# ***ВОЛНЫ СВЕТА И ВЕЩЕСТВА***

Е.В. Грызлова

НИИЯФ МГУ

Осенний семестр 2013 г.

**. «Разминка».**

**2. Плоская волна и понятие волнового пакета – волны вещества.**

**3. Системы со сферической симметрией.**

**4. Начала теории рассеяния.**

**5. Резонансной рассеяния и вопрос о двойных полюсах матрицы рассеяния.**

а) рассеяние на квазидискретном уровне.

б) Вырождение квантовых уровней.

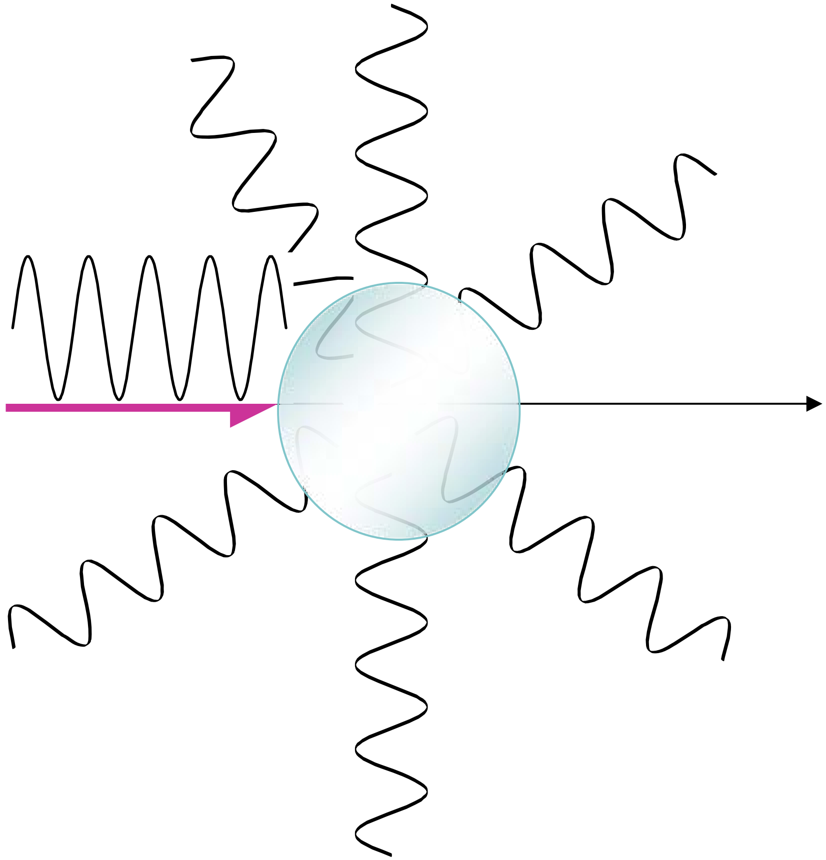
в) комплексная квазиэнергия и двоные полюса S-матирцы.

**6. Двухуровневая система, связь лазерным полем.**

**7. Изучение антипротония.**

**8. Нобелевская премия по физике 2012 года. Изучение одиночной квантовой системы.**

# Начала теории рассеяния



Падающая волна - плоская, отраженные - сферические

Асимптотический вид:

$$\sim e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Плотность потока в расходящейся волне

$$j' = v \frac{1}{r^2} |f|^2 dS \rightarrow k |f|^2 d\Omega$$

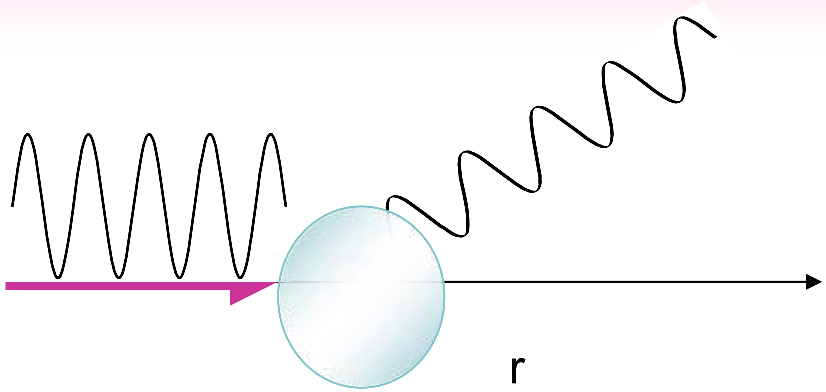
Плотность потока в падающей волне

$$j = v \rightarrow k$$

Сечение

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega$$

# Начала теории рассеяния




**Некоторые свойства амплитуды рассеяния**

$$\boxed{f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta)}$$

$S_l = e^{2i\delta_l}$ **- матрица рассеяния**

$$\psi(\vec{r}) \to e^{ikz} + \frac{f(n,n')}{r}e^{ikr},$$

Сечение рассеяния

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l$$

Парциальные характеристики рассеяния

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\theta)$$

$$f_l = \frac{1}{2ik}(S_l - 1) = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} = \frac{1}{k(ctg\delta_l - i)}$$

