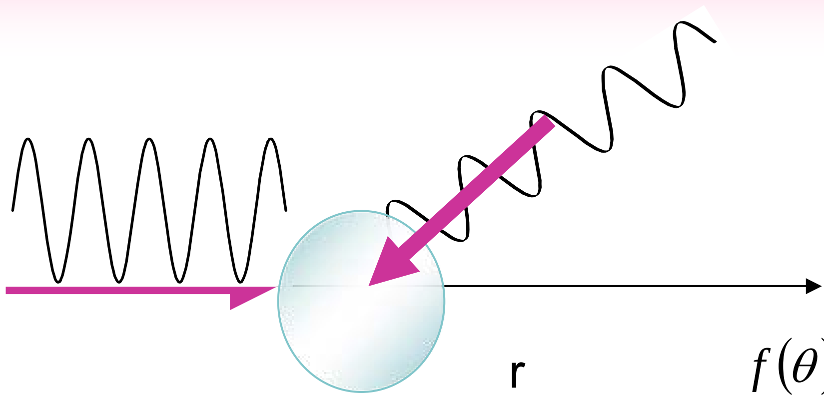
$$d\sigma = \frac{s}{2s+1} d\sigma_e + \frac{s+1}{2s+1} d\sigma_e$$

$$d\sigma = \left\{ \left| f(\theta) \right|^2 + \left| f(\pi-\theta) \right|^2 - \frac{1}{2s+1} \left(f(\theta) \right) f^*(\pi-\theta) + \left(f^*(\theta) \right) f(\pi-\theta) \right\} d\Omega$$

+

Если спин частиц целый

Начала теории рассеяния



Кулоновское рассеяние

Амплитуда Кулоновского рассеяния

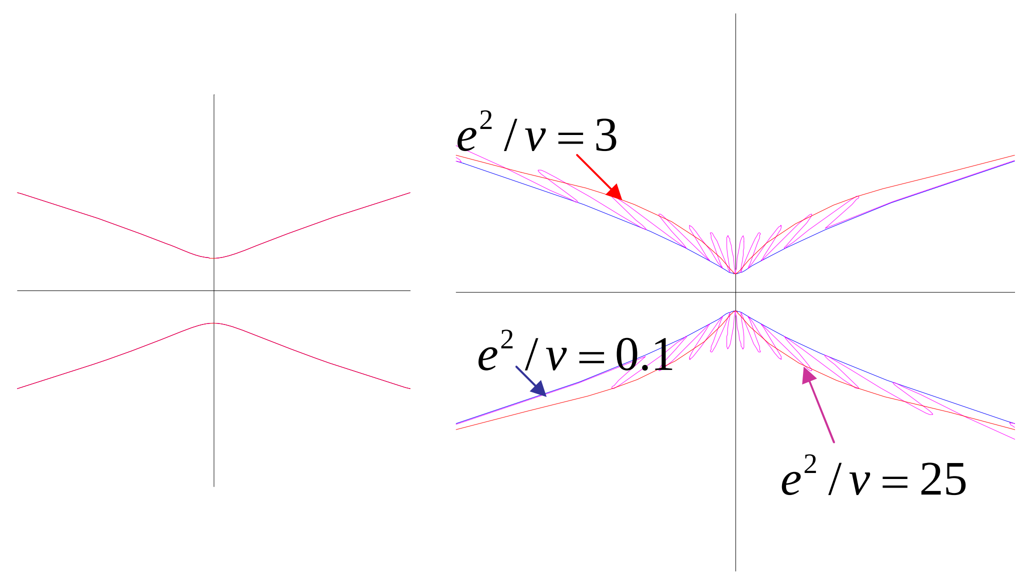
$$f(\theta) = -\frac{1}{2k^2 \sin^2 \theta/2} \frac{\Gamma(1+i/k)}{\Gamma(1-i/k)} \exp\left(-\frac{2i}{k} \ln \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

Для рассеяния двух электронов

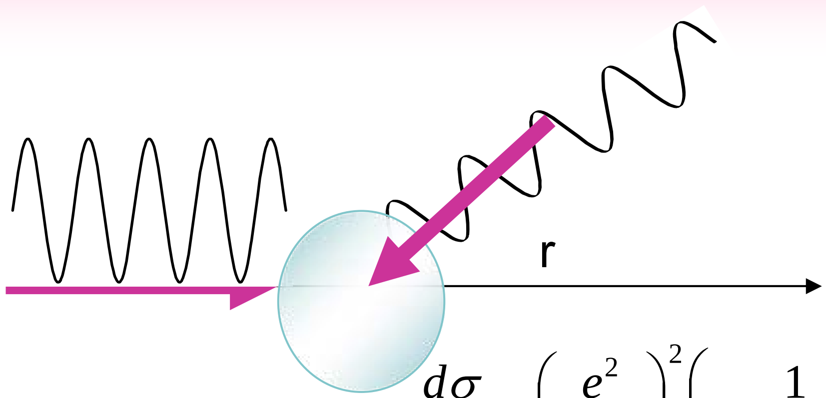
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} - \frac{1}{\sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2} \cos\left(\frac{e^2}{v} \ln tg^2 \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

При большой скорости электронов

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{4 - 3\sin^2 \theta}{\sin^4 \theta}$$



Начала теории рассеяния



Кулоновское рассеяние

Для рассеяния двух электронов

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\theta/2} + \frac{1}{\cos^4\theta/2} - \frac{1}{\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2}\cos\left(\frac{e^2}{v}\ln tg^2\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

При большой скорости электронов $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{4-3\sin^2\theta}{\sin^4\theta}$