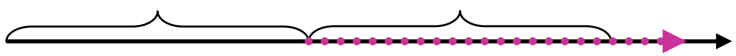
$$\sigma_l = 4\pi(2l+1)|f_l|^2$$

# Начала теории рассеяния

**Рассеяние при наличии резонанса** ***l*=0**

$$\chi = r\cdot\psi(r) = A(E)e^{-\sqrt{2E}r} + B(E)e^{\sqrt{2E}r}$$

Будем рассматривать *E* как комплексную переменную



$\sqrt{-E} > 0$ E=0 $A(E) = B^*(E)$

$$A, B \subset \Re$$

$$\chi \approx C\left(e^{i(kr+\delta_0)} - e^{-i(kr+\delta_0)}\right) \qquad e^{2i\delta_0} = -\frac{A(E)}{B(E)}$$

$$f_0 = \frac{1}{2ik}(e^{2i\delta_0} - 1) = \frac{1}{2\sqrt{-2E}}\left(\frac{A(E)}{B(E)} + 1\right)$$

**Дискретные уровни являются простыми полюсами для амплитуды рассеяния**

# Начала теории рассеяния

**Рассеяние при наличии дискретного состояния в точке E=E$_0$** **$l$=0**

$$\chi = r\cdot\psi(r) = A(E)e^{-\sqrt{2E}r} + B(E)e^{\sqrt{2E}r}$$

$$\chi''(r) + 2(E-U(r))\chi(r) = 0; \quad \frac{\partial\chi''(r)}{\partial E} + 2(E-U(r))\frac{\partial\chi(r)}{\partial E} = -2\chi(r)$$

$$\chi'(r)\frac{\partial\chi(r)}{\partial E} - \chi(r)\frac{\partial\chi'(r)}{\partial E} = 2\int\chi(r)^2 dr$$

$$A(E) \approx A(E_0) = A_0; \quad B(E) = (E+|E_0|)\frac{\partial B}{\partial E} = (E+|E_0|)\beta$$

$$\beta = -\frac{1}{A_0\sqrt{2|E|}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\sqrt{-2E}}\left(\frac{A(E)}{B(E)}+1\right) \qquad \Rightarrow -\frac{A_0^2}{2}\frac{1}{E+|E_0|}$$

Вычет определяется коэффициентом A$_0$

# Начала теории рассеяния

**Рассеяние при наличии дискретного состояния в точке $E=E_0$;**
**Произвольное значение орбитального момента *l***

$$\chi = r \cdot \psi(r) \sim \exp\left( -i \cdot (kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) \right) - \exp\left( i \cdot (kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) \right)$$

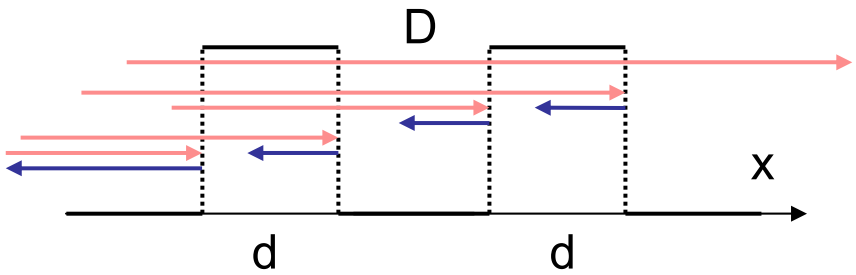
$$f_l = \frac{1}{2\sqrt{-2E}} \left( (-1)^l \frac{A(E)}{B(E)} + 1 \right)$$

Главный член амплитуды рассеяния

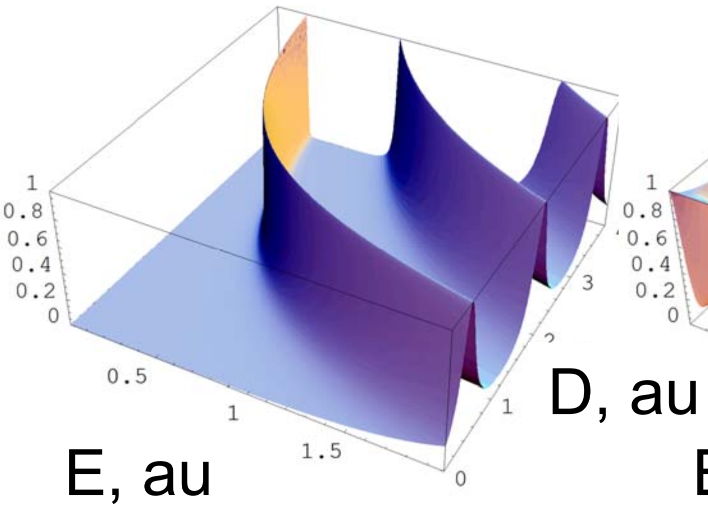
$$f \approx (2l+1) f_l P_l(\cos\theta) = (-1)^{l+1} \frac{A_0^2}{2} \frac{1}{E + |E_0|} (2l+1) P_l(\cos\theta)$$

# Плоская волна

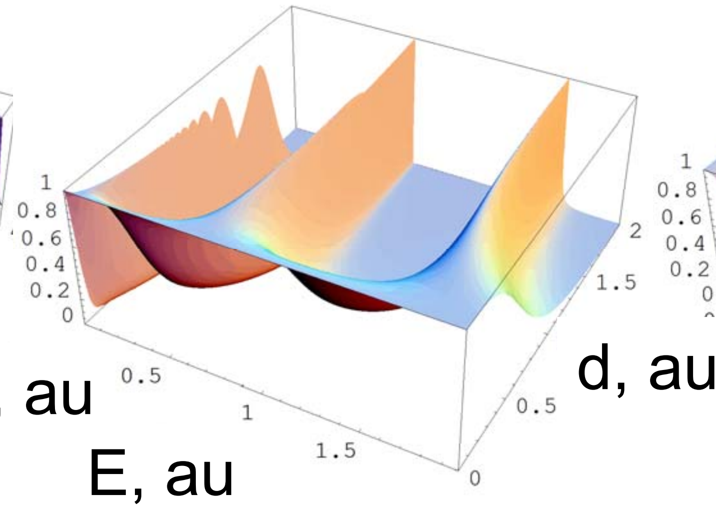
**Формирование квазидискретного уровня в одномерной системе**



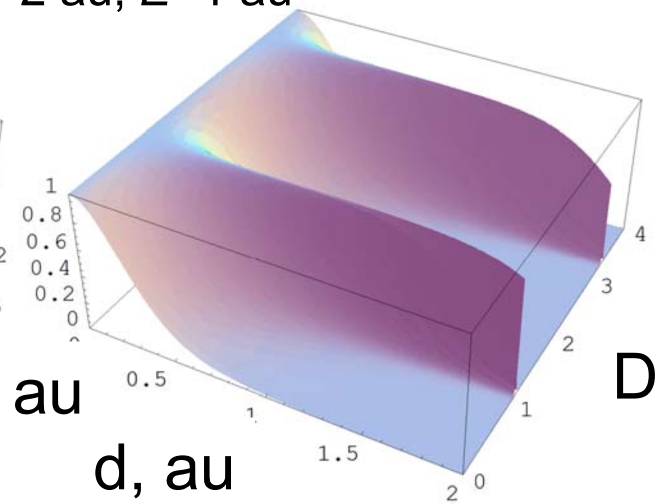

$U_0$=2 au, d=1 au




$U_0$=2 au, D=4 au




$U_0$=2 au, $E$=1 au



# Начала теории рассеяния

**Рассеяние на квазидискретном уровне E=E$_0$-i·$\Gamma$/2**

$$\chi \sim \exp(-i \cdot Et) = \exp\left(i \cdot E_0 t - \frac{\Gamma}{2}\right)$$

$$R \sim \frac{1}{r}\left((E - E_0 - \frac{i\Gamma}{2})b_l^+ \exp(i \cdot kr) + (E - E_0 + \frac{i\Gamma}{2})b_l \exp(-i \cdot kr)\right)$$

$$e^{2i\delta_l} = \frac{E - E_0 - i \cdot \Gamma/2}{E - E_0 + i \cdot \Gamma/2} e^{2i\delta_l^{(0)}} = \left(1 - \frac{i \cdot \Gamma}{E - E_0 + i \cdot \Gamma/2}\right) e^{2i\delta_l^{(0)}}$$

Где фаза вдали от резонанса

$$e^{2i\delta_l^{(0)}} = \frac{b_l^+}{b_l}$$

$$\delta_l = \delta_l^{(0)} - arctg \frac{\Gamma}{2(E - E_0)}$$

При прохождении вдоль резонанса фаза меняется на $\pi$

Полный поток в расходящейся волне должен совпадать с вероятностью распада

$$\Rightarrow \quad |b_l|^2 = \frac{1}{k\Gamma}$$

# Начала теории рассеяния

**Рассеяние на квазидискретном уровне $E=E_0-i\cdot\Gamma/2$**

$$f(\theta)=f^{(0)}(\theta)-\frac{2l+1}{k}\frac{\Gamma/2}{E-E_0+i\cdot\Gamma/2}e^{2i\delta_l^{(0)}}P_l(\cos\theta)$$

**Резонансное рассеяние**

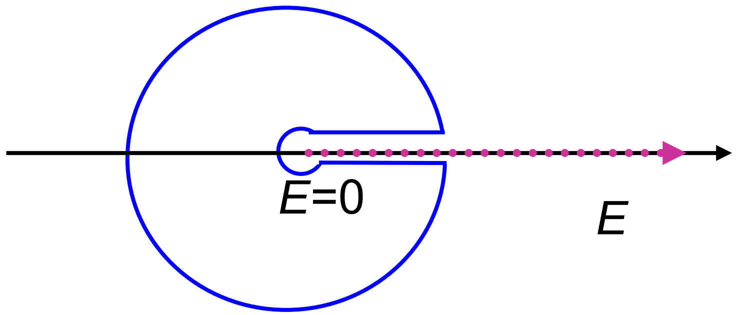
**Потенциальное рассеяние**

$$f^{(0)}(\theta)=\frac{1}{2ik}\sum_l(2l+1)(S_l-1)P_l(\cos\theta)$$

# Начала теории рассеяния

**Дисперсионное соотношение для амплитуды рассеяния**

Физический лист




$$\Delta\psi(r)+k^2\psi(r)=2\cdot U(r)\psi(r)$$

Решение в виде запаздывающего потенциала

$$\psi(r)=-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int 2U(r')\psi(r')e^{i(k-k')r'}dv'$$

$$f(0,E)=-\frac{1}{2\pi}\int U(r')\psi(r')e^{-ikz}dv'$$

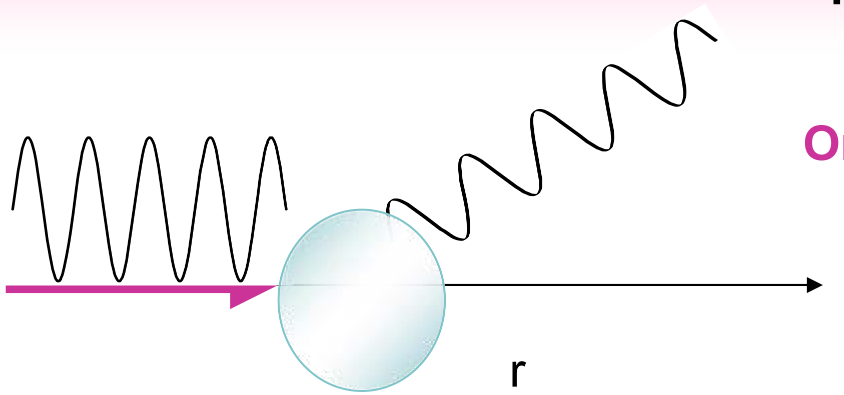
**Амплитуда рассеяния регулярна на всем физическом листе, за исключением дискретных состояний спектра**

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(0,E')-f_b}{E'-E}dE'$$

$$\boxed{f(0,E)=f_b(0)+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mathrm{Im}(f(0,E'))}{E'-E}dE'+\sum_n\frac{d_n}{E-E_n}}$$

$$d_n=(-1)^{l_n+1}(2l_n+1)\frac{A^2_{0(n)}}{2}$$

# Начала теории рассеяния




**Оптическая теорема для рассеяния**

$$\boxed{f(\theta)=\frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(S_l-1)P_l(\cos\theta)}$$

$$\psi(\vec r)\to e^{ikr\vec n\vec n'}+\frac{f(\vec n,\vec n')}{r}e^{ikr},$$

$$\int F(\vec n)\left(e^{ikr\vec n\vec n'}+\frac{f(\vec n,\vec n')}{r}e^{ikr}\right)d\Omega=F(-\vec n')2\pi i\frac{e^{-ikr}}{kr}-F(\vec n')2\pi i\frac{e^{ikr}}{kr}+\frac{e^{ikr}}{r}\int f(\vec n,\vec n')F(\vec n)d\Omega$$

$$F(-\vec n')\frac{e^{-ikr}}{r}-\frac{e^{ikr}}{r}\hat S F(\vec n')$$ Оператор (матрица) рассеяния

$$\hat S=1+2ik\hat f;$$

$$\hat f F(\vec n')=\frac{1}{4\pi}\int f(\vec n,\vec n')F(\vec n)d\Omega$$

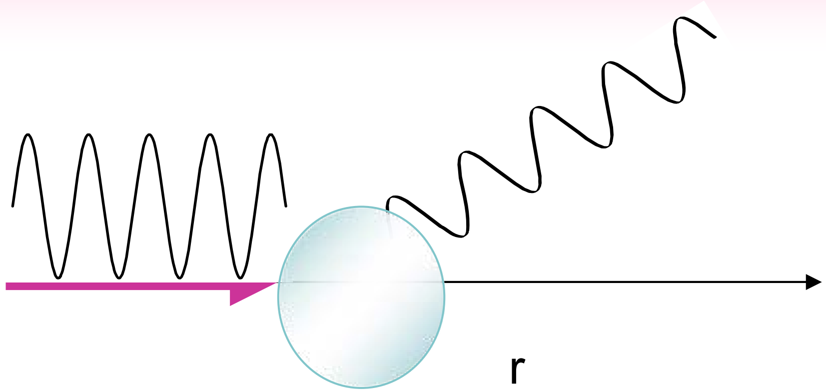
Сохранение потока требует унитарности $\hat S\hat S^{+}=1$

$$f(\vec n,\vec n')-f^*(\vec n',\vec n)=\frac{ik}{2\pi}\int f(\vec n,\vec n'')f^*(\vec n',\vec n'')d\Omega''$$

Оптическая теорема для рассеяния

$$\sigma=\int\left|f(\theta)\right|^2 d\Omega=\frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}\big(f(n,n)\big)$$

# Начала теории рассеяния




**Некоторые свойства амплитуды рассеяния**

$$\boxed{f(\theta)=\frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(S_l-1)P_l(\cos\theta)}$$

$S_l = e^{2i\delta_l}$ **- матрица рассеяния**

$$\psi(\vec r)\to e^{ikz}+\frac{f(n,n')}{r}e^{ikr},$$

Сечение рассеяния

$$\sigma=\int |f(\theta)|^2 d\Omega=\frac{4\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l$$

Оптическая теорема для рассеяния

$$\sigma=\int |f(\theta)|^2 d\Omega=\frac{4\pi}{k}\operatorname{Im}(f(n,n))$$

Теорема взаимности

$$f(n,n')=f(-n',-n)$$

Парциальные характеристики рассеяния

$$f(\theta)=\sum_l (2l+1)f_l P_l(\cos\theta)$$

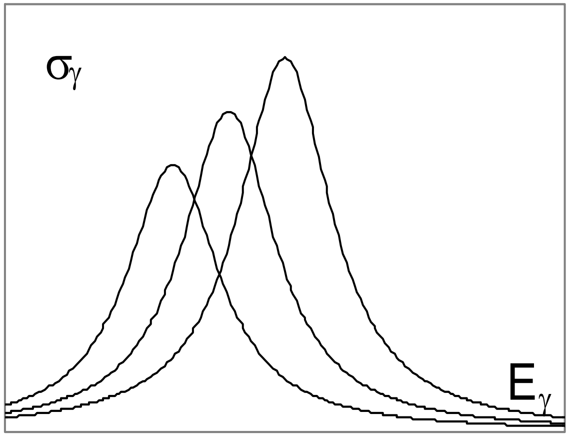
$$f_l=\frac{1}{2ik}(S_l-1)=\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik}=\frac{1}{k(ctg\delta_l-i)}$$

$$\sigma_l=4\pi(2l+1)|f_l|^2$$

## Ядерная физика

- H. Feshbach// Unified theory of nuclear reaction, Ann. Of Phys. **5** 357 (1958);
- H. Feshbach// Unified theory of nuclear reaction III: Overlapping resonances, Ann. Of Phys. **43** 410 (1967).

$$^{N}_{Z}A+\gamma \rightarrow {}^{N}_{Z}A^{*} \rightarrow {}^{N-1}_{Z'}A+N$$

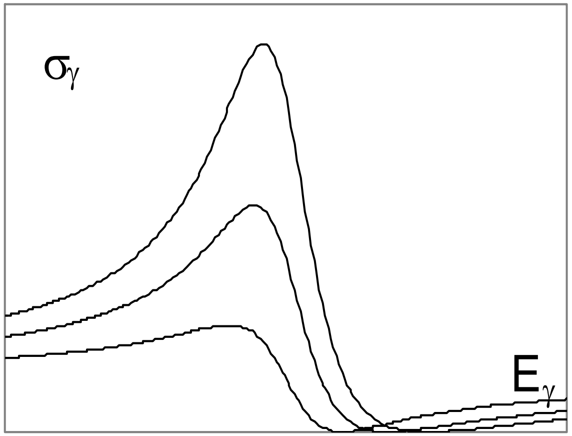



## Атомная физика

- F. H. Mies// Configuration Interaction Theory. Effects of overlapping resonance, Phys.

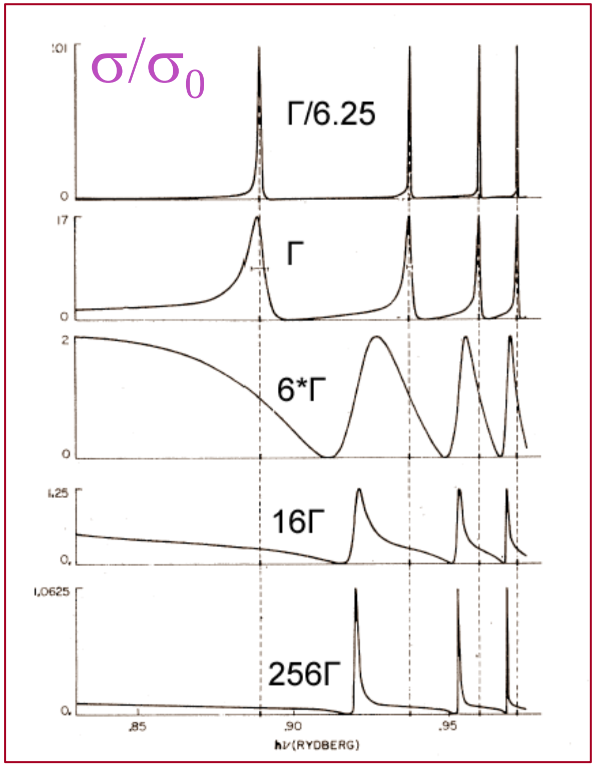
  Rev. **175** 164 (1968).

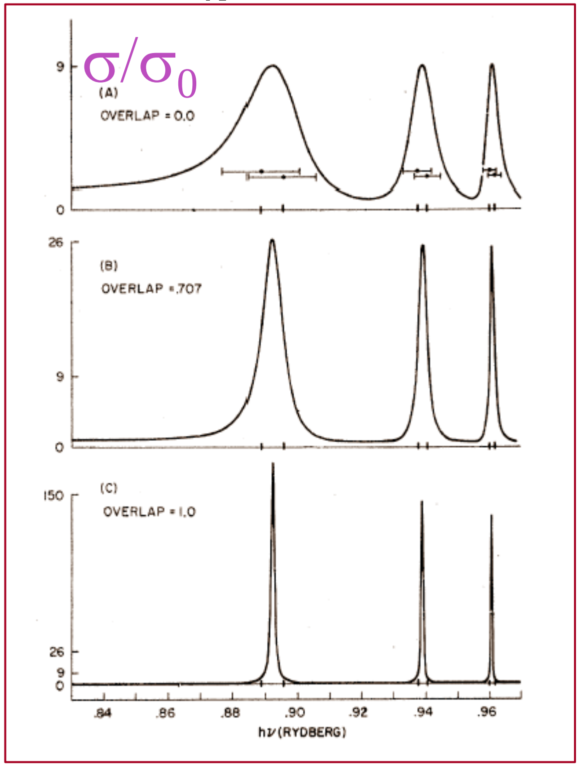
$$A+\gamma \rightarrow A^{**} \rightarrow A^{+}+e^{-}$$

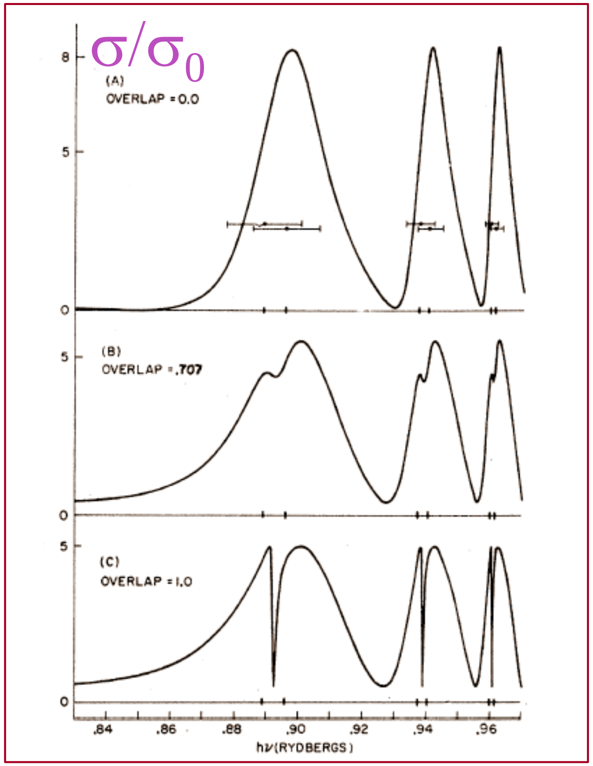


## Перекрывание состояний двух ридберговских серий в работе F. H. Mies

$$A + e^- \leftrightarrow \sum_n A(n)^- \leftrightarrow A + e^-$$

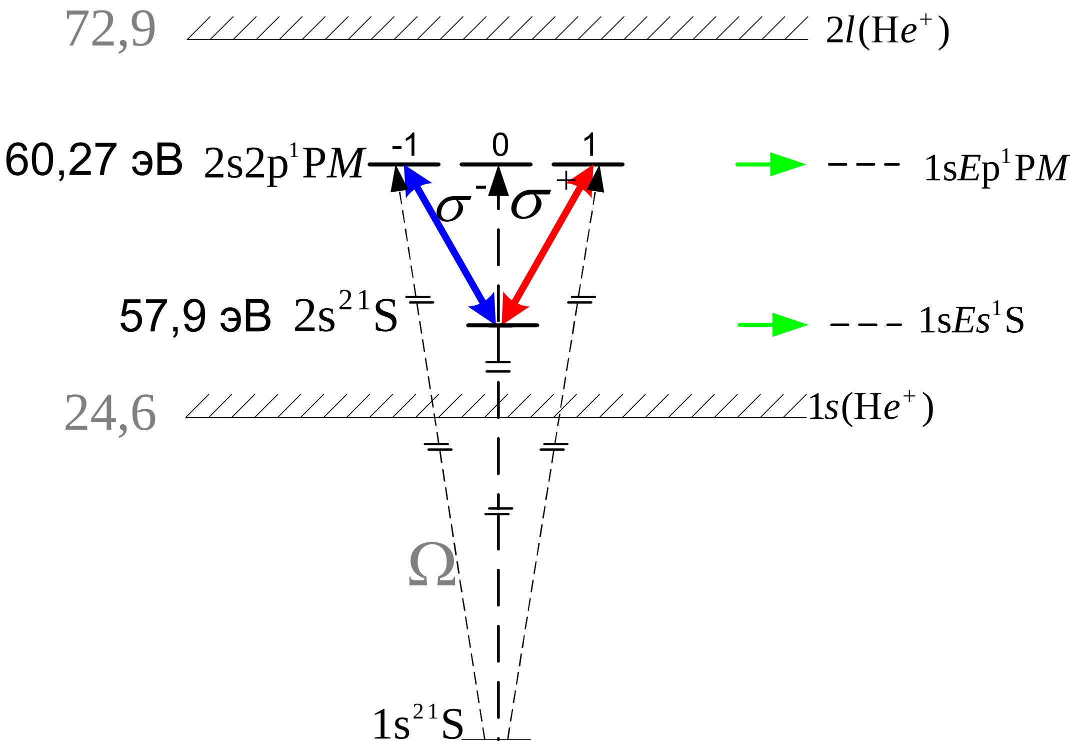



Отношение полного сечения рассеяния к сечению прямого рассеяния

# Связь 2s2p¹P и 2s² ¹S автоионизационных состояний атома гелия




Ω – обозначает переходы, вызванные пробным полем. Красные стрелки - связи, индуцированные право поляризованным полем $\sigma^+$, синие – лево поляризованным $\sigma^-$.

Матрица неэрмитового эффективного гамильтониана

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}^{(1)}_{eff} \otimes \hat{H}^{(2)}_{eff}$$

$$\hat{H}^{(1)}_{eff} = \mathrm{E}_{\mathrm{P0}} \qquad (22)$$

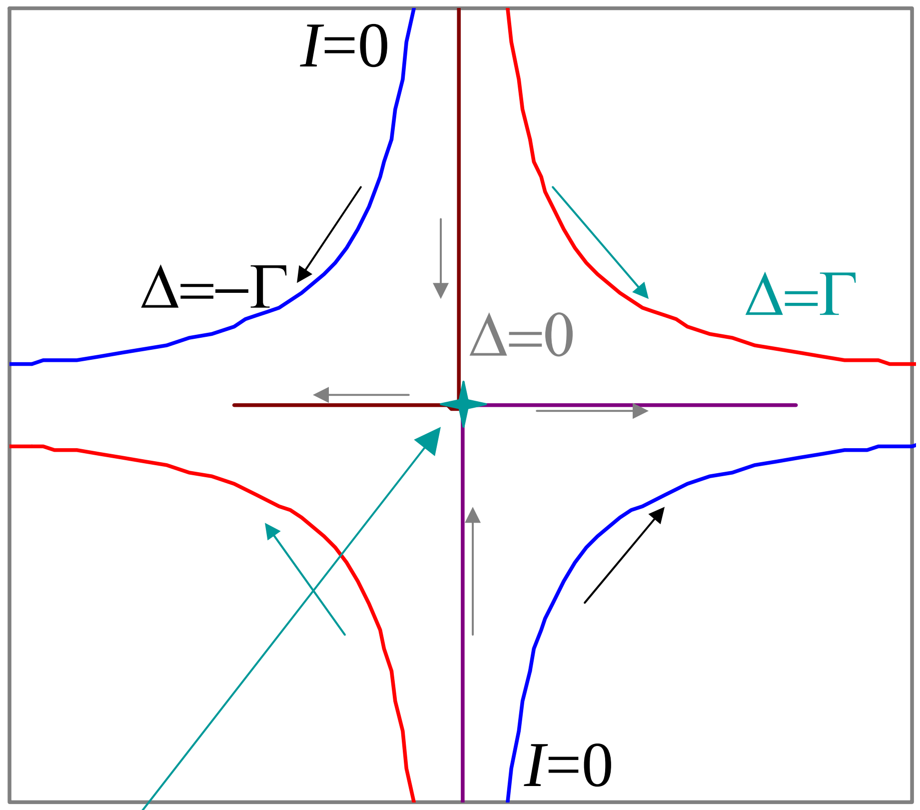
$$\hat{H}^{(2)}_{eff} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{\mathrm{S}} & V_{\mathrm{S,P\text{-}1}} & V_{\mathrm{S,P1}} \\ V_{\mathrm{P\text{-}1,S}} & \mathrm{E}_{\mathrm{P\text{-}1}} & 0 \\ V_{\mathrm{P1,S}} & 0 & \mathrm{E}_{\mathrm{P1}} \end{pmatrix} \qquad (23)$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{PM}} = E_{PM} - \frac{i}{2}\Gamma_{PM} \equiv \mathrm{E}_{\mathrm{P}}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{S}} = E_S + \omega - \frac{i}{2}\Gamma_S$$

## Динамика собственных значений матрицы эффективного гамильтониана при изменении интенсивности лазерного поля

$$\Gamma = -2\,\mathrm{Im}(E_e)$$



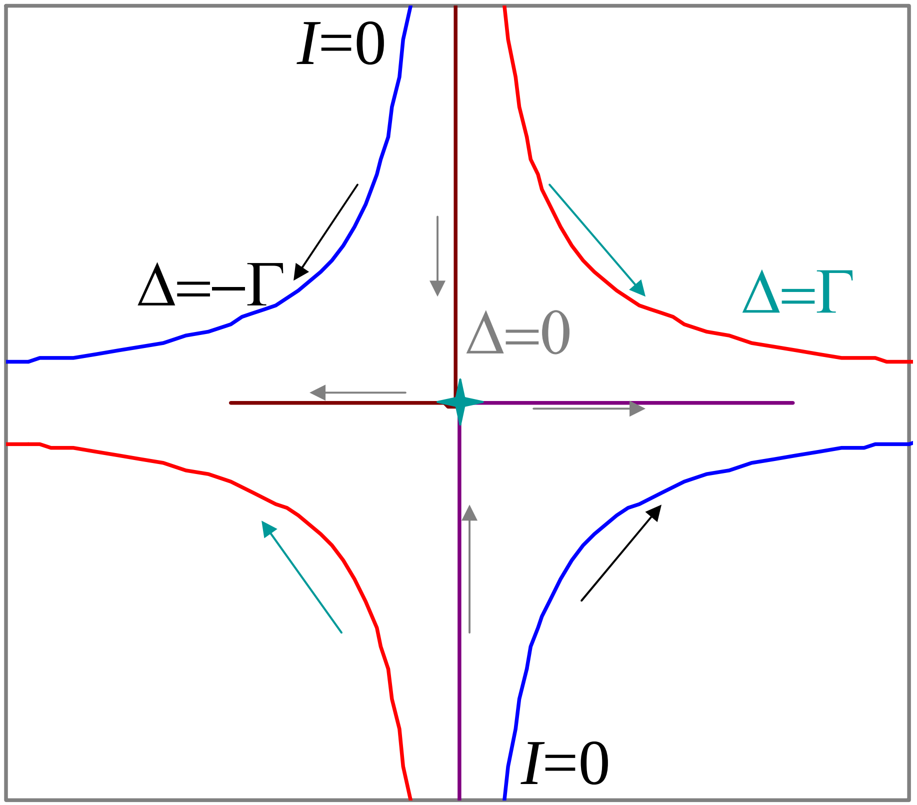

$$E = \mathrm{Re}(E_e)$$

$E_e$ – собственные значения матрицы неэрмитового эффективного гамильтониана

Дважды вырожденные собственные значения, соответствующего двойному полюсу $S$-матрицы

## Динамика собственных значений матрицы эффективного гамильтониана при изменении интенсивности лазерного поля

$$\Gamma = -2\,\mathrm{Im}\left(E_e\right)$$




$E_e$ – собственные значения матрицы неэрмитового эффективного гамильтониана

$$E = \mathrm{Re}\left(E_e\right)$$

$$E = \frac{E_1 + E_2 - \omega}{2} \equiv E_1 \equiv E_2 - \omega \qquad \Gamma = \frac{1}{2}\left(\Gamma_1 + \Gamma_2\right) \qquad I_{cr} = \frac{\left(\Gamma_1 - \Gamma_2\right)^2}{16\left|d_{12}\right|^2} \quad (14)$$

# Вопросы для коллоквиума

1. Определить коэффициент отражения (и прохождения) от ступеньки высотой U.
2. Найти коэффициент отражения от $\delta$-потенциала.
3. Проквантовать какой-либо периодический потенциал.
4. Проквантовать сферически симметричный потенциал $\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}$
5. Система в начальный момент времени находится в смеси первого и второго собственных состояний гармонического осциллятора. Описать изменение системы со временем.
6. В Борновском приближении описать рассеяние частиц на потенциале Юкавы $U \cdot e^{r/R} / r$
7. В Борновском приближении описать рассеяние частиц на потенциале $U \exp(-r^2 / R^2)$
8. Вывести формулу для разложения плоской волны по сферическим волнам.
9. Найти фазы рассеяния в Борновском приближении.
10. Найти кулоновскую амплитуду рассеяния.